

1.12 — metody numeryczne
i komputerowe,
elementy skończone
7.72 — sprężystość, plastyczność

Praca habilitacyjna

Jacek Rońda

NIESTACJONARNE
ZAGADNIENIA KONTAKTOWE

1/1990

P.269^a



Rozprawa habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 października 1988 r.



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 9,1 Ark.druk.11,5

Oddano do drukarni w lutym 1990 r.

Nr zamówienia 38/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa

ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

NIESTACJONARNE ZAGADNIENIA KONTAKTOWE

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono sformułowanie niestacjonarnych problemów kontaktowych, dyskusję istnienia i jednoznaczności rozwiązania oraz wyniki obliczeń numerycznych. Problem kontaktowy sformułowano jako zagadnienie w płaskim stanie odkształcenia dla sztywnego walca toczącego się po powierzchni sprężysto-plastycznego pasma. Zadane jest zagłębienie walca w materiale odkształcanym.

W rozdziale pierwszym omówiono problemy kontaktowe występujące w technologii wytwarzania, mechanice konstrukcji, transporcie i eksploatacji urządzeń mechanicznych. Ponadto przedstawiono przegląd prac dotyczących stacjonarnych i niestacjonarnych problemów kontaktowych, zagadnień dynamicznych i quasistatycznych oraz zagadnień kontaktowych z tarciami.

Rozdział drugi zawiera sformułowanie problemu dynamicznego dla sztywnego walca i sprężysto-plastycznego pasma w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a oraz twierdzenie 2.1 o jednoznaczności rozwiązania problemu kontaktowego dla pary (λ, u) .

W rozdziale trzecim przedstawiono wyniki badania monotoniczności operatora $A(\underset{n}{u})$ zakładanej w twierdzeniu 2.1 oraz oszacowano wpływ efektów dynamicznych na własności operatora $A(\underset{n}{u})$.

Omówienie algorytmów używanych do rozwiązania problemów

kontaktowych i przegląd strategii kontaktowych zamieszczono w rozdziale czwartym. Metoda aproksymacji niestacjonarnego zagadnienia kontaktowego i odpowiednie strategie sprawdzania warunków tarcia i uplastycznienia zostały opisane w tym rozdziale.

Wyniki obliczeń numerycznych dla zagadnienia quasistatycznego jak również problemu dynamicznego oraz niskopiędkościowego uderzenia sztywnego walca w naroże sprężysto-plastycznego pasma przedstawiono w rozdziale piątym. Zamieszczono wykresy przyrostów przemieszczenia oraz wykresy - mapy naprężeń i odkształceń występujących w paśmie.

Rozdział szósty zawiera wnioski dotyczące sformułowania problemów kontaktowych, otrzymanych wyników oraz dalszych badań.

1. WSTĘP

1.1. Problemy kontaktowe w technologii, projektowaniu, konstrukcji, transporcie i eksploatacji.

Niestacjonarne zagadnienie kontaktowe występuje w technice, kiedy dwa stykające się ciała obtaczają się lub ślizgają po sobie.

W technologii wytwarzania rozwiązanie zagadnienia kontaktowego jest istotne w dwóch typach procesów obróbki plastycznej. W procesach pierwszego typu materiał obrabiany (ciało odkształcalne) na skutek działania narzędzia (ciało sztywne) może uplastyczyć się na wskroś. Do tego typu zalicza się procesy, w których narzędzie jest wciskane w przedmiot obrabiany (np. prasowanie i wyciskanie) lub też narzędzie i przedmiot ślizgają się lub obtaczają po sobie (np. wyłaczanie lub walcowanie). W zagadnieniach tych określa się obciążenia narzędzi i strefy plastyczne w przedmiocie obrabianym. Znajomość rozkładów nacisków jest użyteczna przy projektowaniu narzędzi. Określenie stref plastycznych w przedmiocie obrabianym decyduje o doborze parametrów obróbkowych oraz sterowaniu procesem technologicznym. Procesy plastycznej obróbki powierzchniowej, nazywane również procesami nagniatania, stanowią drugą grupę procesów technologicznych, o przebiegu których decydują zjawiska kontaktowe. Znajomość zmian mikrogeometrii powierzchni materiału jest niezbędna dla doboru parametrów procesu nagniatania.

Określenie rozkładu nacisków występujących w prowadnicach umożliwiających ruch wzdłużny i poprzeczny stołów obrabiarek jest niezbędne do ich prawidłowego projektowania. Odkształcenia i zjawiska kontaktowe występujące w strefie styku prowadnic mają wpływ na dokładność sterowania posuwem. Zakłócenie jednostajności tego ruchu powoduje pogorszenie jakości obróbki.

W produkcji przekładni zębatych znajomość odkształceń i nacisków na powierzchni koła zębatego pozwala prawidłowo dobrać parametry obróbki cieplnej i wykańczającej.

Naciski i odkształcenia w obszarze styku sztywnego koła i sprężysto-plastycznej szyny lub też hiposprężystego koła i

sztynnej jezdni mają wpływ na powstawanie nierówności na szynach, decydują o zużyciu rozjazdów i krzyżownic oraz mają znaczenie dla bezpieczeństwa w czasie lądowania samolotów, a także są brane pod uwagę przy projektowaniu i określaniu reakcji ogumienia pojazdów samochodowych.

Zużycie łożysk tocznych i ślizgowych oraz kół zębatach zależy do nacisków i zmian mikrogeometrii elementów stykających się. Znajomość nacisków kontaktowych umożliwia optymalne projektowanie węzłów kinematycznych przekładni i obrabiarek.

1.2. Przegląd problemów kontaktowych

1.2.1. Niestacjonarne zagadnienia kontaktowe

Przykładami niestacjonarnych zagadnień kontaktowych są: walcowanie pasma lub półprzestrzeni tzw. toczne zagadnienie kontaktowe, poślizg w czasie toczenia, translacja i obrót obszaru styku materiału i narzędzia, uderzenie walca w pasmo lub półprzestrzeń.

W czasie walcowania elementy przypowierzchniowe i powierzchniowe w obszarze ściskanym płyną wzdłuż trajektorii równoległych do powierzchni styku. Historia obciążenia tych cząstek materialnych różni się od historii w stacjonarnym zagadnieniu kontaktowym, gdzie elementy są obciążane i odciążane. Różnice w historii obciążenia nie mają wpływu na proces odkształcenia, jeśli w materiale występują tylko odkształcenia sprężyste i nie uwzględnia się tarcia. Stan naprężenia w cząstce materialnej zależy od historii obciążenia, jeśli w materiale pojawiają się strefy plastyczne i uwzględnia się tarcie. Asymetria pola naprężenia jest efektem zależności stanu naprężenia od historii obciążenia. Zjawiska tego nie obserwuje się w zagadnieniach sformułowanych dla materiałów sprężystych bez tarcia.

Siły tarcia na powierzchni powodują niesymetrię obszarów poślizgu. Obszary poślizgu pojawiają się za i przed walcem i są rozdzielone obszarem adhezji, gdzie występuje sczepienie

powierzchniowych cząstek materialnych i walca.

Biorąc pod uwagę odkształcenia plastyczne należy również uwzględnić naprężenia residualne, wówczas przed walcem występują większe naprężenia niż za walcem. Naprężenia residualne generowane podczas deformacji plastycznej ułatwiają plastyczne pnięcie materiału w następnych cyklach obciążenia. Powstawanie naprężeń residualnych w kilku pierwszych cyklach obciążenia może prowadzić do stanu ustalonego, kiedy cykliczna deformacja jest całkowicie sprężysta. Zjawisko takie nazywa się przystosowaniem, a największe obciążenie, przy którym występuje, nazywa się granicą przystosowania. Dolne oszacowanie granicy przystosowania określa twierdzenie Melana: przystosowanie następuje wówczas, gdy dla pewnego rozkładu naprężeń residualnych można znaleźć takie obciążenie, przy którym nie występują odkształcenia plastyczne.

Warunki przystosowania dla sprężysto-idealnie plastycznej półprzestrzeni walcowanej w kilku przejściach można znaleźć w pracy Johnsona (1962).

Ogromna większość prac poświęconych niestacjonarnemu zagadnieniu kontaktowemu wykorzystuje różne przybliżone teorie bazujące na statycznym, sprężystym zagadnieniu kontaktowym Hertza.

1.2.1.1. Zagadnienia kontaktowe z translacją i obrotem obszaru styku.

Zagadnienia kontaktowe, w których uwzględniono translację i obroty narzędzia-stempla, były przedmiotem badań Abramowa (1937), Mossakowskiego (1954), (1963), Lubkina (1951), Galina (1963), Deresiewicza (1954), Spence'a (1968) i Gladwella (1969).

Lubkin (1951) uwzględniał częściowy poślizg stempla w obszarze kontaktowym, a Galin (1963) podał rozwiązanie dla całkowitego poślizgu. Deresiewicz (1954) uwzględniał jednocześnie translację i obroty stempla.

Cataneo (1938) przedstawił rozwiązanie dla styku dwóch symetrycznych półpłaszczyzn podlegających translacji. W

rozwiązaniu tym uwzględnił tarcie oraz przyjął założenie o tym, że podatność materiału na naciski powierzchniowe nie wpływa na parametry ścinania. Mindlin, Mason, Osmar i Deresiewicz (1982) uogólnili wyniki Cataneo na przypadek z dowolnym przemieszczeniem stycznym i zerowym przemieszczeniem normalnym. Mindlin i Deresiewicz (1983) przedstawili uogólnienie rozwiązania Cataneo na przypadek z dowolnym przemieszczeniem stycznym i normalnym. Dwuwymiarowe zagadnienie dla stępła ślizgającego się z małą prędkością po grubym lub cienkim paśmie badali Ablas i Kuipers (1971).

Goodman i Keer (1975) rozwinęli analizę przedstawioną przez Mindlina (1960). Autorzy ci rozwiązali zagadnienie kontaktowe dla translacji dwóch ciał chropowatych poddanych działaniu obciążenia stycznego i normalnego, kiedy deformacji ulegają warstwy sprężyste o dowolnej grubości. Oden i Pires (1983) przedstawili rozważania dla klasy problemów kontaktowych, gdzie równowaga oddziaływania ciał sprężystych zachodzi na powierzchniach chropowatych, na których występuje nieliniowe tarcie. Ciała są obciążone w kierunku normalnym i stycznym. Zagadnienie kontaktowe, gdzie obszar styku między sprężysto-idealnie plastyczną półprzestrzenią i długim cylindrem podlega cyklicznej translacji na powierzchni półprzestrzeni, analizowali Ponter, Hearle i Johnson (1985).

Kontakt między dwoma sprężystymi walcami o osiach równoległych i różnych średnicach, które ślizgają się po sobie w kierunku prostopadłym do osi wzdłużnej, badali Hills i Sockfield (1985). Rozkład naprężenia w ciele różni się nieznacznie od rozkładu określonego w analizie Hertza, gdzie zaniedbuje się sprzężenie między naprężeniami normalnymi i ścinającymi.

Dynamiczne zagadnienie poślizgu dwóch ciał sprężystych zostało numerycznie rozwiązane w pracy Chena i Tsai (1986). Do tego celu wykorzystano metodę elementów skończonych i metodę współczynników Lagrange'a. Praca ta stanowi rozwinięcie analizy podanej przez Hunga i de Saxce (1980) dla styku ciała sztywnego z ciałem sprężystym bez uwzględnienia efektów tarcia. Tsai i Chen (1986) uogólnili swoje wcześniejsze rozważania (Chen, Tsai (1986)) na zagadnienia kontaktowe dla małych odkształceń ciała

sprężysto-plastycznego. W pracy tej uwzględniono również efekty tarcia.

1.2.1.2. Toczne zagadnienie kontaktowe

Toczne zagadnienia kontaktowe można podzielić na dwie grupy tematyczne dotyczące walcowania lub toczenia się walca po podłożu.

W czasie ruchu tocznego dwóch ciał występują siły styczne i normalne oraz momenty obrotowe. Modele toczenia się walca po podłożu opisujące rzeczywiste oddziaływania między ciałami uwzględniają różną liczbę obciążeń w zależności od stopnia przyjętej idealizacji. Tocznie się walca modelowano jako proces ślizgania długiego walca stykającego się na powierzchni cylindrycznej z półprzestrzenią lub pasmem. W tych przypadkach walec był obciążony tylko siłami normalnymi i stycznymi. W innej grupie prac mających związek z ruchem tocznym badano zagadnienie wciskania zaokrąglonego stempla w półprzestrzeń. W większości prac przyjmowano, że walec był ciałem sztywnym.

Znane są trzy podstawowe modele walcowania: walcowanie kęsisk kwadratowych i kęsisk płaskich oraz walcowanie taśm. Model walcowania taśm jest szczególnym przypadkiem walcowania kęsisk płaskich.

W drugiej połowie lat siedemdziesiątych przeważająca liczba prac dotyczących problemów kontaktowych była poświęcona toczeniu się walca po podłożu niesprężystym oraz walcowaniu materiałów sprężysto-plastycznych.

W latach osiemdziesiątych zaczęły pojawiać się pracezawierające rozwiązania problemu kontaktowego dla dwóch ciał odkształcalnych.

Literaturę dotyczącą problemu toczenia się ciał i walcowania podzielono na dwie grupy w zależności od opisywanego modelu materiału odkształcalnego tzn. na zbiór prac dotyczących zagadnień sprężystych i lepkosprężystych oraz grupę prac dotyczących problemów kontaktowych dla materiałów plastycznych.

ZAGADNIENIA DLA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH I LEPKOSPRĘŻYSTYCH.

Próby analitycznego rozwiązania problemu toczenia się dwóch ciał sprężystych z udziałem tarcia zapoczątkowali Carter (1926) i Fromm (1927). Numeryczne rozwiązanie tego problemu podali Bental i Johnson (1967) oraz Kalker (1971).

Lebedev i Ufliand (1958) sformułowali zagadnienie toczenia się dwóch ciał symetrycznych bez tarcia w przypadku quasistatycznym zakładając, że grubość ciała jest porównywalna z szerokością obszaru kontaktowego.

Problem toczenia się walca po półprzestrzeni z uwzględnieniem tarcia lub kiedy występuje adhezja sformułował i rozwiązał numerycznie Kalker (1966) przyjmując rozkład nacisków wg rozwiązania Hertza.

Bental i Johnson (1968) analizując toczenie się walca po sprężystym paśmie określili pięć obszarów poślizgu rozdzielonych czterema obszarami sztywnymi. Problem rozwiązano metodą charakterystyk, gdzie pominięto styczne siły węzłowe.

Morland (1962), Tsai (1968), (1969), (1971), Lynch (1969), Margetson (1971), Alblas i Kuipers (1969), (1970a), (1970b), (1971) przedstawili rozwiązanie problemu toczenia się sztywnego walca po lepkosprężystej półprzestrzeni rozwijając analizę przeprowadzoną przez Huntera (1961) dla walca toczącego się po sprężystej półprzestrzeni.

Morland (1967), (1968) zaprezentował wyniki dla dwóch walców lepkosprężystych o równych lub dowolnych wymiarach. W rozwiązany zagadnieniu nie uwzględniał tarcia.

Kalker (1979a) oraz Kalker, Allaert i De Mul (1981), badając klasę toczyń problemów kontaktowych dla ciał obrotowych i półprzestrzeni lub sztywnej płaszczyzny, przyjmowali rozkład nacisków w obszarze kontaktowym wg. rozwiązania Hertza i otrzymywali eliptyczny obszar styku. Kalker (1972a) zaproponował metodę iteracyjną, gdzie wykorzystał klasyczne wyniki określające reakcję sprężystej półprzestrzeni obciążonej siłą styczną działającą w punkcie. W sformułowaniach tych nie uwzględniano efektów bezwładności obracającego się ciała.

Trójwymiarowy problem kontaktowy rozwiązał Kalker (1979b), zakładając rozkład normalny Hertza oraz występowanie tarcia suchego.

Hamulec taśmowy złożony z dwóch walców pokrytych warstwą sprężystą oraz cienkiej, sprężystej taśmy był przedmiotem prac Soonga i Li (1981a), (1981b).

Model kinematyczny pierścienia hiposprężystego toczącego się po sprężystym podłożu zaproponowali Zeid i Padovan (1981). W sformułowaniu tym uwzględniono skończone odkształcenia i siły bezwładności w ruchu obrotowym oraz tarcie Coulomba. Problem rozwiązano numerycznie stosując opracowany przez autorów nowy model elementów skończonych.

Batra (1981) oraz Batra i Bapat (1984) zastosowali metodę elementów skończonych do analizy współpracy cylindra pokrytego warstwą gumy i sztywnego walca. Oddziaływania między walcami określono biorąc pod uwagę skończone odkształcenia oraz warunki kontaktowe będące jednostronnymi ograniczeniami. Pominięto siły bezwładności i tarcie. Ponadto, Batra i Bapat (1984) badali wpływ zmiany grubości warstwy gumy, jej prędkości i własności materiałowych na rozkład ciśnienia w obszarze kontaktowym.

Kalker (1983) badając statyczne, sprężyste zagadnienie kontaktowe przedstawił dowód poprawności algorytmów dla problemów sformułowanych z uwzględnieniem tarcia lub bez tego efektu.

Propozycje Zeida i Padovana (1981) rozwinęli Padovan, Tovichakchaikul i Zeid (1984) oraz Padovan i Paramadilok (1985) stosując ruchome elementy skończone do opisu oddziaływania między oponą pojazdu (hiposprężystym pierścieniem) i jezdnią (sztywną lub sprężystą półprzestrzenią). Problem kontaktowy sformułowano w zmodyfikowanym, ruchomym opisie Lagrange'a dla skończonych odkształceń z uwzględnieniem sił bezwładności. Opis ruchu i metoda rozwiązania pozwalają na określenie ogólnej reakcji pierścienia w przypadku jednostajnego ruchu obszaru kontaktowego.

Oden, Becker, Liu i Demkowicz (1985) badali dwuwymiarowy proces toczenia się walca opisany w płaskim stanie odkształcenia, gdzie uwzględniono efekty bezwładności i tarcie dla izotropowego, hiposprężystego materiału gumopodobnego. To samo zagadnienie dla

materiałów lepkosprężystych zostało rozwiązane w pracy Odena, Beckera, Lina i Hsieha (1981).

Praca Odena i Lina (1986) zawiera rozważania na temat ogólnej klasy problemów tocnych, w których rozpatruje się zagadnienie skończonych odkształceń ciała deformowalnego o kształcie cylindrycznym stykającego się z chropowatą powierzchnią. Przyjęto, że powierzchnia styku jest płaska a warunki kontaktowe są ograniczeniami jednostronnymi wynikającymi z przyjętego modelu tarcia. Lepkosprężysty lub hiposprężysty walec jest ściśliwy lub nieściśliwy. Podatność na naciski kontaktowe jest zdefiniowana przez nieliniowe równanie konstytutywne, które określa cechy powierzchni styku ciał odkształcalnych. Algorytm obliczeń numerycznych dla tej klasy problemów uwzględnia siły bezwładności.

Innymi przykładami zagadnień technicznych, gdzie toczone zagadnienia kontaktowe odgrywają decydującą rolę, są problemy: obciążenia i zużycia łożysk tocnych, oddziaływania w układzie głowica magnetofonowa - taśma - rolka napędowa oraz współpracy koła i szyny.

Parametry techniczne do projektowania czytników taśm magnetycznych zostały omówione w pracy Durieu i Petita (1984). Parametry te określono na podstawie rozwiązania problemu kontaktowego dla układu taśma - głowica - rolka podając również wpływ różnych parametrów na prędkość taśmy.

Praca Petrenki (1982) jest reprezentantem grupy artykułów dotyczących łożysk tocnych. W analizie dynamicznej wzdłużnych łożysk kulkowych uwzględniono zmiany sztywności oraz błędy kształtów i dokładności wykonania elementów łożysk.

Zagadnienia kontaktowe dla układu koło-szyna były przedmiotem prac: Kalkera (1979), Grassie, Gregory'ego, Harrisona i Johnsona (1982), Grassie i Coxa (1984), Grassie, Gregory'ego, Johnsona (1982a), (1982b), oraz Rengera (1982). Rozwiązanie tego typu zagadnień kontaktowych polega na określeniu reakcji torów i wyznaczeniu sił działających między ruchomym kołem i szyną (Grassie i inni) lub też pozwala na obliczenie rozkładu nacisków w obszarze styku koła z szyną (Kalker). Model matematyczny ruchu koła pojazdu szynowego uwzględniający wpływ imperfekcji szyny

przedstawił Renger (1982).

Problem walcowania materiału pod dużym obciążeniem rozpatrywał Kudish (1978b) biorąc pod uwagę model sprężysto-hydrodynamiczny obrabianego materiału.

ZAGADNIENIA DLA CIAŁ PLASTYCZNYCH

W literaturze znane są trzy podstawowe modele walcowania. Model walcowania taśm został wymyślony przez Orowana (1943) i Simsa (1954) jako wariant modelu walcowania kęsisk. Rozwiązanie tego problemu metodą linii poślizgu podali Ford i Alexander (1964). Renouard (1972) zauważając analogię między walcowaniem i prasowaniem kęsisk płaskich i kwadratowych przedstawił metodę obliczania sił występujących na walcach. Do określenia momentu obrotowego oraz parametrów płynięcia materiału zgniatanego w walcach wykorzystał metodę poślizgu sztywnych bloków. Green i Wallace (1962) oraz Sparling i Willows (1971) używali bloków trójkątnych a Piispanen (1973),(1976) stosował bloki krzywoliniowe. Bardziej dokładne rozwiązanie otrzymali Dewhurst, Collins i Johnson (1973) stosując metodę linii poślizgów. Rozwiązanie to było ograniczone do wybranych podobszarów (pasm) i nie mogło być stosowane we wszystkich przypadkach obróbki kęsisk. Oh i Kobayashi (1975) zaproponowali model numeryczny walcowania pozwalający określić współczynnik poszerzenia przekroju walcowanego.

Grupę modeli numerycznych dopuszczających odkształcenia objętościowe materiału, poślizg na walcach oraz wzmocnienie materiału przedstawili Chenot i Espy (1977). Określenie oporów toczenia sztywnego cylindra po płaszczyźnie materiału deformowalnego przyciągało uwagę badaczy od czasów Reynoldsa. Problem ten, między innymi, badali Merwin i Johnson (1963), Bowden i Tabor (1964), Mandel (1964), Marshall (1968), Collins (1972),(1978), Johnson (1972), Dumas i Baronet (1971). Merwin i Johnson (1963) badając toczenie się walca po dwuwymiarowej półprzestrzeni plastycznej stwierdzili, że obszary plastyczne powstają wokół punktów Bieljaeva usytuowanych pod powierzchnią

styku. Przyjmując, że walec wielokrotnie przetacza się po powierzchni plastycznej, obserwowali zjawisko przystosowania. W późniejszym artykule Johnsona (1972) można znaleźć krytyczną ocenę wyników zawartych w pracy Merwina i Johnsona dla przypadku, kiedy obciążenia są większe od granicy przystosowania ale mniejsze od obciążenia powodującego uplastycznienie. Problem ten rozwiązali Dumas i Baronet (1971) posługując się metodą elementów skończonych. Marshall (1968) stosując metodę perturbacji do określenia linii poślizgów założył, że walec i ciało odkształcalne stykają się na fragmencie okręgu. Analiza przedstawiona przez Marshalla dotyczyła gładkich walców bez tarcia. Analizę tego zagadnienia dla ogólnych warunków tarcia i gładkich walców przedstawił Collins (1972) określając trzy typy rozwiązania dla całego zakresu możliwych warunków obciążenia. Johnson (1972) określając opory toczenia się walca po sprężysto-plastycznym podłożu przedstawił porównanie teorii zaproponowanych przez Tabora (1955) (dla materiałów sprężystych), Merwina i Johnsona (1963) (dla ciał sprężysto-plastycznych) i Collinsa (1972) (dla materiałów sztywno-plastycznych). Ponadto Johnson przeprowadził dyskusję na temat obszarów zastosowania tych teorii. Próbę określenia przyczyn powstawania nierówności na powierzchni styku koło-szyna podjęli Johnson i Gray (1975).

Teorie opisujące płynięcie materiału walcowanego na zimno były przedstawiane w pracach Von Karmana (1925), Tselikova (1936), Nadaia (1931), Forda, Ellisa i Blanda (1951). Pozwalały one poprawnie określać parametry urządzeń walcowniczych. Jednocześnie metody te nie umożliwiają prawidłowego określenia pól naprężeń i odkształceń podczas procesu walcowania lub po jego zakończeniu głównie ze względu na niejednorodność stanu materiału.

Metoda linii poślizgu umożliwiająca określanie takich niejednorodnych pól była stosowana przez Alexandra (1955), Firbanka i Lancastera (1965), (1967) i Collinsa (1969). Zastosowanie teorii linii poślizgów było uzależnione od stopnia redukcji walcówki.

Numeryczne rozwiązanie problemu walcowania na zimno przedstawili: Tamano (1976) dla walcowania wygładzającego bez

poślizgu, Rao i Kumar (1977) dla przypadku z tarcie oraz Dawson i Thompson (1977), (1978) dla walcowania materiałów sprężysto-lepkoplastycznych bez tarcia. Thomson i Brown (1982) badali proces deformacji w czasie walcowania na zimno stosując metodę doświadczalno-numeryczną, która na podstawie zdjęć fotograficznych deformacji siatki narysowanej na brzegu walcowanego pasma pozwala na określenie stanu odkształcenia i naprężenia. Linie poślizgów określone tą metodą były zgodne z przewidywaniami Firbanka i Lancastera (1965) oraz Collinsa (1969).

Zagadnienie deformacji taśmy plastycznej i sprężystego ugięcia walców było przedmiotem prac: Goudonga i Zhanga (1981), Webera, Recke i Bormana (1982), Saeeda i Lenarda (1980) oraz Pawelskiego i Teutscha (1985). Goudong i Zhang (1981) przedstawili rozwiązanie analityczne problemu. Weber, Recke i Borman (1982) obliczyli odkształcenia walców stosując metodę elementów skończonych. Porównanie różnych metod określenia sił występujących w czasie walcowania przedstawili Saeed i Lenard (1980). Model walcowania będący kombinacją rozwiązania analitycznego (w kierunku długości walcowanego pasma) i rozwiązania numerycznego (w kierunku grubości) opisali Pawelski i Teutsch (1985).

Walcowanie taśmy na gorąco było przedmiotem prac Malinina (1977), (1985), gdzie przedstawiono teorię walcowania w płaskim stanie odkształcenia. Odkształcenia sprężyste i plastyczne przyjmowano jako małe w porównaniu z odkształceniami przy peizaniu.

Estivalet, Jouanique, Chenot, Siener i Faessel (1982) zaproponowali metodę określania współczynników rozciągania kęśiska kwadratowego walcowanego na gorąco.

Toczenie się walca po sprężysto-plastycznym podłożu było opisywane w pracach: Johnsona (1983), Bhargavy, Hahna i Rubina (1985a), (1985b), Rońdy, Bogacza i Brzozowskiego (1986) oraz Rońdy, Mahrenholtza, Bogacza i Brzozowskiego (1986).

Bhargava, Hahn i Rubin (1985a), (1985b) rozwinęli teorię Merwina i Johnsona (1963) dla materiałów sprężysto-idealnie plastycznych, przyjmując rozkład nacisków w obszarze kontaktowym wg. teorii Hertza i nie uwzględniając tarcia.

Rońda, Bogacz i Brzozowski (1986) oraz Rońda, Mahrenholz, Bogacz i Brzozowski (1986) przedstawili problem toczenia się walca po sprężysto-plastycznym paśmie uwzględniając skończone odkształcenia pasma, wzmocnienie izotropowe materiału i tarcie Coulomba.

Przystosowanie sprężysto-plastycznej półpłaszczyzny do cyklicznego walcowania było analizowane w pracach Pontera, Hearle i Johnsona (1985) oraz Bhargavy, Hahna i Rubina (1985b).

Skalski (1986) przedstawił obszerne opracowanie poświęcone zagadnieniom kontaktowym dla ciała sprężysto-plastycznego stykającego się z ciałem sztywnym. W pracy tej podano sformułowanie problemu oraz wyniki obliczeń numerycznych. W rozpatrywanym zagadnieniu ciało sztywne było poddane działaniu siły i momentu. W obszarze styku ciał uwzględniono tarcie.

1.2.1.3. Uderzenie.

Uderzenie jest procesem, który charakteryzuje się występowaniem dużego strumienia energii w obszarze styku dwóch ciał. Ruchome mogą być obydwie ciała lub tylko jedno z nich.

W literaturze opisywane są uderzenia następujących elementów: stempla i półprzestrzeni, dwóch płyt, kulki lub walca o sztywnej powierzchni lub lepkosprężystą belkę, sprężystego walca i sprężysto-plastycznego pasma lub wielowarstwowej przeszkody, sztywnego pocisku i przeszkody sztywno-plastycznej.

Hunter (1957), (1961) badając zderzenie stempla z półprzestrzenią stwierdził, że tylko niewielka porcja energii kinetycznej jest przejmowana przez półprzestrzeń, jeśli prędkość uderzenia jest mniejsza od prędkości fali sprężystej. Zjawisko uderzenia opisywał również Tsai (1969), (1971), (1975), który pole naprężeń uzależniał od czasu styku ciał. Tsai stwierdził, że w chwili uderzenia największy promień pola kontaktu można określić na podstawie teorii Hertza. Jednakże tuż po uderzeniu promień ten zdecydowanie różni się od przewidywanego wg. Hertza. Uderzenie klina w sprężystą półprzestrzeń opisali Robertson i Thompson (1974). W sformułowaniu tym uwzględniono tylko proces

obciążania w czasie uderzenia. Ponadto zakładano, że obszar styku powiększa się ze stałą prędkością porównywalną z prędkością fal sprężystych.

Uderzenie dwóch płyt badań Persson (1974) dla przypadku, kiedy nie uwzględnia się tarcia lub kiedy występuje całkowita adhezja w czasie deformacji.

Rozkład ciśnienia i tarcie w obszarze styku ciała sztywnego i lepkosprężystej półprzestrzeni określał Kawatake (1975) zakładając, że ciała stykają się na płaskiej powierzchni. Zderzenie kulki z drgającą powierzchnią i uderzenie kulki o lepkosprężystą belkę badali: Wood i Byrne (1981) oraz Sakata, Hori i Kimura (1984).

Niskoprędkościowe uderzenie sprężystego walca o wielowarstwową przeszkodę analizował Rimskij (1983) a zagadnienie dla walca i lepkosprężystej belki rozwiązał Aksel (1984). Fale uderzeniowe powstające w ciele lepkosprężystym badali Sabin i Graham (1983).

Niskoprędkościowe uderzenie sztywnego walca zawieszono lepkosprężysto w narożu sprężysto-plastycznego pasma badali Roñda i Brzozowski (1987). W pracy tej pokazano wpływ prędkości ruchu walca na kształt powierzchni pasma oraz przedstawiono porównanie wykresów-map składowych naprężenia dla dwóch prędkości uderzenia.

Penetracja sztywnego pocisku w materiale sztywno-plastycznym była przedmiotem prac Sagomonyana, Gendugova i Sagomonyana (1982a), (1982b).

Przebijanie materiału plastycznego przez sprężysty stempel omówili i rozwiązali numerycznie Sankar i Sun (1985).

1.2.2. Stacjonarne zagadnienia kontaktowe

Pierwsze modele matematyczne zjawisk kontaktowych dotyczące zagadnień stacjonarnych dla materiałów sprężystych pojawiły się w XIX wieku. Jedną z pierwszych prac poświęconych zagadnieniu kontaktowemu napisał Bussinesq (1878). Bussinesq wykorzystał rozwiązanie Kelvina (1848) dla ciała półograniczonego poddanego działaniu siły skupionej na płaskim brzegu przyjmując pole

przemieszczeń, które było rozwiązaniem równania przemieszczeniowego Naviera według propozycji Trefftza.

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE I LEPKOSPRĘŻYSTE

Problem styku dwóch ciał sprężystych, w których występują małe odkształcenia i nie ma tarcia na powierzchni styku, rozpatrywał Hertz (1881). W rozwiązaniu Hertza przyjmuje się, że powierzchnia kontaktowa jest mała w porównaniu z wymiarami gabarytowymi ciała i ma kształt eliptyczny. Ponadto, nie uwzględnia się efektów dynamicznych i sił masowych. Mimo tych ograniczeń, model przyjęty przez Hertza umożliwia rozwiązanie wielu problemów kontaktowych, które wykraczają poza narzucone ograniczenia, np. pozwala na rozwiązanie zagadnień niestacjonarnych.

Rozwiązanie zagadnienia dwuwymiarowego dla siły skupionej działającej na brzegu półprzestrzeni podał Flamant (1892) wykorzystując wyniki Bussinesq'a (1878).

Huber (1904) i Beljaev (1917) określając rozkłady naprężeń w materiale na podstawie nacisków w obszarze styku wykazali, że punkty największego wyężenia materiału leżą na pewnej głębokości pod obszarem kontaktowym. Huber identyfikował te punkty znajdując największe wartości drugiego niezmiennika naprężenia a Bieljaev określał ich położenie biorąc pod uwagę maksymalną wartość naprężenia stycznego.

Wariacyjna teoria mechaniki kontaktowej została zapoczątkowana przez Signoriniego (1933) dla materiałów sprężystych. Problem Signoriniego (1959) rozwiązał Duvaut (1969), (1970).

Problem wciskania dwuwymiarowego płaskiego stempla w półprzestrzeń przedstawił Sadowsky (1928) wykorzystując rozwiązanie Flamanta (1892) i wyniki doświadczeń Michella (1902). Rozwiązanie tego problemu podał Muschelišvili (1949) proponując potencjał będący funkcją dwu zmiennych zespolonych. Wyniki rozwiązania problemu kontaktowego dla chropowatego stempla przedstawił Muschelišvili (1949) i Abramov (1937) zakładając, że

materiał sprężysty pod stemplem nie przemieszcza się w kierunku stycznym.

Zadanie dla płaskiego stempla z uwzględnieniem tarcia i poślizgu w eliptycznym lub kołowym obszarze styku sformułował Galin (1945). Oddziaływanie płaskich lub wypukłych stempli z półprzestrzenią sprężystą było przedmiotem prac Spence'a (1968), (1973) i Aleksandrova (1962).

Zagadnienie kontaktowe dla stempli pierścieniowych badali Olesiak (1965) i Rogowski (1981). Olesiak podał rozwiązanie dla stempla działającego na sprężystą półprzestrzeń a Rogowski (1981) rozwiązał problem dla stempla działającego na warstwę materiału z dowolnymi warunkami podparcia na brzegu dolnym.

W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych większość prac poświęconych wciskaniu sztywnego lub sprężystego stempla w półprzestrzeń lub pasmo odkształcalne (sprężysto-plastyczne lub sprężyste) zawiera rozwiązania numeryczne otrzymane przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Zagadnienie penetracji ciała sprężystego przez cienki stempel w kształcie stożka rozpatrywali Bagdov i Vantsyan (1981). Przyjęto założenia, że przed wierzchołkiem stempla materiał jest sprężysty i ponadto od wierzchołka rozchodzi się front zniszczenia. Ruch ciała za frontem określa się z równań dla idealnej plastyczności.

Klarbring (1986a), (1986b) przedstawił numeryczne sformułowanie trójwymiarowego zagadnienia kontaktowego dla ciała sprężystego z tarcie. Jako przykład zastosowania tego modelu przedstawił wyniki dla wciskania płaskiego stempla o przekroju prostokątnym w półprzestrzeń sprężystą.

Piaskie zagadnienie kontaktowe dla symetrycznego ciała wciskanego w półpłaszczyznę rozwiązali analitycznie Sockfield i Hills (1986). Kontur ciała wciskanego opisano wielomianami Czebyszewa. Pole naprężenia określano zarówno dla zagadnienia statycznego, jak również dla problemu z poślizgiem. Przedstawiono dyskusję o optymalnych warunkach kontaktowych w zależności od kształtu stempla.

Zagadnienie styku warstwy materiału sprężystego

spoczywającego na sztywnej półprzestrzeni i stemplem o dowolnym profilu lub styku materiału sprężystego ze sztywnym podłożem jest równie popularne jak problemy wciskania stempla w materiał odkształcalny. Oddziaływania między warstwą sprężystą spoczywającą na półprzestrzeni i półnieskończonym walcem badał Gecit (1986).

Proces, w którym ciało sprężyste poddane działaniu sił masowych i oddziaływań powierzchniowych styka się ze sztywnym podłożem na części swej powierzchni, rozważali Klarbring, Mikelič i Shillor (1987a). Przyjmowali oni model tarcia suchego.

Oddziaływania wielu warstw materiału lepkosprężystego podlegającego starzeniu opisywał Manzhirov (1983). W wyniku obliczeń określano grubość górnej warstwy materiału. Oddziaływanie dwóch płyt sprężystych przedstawili Bezine i Fortune (1984).

Kontakt dwóch ciał sprężystych z uwzględnieniem warunku podatności na naciski normalne i zmodyfikowanego prawa Coulomba analizowali Klarbring, Mikelič i Shillor (1987b). Kontakt między ciałem sprężystym lub sztywnym i lepkosprężystym badali Tleukenov (1985) oraz Vajnberg i Krutin (1984).

Zagadnienie kontaktowe dla ramy sprężystej i podłoża-gruntu było przedmiotem pracy Panagiotopoulosa i Avdelasa (1984).

Trójwymiarowy model styku dwóch prętów sprężystych dla przypadków statycznych i w warunkach poślizgu badali Chaudhary i Bathe (1986).

Zasady wariacyjne dla kontaktu ciał sprężystych omawiali Kalker (1977), Panagiotopoulos (1985) i Klarbring (1986a).

Ogólne rozważania nad procesami kontaktowymi w sprężystości prowadzili Oden i Kikuchi (1984), oraz Klarbring (1986b).

Kalker (1986b) przedstawił algorytmy dla trzech problemów, w których określa się: naciski normalne i odległości ciał w stanie odkształconym (Fichera (1964)) lub poślizg i siły styczne w sensie Duvaut i Lionsa (1976) lub też naciski normalne i siły styczne wg. aproksymacji Johnsona (1962) lub wg. rozwiązania Panagiotopoulosa (1987).

MATERIAŁY PLASTYCZNE

Stacjonarne zagadnienia kontaktowe dla materiałów plastycznych początkowo rozwiązywano metodami półdoświadczalnymi jakie proponował np. Johnson (1968) a następnie metodami numerycznymi. Głównie stosowano metodę elementów skończonych.

Najczęściej spotykanymi problemami kontaktowymi dla materiałów plastycznych są zadania, w których określa się oddziaływania między: dwoma kulkami, kulką i cylindrem, dwoma cienkościnnymi powłokami, cienkościnną powłoką i matrycą, kulką lub stemplem i sprężysto-plastyczną półprzestrzenią. Problem wyznaczenia naprężeń i odkształceń w belce lub ramie podpartej na niesprężystym podłożu ma duże znaczenie dla mechaniki konstrukcji.

Wciskanie sztywnej kulki w ciało sprężysto-plastyczne rozpatrywali Cheng i Kikuchi (1985), Follansbee i Sinclair (1984) oraz Endahl (1986). Ponadto Cheng i Kikuchi (1985) przedstawili model kucia ła ą śruby lub nita. Endahl (1986) określił oddziaływanie kulki z pustką kulistą lub półprzestrzenią lub też drugą kulką o dowolnych wymiarach.

Lvov (1983a), (1983b), (1983c) rozwiązywał zagadnienie styku cienkościennej powłoki i sztywnej matrycy oraz problem oddziaływania dwóch powłok cylindrycznych.

Wciskanie sprężystego lub sztywnego stempla w jedno- lub wielowarstwowy materiał sprężysto-plastyczny analizowali Kaczorowski (1983), Kikuchi i Skalski (1981) oraz Theocaris i Stassinakis (1982).

Kontakt między dwoma odkształcalnymi ciałami plastycznymi opisywali Haslinger i Hlavacek (1982). Oddziaływanie między belką i podłożem, ramą sprężystą i niesprężystą półprzestrzenią badali Kasradze (1982) i Panagiotopoulos (1979). Badania teoretyczne i numeryczne klasy zagadnień dynamicznych dla ciała odkształcalnego podpartego sprężystością na sztywnym podłożu przeprowadzili Talaslidis i Panagiotopoulos (1982).

Ogólne rozważania dla zagadnień kontaktowych w ciałach sprężysto-plastycznych przedstawili Nečas i Hlavacek (1983), Lee i Kwak (1984) oraz Valliappan, Lee, Boonlualohr (1984).

Nečas i Hlavacek (1984) posługując się odkształceniową teorią plastyczności i metodą modułów stycznych rozwiązali zagadnienie Signoriniego.

Lee i Kwak (1984) przedstawili metody numeryczne dla materiału sprężysto-plastycznego oraz pokazali wiele przykładów praktycznych.

Valliappan, Lee i Boonlualohr (1984) uwzględniali nieliniowe wzmocnienie materiałów plastycznych.

2. SFORMUŁOWANIE TOCZNEGO PROBLEMU KONTAKTOWEGO

W prezentowanym opracowaniu sformułowano model procesu toczenia się sztywnego walca po powierzchni ciała sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem tarcia. W rozważaniach wzięto pod uwagę model tarcia niezależny od prędkości względnej poruszających się ciał oraz przyjęto, że ciała nie przenikają się.

Problem niestacjonarny przedstawiono jako ciąg procesów stacjonarnych o różnych położeniach środka walca. Zagadnienie kontaktowe opisano uwzględniając człony nieliniowe w równaniu kinematycznym oraz biorąc pod uwagę zależność stałych materiałowych od aktualnego stanu naprężenia i historii deformacji. Materiał odkształcalny ulega wzmocnieniu izotropowemu zależnemu od pracy plastycznej. Przyjmuje się, że walec jest zawieszony lepko-sprężystość. Sformułowane prawo zachowania uwzględnia siły masowe.

2.1 PRAWO ZACHOWANIA DLA NIESTACJONARNEGO ZAGADNIENIA KONTAKTOWEGO

Problem toczenia się sztywnego walca po powierzchni ciała sprężysto-plastycznego został zilustrowany na rys. 2.1.c. Powierzchnię ciała odkształcalnego podzielono na trzy nierozłączne obszary Γ_F , Γ_U i Γ_S , gdzie odpowiednio określono warunki brzegowe na siły i przemieszczenia oraz warunki wynikające z prawa tarcia Coulomba.

Prawo zachowania w postaci funkcjonału odpowiadającego słabemu sformułowaniu problemu kontaktowego przedstawiono dla opisu Lagrange'a jak również dla modyfikacji tego opisu.

Prawa zachowania dla nieliniowych zagadnień kontaktowych sformułowali między innymi: Hughes, Taylor, Sackman, Curnier, Kanoknukulchai (1976), Duvaut (1980), Oden i Pires (1983), Panagiotopoulos (1983), (1985), Klarbring (1986a), (1986b),

(1988), Klarbring, Mikelic, Shillor (1987a), (1987b), Oden i Martins (1985), Oden i Lin (1986), Oden (1988), Klarbring i Bjorkman (1988), Chen i Tsai (1988), Chen i Yeh (1988), Feij o, Barbosa, Brunet (1988), Bajer (1988), Barthold i Bischoff (1988), Kwak i Lee (1988), Raous, Chebrand i Lebon (1988), Zouain (1988).

2.1.1 MECHANIKA KONTAKTOWA I MODELE TARCIA

Wykorzystując uwagi zawarte w pracach Curniera (1984), Kalkera (1986), Michałowskiego i Mroza (1978), Odena i Martinsa (1985), Hughesa, Taylora, Sackmana, Curniera i Kanoknukulchai (1976) przedstawiono pokrótce mechanikę kontaktu ciał oraz klasyczne teorie tarcia ze szczególnym uwzględnieniem prawa Coulomba i teorii przedstawionej przez Michałowskiego i Mroza (1978) oraz Frederikssona (1976a), (1976b).

2.1.1.1 MODEL ODDZIAŁYWANIA CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

Z mechaniką kontaktową związane są następujące pojęcia: powierzchnia styku, siły kontaktowe, trajektoria poślizgu (bieżnia), dysypacja energii na powierzchni styku ciał. Model zjawisk kontaktowych (wg Curniera (1984), Odena i Martinsa (1985), Kalkera (1986), Curniera i Alarta (1988)) uwzględniający tarcie i nieprzenikliwość materiałów będzie przedstawiony dla oddziaływania dwóch ciał odkształcalnych. Przyjmuje się, że ciała mają różną sztywność a powierzchnie ograniczające te ciała mają różne krzywizny. Ponadto przyjmuje się, że ciało bardziej wypukłe (pocisk, młot, stempel, walec, rolka) jest również sztywniejsze w przewidywanym obszarze kontaktowym Γ .

Dysypację energii na powierzchni Γ styku dwóch ciał wyraża się w postaci całki oznaczonej

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{U}} \, d\gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{F}_N \dot{\mathbf{U}}_N + \mathbf{F}_T \dot{\mathbf{U}}_T) \, d\gamma \geq 0, \quad (1)$$

gdzie symbole \mathbf{F}_N , \mathbf{F}_T , \mathbf{U}_N , \mathbf{U}_T określają odpowiednio długości wektorów \mathbf{F}_N , \mathbf{F}_T , \mathbf{U}_N , \mathbf{U}_T , tj. $F_N = |\mathbf{F}_N|$, $F_T = |\mathbf{F}_T|$, $U_N = |\mathbf{U}_N|$, $U_T = |\mathbf{U}_T|$.

Ciałkę tę w przypadku słabego sformułowania problemu kontaktowego należy uwzględnić jako człon w prawie zachowania przedstawionym w formie funkcjonału energii (np. funkcjonału prac przygotowanych). We wzorze (1) symbol "." oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Wektor \underline{U} ma dwa znaczenia. W przypadku kiedy między ciałami występuje szczelina, \underline{U} reprezentuje względne przemieszczenie (różnicę wektorów translacji) odpowiednich punktów dwóch ciał, które będą w kontakcie. Jeśli ciała ślizgają się po sobie wektor \underline{U} jest przemieszczeniem punktów poruszających się po trajektorii poślizgu. Kropka nad symbolem \underline{U} oznacza prędkość przemieszczenia względnego, którą można przedstawić jako sumę wektora normalnego i wektora stycznego do powierzchni ciała o mniejszej krzywiznie (materiału znajdującego się w matrycy, pasma, kęsiska) tj.

$$\dot{\underline{U}}_{\underline{N}} = (\dot{\underline{U}} \cdot \underline{N}) \underline{N}, \quad \dot{\underline{U}}_{\underline{T}} = \dot{\underline{U}} - \dot{\underline{U}}_{\underline{N}}.$$

Rozkład taki nie zawsze jest możliwy dla samego wektora przemieszczenia, ponieważ kierunek wektora normalnego zależy od krzywizny powierzchni zmienia się w czasie deformacji ciała. Wektor \underline{U} można przedstawić w zależności od $\underline{U}_{\underline{N}}$ i $\underline{U}_{\underline{T}}$, kiedy poślizg jest mały lub kiedy powierzchnia kontaktowa ma małą krzywiznę tzn. jest prawie płaska i ponadto sztywna.

Siły kontaktowe wyraża się jakb wektor naprężenia \underline{F} kiedy $\underline{U}_{\underline{N}} = 0$ i $\dot{\underline{U}}_{\underline{N}} = 0$. Wektor naprężenia można również rozłożyć na dwa wektory: styczny i normalny do powierzchni styku ciał tj.

$$\underline{F}_{\underline{N}} = (\underline{F} \cdot \underline{N}) \underline{N}, \quad \underline{F}_{\underline{T}} = \underline{F} - \underline{F}_{\underline{N}}.$$

Trajektoria poślizgu (bieżnia) jest krzywą leżącą na powierzchni ciała bardziej podatnego (materiału znajdującego się w matrycy, pasma blachy, kęsiska), po której porusza się punkt drugiego ciała (młota, stempla, walca, rolki). Pośrednio z trajektorią poślizgu wiąże się konieczność odróżniania rzeczywistej powierzchni kontaktowej Γ od potencjalnej powierzchni kontaktowej A , która zawiera rzeczywiste powierzchnie styku ciał dla wszystkich chwil czasu.

Ciałka dysypacji energii (1) na powierzchni kontaktowej jest nieujemna. Ciałkę tę w opisie Lagrange'a wyraża się biorąc wektor

naprężenia Pioli - Kirchhoffa i powierzchnię kontaktową A o zewnętrznym wektorze normalnym \underline{N} w konfiguracji odniesienia. W zmodyfikowanym opisie Lagrange'a wektor naprężenia określa się biorąc pod uwagę naprężenie Kirchhoffa, drugi tensor naprężenia Pioli - Kirchhoffa oraz wersory osi w aktualnym na danym kroku układzie odniesienia. W opisie tym powierzchnia kontaktu i wektor normalny są również uaktualniane.

Dysypacja energii jest zerowa, kiedy ciała nie stykają się i występuje między nimi szczelina ($\underline{U}_N > 0$, $\dot{\underline{U}}_N \neq 0$), ponieważ wówczas

$$\underline{F}_N = \underline{F}_T = 0 \quad (\underline{F} = 0).$$

Kiedy ciała stykają się ($\underline{U}_N = 0$ i $\dot{\underline{U}}_N = 0$) iloczyn $\underline{F}_N \dot{\underline{U}}_N$ jest zerowy, co jest zgodne z założeniem o nieprzenikalności ciał.

Wówczas dysypację energii na skutek tarcia reprezentuje człon $\underline{F}_T \dot{\underline{U}}_T$, który jest nieujemny zgodnie z nierównością entropii.

Przenikanie ciał (penetracja) ($\underline{U}_N < 0$, $\dot{\underline{U}}_N \neq 0$) jest wykluczone, ponieważ oddziaływanie $\underline{F}_N > 0$ przy $\dot{\underline{U}}_N \neq 0$ nie występuje ze względu na zjawisko adhezji powodujące, że $\dot{\underline{U}}_N = 0$.

Dysypacja energii wywołana przez tarcie na powierzchni styku ciał znika w dwóch granicznych przypadkach:

- idealnego poślizgu $\underline{F}_T = 0$,
- idealnej adhezji $\dot{\underline{U}}_T = 0$.

Relacje jakie zachodzą między siłą tarcia i poślizgiem dla stanów \underline{F} i $\dot{\underline{U}}$ zawartych między tymi dwoma granicznymi przypadkami opisuje prawo tarcia wyrażone w postaci $\underline{F}_T = \mathcal{F}_T[\underline{U}_T, \dot{\underline{U}}_T, \dots]$.

Jednym z etapów rozwiązania zagadnienia kontaktowego jest minimalizacja funkcjonału energetycznego. Funkcjonał, w zależności od metody minimalizacji, można przedstawić w postaci odpowiedniej dla metody mnożników Lagrange'a lub metody funkcji kary.

Postać wyrażenia (1) określającego dysypację energii na powierzchni kontaktowej jest odpowiednia dla metody funkcji kary. Jeśli do minimalizacji stosuje się metodę mnożników Lagrange'a wyrażenie (1) należy przedstawić w postaci

$$\int (\underline{C}\underline{F} \cdot \delta \underline{U} + \delta \underline{F} \cdot \dot{\underline{U}}) d\gamma, \quad (2)$$

gdzie $\delta \dot{U}$ i δF oznaczają odpowiednio wariację prędkości \dot{U}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \delta \dot{U} = \delta \dot{U} \right) \text{ i siły kontaktowej } F.$$

Przedstawiona tu w zarysie mechanika kontaktowa dotyczy styku powierzchni gładkich. Rzeczywiste powierzchnie ciał są chropowate. Oden i Martins (1985) przedstawili następujące wnioski dotyczące modeli powierzchni chropowatych:

- SPOSÓB DEFORMACJI POWIERZCHNI METALI

- (1). Na sposób deformacji powierzchni chropowatych mają wpływ parametry materiałowe takie jak: twardość powierzchni H , gładkość powierzchni oraz zastępczy moduł sprężystości dla dwóch ciał zdefiniowany (wg. Odena i Martinsa (1985)) następująco

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2},$$

gdzie E_1 i E_2 są modułami sprężystości stykających się ciał a ν_1 i ν_2 są odpowiednimi współczynnikami Poissona.

Przyjmuje się, że siła normalna do powierzchni kontaktowej ma mały wpływ na sposób deformacji tej powierzchni.

- (2). W początkowej fazie oddziaływania dwóch rzeczywistych powierzchni występuje odkształcenie plastyczne nawet dla małych obciążeń.
- (3). Nierówności na powierzchni styku odkształcają się w procesie cyklicznego obciążenia. Reakcja materiału w takim reżimie obciążenia zmienia się dążąc do osiągnięcia stanu przystosowania, kiedy występują tylko odkształcenia sprężyste.

- NOŚNOŚĆ POWIERZCHNI CHROPOWATYCH PRZY ŚCISKANIU (ang. the stiffness of compressed rough surfaces)

- (1). Nośność powierzchni jest odwrotnie proporcjonalna do chropowatości.
- (2). W przypadku przenikania powierzchni obciążenie normalne szybko rośnie wg. funkcji wykładniczej w zależności od głębokości przenikania.
- (3). Dla ustalonej wielkości obciążenia, nośność w czasie

pierwszego obciążenia jest mniejsza od nośności podczas odciążania i ponownego obciążania. Jest to spowodowane wzmocnieniem materiału na skutek odkształcenia plastycznego w kolejnych fazach cyklu obciążenia.

- RZECZYWISTA POWIERZCHNIA STYKU CIAŁ .

- (1). Większość modeli przewiduje dokładną lub przybliżoną proporcjonalność między rzeczywistą wielkością powierzchni styku ciał i obciążeniem normalnym zarówno dla przypadku kontaktu sprężystego jak i plastycznego.
- (2). Wyniki doświadczeń potwierdzają, że rzeczywista powierzchnia kontaktowa zmienia się według prawa potęgowego w zależności od obciążenia normalnego w potęgze niewiele mniejszej od jedności.

Wnioski te wykorzystano w prezentowanej pracy przy wyborze wielkości zagłębienia walca w sprężysto-plastycznym paśmie.

Stosując uproszczenia dotyczące geometrii i opisu ruchu stykających się ciał zagadnienie kontaktowe można sformułować jako problem Hertza. Wówczas przyjmuje się, że powierzchnia kontaktowa jest w przybliżeniu płaska a ciała podlegają małym odkształceniom w sąsiedztwie obszaru styku. Aproksymacja taka pozwala na uproszczenie numerycznego sformułowania problemu. Hertz formułując problem kontaktowy przyjął następujące założenia:

- (1). Powierzchnia kontaktowa jest płaszczyzną o wektorze \underline{N} normalnym skierowanym wzdłuż osi pionowej.
- (2). Pole powierzchni elementów znajdujących się w obszarze kontaktowym zmienia się nieznacznie w trakcie deformacji tj. stosunek pól powierzchni elementów kontaktowych przed i po deformacji niewiele różni się od jedności. Pozwala to aproksymować wektor naprężenia Pioli - Kirchhoffa używając wektora naprężenia Cauchy.
- (3). Rzuty punktów, które potencjalnie mogą zetknąć się, na płaszczyznę prostopadłą do wektora normalnego \underline{N} pokrywają się w pierwszym przybliżeniu.

Problem kontaktowy z tymi założeniami rozwiązali Hughes, Taylor, Sackman, Curnier i Kanoknukulchai (1976). Zagadnienia kontaktowe

rozwiązane w prezentowanej rozprawie zostały sformułowane bez uproszczeń geometrycznych i kinematycznych zaproponowanych przez Hertza.

2.1.1.2 PODSTAWOWE MODELE TARCIA POSUWISTEGO

KLASYCZNE PRAWA TARCIA bazują na następujących przesłankach (Oden i Martins (1985)):

(1) W chwili rozpoczęcia poślizgu i w trakcie poślizgu siła tarcia \underline{F}_T jest proporcjonalna do siły normalnej \underline{F}_N na powierzchni kontaktowej

$$|\underline{F}_T| = \mu |\underline{F}_N|,$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Niekiedy określa się dwie wartości współczynnika tarcia: μ_s dla tarcia spoczynkowego do chwili rozpoczęcia poślizgu i μ_k dla poślizgu, kiedy występuje ruch względny dwóch powierzchni.

(2) Współczynnik tarcia jest niezależny od pola kontaktu.

(3) Statyczny współczynnik tarcia μ_s jest większy od kinetycznego μ_k .

(4) Kinetyczny współczynnik tarcia jest niezależny od prędkości poślizgu.

(5) Siła tarcia działa w tym samym kierunku co prędkość względna ciał stykających się, ale jest przeciwnie skierowana

$$\underline{F}_T = -\mu |\underline{F}_N| \frac{\underline{u}_T}{|\underline{u}_T|}.$$

Dwa pierwsze założenia stanowią podstawę dla prawa tarcia Amontona i są siuszne dla ciał sztywnych. Pierwsze z założeń jest spełnione dla wąskiego zakresu obciążeń. Obserwuje się nieproporcjonalny wzrost współczynnika tarcia dla małych obciążeń oraz dla obciążeń, przy których następuje zerwanie powłoki tlenkowej na powierzchni metali. Ponadto można zauważyć zmniejszenie współczynnika tarcia dla bardzo dużych obciążeń, kiedy w stykających się ciałach zachodzi odkształcenie plastyczne i rzeczywista powierzchnia styku osiąga wielkość umownej powierzchni kontaktowej.

Trzeci postulat wynika z klasycznego doświadczenia z ciałem

poruszającym się po pochylni. Obserwuje się, że zwiększając kąt nachylenia pochylni do wartości $\theta = \theta_0 = \arctg \mu_0$, można uruchomić ciało spoczywające na tej powierzchni. Ruch rozpoczyna się z dużym przyspieszeniem i ciało szybko osiąga znaczną prędkość. Gdyby kinetyczna siła tarcia była równa największej wartości statycznej siły tarcia, wówczas poślizg wzdłuż pochylni odbywałby się wolno i prędkość ruchu ciała po pochylni nie rosłaby tak szybko. Przyczyną przyspieszenia jest różnica między największą wartością statycznej siły tarcia $\mu_0 |F_N|$ i kinetycznej siły tarcia $\mu_k |F_N|$. Zjawisko występowania podobszarów poślizgu i stref adhezyjnego przylegania w obszarze kontaktowym jest związane z tym postulatem.

Postulat czwarty jest niesłuszny, chociaż według Rabinowicza (1965) dla ograniczonych zakresów prędkości ruchu ciał kinetyczny współczynnik tarcia można przyjąć jako stały i niezależny od prędkości poślizgu.

Słuszność postulatu piątego potwierdza obserwacja ruchu względnego dwóch ciał stykających się płaszczyznami o nieokreślonych własnościach powierzchniowych. Przykładem takiej pary ciał jest pochylnia i poruszające się po niej ciało. Można zauważyć, że kierunek ruchu zmienia się w czasie ślizgania w sposób przypadkowy. Tym zmianom ruchu towarzyszą zmiany kierunku i wielkości siły tarcia.

TEORIA TARCIA Z POTENCJAŁEM POŚLIZGU

Badania nad teorią poślizgu analogiczną do teorii plastycznego płynięcia zapoczątkował Frederiksson (1976). Teoria ta została rozwinięta w pracach Michałowskiego i Mroza (1978), Curniera (1984), Curniera i Alarta (1988), Charliera i Cescotto (1988). Takie podejście do badania zagadnień kontaktowych z tarciem sugerowali Bowden i Tabor (1964).

Podobieństwo teorii tarcia do teorii plastycznego płynięcia określono biorąc pod uwagę następujące cechy:

TEORIA PLASTYCZNOŚCI

1) Odształcenie można przedstawić jako sumę odształcenia sprężystego (odwracalnego) i plasty-

TEORIA POŚLIZGU

1) Obszar kontaktowy zawiera dwa podobszary: adhezji i poślizgu.

cznego (trwałego).

2) Materiały w trakcie procesu deformacyjnego podlegają WZMOCNIENIU lub OSŁABIENIU.

Wzmocnienie materiału może być izotropowe, kinematyczne lub mieszane.

3) Jeśli stan naprężenia spełnia WARUNEK PŁYNIĘCIA to możliwe jest wystąpienie odkształceń plast.

4) PRAWO PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA określa wielkość odkształcenia plastycznego w zależności od stanu naprężenia.

Proponując teorię z ogólnym kryterium poślizgu i stowarzyszonym prawem poślizgu kierowano się następującymi spostrzeżeniami:

- współczynnik tarcia rośnie wraz ze wzrostem poślizgu,
- poślizg można podzielić na część odwracalną i nieodwracalną,
- mikroślizgi na powierzchni ciała zachodzą dla obciążeń statycznych mniejszych od siły tarcia określonej według prawa tarcia Coulomba z makroskopowym współczynnikiem tarcia.

Frederiksson (1976) przedstawił konstytutywne równanie kontaktowe wynikające ze stowarzyszonego prawa poślizgu i ogólnego kryterium poślizgu. Równanie to ma postać przyrostową ze względu na nieodwracalność zjawisk tarcia. Teoria Frederikssona (1976) opisująca oddziaływanie ciał odkształcalnych zawiera następujące założenia:

- przyrost energii dostarczonej do układu dwóch ciał i spowodowany wzrostem obciążenia dF jest dodatni,
- praca układu wywołana przyrostem obciążenia dF jest nieujemna,

$$dF_{\alpha} dv_{\alpha} \geq 0,$$

gdzie dF_{α} i dv_{α} są odpowiednio składową przyrostu siły $dF = dF_{\alpha} \eta_{\alpha}$ i składową poślizgu $dy = dv_{\alpha} \eta_{\alpha}$ a η_{α} są jednostkowymi wektorami bazy w lokalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych

|| 2) Dwa ciała mogą STYKAĆ SIĘ
|| ze sobą lub też wzajemnie od-
|| działywać powodując ZUZYCIE
|| POWIERZCHNIOWE.

|| 3) Jeśli siły styczne spełniają
|| WARUNEK POŚLIZGU to możliwe
|| jest ślizganie cząstek ciał
|| na powierzchni styku.

|| 4) PRAWO POŚLIZGU określa prze-
|| mieszczenie styczne cząstki w
|| zależności od siły stycznej.

przyjętym na powierzchni kontaktowej, $\alpha = 1, 2$,

- prawo poślizgu określające przyrost poślizgu ciała A względem ciała B w zależności od dF_α ma postać $dv_\alpha = h_{\alpha\beta} dF_\beta$, gdzie $h_{\alpha\beta}$ jest stałą materiałową,

- istnieje funkcja poślizgu $g(F_\alpha) = 0$ taka, że przyrost poślizgu jest możliwy t.j. $|Dv_\alpha| \neq 0$ jeśli $\frac{\partial g}{\partial F_\alpha} > 0$.

Znormalizowane prawo poślizgu wyraża się następująco

$$dv_\alpha = \frac{(\partial g / \partial F_\alpha)(\partial g / \partial F_\beta)}{L (\partial g / \partial F_\alpha)(\partial g / \partial F_\beta)} dF_\beta$$

kiedy $g(F_\alpha) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial F_\alpha} dF_\alpha > 0$, $F_N < 0$, gdzie $F_N = |F_N|$ jest składową siły działającej w kierunku normalnym \underline{N} do powierzchni kontaktowej.

Wyrażenie $g(F_\alpha)$ oraz wielkość L zależą od własności powierzchni kontaktowej takich jak: rodzaj materiału, wysokość mikronierówności, tekstura warstwy wierzchniej zależna od rodzaju obróbki. Jeśli nie występuje zjawisko wzmocnienia poślizgu, wielkość L jest wartością dodatniej funkcji zależnej od położenia punktu materialnego \underline{x} . Wartości $L(\underline{x})$ określa się jako niewiadome występujące w problemie. W przypadku kiedy uwzględnia się wzmocnienie poślizgu, wartości $L(\underline{x})$ funkcji zależą również od historii procesów zachodzących na powierzchni kontaktowej.

Prawo tarcia Coulomba, jako szczególny przypadek teorii Frederikssona (1976a) oraz Michałowskiego i Mroza (1978), otrzymuje się biorąc funkcję poślizgu

$$g(F_\tau, F_N) = (F_\tau F_\tau)^{1/2} + \mu F_N, \text{ dla } F_N < 0, \tau = 1, 2.$$

wyrażoną w zależności od składowej stycznej F_τ , gdzie $F_\tau = (F_\theta F_\theta + F_\phi F_\phi)^{1/2}$, $F_\tau = F_\theta \underline{\theta} + F_\phi \underline{\phi}$, i składowej normalnej F_N siły $\underline{F} = F_\tau \underline{\tau} + F_N \underline{N}$ działającej na powierzchni styku dwóch ciał. Wektory $\underline{\theta}$, $\underline{\phi}$ i \underline{N} są ortogonalne a ponadto $\underline{\theta}$ i $\underline{\phi}$ są styczne do powierzchni kontaktowej.

Stowarzyszone prawo poślizgu wyraża się wówczas w postaci

$$dv_\alpha = - \frac{1}{L} \frac{F_\alpha F_\beta}{F_\tau F_\tau} dF_\beta; \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie L jest funkcją materiałową spełniającą warunek $L(\underline{x}) \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \partial\Omega$ a $\partial\Omega$ oznacza brzeg ciała.

W przypadku kiedy nie uwzględnia się wzmocnienia poślizgu, stowarzyszone prawo poślizgu przedstawia się następująco

$$d\dot{v}_T = -\lambda F_T,$$

$$\text{gdzie } \lambda \geq 0, \lambda g = 0, \lambda = \frac{1}{L} \frac{F_\beta dF_\beta}{F_T F_T}.$$

Klasyczne prawo tarcia Coulomba, wyrażone w wersji obowiązującej dla punktu materialnego leżącego na powierzchni styku ciał, zawiera się w następujących relacjach:

$$|\underline{F}_T| \leq \mu |\underline{F}_N|, \quad \underline{F}_N \leq 0.$$

$$\dot{\underline{u}}_T = 0 \quad \text{jeśli } |\underline{F}_T| < \mu |\underline{F}_N|,$$

$$-\dot{\underline{u}}_T = \lambda \underline{F}_T \quad \text{jeśli } |\underline{F}_T| = \mu |\underline{F}_N|, \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie $\dot{\underline{u}}_T$ jest prędkością poślizgu stycznego, \underline{F}_N jest wektorem naprężenia normalnego ("ciśnieniem" kontaktowym), λ jest liczba rzeczywista a \underline{F}_T jest wektorem naprężenia stycznego.

W teorii tarcia określa się powierzchnię poślizgu, która jest funkcjonalnym odpowiednikiem powierzchni płynięcia w teorii plastyczności. Powierzchnia poślizgu jest zbiorem punktów odpowiadających stanom naprężenia kontaktowego, dla których możliwy jest poślizg stykających się ciał. W klasycznym modelu tarcia Coulomba poślizg w kierunku stycznym $\dot{\underline{u}}_T$ nie jest prostopadły do powierzchni poślizgu, ponieważ zgodnie z równaniem konstytutywnym poślizgu $-\dot{\underline{u}}_T = \lambda \underline{F}_T$ działa w kierunku siły \underline{F}_T . Tak więc nie jest spełniona zasada prostopadłości poślizgu, która odpowiadałaby zasadzie normalności odkształcenia plastycznego do powierzchni plastyczności (Rys.2.1.a i 2.1.b).

Rozwinięciem teorii Frederikssona (1976) oraz Bowdena i Tabora (1964) była teoria Michałowskiego i Mroza (1978) zawierająca parametr wzmocnienia określający wzmocnienie kontaktowe spowodowane poślizgiem stycznym. Według Odena i Martinsa (1985) teorie zawierające rozważania na temat powierzchni poślizgu i warunków poślizgu dobrze stosują się do zagadnień quasi-statycznych z tarciem i prowadzą do wyników jakościowo zgodnych z klasyczną teorią tarcia.

Pomimo przedstawienia dwóch podstawowych teorii tarcia, w dalszych rozważaniach będzie wykorzystywane tylko klasyczne prawo tarcia

Coulomba ponieważ:

- nie wymaga badań identyfikacyjnych dla parametrów tarcia zależnych od materiałów oraz cech warstwy wierzchniej stykających się ciał,
- warunki poślizgu wyrażone w postaci nierówności są spełnione mimo, że przyrost poślizgu w kierunku stycznym nie jest ortogonalny do powierzchni poślizgu (Rys. 2.1.a),
- w prezentowanej pracy nie bada się rzeczywistego kontaktu dwóch ciał na powierzchniach chropowatych, gdzie ważne są zjawiska kontaktowe zachodzące w warunkach zaawansowanego poślizgu i zużycia powierzchniowego oraz przejście od statycznego do kinematycznego tarcia.

2.1.2 PRAWO ZACHOWANIA W OPISIE LAGRANGE'A

Miarami konstytutywnymi w tym sformułowaniu są: drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{KL} i sprzężony z nim tensor odkształcenia Greena ε_{KL} .

Dynamiczne zachowanie materiału sprężysto-plastycznego w problemach niestacjonarnych określają następujące równania i warunki:

- równanie ruchu uwzględniające siły masowe f_I i siły bezwładności $(S_{KL} \delta_{IL} + S_{KL} u_{I,L})_{,K} + f_I \rho = \rho \dot{t}_I$ w ${}_t \Omega \times (t_i, t_i + \Delta t)$, (2.1)
- odkształcenie Greena

$$\varepsilon_{KL} = 1/2 (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}) \quad \text{w } {}_t \Omega \times (t_i, t_i + \Delta t),$$

- równanie konstytutywne dla materiału sprężysto-plastycznego

$$\dot{S}_{IJ} = L_{IJKL}^{EP} \dot{\varepsilon}_{KL} \quad \text{w } {}_t \Omega \times (t_i, t_i + \Delta t), \quad (2.2)$$

- warunki brzegowe wyrażone w przemieszczeniach

$$u_I = \psi_I(x, \xi) \quad \text{na } {}_t \Gamma_U \times (t_i, t_i + \Delta t),$$

$$u_I = \psi_I(x, \xi) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial N} = 0 \quad \text{na } {}_t \Gamma_U \times (t_i, t_i + \Delta t) \quad (\text{warunki Neumana}),$$

- warunki brzegowe wyrażone w siłach

$$(S_{KL} \delta_{IL} + S_{KL} u_{I,L})_{,K} = F_I \quad \text{na } {}_t \Gamma_F \times (t_i, t_i + \Delta t),$$

- subróżniczkowalne warunki siłowe wynikające z prawa tarcia

Coulomba

jeśli $|F_T| < \mu |F_N|$ wówczas $\underline{u}_T = 0$ na ${}_{t_1}\Gamma_S \times (t_1, t_1 + \Delta t)$,

jeśli $|F_T| = \mu |F_N|$ wówczas $\exists \lambda \geq 0$, takie że $\underline{u}_T = -\lambda F_T$
na ${}_{t_1}\Gamma_S \times (t_1, t_1 + \Delta t)$,

- warunki początkowe dla $t = 0$

$$\underline{u}(x, 0) = 0, \quad \dot{\underline{u}}(x, 0) = 0,$$

gdzie ${}_{t_1}\Gamma_F \cup {}_{t_1}\Gamma_U \cup {}_{t_1}\Gamma_S = {}_{t_1}\Gamma \equiv \partial \Omega$.

Można przyjąć, że ${}_{t_1}\Gamma_U$ jest zbiorem pustym tj. ${}_{t_1}\Gamma_U = \emptyset$ lub/ oraz ${}_{t_1}\Gamma_F$ jest zbiorem pustym tj. ${}_{t_1}\Gamma_F = \emptyset$ ale ${}_{t_1}\Gamma_S \neq \emptyset$, gdzie \emptyset jest zbiorem miary zero $M(\emptyset) = 0$.

Składową normalną i styczną wektora naprężenia określa się z następujących wzorów:

$$F_N = (S_{KL} \delta_{IL} + S_{KL} u_{I,L}) N_K N_I;$$

$$F_{T_I} = (S_{KL} \delta_{IL} + S_{KL} u_{I,L}) N_K - [(S_{KL} \delta_{IK} + S_{KL} u_{I,L}) N_K] N_I.$$

Biorąc iloczyn skalarny operatora różniczkowego (2.1) i różnicy dwóch wektorów tj. funkcji próbnej \underline{v} i wektora prędkości przemieszczenia $\underline{u}(t)$ oraz stosując formułę Greena otrzymuje się pochodną kierunkową (pochodną Gateaux) funkcjonału odpowiadającego słabemu sformułowaniu problemu różniczkowego

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (S_{KL} \delta_{IL} + S_{KL} u_{I,L}) (v_{I,K} - \dot{u}_{I,K}) dV - \int_{{}_{t_1}\Gamma_F} F_I (v_I - \dot{u}_I) d\gamma + \\ & - \int_{{}_{t_1}\Gamma_U} F_I (v_I - \dot{u}_I) d\gamma - \int_{{}_{t_1}\Gamma_S} [F_N (v_N - \dot{u}_N) + F_{T_I} (v_{T_I} - \dot{u}_{T_I})] d\gamma + \\ & + \int_{\Omega} \rho_0 f_I (v_I - \dot{u}_I) dV + \int_{\Omega} \rho_0 t_I (v_I - \dot{u}_I) dV = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie $\underline{v} \in \{ \underline{w} \in H^1(\Omega); \underline{w} = \underline{\psi} \text{ na } {}_{t_1}\Gamma_U \times (t_1, t_1 + \Delta t) \}$ i człon

$$\int_{{}_{t_1}\Gamma_U} F_I (v_I - \dot{u}_I) d\gamma = 0 \text{ ponieważ } \dot{u}_I = v_I = \psi_I \text{ na } {}_{t_1}\Gamma_U \times (t_1, t_1 + \Delta t).$$

Równanie konstytutywne typu prędkościowego nie może być bezpośrednio użyte w funkcjonał (2.3) do wyeliminowania naprężenia i sformułowania problemu w przemieszczeniach. W tym celu konieczne jest sformułowanie zagadnienia przyrostowego w opisie Lagrange'a, w którym wykorzystuje się następujące

zależności (Bathe (1982)):

$$(i) \quad {}^{t+dt} \underset{0}{S}_{IJ} = {}^t \underset{0}{S}_{IJ} + \underset{0}{S}_{IJ},$$

$$(ii) \quad {}^{t+dt} \underset{0}{\epsilon}_{IJ} = {}^t \underset{0}{\epsilon}_{IJ} + \underset{0}{\epsilon}_{IJ}; \quad \underset{0}{\epsilon}_{IJ} = \underset{0}{e}_{IJ} + \underset{0}{\eta}_{IJ},$$

$$\underset{0}{e}_{IJ} = \frac{1}{2} (\underset{0}{u}_{I,J} + \underset{0}{u}_{J,I} + \underset{0}{u}_{K,I} \underset{0}{u}_{K,J} + \underset{0}{u}_{K,I} \underset{0}{u}_{K,J}),$$

$$\underset{0}{\eta}_{IJ} = \frac{1}{2} \underset{0}{u}_{K,I} \underset{0}{u}_{K,J},$$

$$(iii) \quad \underset{0}{S}_{IJ} = L_{IJKL}^E (\underset{0}{\epsilon}_{KL} - \underset{0}{\epsilon}_{KL}^P),$$

$$(iv) \quad {}^t Y (\underset{0}{S}_{IJ}, {}^t \kappa) = 0,$$

$$(v) \quad \underset{0}{\epsilon}_{KL}^P = {}^t \Lambda \frac{\partial {}^t Y}{\partial \underset{0}{S}_{KL}},$$

$$(vi) \quad {}^t \Lambda = \frac{{}^t g^T \underset{0}{L}^E \underset{0}{\epsilon}}{{}^t p^T {}^t g + {}^t g^T \underset{0}{L}^E {}^t g},$$

$$(vii) \quad {}^t q_{IJ} = \frac{\partial {}^t Y}{\partial \underset{0}{S}_{IJ}}, \quad {}^t p_{IJ} = - \frac{\partial {}^t Y}{\partial \underset{0}{\epsilon}_{IJ}},$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$\underset{0}{S}_{IJ}$ - drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa w chwili t mierzony względem konfiguracji początkowej w chwili $t=0$,

$\underset{0}{S}_{IJ}$ - przyrost naprężenia Pioli-Kirchhoffa obliczony z zależności (iii),

$\underset{0}{\epsilon}_{KL}$ - całkowity przyrost odkształcenia Lagrange'a-Greena,

$\underset{0}{\epsilon}_{IJ}^P$ - przyrost odkształcenia plastycznego,

${}^t Y$ - aktualna powierzchnia plastyczności,

${}^t \kappa$ - parametr wzmocnienia izotropowego,

${}^t \Lambda$ - skalarny współczynnik w równaniu konstytutywnym dla materiału plastycznego,

$\underset{0}{L}^E$ - stały moduł sprężystości.

Wstawiając (v) i (vi) do (iii) otrzymuje się równanie konstytutywne

$$(viii) \quad \delta \underline{S} = {}^t \underline{L}^{EP} \delta \underline{\varepsilon},$$

gdzie moduł sprężysto-plastyczny ${}^t \underline{L}^{EP}$ określa się następująco

$$(ix) \quad {}^t \underline{L}^{EP} = \underline{L}^E - \frac{\underline{L}^E {}^t \underline{g} ({}^t \underline{L}^E {}^t \underline{g})^T}{{}^t \underline{p}^T {}^t \underline{g} + {}^t \underline{g}^T \underline{L}^E {}^t \underline{g}}.$$

Prędkość \dot{u} w funkcjonale (2.3) aproksymuje się różnicą skończoną

$$(x) \quad {}^{t+dt} \dot{u}_I \cong \frac{1}{\Delta t} ({}^{t+dt} u_I - {}^t u_I).$$

Aproksymując prędkość \dot{u}_I i biorąc wariację przemieszczenia

$\delta u_I = v_I - u_I$, $v \in U \subset H^1$, wykorzystując zależności (i) i (ii) oraz dokonując linearyzacji $\delta {}^{t+dt} \varepsilon_{IJ} = \delta \varepsilon_{IJ}$, pierwszy człon w funkcjonale (2.3) przedstawić można następująco

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^{t+dt} S_{KL} (\delta \varepsilon_{IL} + {}^{t+dt} u_{I,L}) \delta {}^{t+dt} u_{I,K} dV = \int_{\Omega} {}^{t+dt} S_{KL} \delta {}^{t+dt} \varepsilon_{KL} dV = \\ & = \int_{\Omega} ({}^t S_{KL} + \delta S_{KL}) \delta \varepsilon_{KL} dV = \int_{\Omega} {}^t L_{IJKL}^{EP} \delta \varepsilon_{IJ} \delta \varepsilon_{KL} dV + \\ & + \int_{\Omega} {}^t S_{KL} \delta \eta_{KL} dV + \int_{\Omega} {}^t S_{KL} \delta e_{KL} dV. \end{aligned}$$

Wobec tego funkcjonał wariacyjny (2.3) wyraża się w postaci

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^t L_{IJKL}^{EP} \delta \varepsilon_{IJ} \delta \varepsilon_{KL} dV + \int_{\Omega} {}^t S_{KL} \delta \eta_{KL} dV + \int_{\Omega} {}^t S_{KL} \delta e_{KL} dV + \\ & - \int_{\Gamma_F} {}^t F_I \delta u_I dy - \int_{\Gamma_U} {}^t F_I \delta u_I dy - \int_{\Gamma_S} [{}^t F_N \delta u_N + {}^t F_T \delta u_T] dy + \\ & + \int_{\Omega} \rho {}^t f_I \delta u_I dV + \int_{\Omega} \rho {}^t \delta \varepsilon_{IJ} dV = 0. \end{aligned}$$

Problem sprężysto-plastyczny sformułowany w opisie Lagrange'a jest bezpośrednim rozwinięciem analizy sprężystej dla przypadku, kiedy występują duże przemieszczenia i obroty przy założeniu, że odkształcenia są małe. Aby uniknąć tego ograniczenia, problem należy sformułować w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a używając linearyzacji równania konstytutywnego, która prowadzi do niejawnego zastąpienia modelu materiału sprężysto-plastycznego modelem materiału hiposprężystego.

2.1.3 PRAWO ZACHOWANIA W ZMODYFIKOWANYM OPISIE LAGRANGE'A.

W zmodyfikowanym opisie Lagrange'a proces deformacji ciała zachodzący w czasie $[0, T]$ jest podzielony na zbiór procesów o czasie trwania $[t_1, t_1 + \Delta t]$. Na każdym kroku Δt obowiązuje opis Lagrange'a a układ odniesienia jest uaktualniany po zakończeniu kroku przyrostowego. Zmiennymi konstytutywnymi w tym opisie są:

- drugi tensor naprężenia Pioli - Kirchhoffa S_{ij} ,

- tensor odkształcenia Greena - Lagrange'a e_{kl} .

Ponadto używa się naprężenia Kirchhoffa τ_{ij} , które jest równoważne naprężeniu Cauchy σ_{ij} dla materiałów nieściśliwych, oraz liniowej części odkształcenia Greena e_{ij} .

W tym sformułowaniu stosuje się następujące wyrażenie przyrostowe dla naprężeń:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij}(\xi) = {}^t \tau_{ij} + S_{ij}(\xi); \quad {}^t S_{ij}(0) = {}^t \tau_{ij}, \quad (2.4)$$

$\xi \in (0, \Delta t)$ w ${}^t \Omega$.

gdzie ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ jest drugim tensorem Pioli - Kirchhoffa określającym naprężenie w przedziale czasu od t do $(t + \Delta t)$.

Naprężenie to jest brane względem układu odniesienia ustalonego w chwili t . Naprężenie Kirchhoffa ${}^t \tau_{ij}$ jest naprężeniem początkowym na kroku czasu rozpoczynającym się w chwili t . Symbol ${}^t S_{ij}$ ma znaczenie przyrostu naprężenia na kroku Δt .

Prawa strona równości (2.4) odpowiada sumowaniu składowej kontrawariantnej naprężenia Kirchhoffa (${}^t \tau_{ij} \equiv {}^t \tau_{ij}$) w układzie konwekcyjnym X_j (wtopionym w materiał i deformującym się razem z nim) i przyrostu tej składowej naprężenia w przestrzennym układzie odniesienia Eulera. Ze względu na trzy typy aproksymacji, jakie będą użyte w celu sformułowania prawa zachowania dla zagadnień niestacjonarnych zmienimy oznaczenia

$${}^{n+1} S_{ij} = {}^n S_{ij} = {}^{t+\Delta t} S_{ij}; \quad {}^n \tau_{ij} = {}^t \tau_{ij}; \quad {}^n S_{ij} = {}^t S_{ij}.$$

W zmodyfikowanym opisie Lagrange'a całkowite odkształcenie Greena - Lagrange'a jest równe przyrostowi odkształcenia w jednym kroku o czasie trwania Δt .

Problem kontaktowy (Rys. 2.1.c) w zmodyfikowanym sformułowaniu Lagrange'a opisują następujące równania i warunki :

- równanie ruchu uwzględniające siły masowe i siły bezwładności

$$({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} u_{i,l})_{,k} + {}^{n+1}f_i = {}^{n+1}\rho = {}^{n+1}\rho t_i \quad \text{w } {}^n\Omega$$

- wyrażenie przyrostowe dla naprężeń

$${}^{n+1}S_{ij}(\xi) = {}^n\tau_{ij} + {}^nS_{ij}(\xi); \quad {}^{n+1}S_{ij}(0) = {}^n\tau_{ij}; \quad \xi \in (0, \Delta t) \text{ w } {}^n\Omega;$$

- zależność określająca naprężenie początkowe ${}^{n+1}\tau_{ij}$ na kroku (n+1) jest wyrażona przez transformację drugiego tensora naprężenia Pioli - Kirchhoffa

$${}^{n+1}\tau_{ij} = \frac{\rho}{\rho} \frac{{}^{n+1}x_{i,m} \quad {}^{n+1}S_{mp} \quad {}^{n+1}x_{j,p}}{\rho}, \quad \text{gdzie } \frac{{}^{n+1}x_{i,j}}{\rho} \text{ jest}$$

gradientem deformacji.

- całkowite odkształcenie Greena - Lagrange'a równe przyrostowi odkształcenia na kroku Δt wyraża się przez sumę części liniowej i nieliniowej.

$${}^{n+1}\epsilon_{ij} = {}^n\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad \text{w } {}^n\Omega;$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \eta_{i,j} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j};$$

- równanie konstytutywne dla materiału sprężysto - plastycznego

$${}^nS_{ij} = {}^nC_{ijkl} {}^n\epsilon_{kl} \quad \text{w } {}^n\Omega; \quad (2.2)(1)$$

- warunki brzegowe wyrażone w przemieszczeniach

$${}^n\tilde{u} = {}^n\phi \quad \text{na } {}^n\Gamma_U, \quad \text{gdzie } {}^n\phi \text{ niekoniecznie musi być zerem,}$$

- warunki brzegowe wyrażone w siłach

$${}^nS_{ij} n_j = {}^nF_i \text{ na } {}^n\Gamma_F; \quad {}^nF_N = 0 \text{ na } {}^n\hat{\Gamma}_F; \quad {}^nF_N = \hat{\Phi} \text{ na } {}^n\hat{\Gamma}_F;$$

$${}^n\Gamma_F = {}^n\hat{\Gamma}_F \cup {}^n\hat{\Gamma}_F;$$

Pozostałe warunki wyrażone w siłach i przemieszczeniach wynikają z prawa tarcia.

- subróżniczkowalne warunki siłowe wynikające z prawa tarcia Coulomba

$$\text{Jeśli } |{}^nF_T| < \mu |{}^nF_N| \text{ wówczas } {}^n\tilde{u}_T = 0 \text{ na } {}^n\Gamma_S;$$

jeśli $|\overset{n}{F}_T| = \mu |\overset{n}{F}_N|$ wówczas $\exists \lambda \geq 0$ takie, że $\dot{\underset{n}{u}}_T = -\lambda \overset{n}{F}_T$ na $\overset{n}{\Gamma}_S$.

Brzeg ciała $\overset{n}{\Omega}$ (Rys. 2.1.c) został podzielony na nierozłączne podobszary spełniające warunek

$$\overset{n}{\Gamma}_F \cup \overset{n}{\Gamma}_U \cup \overset{n}{\Gamma}_S = \overset{n}{\Gamma} = \partial \overset{n}{\Omega},$$

gdzie $\overset{n}{\Gamma}_F$ - część brzegu na której znane są siły,

$\overset{n}{\Gamma}_U$ - podobszar o zadanych przemieszczeniach,

$\overset{n}{\Gamma}_S$ - powierzchnia na której określono warunki subróżniczkowalne.

Składową normalną i styczną wektora naprężenia określa się z następujących wzorów

$$\overset{n}{F}_N = \overset{n}{S}_{ij} N_i N_j = ({}^{n-1}T_{ij} + {}^{n-1}S_{ij}(\Delta t)) N_i N_j;$$

$$\begin{aligned} \overset{n}{F}_{T_i} &= \overset{n}{S}_{ij} N_j - ({}^n S_{ij} N_i N_j) N_i = ({}^{n-1}T_{ij} + {}^{n-1}S_{ij}(\Delta t)) N_j + \\ &- [({}^{n-1}T_{ij} + {}^{n-1}S_{ij}(\Delta t)) N_i N_j] N_i. \end{aligned}$$

Funkcjonał, który określa równowagę ciała na n -tym kroku analizy tzn. dla $\xi \in (t, t + \Delta t)$; $t = n\Delta t$ i odpowiada (2.3) w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a, ma postać

$$\begin{aligned} &\int_{\overset{n}{\Omega}} ({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} \frac{u_{i,l}}{n_{i,l}}) ({}^n v_{i,k} - \dot{u}_{i,k}) dV + \\ &- \int_{\overset{n}{\Gamma}_F} {}^{n+1}F_i ({}^n v_i - \dot{u}_i) d\gamma - \int_{\overset{n}{\Gamma}_S} [{}^{n+1}F_N ({}^n v_N - \dot{u}_N) + \\ &{}^{n+1}F_{T_i} ({}^n v_{T_i} - \dot{u}_{T_i})] d\gamma + \int_{\overset{n}{\Omega}} \rho {}^{n+1}f_i ({}^n v_i - \dot{u}_i) dV + \\ &+ \int_{\overset{n}{\Omega}} \rho {}^n t_i ({}^n v_i - \dot{u}_i) dV = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

dla $\underline{v} \in V \subset H^1(\overset{n}{\Omega})$.

gdzie $\dot{\underset{n}{u}}$ określa się względem układu odniesienia wybranego na początku kroku n -tego.

Problem (2.5), gdzie warunki brzegowe wyrażone w przemieszczeniach i siłach są określone na tej samej powierzchni tj. $\overset{n}{\Gamma}_U \cap \overset{n}{\Gamma}_S \neq \emptyset$ jest zagadnieniem z ruchomym brzegiem, które nie ma jednoznacznego rozwiązania. Stosując APROKSYMACJĘ WARUNKÓW TARCIA, gdzie zakłada się, że siły występujące na powierzchni $\overset{n}{\Gamma}_S$ w chwili n -tej są takie same jak na końcu kroku $(n-1)$, można uniknąć badania

zagadnienia z ruchomym brzegiem.

Wobec tego założenia funkcjonal (2.5) ma postać

$$\int_{\Omega} ({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} u_{i,l}) ({}^n v_{i,k} - \dot{u}_{i,k}) dV - \int_{\Gamma_F} {}^{n+1}F_i ({}^n v_i - \dot{u}_i) d\gamma - \int_{\Gamma_S} {}^n F_N ({}^n v_N - \dot{u}_N) d\gamma + \int_{\Omega} {}^{n+1}f_i {}^{n+1}\rho ({}^n v_i - \dot{u}_i) dV + \int_{\Omega} {}^{n+1}\rho \dot{t}_i ({}^n v_i - \dot{u}_i) dV = \int_{\Gamma_S} {}^n F_{T_i} ({}^n v_{T_i} - \dot{u}_{T_i}) d\gamma. \quad (2.5)(a)$$

W zmodyfikowanym opisie Lagrange'a przemieszczenie ${}^{n+1}u$ w chwili $n+1$ jest mierzone względem aktualnego układu odniesienia ustalonego po zakończeniu kroku n -tego. Na początku każdego kroku przemieszczenie jest zerowe, dlatego można napisać relację równości ${}^{n+1}u = {}^n u$, gdzie u ma sens przyrostu przemieszczenia. W związku z tym składowe prędkości przemieszczenia ${}^{n+1}\dot{u}_i = \dot{u}_i$ można aproksymować biorąc różnicę skończoną

$${}^{n+1}\dot{u}_i(\xi) \cong \frac{1}{\Delta t} [{}^{n+1}u_i(\xi) - {}^{n+1}u_i(0)], \quad \xi \in (0, \Delta t), \quad 0 < \Delta t < 1,$$

gdzie ${}^{n+1}u_i(0) = {}^n u_i = 0$ dla $\forall n \in N$.

Wobec tego godząc się z założeniem o ruchu jednostajnym w przedziale czasu Δt otrzymuje się zależność

$${}^{n+1}\dot{u}_i = \dot{u}_i \cong \frac{1}{\Delta t} u_i, \quad 0 < \Delta t < 1.$$

Aproksymacja różnicowa prędkości pozwala napisać funkcjonal (2.5)(a) w postaci

$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} ({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} u_{i,l}) ({}^n v_{i,k} - u_{i,k}) dV + \int_{\Omega} {}^{n+1}\rho \dot{t}_i ({}^n v_i - u_i) dV - \int_{\Gamma_F} {}^{n+1}F_i ({}^n v_i - u_i) d\gamma - \int_{\Gamma_S} {}^n F_N ({}^n v_N - u_N) d\gamma + \int_{\Omega} {}^{n+1}f_i {}^{n+1}\rho ({}^n v_i - u_i) dV \right\} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Gamma_S} {}^n F_{T_i} ({}^n v_{T_i} - u_{T_i}) d\gamma \right\}$$

dla $v \in H^1(\Omega)$.

Eliminując obustronnie człon $\frac{1}{\Delta t}$ i dodając do obydwu stron powyższej równości następujące wyrażenia

$$j(\underline{v}_{n-T}) - j(\underline{u}_{n-T}),$$

gdzie $j(\underline{v}_{n-T}) = \int_{\Gamma_S} \mu |F_N| |\underline{v}_{n-T}| dy$ jest dysypacją energii na skutek

występowania zjawisk tarcia, otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} n_{i,l})(v_{n,i,k} - u_{n,i,k}) dV + \int_{\Omega} \rho_n \dot{t}_i (v_{n,i} - u_{n,i}) dV \\ & + j(\underline{v}_{n-T}) - j(\underline{u}_{n-T}) - \int_{\Gamma_F} {}^{n+1}F_i (v_{n,i} - u_{n,i}) dy - \int_{\Gamma_S} F_N (v_{n,N} - u_{n,N}) dy + \\ & + \int_{\Omega} {}^{n+1}f_i {}^{n+1}\rho (v_{n,i} - u_{n,i}) dV = \int_{\Gamma_S} F_{T_i} (v_{n,T_i} - u_{n,T_i}) dy + \\ & + \int_{\Gamma_S} \mu |F_N| (|\underline{v}_{n-T}| - |\underline{u}_{n-T}|) dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dysypacja energii na skutek występowania zjawisk tarcia jest nieujemna i wyrażenie po prawej stronie szacuje się następująco

$$\int_{\Gamma_S} [F_{T_i} (v_{n,T_i} - u_{n,T_i}) + \mu |F_N| (|\underline{v}_{n-T}| - |\underline{u}_{n-T}|)] dy \geq 0.$$

Według Duvaut i Lionsa (1976) powyższa nierówność wynika z własności funkcjonału $\Phi: V \subset H^{1/2} \rightarrow \mathbb{R}$, który jest wypukły i ma postać

$$\Phi(\underline{v}) := F_{T_i} v + \mu |F_N| |\underline{v}|, \quad |\underline{v}| = \sqrt{v_i v_i} \quad (2.7)$$

gdzie F_{T_i} i $|F_N|$ są składowymi stycznymi i długością składowej normalnej wektora naprężenia a v_i i $|\underline{v}|$ są składowymi prędkości przemieszczenia lub przemieszczenia w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a.

Jeśli funkcjonał jest wypukły, to spełniona jest relacja

$$\Phi(x\underline{v} + (1-x)\underline{w}) \leq x\Phi(\underline{v}) + (1-x)\Phi(\underline{w}), \quad \forall x \in [0,1] \quad (2.8)(i)$$

pod warunkiem, że prawa strona jest określona.

Sprawdzając warunek wypukłości funkcjonału (2.7) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa v + (1 - \kappa)w) &= F_{T_i}(\kappa v_i + (1 - \kappa)w_i) + \mu |F_{N_i}| |\kappa v + (1 - \kappa)w| \leq \\ &\leq \kappa F_{T_i} v_i + (1 - \kappa) F_{T_i} w_i + \kappa \mu |F_{N_i}| |v| + (1 - \kappa) \mu |F_{N_i}| |w| = \\ &= \kappa (F_{T_i} v_i + \mu |F_{N_i}| |v|) + (1 - \kappa) (F_{T_i} w_i + \mu |F_{N_i}| |w|). \end{aligned}$$

(2.8)(11)

Można zauważyć, że funkcjonal (2.7) ma następujące własności :

- jest wypukły,
- jest koercywny tzn. nie osiąga minimum dla $|v| = \infty$ i dla $|v| = 0$ jest równy zeru,
- ma minima skończone,

co oznacza, że ma jedno minimum i zachodzi następująca nierówność $\exists ! w \in V \subset H^{1/2}$, $\Phi(w) \leq \Phi(v)$, $\forall v \in V \subset H^{1/2}$

która jest równoważna nierówności

$$F_{T_i}(v_i - w_i) + \mu |F_{N_i}| (|v| - |w|) \geq 0, \quad \forall v \in V \subset H^{1/2}. \quad (2.9)$$

co ze względu na własności iloczynu skalarnego wektorów

$$F_{T_i}(v_i - w_i) = |F_{T_i}| |v - w| \cos(\widehat{F_{T_i}}, \widehat{\omega}) + |F_{T_i}| |v - w| \cos(\widehat{F_{T_i}}, \widehat{\omega_N})$$

gdzie $\cos(\widehat{F_{T_i}}, \widehat{\omega_N}) = 0$, $\omega = v - w$,

można zapisać w postaci

$$F_{T_i}(v_i - w_i) + \mu |F_{N_i}| (|v| - |w|) \geq 0.$$

Wykorzystując $|F_{T_i}| = \mu |F_{N_i}|$ otrzymuje się

$$F_{T_i}(v_i - w_i) + |F_{T_i}| (|v| - |w|) \geq 0. \quad (2.10)$$

Biorąc nierówność (2.10) dla $v = 2w$ otrzymuje się

$$F_{T_i} w_i + |F_{T_i}| |w| \geq 0. \quad (2.10)(1)$$

Z warunku (2.9) i (2.10)(1) dla $v = 0$ wynikają następujące nierówności

$$0 \leq F_{T_i} v_i - F_{T_i} w_i + \mu |F_{N_i}| |v| - \mu |F_{N_i}| |w| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |F_T| |w_T| - \mu |F_N| |w_T| + F_{T_i} v_i + \mu |F_N| |v| \leq \\ &\leq |w_T| (|F_T| - \mu |F_N|), \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie dla $f(F_{-T}, F_{-N}) = |F_{-T}| - \mu |F_{-N}| < 0$ wynika $w_T = 0$.

Wykorzystując w (2.10) $v = 0$ otrzymuje się warunek przeciwny do (2.10)(i) tj.

$$F_{T_i} w_{T_i} + |F_{-T}| |w_T| \leq 0. \quad (2.10)(ii)$$

Wobec (2.10)(i) i (2.10)(ii), jeśli w jest rozwiązaniem nierówności (2.9) to zachodzi relacja równości

$$F_{T_i} w_{T_i} + |F_{-T}| |w_T| = 0. \quad (2.12)$$

gdzie $F_{T_i} w_{T_i} = |F_{-T}| |w_T| \cos(\widehat{F_{-T}, w_T})$ jest iloczynem skalarnym.

Warunek (2.12) zachodzi, jeśli $\cos(\widehat{F_{-T}, w_T}) = -1$, co oznacza, że wektory w_T i F_{-T} są równoległe i przeciwnie skierowane, tzn.

$$w_T = -\lambda F_{-T} \quad \text{dla } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Słuszny jest następujący lemat (Duvaut i Lions (1976)):

LEMAT 2.1

Składowa styczna prędkości przemieszczenia w_T (lub przemieszczenia w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a) jest zgodna z prawem tarcia Coulomba wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek (2.9), tzn. jeśli jest rozwiązaniem nierówności w $H^{1/2}$.

$$F_{T_i} (v_{T_i} - w_{T_i}) + \mu |F_{-N}| (|v_T| - |w_T|) \geq 0, \forall v \in V_T \subset H^{1/2} \quad (2.13)$$

gdzie V_T jest rozmaitością wektorów prędkości przemieszczenia stycznego (lub przemieszczenia stycznego w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a). Wobec nierówności (2.13) zależność (2.6) można również przedstawić w postaci nierówności

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} ({}^{n+1}S_{kl} \delta_{il} + {}^{n+1}S_{kl} u_{i,l}) (v_{i,k} - u_{i,k}) dv + \\
& + \int_{\Omega} {}^{n+1}\rho \ t_i (v_i - u_i) dv + j({}_{n-T}^n v) - j({}_{n-T}^n u) + \\
& - \int_{\Gamma_F} {}^{n+1}F_i (v_i - u_i) d\gamma - \int_{\Gamma_S} {}^n F_N (v_N - u_N) d\gamma + \\
& + \int_{\Omega} {}^{n+1}f_i \ {}^{n+1}\rho (v_i - u_i) dv \geq 0. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Wykorzystując w (2.14) zależność określającą ${}^{n+1}S_{ij}$ otrzymuje się nierówność wariacyjną

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} ({}^n \tau_{kl} + S_{kl}) (\delta_{il} + u_{i,l}) (v_{i,k} - u_{i,k}) dv + \int_{\Omega} {}^{n+1}\rho \ t_i (v_i - u_i) dv + \\
& + j({}_{n-T}^n v) - j({}_{n-T}^n u) - \int_{\Gamma_F} {}^{n+1}F_i (v_i - u_i) d\gamma - \int_{\Gamma_S} {}^n F_N (v_N - u_N) d\gamma + \\
& + \int_{\Omega} {}^{n+1}f_i \ {}^{n+1}\rho (v_i - u_i) dv \geq 0. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Pierwszą całkę w (2.15) można aproksymować następująco

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} ({}^n \tau_{kl} + S_{kl}) (\delta_{il} + u_{i,l}) (v_{i,k} - u_{i,k}) dv \cong \\
& \cong \int_{\Omega} S_{kl} \delta_{il} (v_{i,k} - u_{i,k}) dv + \int_{\Omega} {}^n \tau_{kl} \delta_{il} (v_{i,k} - u_{i,k}) dv + \\
& + \int_{\Omega} {}^n \tau_{kl} u_{i,l} (v_{i,k} - u_{i,k}) dv,
\end{aligned}$$

przyjmując, że $S_{kl} u_{i,l} (v_{i,k} - u_{i,k}) \cong 0$

dla $\underline{u} \in K = \{u; |\nabla u| \leq 1\}$, $K \subset H^1$, $\underline{v} \in H^1$.

Stosując powyższe przybliżenie oraz podstawiając do (2.15) równanie konstytutywne z liniową częścią odkształcenia e_{ij} otrzymuje się nierówność wariacyjną

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{n_{\Omega}} C_{ijkl}^{EP} (u_{i,j} + u_{j,i})(v_{k,l} - u_{k,l}) dV + \int_{n_{\Omega}} \tau_{kl} (v_{k,l} - u_{k,l}) dV + \\
& + \int_{n_{\Omega}} \tau_{kl} u_{i,l} (v_{i,k} - u_{i,k}) dV + \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} (v_i - u_i) dV \\
& + j(c_{n^+} v) - j(c_{n^+} u) - \int_{\Gamma_F} \rho_{n_i}^{n+1} F_i (v_i - u_i) d\gamma - \int_{\Gamma_S} F_N (v_N - u_N) d\gamma + \\
& + \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} f_i (v_i - u_i) dV \geq 0. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Aproksymując przyspieszenie $\rho_{n_i}^{n+1}$ ilorazem różnicowym

$$\rho_{n_i}^{n+1} = a_{1, n-2} u_i + a_{2, n-1} u_i + a_{3, n} u_i,$$

całą uwzględniającą siły bezwładności można zastąpić następującym wyrażeniem

$$\begin{aligned}
& \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} (v_i - u_i) dV \cong \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i} a_{3, n} u_i (v_i - u_i) dV + \\
& + \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} (a_{1, n-2} u_i + a_{2, n-1} u_i) (v_i - u_i) dV,
\end{aligned}$$

gdzie dla siatki równomiernej $a_{3, n} = \frac{1}{\Delta t^2}$

Nierówność (2.16) wyrażoną przez funkcjonały uśrednione względem czasu można przedstawić następująco

$$\langle AC_{n^+} u, v - u \rangle + j(c_{n^+} v) - j(c_{n^+} u) \geq \langle \underline{f}, v - u \rangle, \tag{2.17}$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\langle AC_{n^+} u, v - u \rangle := a(c_{n^+} u, v - u) + \frac{1}{\Delta t^2} \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i} u_i (v_i - u_i) dV;$$

$$a(c_{n^+} u, v - u) := \frac{1}{2} \int_{n_{\Omega}} C_{ijkl}^{EP} (u_{i,j} + u_{j,i})(v_{k,l} - u_{k,l}) dV +$$

$$+ \int_{n_{\Omega}} \tau_{kl} u_{i,l} (v_{i,k} - u_{i,k}) dV;$$

$$\langle \underline{f}, v - u \rangle := - \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} f_i (v_i - u_i) dV +$$

$$- \int_{n_{\Omega}} \rho_{n_i}^{n+1} (a_{1, n-2} u_i + a_{2, n-1} u_i) (v_i - u_i) dV +$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{n\Omega} n\tau_{kl} (n v_{k,l} - n u_{k,l}) dv + \\
 & + \int_{n\Gamma_F} n F_i (n v_i - n u_i) dy - \int_{n\Gamma_S} n F_N (n v_N - n u_N) dy
 \end{aligned}$$

Powyższe sformułowanie niestacjonarnego zagadnienia kontaktowego uzupełnia opis procedury pozwalającej na przybliżone określenie brzegu obszaru $n^{+1}\Omega$ oraz podobszaru styku dwóch ciał $n^{+1}\Gamma_S$ (Rys. 2.2).

Położenie środka $n^{+1}C$ sztywnego walca zawieszonoego lepkosprężystości wyznaczają następujące zależności

$$n^{+1}x_c = n x_c - R\omega\Delta t,$$

$$n^{+1}y_c = n y_c + n u_{NR},$$

gdzie m_R, c_R, k_R, ω oznaczają odpowiednio masę, tłumienie i sztywność zawieszenia walca oraz prędkość kątową. Przemieszczenie środka walca w kierunku pionowym u_{NR} określa się rozwiązując równanie różniczkowe ruchu

$$m_R \ddot{u}_{NR} + c_R \dot{u}_{NR} + k_R u_{NR} = \int_{n\Gamma_S} n F_N dy. \quad (2.18)$$

Wstępnie powierzchnię $n^{+1}\Gamma_S$ określa się rozwiązując układ równań $(x - n^{+1}x_c)^2 + (y - n^{+1}y_c)^2 = R^2$, (2.19)

$$\left. \begin{aligned}
 y &= G/2 && \text{dla } x \in (0, x_n^A), \\
 (x - n x_c)^2 + (y - n y_c)^2 &= R^2 && \text{dla } x \in (x_n^A, x_n^B), \\
 y &= g/2 && \text{dla } x \in (x_n^B, L),
 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

gdzie (2.19) jest równaniem okręgu $n^{+1}\Gamma_R$ a układ równań (2.20) określa powierzchnię górną Γ_{upp} . Ponadto przyjęto, że G i g są grubościami pasma sprężysto-plastycznego a L oznacza jego długość (Rys. 2.2).

Ostatecznie obszar styku $n^{+1}\Gamma_S$ ustala się na podstawie warunków siłowych tj.

$$n^{+1}\Gamma_S = \{ P_i \in n^{+1}\Gamma_S; n^{+1}F_N(P_i) > 0 \},$$

gdzie $n^{+1}\Gamma_S$ jest wstępnie określoną powierzchnią styku $n^{+1}\Gamma_S$. Punkt P_i należący do $n^{+1}\Gamma_S$ znajduje się poza obszarem styku $n^{+1}\Gamma_S$, jeśli wektor normalny naprężenia $n^{+1}F_N$ w tym punkcie spełnia

warunek $n+1 F_N(P_i) \geq 0$.

Postępując dalej z nierównością (2.17) tak jak dla przypadku stacjonarnego rozpatruje się zadanie: znaleźć $\underline{u} \in V$ takie, że

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} - \underline{u} \rangle + j(\underline{v}) - j(\underline{u}) \geq \langle \underline{f}, \underline{v} - \underline{u} \rangle, \quad \forall \underline{v} \in V_n; \quad (2.17)^*$$

gdzie $j(\underline{v}) = \int_{\Gamma_S} g(\underline{x}) |\gamma * \underline{v}| d\sigma$, $g(\underline{x}) = \mu |F_N|$, $\underline{x} \in \Gamma_S \subset \partial\Omega$ i miara $\Gamma_S > 0$,

$$V_n = H^1(\Omega),$$

a operacja śladu $\gamma * \underline{v}$ jest zdefiniowana następująco

$$\gamma: \langle v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_S} = 0 \rangle \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_S) \subset L^2.$$

Zbiór $\langle \rangle^\perp$ jest ortogonalnym dopełnieniem podprzestrzeni $H^1(\Omega)$ zawierającej funkcje \underline{v} znikające na brzegu Γ_S .

Zakładając, że operator $A: V_n + V_n^*$ jest ściśle monotoniczny i ciągły w sensie Lipschitza tzn.

$$\langle \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{u}_1 - \underline{u}_2 \rangle > 0; \quad \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in D(A); \quad \forall \underline{v}_1 \in A(\underline{u}_1); \\ \forall \underline{v}_2 \in A(\underline{u}_2),$$

$$\|A(\underline{u}_1) - A(\underline{u}_2)\|_{V_n^*} \leq M \|\underline{u}_1 - \underline{u}_2\|,$$

i ponadto $\underline{f} \in V_n^*$, zachodzi następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności:

TWIERDZENIE 2.1

Funkcja \underline{u} jest rozwiązaniem nierówności wariacyjnej (2.17)* wtedy i tylko wtedy, kiedy para $\langle \lambda, \underline{u} \rangle$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle + \int_{\Gamma_S} g \lambda \circ (\gamma * \underline{v}) d\sigma = \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle, \quad \forall \underline{v} \in V_n \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \in \beta \in L^2(\Gamma_S), |\beta(\underline{x})| \leq 1 \text{ prawie wszędzie na } \Gamma_S, \underline{x} \in \Gamma_S, \\ \lambda \circ (\gamma * \underline{u}) = |\gamma * \underline{u}|. \end{aligned} \right\} (2.22)$$

gdzie " \circ " oznacza iloczyn skalarny a " $\gamma *$ " jest operacją śladu.

DOWÓD:

Najpierw należy pokazać, że (2.17) pociąga za sobą (2.21) i (2.22). Biorąc $\underline{v} = 0$ i $\underline{v} = 2\underline{u}$ w (2.17) otrzymuje się dwie przeciwne relacje

$$-\langle A(\underline{u}), \underline{u} \rangle - j(\underline{u}) \geq -\langle \underline{f}, \underline{u} \rangle,$$

$$\langle A(\underline{u}), \underline{u} \rangle + j(\underline{u}) \geq \langle \underline{f}, \underline{u} \rangle,$$

co implikuje relację równości

$$\langle A(\underline{u}), \underline{u} \rangle + j(\underline{u}) = \langle \underline{f}, \underline{u} \rangle. \quad (2.23)$$

Z nierówności (2.17)* i równania (2.23) wynika

$\langle \underline{f}, \underline{v} \rangle - \langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle \leq j(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in V$
co pociąga za sobą

$$\langle \underline{f} - A(\underline{u}), \underline{v} \rangle \leq j(\underline{v}) = \int_{\Gamma_S} g |\gamma * \underline{v}| d\sigma.$$

Przestrzeń $H^1(\Omega)$ można przedstawić jako sumę podprzestrzeni $H^1_{0\Gamma_S}(\Omega) = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega); \underline{v}|_{\Gamma_S} = 0 \}$ zawierającej funkcje znikające na brzegu Γ_S oraz ortogonalnego dopełnienia tej podprzestrzeni $[H^1_{0\Gamma_S}]^\perp$, tj. $H^1(\Omega) = H^1_{0\Gamma_S}(\Omega) + [H^1_{0\Gamma_S}(\Omega)]^\perp$.

Wobec tego operację rzutu γ można przedstawić jako izomorfizm $\gamma: [H^1_{0\Gamma_S}(\Omega)]^\perp + H^{1/2}(\Gamma_S)$.

Zatem istnieje liniowy i ciągły funkcjonal ϕ na $H^{1/2}(\Gamma_S)$ taki, że

$$\langle \underline{f} - A(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \phi(\gamma * \underline{v}) \quad (2.23)^*$$

$$|\phi(\underline{w})| \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_S)} \| \underline{w} \|_{L^1(\Gamma_S)}, \quad \forall \underline{w} \in H^{1/2}(\Gamma_S).$$

Ponieważ $H^{1/2}(\Gamma_S) \subset L^1(\Gamma_S)$ zatem na mocy twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcja $\underline{\lambda} \in L^\infty(\Gamma_S)$ taka, że

$$|\underline{\lambda}(\underline{x})| \leq 1 \quad i \quad \phi(\underline{w}) = \int_{\Gamma_S} g(\underline{x}) \underline{\lambda}(\underline{x}) * \underline{w}(\underline{x}) dx, \quad \forall \underline{w} \in H^{1/2}(\Gamma_S).$$

Zatem z (2.23)* otrzymuje się

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle + \int_{\Gamma_S} g(\underline{x}) \underline{\lambda}(\underline{x}) * (\gamma * \underline{v})(\underline{x}) dx = \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle, \quad \forall \underline{v} \in V. \quad (2.24)$$

Biorąc w (2.24) $\underline{v} = \underline{u}$ otrzymuje się

$$\langle A(\underline{u}), \underline{u} \rangle + \int_{\Gamma_S} g(\underline{x}) \underline{\lambda}(\underline{x}) * (\gamma * \underline{u})(\underline{x}) dx = \langle \underline{f}, \underline{u} \rangle.$$

Korzystając z (2.23) otrzymuje się zależność

$$\int_{\Gamma_S} g \underline{\lambda} * (\gamma * \underline{u}) d\sigma = j(\underline{u}) = \int_{\Gamma_S} g |\gamma * \underline{u}| d\sigma,$$

która można wyrazić w następującej postaci

$$\int_{\Gamma_S} g [|\gamma * \underline{u}| - \underline{\lambda} * (\gamma * \underline{u})] d\sigma = 0.$$

Skąd otrzymuje się równość

$$|\gamma * \underline{u}| = \underline{\lambda} * (\gamma * \underline{u}),$$

ponieważ $g > 0$ i $|\underline{\lambda}| \leq 1$ prawie wszędzie na Γ_S .

Wobec tego wykazano, że z (2.17)* wynikają zależności (2.21) i (2.22) podane w twierdzeniu (2.1).

Niech teraz para $(\underline{\lambda}, \underline{u})$ będzie rozwiązaniem (2.21), (2.22).

Zatem biorąc różnicę $(\underline{v} - \underline{u})$ w (2.21) otrzymuje się

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} - \underline{u} \rangle + \int_{\Gamma_S} g_{\lambda} \cdot (\gamma^* \underline{v}) d\sigma - \int_{\Gamma_S} g_{\lambda} \cdot (\gamma^* \underline{u}) d\sigma = \langle \underline{f}, \underline{v} - \underline{u} \rangle.$$

Stąd i z (2.22) wynika zależność

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} - \underline{u} \rangle + \int_{\Gamma_S} g_{\lambda} \cdot (\gamma^* \underline{v}) d\sigma - \int_{\Gamma_S} g |\gamma^* \underline{u}| d\sigma = \langle \underline{f}, \underline{v} - \underline{u} \rangle. \quad (2.25)$$

Ponieważ $|\lambda| \leq 1$ prawie wszędzie na Γ_S to z (2.22) wynika nierówność

$$\int_{\Gamma_S} g_{\lambda} \cdot (\gamma^* \underline{v}) d\sigma \leq \int_{\Gamma_S} g |\gamma^* \underline{v}| d\sigma,$$

zatem z (2.25) otrzymuje się

$$\langle A(\underline{u}), \underline{v} - \underline{u} \rangle + j(\underline{v}) - j(\underline{u}) \geq \langle \underline{f}, \underline{v} - \underline{u} \rangle, \quad \forall \underline{v} \in V_n,$$

co kończy dowód twierdzenia (2.1).

2.2. FUNKCJE MATERIAŁOWE W ZMODYFIKOWANYM OPISIE LAGRANGE'A.

Funkcje materiałowe zostały określone dla płaskiego stanu odkształcenia, ponieważ w rozwiązanych przykładach przyjęto taką idealizację procesu odkształcenia.

Powierzchnia pnięcia jest walcem w przestrzeni naprężeń głównych, który jest opisany równaniem:

$$n_f = \frac{1}{2} n_{s_{ij}} n_{s_{ij}} - \frac{1}{3} n_{\sigma_{pl}}^2 = 0, \quad (2.26)$$

gdzie $n_{s_{ij}} = n_{\tau_{ij}} - \frac{1}{3} n_{\tau_{ij}} \delta_{ij}$ są składowymi dewiatora naprężenia Kirchhoffa.

Warunek pnięcia materiału plastycznego ma następującą postać:

$$n_f(n_{\tau_{ij}}, n_k) = 0 \quad (2.27)$$

gdzie $n_k = \frac{1}{3} n_{\sigma_{pl}}^2$.

Granica plastyczności $n_{\sigma_{pl}}$ w chwili t zależy od pracy plastycznej $n_{W^{pl}}$ liczonej na jednostkę objętości

$$n_{W^{pl}} = \int_0^{n_{\sigma_{pl}}^p} n_{\tau_{ij}} de_{ij}^p. \quad (2.28)$$

Moduł sprężysto-plastyczny w równaniu konstytutywnym (2.2)(1)

wyraża się w postaci macierzowej

$$\underline{\underline{C}}^{\text{EP}} = \underline{\underline{C}}^{\text{E}} - \frac{\underline{\underline{C}}^{\text{E}} \underline{\underline{n}}_g (\underline{\underline{C}}^{\text{E}} \underline{\underline{n}}_g)^{\text{T}}}{\underline{\underline{n}}_p^{\text{T}} \underline{\underline{n}}_g + \underline{\underline{n}}_g^{\text{T}} \underline{\underline{C}}^{\text{E}} \underline{\underline{n}}_g} \quad (2.29)$$

gdzie macierz sprężysta $\underline{\underline{C}}^{\text{E}}$ dla płaskiego stanu odkształcenia i wektory $\underline{\underline{p}}$ i $\underline{\underline{g}}$ są zdefiniowane następująco:

$$\underline{\underline{n}}_{q_{ij}} = \frac{\partial^n \epsilon}{\partial^n \tau_{ij}} ; \quad \underline{\underline{n}}_{p_{ij}} = - \frac{\partial^n \epsilon}{\partial^n e_{ij}^p} ;$$

$$\underline{\underline{C}}^{\text{E}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

W powyższych zależnościach E jest modułem Younga, a ν oznacza liczbę Poissona.

Składowe wektorów $\underline{\underline{n}}_g$ i $\underline{\underline{n}}_p$ określa się z zależności (Bathe (1982))

$$\underline{\underline{n}}_{p_{ij}} = \left(\frac{2}{3} n_{\sigma_{pl}} \frac{d\sigma_{pl}}{dW^{pl}} \right) \underline{\underline{n}}_{\tau_{ij}} = \frac{2}{3} \left(\frac{E E_T}{E - E_T} \right) \underline{\underline{n}}_{\tau_{ij}} \quad (2.30)(i)$$

$$\underline{\underline{n}}_{q_{ij}} = \underline{\underline{n}}_{s_{ij}} \quad (2.30)(ii)$$

gdzie E_T jest modułem stycznym określonym na podstawie wykresu próby jednoosiowego rozciągania dla danego materiału.

Macierz $\underline{\underline{C}}^{\text{EP}}$, dla płaskiego stanu odkształcenia, której elementy jawnie zależą od dewiatora naprężenia $\underline{\underline{n}}_{s_{ij}}$ wyraża się następująco:

$$\underline{\underline{C}}^{\text{EP}} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \beta n_{s_{11}}^2 & \frac{\nu}{1-2\nu} - \beta n_{s_{11}} n_{s_{22}} & -\beta n_{s_{11}} n_{s_{12}} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \beta n_{s_{22}} n_{s_{11}} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \beta n_{s_{22}}^2 & -\beta n_{s_{22}} n_{s_{12}} \\ -\beta n_{s_{12}} n_{s_{11}} & -\beta n_{s_{12}} n_{s_{22}} & \frac{1}{2} - \beta n_{s_{12}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{gdzie } \beta = \frac{3}{2} \frac{1}{n_{\sigma}^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{E}{E_T} \frac{1+\nu}{E}} \right)$$

2.3. WARUNKI BRZEGOWE

Problem toczenia się sztywnego walca po sprężysto-plastycznym paśmie został sformułowany z warunkami, które można podzielić na klasyczne warunki brzegowe typu Dirichletta lub mieszane i warunki kontaktowe. Warunki kontaktowe muszą być spełnione w obszarze styku dwóch ciał. Wynikają one z ograniczeń geometrycznych lub z prawa tarcia. Poza powierzchnią styku mamy do czynienia z klasycznym zadaniem mechaniki ciała stałego.

Ograniczeniem geometrycznym jest nieprzenikalność ciał czyli warunek na ${}_{n-N}^u$ w postaci

$${}_{n-N}^u(x) - \rho(x) \leq 0 \quad \text{dla } x \in \Gamma_S,$$

gdzie $\rho(x)$ jest zadana funkcją określającą zagłębienie jednego ciała w drugim.

W obszarze styku Γ_S występują naprężenia ściskające, stąd ${}_{n-N}^n F \leq 0$. Jeśli ciała stykają się, to wówczas ${}_{n-N}^u = \rho$. Jeśli ciała nie stykają się, to powierzchnia Γ_S jest swobodna i ${}_{n-N}^n F = 0$. Wobec tego iloczyn skalarny wektora normalnego naprężenia ${}_{n-N}^n F$ i różnicy stycznego wektora przemieszczenia ${}_{n-N}^u$ i funkcji ρ spełnia warunek ${}_{n-N}^n F \cdot ({}_{n-N}^u - \rho) = 0$. Zależności te nazywają się warunkami Signoriniego i zapisuje się je w postaci:

$${}_{n-N}^u - \rho \leq 0, \quad {}_{n-N}^n F \leq 0,$$

$${}_{n-N}^n F \cdot ({}_{n-N}^u - \rho) = 0 \quad \text{na } \Gamma_S. \quad (2.31)$$

Składowe normalne i styczne wektora naprężenia i przemieszczenia są określone wzorami:

$${}_{n-N}^n F = {}^n S_{ij} n_i n_j, \quad {}_{n-N}^t F = {}^n S_{ij} n_j - ({}^n S_{ij} n_i n_j) n_i \quad (2.32)(i)$$

$${}_{n-N}^u = {}_n u_i n_i, \quad {}_{n-N}^t u = {}_n u - {}_n u_N n \quad (2.32)(ii)$$

Prawo tarcia Coulomba można przedstawić następująco:

- jeśli $|\overset{n}{F}_{\sim T}| < -\mu |\overset{n}{F}_{\sim N}|$ wówczas $\overset{u}{n}_{\sim T} = 0$

- jeśli $|\overset{n}{F}_{\sim T}| = -\mu |\overset{n}{F}_{\sim N}|$ to istnieje takie $\lambda \geq 0$, że
 $\overset{u}{n}_{\sim T} = -\lambda \overset{n}{F}_{\sim T}$.

Zależności te oznaczają, że jeśli długość siły stycznej $|\overset{n}{F}_{\sim T}|$ jest mniejsza od długości siły tarcia $-\mu |\overset{n}{F}_{\sim N}|$, to wtedy walec przylega adhezyjnie do pasma sprężysto-plastycznego i wówczas $\overset{u}{n}_{\sim T} = 0$.

Jeśli długość siły stycznej jest równa długości siły tarcia, to przemieszczenie styczne jest skierowane przeciwie do siły stycznej.

Warunki Signoriniego w sposób przybliżony określają reakcję stykających się powierzchni i bazują na założeniu, że powierzchnie te są idealnie gładkie. Oznacza to, że nie zakłada się żadnych własności fizycznych stykających się powierzchni.

Rozważania dla fizycznych powierzchni prowadzili Oden i Martins (1975), Burdekin, Back i Cowley (1978), Villanueva-Leal i Hinduja (1984) oraz Klarbring, Mikelič i Shillor (1987a), (1987b) dla wykładniczego prawa pozwalającego zapisać zależność między $|\overset{n}{F}_{\sim N}|$ i $|\overset{u}{n}_{\sim N}|$.

Przykłady dotyczące toczenia się sztywnego walca po sprężysto-plastycznej półprzestrzeni lub uderzenia walca w naroże pasma jak również walcowania półpasma w dwóch przejściach, były sformułowane dla warunków brzegowych typu mieszanego.

W rozważaniach nad jednoznacznością rozwiązania przybliżonego w metodzie Galerkinia oraz w dyskusji istnienia i jednoznaczności rozwiązania uwzględniono warunki Dirichletta (pierwszego rodzaju)

$$\overset{u}{n}_{\sim \Gamma} = g(\Gamma), \quad \Gamma \subset \partial\Omega.$$

3. WŁASNOŚCI OPERATORA $A(u)$

Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemów kontaktowych bez tarcia przedstawili : Fichera (1972) dla liniowej sprężystości oraz Ciarlet i Nečas (1985) dla nieliniowej sprężystości. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania problemu statycznego jak również dynamicznego udowodnili Duvaut i Lions (1976) przyjmując model tarcia suchego oraz zakładając model nacisków w obszarze styku.

Przyjmując, że współczynnik tarcia jest dostatecznie mały, Nečas, Jarušek i Haslinger (1980) oraz Jarušek (1983), (1984) udowodnili istnienie rozwiązania problemu statycznego.

Ograniczając wielkość współczynnika tarcia, Demkowicz i Oden (1982), Cocu (1984), Klarbring (1985) oraz Klarbring, Mikelič i Shillor (1987 a) przedstawili ogólny dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania dla zagadnień kontaktowych z nieliniowym modelem tarcia.

Właściwości operatorów, występujących w prawach zachowania dla ciał stykających się bez udziału tarcia, badali Nečas (1975) i Kinderlehrer (1981), (1982).

Przegląd prac dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązania sprężystych zagadnień kontaktowych przedstawili : Fichera (1972), Nečas, Jarušek i Haslinger (1980), Demkowicz i Oden (1982), Klarbring (1986 b) oraz Klarbring, Mikelič i Shillor (1987 a), (1987 b). Istnienie i lokalną jednoznaczność rozwiązania dla nieliniowych zagadnień sprężystych z liniowym i nieliniowym modelem tarcia badali Rabier, Martins, Oden, Campos (1986) oraz Klarbring (1988). Jednoznaczność rozwiązania i zbieżność algorytmu dla dyskretnych zagadnień kontaktowych z tarcieciem badali Alart i Curnier (1987).

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania sprężysto - plastycznego problemu kontaktowego z tarcieciem Coulomba wynika z twierdzenia 2.1, gdzie przyjęto założenie o monotoniczności i ciągłości operatora $A(u)$.

UWAGA: Wektory w rozdziale 3 będą oznaczane bez podkreśleń np. v_n, u_n a ich składowe reprezentują symbole v_{n_i}, u_{n_i} itp.. "Falka" pod symbolem będzie odnosiła się do macierzy np. A, B, C, T, I .

3.1. MONOTONICZNOŚĆ OPERATORA A

Z badania monotoniczności operatora A w nierówności (2.17) wynika potwierdzenie, że problem kontaktowy sformułowany w rozdziale 2 nie jest pusty, tzn. w chwili $(n + 1)$ ma rozwiązanie co najmniej dla takich parametrów stanu naprężenia, które spełniają nierówność wynikającą z warunku dodatniej określoności najmniejszej wartości własnej macierzy reprezentującej formę biliniową operatora. Ponadto, można określić dopuszczalny zakres parametrów stanu naprężenia i sprawdzić, że w chwili $(n + 1)$ możliwe jest osiąganie takich stanów, dla których drugi niezmiennik tensora naprężenia jest większy od σ_{pl}^2 co potwierdza potrzebę uwzględnienia efektów plastycznych.

Operator A ma postać

$$\langle A \underset{n}{C} \underset{n}{u}, \underset{n}{v} \rangle = a(\underset{n}{C} \underset{n}{u}, \underset{n}{v}) + \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{n\Omega}^{n+1} \rho \underset{n}{u}_{i,n} \underset{n}{v}_i dV, \quad (3.1)$$

gdzie forma dwuliniowa wyraża się następująco

$$a(\underset{n}{C} \underset{n}{u}, \underset{n}{v}) = \int_{n\Omega} \underset{n}{C}_{ijkl}^{EP} (\underset{n}{u}_{i,j} + \underset{n}{u}_{j,i}) \underset{n}{v}_{k,l} dV + \int_{n\Omega} \underset{n}{T}_{kl} \underset{n}{u}_{i,l} \underset{n}{v}_{i,k} dV. \quad (3.2)$$

Operator A jest monotoniczny, jeśli forma dwuliniowa $a(\underset{n}{C} \underset{n}{u}, \underset{n}{v})$ jest eliptyczna, tzn. istnieje taka stała $\gamma > 0$, która spełnia warunek $a(\underset{n}{C} \underset{n}{u}, \underset{n}{v}) \geq \gamma \|\underset{n}{u}\|_V^2, \forall \underset{n}{u} \in V$, gdzie $\gamma = \lambda_{\min}$ i λ_{\min} jest najmniejszą wartością własną macierzy reprezentującej formę biliniową.

Macierz formy biliniowej można przedstawić jako sumę macierzy $\underset{\sim}{C}$ reprezentującej pierwszą część formy i macierzy $\underset{\sim}{T}$ odpowiadającej drugiej z całek (3.2), tzn.

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{T} \quad (3.3)$$

Formę biliniową (3.2) można przedstawić w postaci macierzowej

$$a(\underset{n}{u}, \underset{n}{v}) = \int_{n\Omega} (\nabla \underset{n}{u})^T \underset{\sim}{C} \nabla \underset{n}{v} dV + \int_{n\Omega} (\nabla \underset{n}{u})^T \underset{\sim}{T} \nabla \underset{n}{v} dV,$$

gdzie macierze i wektory są reprezentowane następująco

$$(\nabla u)^T = [u_{1,1} \quad u_{2,2} \quad u_{1,2} \quad u_{2,1}];$$

$$C = \frac{E}{1+\gamma} \begin{matrix} \begin{matrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} & C_{1121} \\ (1)(1) & (1)(2) & (1)(3) & (1)(4) \\ & C_{2222} & C_{2212} & C_{2221} \\ & (2)(2) & (2)(3) & (2)(4) \\ & & C_{1212} & C_{1221} \\ & & (3)(3) & (3)(4) \\ & & & C_{2121} \\ & & & (4)(4) \end{matrix} \\ \text{SYM} \end{matrix}$$

(k, l) →

$$T = \begin{matrix} (i, j) \\ \downarrow \\ \tau_{11} & 0 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 & \tau_{21} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{12} & 0 & \tau_{11} \end{matrix}$$

Macierz T otrzymano wpisując iloczyn składowych tensora naprężenia

τ_{jl} i delty Kroneckera δ_{ik} do tablicy o wymiarze 4x4, co wynika z zależności

$$\int_{\Omega} \tau_{jl} n_{i,j} n_{i,l} dV = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \tau_{jl} n_{i,j} n_{i,l} dV = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \delta_{ik} \tau_{jl} n_{i,j} n_{k,l} dV.$$

gdzie jawnie występują sumy iloczynów podcałkowych i zrezygnowano z konwencji sumacyjnej.

Każdej parze wskaźników tensora czwartego rzędu C_{ijkl} przyporządkowano jeden wskaźnik tablicy C tzn.

$$(1)=11; (2)=22; (3)=12; (4)=21.$$

Wyrazy macierzy C są określone przez wyrażenie (2.29). Macierz ta ma następującą postać

$$C = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi a^2}{\sigma^2} & \nu & \xi ab & \xi ac & \xi ac \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{\sigma^2} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi b^2}{\sigma^2} & \xi bc & \xi bc & \xi bc \\ -\frac{\xi ca}{\sigma^2} & -\frac{\xi cb}{\sigma^2} & \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2}{\sigma^2} & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} \\ -\frac{\xi ca}{\sigma^2} & -\frac{\xi cb}{\sigma^2} & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} & \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2}{\sigma^2} & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\text{gdzie } a = 3n_{s_{11}} = 2n_{T_{11}} - n_{T_{22}};$$

$$b = 3n_{s_{22}} = 2n_{T_{22}} - n_{T_{11}};$$

$$c = n_{s_{12}} = n_{T_{12}};$$

$$\xi = \frac{2}{3\alpha}; \quad \sigma = n_{\sigma_{pl}}; \quad \alpha = 1 + \frac{2}{3} \frac{E E_T}{E - E_T} \frac{1+\nu}{E}$$

Macierz T również można wyrazić w zależności od a, b i c tzn.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (2a+b) & 0 & c & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} (2b+a) & 0 & c \\ c & 0 & \frac{1}{3} (2b+a) & 0 \\ 0 & c & 0 & \frac{1}{3} (2a+b) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Macierz A wobec (3.4) i (3.5) wyraża się następująco

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi a^2}{\rho\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2a+b) & \nu - \frac{\xi ab}{\rho\sigma^2} \\ \nu - \frac{\xi ab}{\rho\sigma^2} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi b^2}{\rho\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) \\ \eta c - \frac{\xi ca}{3\sigma^2} & -\frac{\xi cb}{3\sigma^2} \\ -\frac{\xi ca}{3\sigma^2} & \eta c - \frac{\xi cb}{3\sigma^2} \end{bmatrix}$$

cd.

$$\left. \begin{array}{ll} \eta c - \frac{\xi ac}{3\sigma^2} & -\frac{\xi ac}{3\sigma^2} \\ -\frac{\xi bc}{3\sigma^2} & \eta c - \frac{\xi bc}{3\sigma^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} \\ -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} & \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2}{\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2a+b) \end{array} \right\} (3.6)$$

Wartości własne macierzy A oblicza się z równania charakterystycznego czwartego stopnia, którego współczynniki są wyrażeniami ósmego stopnia względem parametrów σ, a, b, c .

Ze względu na złożoną postać pierwiastków tego równania trudno jest znaleźć najmniejszą wartość własną równania charakterystycznego.

W związku z tym badanie eliptyczności formy biliniowej można przeprowadzić w sposób przybliżony biorąc najmniejszą wartość własną A jako sumę wartości własnych C i T tzn.

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_{\min}(C) + \lambda_{\min}(T). \quad (3.7)$$

Poszukiwanie wartości własnych macierzy C można uprościć przekształcając wyznacznik główny 4×4 tej macierzy. Odejmując

kolumnę trzecią od czwartej oraz dodając wiersz czwarty do trzeciego otrzymuje się

$$\det(C) = \frac{E\beta}{9(1+\nu)} \det \begin{bmatrix} A-a^2-\lambda & B-ab & -3ac & 0 \\ B-ab & A-b^2-\lambda & -3bc & 0 \\ -6ca & -6cb & D-18c^2-\lambda & 0 \\ -3ca & -3ca & -9c^2 & D-\lambda \end{bmatrix}$$

skąd wynika równanie charakterystyczne w następującej postaci

$$(D-\lambda)(A-a^2-\lambda)[(A-b^2-\lambda)(D-18c^2-\lambda)-18c^2b^2] + \\ - (B-ab)[(B-ab)(D-18c^2-\lambda)-18abc^2] + \\ - 3ac[-6cb(B-ab)+6ca(A-b^2-\lambda)] = 0, \quad (3.8)$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$A = \frac{9(1-\nu)}{\beta(1-2\nu)}; \quad B = \frac{9\nu}{\beta(1-2\nu)}; \quad D = \frac{9}{2\beta}; \quad \beta = \frac{3}{2\sigma^2\alpha}$$

Pierwszą wartością własną jest $\lambda_1 = D$. Pozostałe wartości własne wyznacza się jako rozwiązania równania trzeciego stopnia tj.

$$\lambda_2 = -P/[-(CR-P^2/3)^3/2 - 27/8CS-RP/3+2/27P^3]^2 + \\ + (108P^3 + 729(CR-P^2/3)^3/27 + (S-RP/3 + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2)^{1/3} + \\ + [-(CR-P^2/3)^3/2 - 27/8CS-RP/3+2/27P^3]^2 + \\ + (108P^3 + 729(CR-P^2/3)^3/27 + (S-RP/3+2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2)^{1/3}/3;$$

$$\lambda_3 = P/[2C-(CR-P^2/3)^3/2 - 27/8CS-RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729 \\ (CR - P^2/3)^3/27 + (S-RP/3 + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2)^{1/3} + \\ - 1 \cdot 3^{1/2}P/[2C-(CR - P^2/3)^3/2 - 27/8CS -RP/3 + 2/27P^3]^2 \\ + (108P^3 + 729 (CR - P^2/3)^3/27 + \\ + (S -RP/3 + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2} /2)^{1/3} - 1 \cdot 3^{1/2}[-(CR-P^2/3)^3/2 + \\ -27/8CS-RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729(CR-P^2/3)^3/27 + (S-RP/3 \\ +2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2)^{1/3}/6 - [-(CR -P^2/3)^3/2 + \\ -27/8CS - RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729(CR - P^2/3)^3/27 + (S -RP/3 \\ + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2)^{1/3}/6];$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 = & P / [2C - (CR - P^2/3)^3/2 - 27/8CS - RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729 \\ & ((CR - P^2/3)^3/27 + (CS - RP/3 + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2]^{1/3} + \\ & i 3^{3/2} P / [6C - (CR - P^2/3)^3/2 - 27/8CS - RP/3 + 2/27P^3]^2 + \\ & + (108P^3 + 729((CR - P^2/3)^3/27 + (CS - RP/3 + \\ & + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2]^{1/3} + i 3^{1/2} [-(CR - P^2/3)^3/2 + \\ & - 27/8CS - RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729((CR - P^2/3)^3/27 + \\ & + (CS - RP/3 + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2]^{1/3} / 6 - [-(CR - P^2/3)^3/2 + \\ & - 27/8CS - RP/3 + 2/27P^3]^2 + (108P^3 + 729((CR - P^2/3)^3/27 + (CS - RP/3 + \\ & + 2/27P^3)^2/4)^2)^{1/2}/2]^{1/3} / 6, \end{aligned}$$

gdzie przyjęto oznaczenia :

$$P = -(J+K+L) ;$$

$$R = - [M^2 - J(K+L) - KL + 18c^2(a^2 + b^2)] ;$$

$$S = - [JKL - M^2L + 18c^2(abM - b^2J - a^2K)] ;$$

$$J = A - a^2 ; K = A - b^2 ; L = D - 18c^2 ; M = B - ab .$$

Wybór najmniejszej wartości własnej macierzy \tilde{C} jest możliwy przy użyciu metod numerycznych ze względu na złożoną postać wyrażeń określających te wartości.

Analizę wartości własnych można jeszcze bardziej uprościć przedstawiając macierz \tilde{C} jako różnicę dwóch macierzy tj.

$\tilde{C} = \tilde{S}_\nu - \tilde{S}$. Wobec tego zależność (3.7) wyraża się w postaci

$$\lambda_{\min}(\tilde{A}) = \lambda_{\min}(\tilde{S}_\nu) + \lambda_{\min}(\tilde{T}) - \lambda_{\max}(\tilde{S}) . \quad (3.9)$$

Równania charakterystyczne dla macierzy \tilde{S}_ν , \tilde{S} i \tilde{T} mają następujące postacie :

$$\det(\tilde{S}_\nu - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \lambda & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

$$\det(T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2a+b) - \lambda & 0 & c & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2b+a) - \lambda & 0 & c \\ c & 0 & \frac{1}{3}(2b+a) - \lambda & 0 \\ 0 & c & 0 & \frac{1}{3}(2a+b) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$\det(S^* - \lambda I) = \frac{\xi}{\sigma} 2 \det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 - \lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - \frac{20}{9}) \lambda^3 = 0, \quad (3.12)$$

$$\text{gdzie } S = D^T S^* D = \frac{\xi}{\sigma^2} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Rozwiązując (3.10), (3.11) i (3.12) otrzymuje się wartości własne :

$$\lambda_1(S_{\nu}) = 1; \lambda_2(S_{\nu}) = \frac{1}{1-2\nu}; \lambda_{\min}(S_{\nu}) = \lambda_3(S_{\nu}) = \frac{1}{2};$$

$$\lambda_{\min}(S) = \lambda_1(S) = \lambda_2(S) = \lambda_3(S) = 0; \lambda_{\max}(S) = \lambda_4(S) = \frac{20}{9};$$

$$\lambda_{\min}(T) = \frac{1}{2} \min_{a,b,c} \left\{ (a+b) \pm \left[\frac{1}{9} (a-b)^2 + 4c^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Zależność (3.9) ma wobec tego postać

$$\lambda_{\min}(A) = \frac{E}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} - \frac{20\xi}{9\sigma^2} \max(a^2, b^2, c^2) \right] + \frac{1}{2} \min_{a,b,c} \left\{ (a+b) \pm \left[\frac{1}{9}(a-b)^2 + 4c^2 \right]^{1/2} \right\} > 0, \quad (3.13)$$

Należy sprawdzić dla jakich wartości a, b, c zachodzi powyższa relacja.

Przyjmując $a = -b$ i $\eta^2 = \max(a^2, b^2, c^2)$ otrzymuje się warunek

$$\frac{E}{1-\nu} \left[\frac{1}{2} - \frac{20\xi\eta^2}{9\sigma^2} \right] - \frac{\sqrt{2}}{3} > 0,$$

skąd wynikają nierówności

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \left[\frac{2}{9} + 2K^2L \right]^{1/2} \right) / 2KL < \eta < \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \left[\frac{2}{9} + 2K^2L \right]^{1/2} \right) / 2KL. \quad (3.14)$$

$$\text{gdzie } K = \frac{E}{1-\nu}; \quad L = \frac{20\xi}{9\sigma^2}.$$

Problem kontaktowy sformułowany w rozdziale 2 ma co najmniej rozwiązanie dla parametrów a, b, c stanu naprężenia, które spełniają warunek (3.14).

Należy zauważyć, że warunek (3.14) został sformułowany na podstawie grubego szacowania wartości własnych macierzy A .

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do monotoniczności operatora $\langle A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ jest dodatnia - określoność macierzy A danej przez (3.6), dla której zachodzi twierdzenie (3.1).

TWIERDZENIE 3.1

Macierz A jest dodatnio - określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są dodatnio - określone tzn.

$$\det A_1 = f_1(a, b, \sigma) = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\xi a^2 \eta}{9\sigma^2} + \frac{1}{3}(2a+b) > 0;$$

$$\det A_2 = f_2(a, b, \sigma) = \det \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi a^2}{9\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2a+b) & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi b^2}{9\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) \end{bmatrix} > 0;$$

$$\det A_3 = f_3(a, b, c, \sigma) = \det \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi a^2 \eta}{9\sigma^2 + \frac{1}{3}(2a+b)} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} & \eta c - \frac{\xi ac}{3\sigma^2} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi b^2}{9\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) & -\frac{\xi bc}{3\sigma^2} \\ \eta c - \frac{\xi ca}{3\sigma^2} & -\frac{\xi cb}{3\sigma^2} & \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2 \eta}{\sigma^2 + \frac{1}{3}(2b+a)} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\det A_4 = f_4(a, b, c, \sigma) = \det \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi a^2 \eta}{9\sigma^2 + \frac{1}{3}(2a+b)} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi ab}{9\sigma^2} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\xi b^2}{9\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) \\ \eta c - \frac{\xi ca}{3\sigma^2} & -\frac{\xi cb}{3\sigma^2} \\ -\frac{\xi ca}{3\sigma^2} & \eta c - \frac{\xi cb}{3\sigma^2} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{cc} \eta c - \frac{\xi ac}{3\sigma^2} & -\frac{\xi ac}{3\sigma^2} \\ -\frac{\xi bc}{3\sigma^2} & \eta c - \frac{\xi bc}{3\sigma^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2 \eta}{\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2b+a) & -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} \\ -\frac{\xi c^2}{\sigma^2} & \frac{1}{2} - \frac{\xi c^2 \eta}{\sigma^2} + \frac{\eta}{3}(2a+b) \end{array} \right\} > 0.$$

Obszar dodatniej określoności A w czterowymiarowej, dyskretnej przestrzeni parametrów a, b, c, σ można określić numerycznie tworząc czterowymiarową macierz typu logicznego. Zmienna logiczna przyjmuje wartość TRUE, jeśli wszystkie minory główne A są dodatnio - określone.

Wyniki badania obszaru dodatniej określoności \tilde{A} przedstawiono na rysunku 3.1 przyporządkowując znak plus wartości TRUE i znak minus wartości FALSE.

Obszar dodatniej - określoności \tilde{A} w przestrzeni (a, b, c) dla kolejnych warstw względem σ jest elipsoidą (rys. 3.1 a, d, e).

Monotoniczność operatora $\langle AC_n, v \rangle$ zbadano dla następujących danych :

- moduł Younga $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa,
- moduł styczny $E_T = \frac{1}{3} E$
- liczba Poissona $\nu = 0.3$
- zakres zmienności granicy plastyczności $s = \sigma_{pl} \in [5, 105]$ MPa,
- zakres zmienności parametrów a i $b \in [-150, 150]$ MPa,
- zakres zmienności parametru $c \in [-50, 50]$ MPa,
- zakres każdej zmiennej stanu podzielono na dwadzieścia przedziałów w związku z czym tablica zawierająca wartości zmiennej logicznej ma wymiary $21 \times 21 \times 21 \times 21$

Obszar dodatniej określoności macierzy \tilde{A} jest wypełniony znakami (+). Kontur tego obszaru jest elipsą symetryczną względem prostej $a = -b$. Na rysunkach (3.1) po lewej stronie widoczny jest cały obszar dodatniej określoności a po prawej stronie znajduje się powiększony fragment obszaru zakryty ramką widoczną na lewym rysunku.

Na powiększonym fragmencie rysunku zaznaczono granicę plastyczności. Obszar dodatniej określoności w płaszczyźnie (a, b) zawiera krzywą przedstawiającą granicę plastyczności $s = y = 40$, gdzie y oznacza wartość pierwiastka z drugiego niezmiennika stanu naprężenia, dla $c = 0$ i $c = -5$ (Rys. 3.1 a i b). Elipsa obrazująca granicę plastyczności zawiera w sobie obszar dodatniej określoności \tilde{A} dla $c = -10$ i $c = -15$ (Rys. 3.1 c i d). Macierz \tilde{A} w przekroju $c = -20$ i w przedziale $a, b \in [-150, 150]$ nie jest dodatnio określona. W płaszczyźnie (a, c) i (b, c) kontury obszaru dodatniej - określoności są elipsami, które przesuwają się w lewo dla $b < 0$ (lub $a < 0$) lub w prawo dla $b > 0$ (lub $a > 0$) (Rys. 3.1 g, h, i, j, k). Na rysunkach tych widać, że w płaszczyźnie (a, c) lub (b, c) granica plastyczności σ_{pl} leży wewnątrz obszaru dodatniej określoności

odpowiednio dla $b=0$ lub $a=0$. Granica plastyczności przecina ten obszar dla $b \neq 0$ lub $a \neq 0$.

Badanie monotoniczności operatora $\langle A_n u \rangle_n, v$ uwzględniono w algorytmie rozwiązania problemu kontaktowego. Obszar monotoniczności operatora w przestrzeni czterech parametrów stanu $(a, b, c, s=0)$ określa się przed procesem rozwiązania problemu kontaktowego dla przewidywanych zakresów parametrów stanu naprężenia.

3.2 WPŁYW EFEKTÓW DYNAMICZNYCH NA WŁASNOŚCI OPERATORA A

Efekty dynamiczne w zagadnieniu kontaktowym sformułowanym w rozdziale 2 uwzględniono biorąc siły bezwładności wyrażone w nierówności (2.16) następująco

$$\int_{\Omega}^{\rho} \ddot{u}_i (v_i - u_i) dV.$$

Przybliżając przyspieszenie \ddot{u}_i różnicą skończoną np. schematem Houbólta dokonuje się aproksymacji problemu dynamicznego przez ciąg zagadnień quasistatycznych.

Człon reprezentujący efekty dynamiczne w prawie zachowania (2.21) występuje wówczas w postaci eliptycznej formy dwuliniowej

$$a_i(u, v) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{\Omega} \rho \sum_{i=1}^2 u_i v_i dV.$$

Formę biliniową należy oszacować "od dołu"

$$a_i(u, v) = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_{\Omega} \rho \sum_{i=1}^2 u_i^2 dV \geq \frac{\min \rho}{(\Delta t)^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_i^2 dV$$

$$= \frac{\min \rho}{(\Delta t)^2} \|u\|_L^2 \geq \alpha \|u\|_H^1.$$

(3.15)

Oszacowanie takie dla norm w H^1 i L^2 można znaleźć w książce Ciarleta (1979) i wynika ono z Twierdzenia 3.2.6 (str.140 - 141), gdzie wykorzystano tzw. założenie odwrotne i oszacowanie odwrotne. Przyjmując, że u jest funkcją sklejaną (spline funkcją) po zmiennych przestrzennych tj. $u(t, x_1) \in \mathcal{S}(h, \xi)$, można napisać

nierówność [wg Giarleta (1979), nierówność (3.2.37)]

$$\forall u \in V, \quad \|u\|_{H^1} \leq \frac{C(\xi)}{h^2} \|u\|_{L^2}, \quad (3.16)$$

gdzie w mianowniku występuje wielkość h^2 , ponieważ rozpatruje się problem płaski.

Ponadto przyjęto następujące oznaczenia :

h - rozmiar siatki,

ξ - stała pojawiająca się w założeniu o regularności siatki węzłów spline funkcji i spełniająca warunek $\xi \geq \frac{h}{\rho}$,

ρ - promień okręgu wpisanego w oczko siatki.

Podstawiając (3.16) w (3.15) otrzymuje się nierówność

$$\frac{\min \rho}{(\Delta t)^2} \|u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\min \rho}{(\Delta t)^2} h^2 C(\xi) \|u\|_{H^1}^2, \quad (3.17)$$

skąd dla $\min \rho C(\xi) \|u\|_{H^1}^2 \geq 0$ wynika warunek

$$\frac{h^2}{(\Delta t)^2} \geq \alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\Delta t}{h} \leq \alpha_1, \quad (3.18)$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ jest dodatnią stałą.

Warunek (3.18) jest zgodny z kryterium warunkowej stabilności określonym przez Couranta, Fridrichsa, Lewy'ego dla schematów aproksymujących zagadnienia hiperboliczne sformułowane w rozdziale 2 (tj. równanie (2.1) i warunki brzegowe).

Jeśli forma dwuliniowa $a(\underset{n}{u}, \underset{n}{v})$ dana zależnością (3.2) jest eliptyczna i forma $a_i(u, v)$ szacuje się "od dołu" wg (3.15) oraz spełniony jest warunek stabilności (3.18), to rozwiązanie problemu kontaktowego sformułowanego w rozdziale 2 jest jednoznaczne.

4. METODY ROZWIĄZANIA PROBLEMÓW KONTAKTOWYCH

Algorytmy rozwiązania problemów kontaktowych sformułowanych jako zadania wariacyjne zawierają między innymi procedurę określającą nieznaną powierzchnię styku ciał oraz procedurę rozwiązania układu równań równowagi w metodzie elementów skończonych.

Znaczne zmniejszenie kosztów numerycznych (tzn. skrócenie czasów obliczeń) można uzyskać stosując technikę przyspieszonego znajdowania obszaru styku dwóch ciał. Taką technikę nazywa się strategią kontaktową.

Układy równań algebraicznych rozwiązuje się metodami szybkiej transformacji Fouriera lub jedną z modyfikacji metody Newtona.

4.1. PRZEGLĄD ALGORYTMÓW I STRATEGII KONTAKTOWYCH

4.1.1. ALGORYTMY ROZWIĄZANIA PROBLEMÓW KONTAKTOWYCH

Przegląd (Rońda (1987)) wybranych algorytmów opisanych w publikacjach przedstawionych w ciągu ostatnich pięciu lat prezentuje charakterystyczne cechy metod rozwiązania i technik formułowania skutecznych procedur rozwiązujących problemy kontaktowe.

Algorytmy te zawierają procedury minimalizacji funkcjonału wariacyjnego z ograniczeniami, jakimi są klasyczne warunki brzegowe oraz warunki kontaktowe. Powszechnie do rozwiązania problemu minimalizacji z ograniczeniami stosuje się metodę współczynników Lagrange'a lub funkcji kary.

W metodzie współczynników Lagrange'a warunki kontaktowe są spełnione dokładnie, ponieważ problem minimalizacji z ograniczeniami transformuje się do zadania bez ograniczeń dzięki wprowadzeniu dodatkowych zmiennych, które są współczynnikami Lagrange'a.

W metodzie funkcji kary zagadnienie z ograniczeniami przekształca się do problemu bez ograniczeń po wprowadzeniu jednej

lub kilku stałych wartości nazywanych współczynnikami kary.

Ze względu na mniejsze koszty numeryczne metoda funkcji kary wygląda bardziej atrakcyjnie, jednakże może prowadzić do problemów źle uwarunkowanych, kiedy kara nadmiernie rośnie.

Poza tymi technikami można zastosować metodę mieszaną przedstawioną przez Simo, Wriggersa i Taylora (1985), która łączy w sobie zalety obu określonych powyżej sposobów postępowania.

Algorytmy zestawiono w Tablicy 1 biorąc pod uwagę cechy problemów mechanicznych do rozwiązania których, były zaproponowane.

Toczny problem kontaktowy dla walca pokrytego warstwą gumy sformułował Batra (1981) stosując opis Lagrange'a dla materiału typu Mooney'a-Rivlina oraz uwzględniając model tarcia Coulomba.

Podstawowe algorytmy przydatne do rozwiązania zarówno tocznego zagadnienia z tarciem jak i bez tarcia opisał Kalker (1983). Wykorzystując zasadę energii dopełniającej oraz liniowe równania konstytutywne i kinematyczne przedstawił on dowód poprawności algorytmu.

Oden, Backer, Lin i Demkowicz (1984) przeprowadzili ogólną analizę klasy tocznych problemów kontaktowych dla nieliniowego modelu tarcia i skończonych odkształceń materiału sprężystego opisanych w ruchomym zmodyfikowanym układzie Lagrange'a.

Schematy numeryczne przydatne do rozwiązania zagadnienia toczenia się ciała lepkosprężystego po sztywnym podłożu przedstawili Padovan i Paramadilok (1985). Wykorzystując ruchomy zmodyfikowany opis Lagrange'a rozwinęli oni technikę przydatną dla zadań, gdzie małe przemieszczenia ciała nakładają się na duże ugięcia konstrukcji. Padovan i Paramadilok uwzględniali tarcie Coulomba.

Panagiotopoulos (1985) stosował metody programowania nieliniowego do określania oddziaływania między ciałem sprężysto-plastycznym lub lepkosprężystym i sztywnym podłożem. Problemy takie pojawiają się w mechanice konstrukcji i wymagają uwzględnienia tarcia oraz dynamiki materiałów.

TABLICA 1.

Algorytm proponowany przez:		Cechy problemu mechanicznego			
		materiał	odkształc. opis ruchu	model tarcia	typ problemu kontaktowego
1	Bathe (1981)		jednorodny Mooney'a- -Rivlina		
2	Kalkera (1982)	1) sprężysty 2) liniowo- -lepko- -sprężysty 3) lepko- -sprężysty	małe	Coulomba	toczny (ruch usta- lony)
3	Odena, Beckera, Lina i Demkowi- cza (1984)	sprężysty	skonczone ruchomy, zmodyfikowa- ny Lagran- ge'a	nieliniowy	toczny (ruch usta- lony)
4	Padovana i Parama- diloka (1985)	1) lepko- -sprężysty 2) hipo- -sprężysty	skonczone ruchomy, zmodyfikowa- ny Lagran- ge'a,	Coulomba	toczny (ruch usta- lony)
5	Panagio- topoulosa (1985)	1) lepko- -sprężysty 2) sprężysto -plastyczny	małe	Coulomba	wciskanie stempla lub walca
6	Ronde i Erzozova- kiego (1986)	sprężysto- -plastyczny	skonczone zmodyfikowa- ny Lagran- ge'a	Coulomba	toczny (ruch dovel- ny)
7	Simo, Wri- ggersa i Taylora (1985)	ciało odkształcal- ne	1) małe 2) skonczone	bez tarcia	1) wciskanie stempla 2) niestacjo- narny
8	Chena i Tsai (1986a) (1986b)	1) sprężysty 2) sprężysto -plastyczny	skonczone	Coulomba	niestacjo- narny

Algorytm proponowany przez:	Cechy problemu mechanicznego			
	material	odkształc. opis ruchu	model tarcia	typ problemu kontaktowego
9 Bajera (1988)	sprężysty	skończone	bez tarcia	stacjonarny quasi-stacyczny
		zmodyfikowany Lagrange'a		
10 Bruneta (1988)	sprężysto-plastyczny	skończone	Coulomba	stacjonarny
		zmodyfikowany Lagrange'a		
11 Bartholda i Bishoffa (1988)	hypersprężysty	skończone	Coulomba	stacjonarny
		Lagrange'a		
12 Charliera i Cescotta	1) hypersprężysty 2) plastyczny	skończone	Coulomba	niestacjonarny
13 Chena i Yeha (1988)	hyposprężysty	skończone	Coulomba	niestacjonarny
14 Curniera i Alarta (1988)	sprężysto-plastyczny	skończone	Coulomba	stacjonarny wciśnięcie stempla
		Lagrange'a		
15 Feijoo, Barbosa i Zouaina (1988)	1) sprężysty 2) plastyczny	mate	Coulomba	stacjonarny
16 Kalkera (1988)	sprężysty	skończone	Coulomba	niestacjonarny
17 Kvaka i Lee (1988)	sprężysty	mate	Coulomba	1) stacjonarny 2) niestacjonarny
18 Doudoumisal i Mitsopoulos (1988)	sprężysty	mate	Coulomba	stacjonarny

Algorytm proponowany przez:		Cechy problemu mechanicznego			
		materiał	odkształc. opis ruchu	model tarcia	typ problemu kontaktowego
19	Klarbringa i Bjorkmana (1988)	sprężysto-plastyczny	małe	Coulomba	cykliczne obciążanie przystosowanie
20	Odena i Kikuchiego (1988)	sprężyste	skończone zmodyfik. Lagrange'a ruchomy	liniowe nieliniowe	1) stacjonarny 2) niestacjonarny
21	Raoussa, Chabrand i Lebona (1988)	1) lepkoplastyczny 2) lepkosprężyste	małe	Coulomba	1) stacjonarny 2) quasi-stacjonarny

ad 6^{*.} Algorytm opracowany przez Rońdę i Brzozowskiego został opisany w artykułach przedstawionych przez Rońdę, Mahrenholtza, Bogacza i Brzozowskiego (1986) oraz Rońdę, Bogacza i Brzozowskiego (1986).

Oddziaływanie między sprężysto-plastycznym pasmem i walcem zawieszonym lepkosprężysto analizowali Rońda, Mahrenholtz, Bogacz i Brzozowski (1986). Problem został sformułowany w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a z uwzględnieniem wzmocnienia izotropowego zależnego od pracy plastycznej oraz tarcia Coulomba w obszarze styku pasma i walca.

Zagadnienie kontaktowe bez efektów tarcia dla dwóch odkształcalnych ciał z liniowymi lub nieliniowymi równaniami konstytutywnymi sformułowali Simo, Wriggers i Taylor (1985). Algorytm ten może być użyty do rozwiązania zadania wciskania stempla w półprzestrzeń lub toczenia się walca po podłożu.

Problem poślizgu dwóch ciał sprężystych lub sprężysto-plastycznych rozwiązali Chen i Tsai (1986a), (1986b) uwzględniając efekty dynamiczne, małe odkształcenia i tarcie Coulomba. W zadaniu tym strefa styku ciał podlega translacji i obrotowi.

Metoda elementów skończonych dla sformułowania zagadnienia

kontaktowego występującego w czasie kształtowania ciała sprężysto-plastycznego przy użyciu sztywnego narzędzia rozwinął Brunet (1988).

Barthold i Bishoff (1988) oraz Curnier i Alart (1988) badali zagadnienia kontaktowe dla materiałów hypersprężystych w opisie Lagrange'a z uwzględnieniem tarcia Coulomba.

Feijóo, Barbosa i Zouain (1988), Kwak i Lee (1988), Doudoumis i Mitsopoulon (1988), Raous, Chabraud i Lebon (1988) sformułowali zagadnienia kontaktowe dla małych odkształceń ciał sprężystych lub nieliniowych z tarciem Coulomba i w warunkach kontaktu stacjonarnego lub niestacjonarnego.

Charlier i Cescotto (1988) oraz Chen i Yeh (1988) rozwiązali zagadnienie oddziaływania dwóch ciał hypersprężystych w opisie Lagrange'a z tarcie Coulomba w warunkach niestacjonarnych.

Algorytmy zestawiono w Tablicy 2 biorąc pod uwagę ich cechy numeryczne takie jak: metodę aproksymacji, transformację zagadnienia minimalizacji funkcjonału z ograniczeniami, właściwości macierzy sztywności oraz metodę rozwiązywania układu równań równowagi.

Procedura przyjęta przez Batrę (1981) bazuje na metodzie elementów skończonych oraz metodzie współczynników Lagrange'a. Układ równań równowagi rozwiązuje się metodą iteracyjną Newtona-Raphsona.

Zagadnienia sformułowane przez Kalkera (1983), (1988) były przedstawione jako zadania programowania kwadratowego. Kalker stosował metodę elementów brzegowych oraz procedurę minimalizacyjną zaproponowaną przez Fiacco i McCormicka jako modyfikację metody Newtona. W pracy Kalkera (1988) zastosowano procedurę Panagiotopoulou (1975) oraz tzw. procedurę Johnsona przedstawioną w pracy Bentalła i Johnsona (1967).

Algorytm zawierający metodę elementów skończonych oraz metodę funkcji kary przedstawili Oden, Becker, Lin i Demkowicz (1984). Układ równań równowagi elementów skończonych rozwiązuje się metodą Ricksa, która jest skuteczna nawet wówczas gdy metoda Newtona nie zapewnia statecznego rozwiązania. Oden i Kikuchi (1987) w

monografii poświęconej zagadnieniom kontaktowym przedstawili rozwiązanie dla układu równań równowagi MES metodą uogólnioną Newtona.

Algorytm zastosowany przez Padovana i Paramadiloka (1985) wykorzystuje aproksymację skończone elementowa i metodę współczynników Lagrange'a. Układ równań równowagi jest rozwiązywany metodą iteracyjną Newtona-Raphsona sprzężoną z metodą uaktualniania macierzy sztywności zaproponowaną przez Broydena, Flethera, Goldfarba i Shano.

Schemat rozwiązania zagadnienia kontaktowego, do aproksymacji którego stosuje się metodę elementów skończonych i nie używa się procedur optymalizacyjnych, przedstawił Panagiotopoulos (1985). W tym sposobie rozwiązania wykorzystano wnioski z twierdzenia Thiela i Van de Panne, które pozwalają zastąpić problem z jednostronnymi ograniczeniami przez ciąg zagadnień z ograniczeniami określonymi przez relacje równości. Ponadto użyta została metoda Newtona.

Algorytm zaproponowany przez Rońdę i Brzozowskiego i opublikowany w pracach: Rońdy, Mahrenholtza, Bogacza i Brzozowskiego (1986) oraz Rońdy, Bogacza i Brzozowskiego (1986) zawiera aproksymację funkcjonału (2.22) metodą elementów skończonych. W procedurze tej użyte zostały metody funkcji kary i Newtona-Raphsona.

Schemat numeryczny ze zmodyfikowaną metodą współczynników Lagrange'a, metodą elementów skończonych i procedurą eliminacji Gaussa przedstawili Simo, Wriggers i Taylor (1985).

Algorytmy Chena i Tsai (1986a) oraz Chena i Yeha (1986) zawierają procedury bazujące na metodach: elementów skończonych, współczynników Lagrange'a i programowania kwadratowego.

Metodę elementów czasoprzestrzennych do problemów kontaktowych zastosował Bajer (1988).

Algorytm Bruneta (1988) zawiera metodę funkcji kary oraz metodę Newtona - Raphsona.

Curnier i Alart (1988) do rozwiązywania problemów kontaktowych stosowali program TACT, który zawiera: metodę funkcji kary w procedurze do określania powierzchni kontaktowej, metodę elementów

TABLICA 2.

Algorytm proponowany przez:		Metoda rozwiązania			
		Aproksymacja	Transformacja	Macierz sztywności	Metoda rozwiązania równań równowagi
1	Bathe (1981)	MES	MVL	SYM	Newtona-Raphsona
2	Kalkera (1983)	MEB	MVL	NSYM	Modyfikacja metody Newtona zaproponow. przez Fiacco i McCormica
3	Odena, Beckera, Lina i Demkovi- cza (1984)	MES	MFK	SYM	1) Met. Riksa lub Riksa-Wempnera 2) Newtona-Raphsona z ograniczeniami 3) schemat quasi-Newtona
4	Padovana i Parama- diloka (1985)	MES	MVL	NSYM	1) Newtona-Raphsona sprzęż. z met. BFGS aktualiz. macierzy sztywności 2) zmodyf. met. Newtona
5	Panagiotopoulou (1985)	MES	wg prop. Thiela i Van de Panne	NSYM	Newtona
6*	Ronde i Brzozowski- kiego (1986)	MES	MFK	NSYM	Newtona-Raphsona lub Banachiewicza-Cholesky'ego dla pierwszej iteracji na każdej warstwie czasowej, gdy znany jest obszar styku ciał
7	Simo, Wri- ggersa i Taylora (1985)	MES	zmodyfik MVL	SYM	eliminacji Gaussa
8	Chena i Teal (1986a) (1986b)	MES	MVL	SYM	programowania kwadratowego

Algorytm proponowany przez:		Metoda rozwiązania			
		Aproksymacja	Transformacja	Macierz sztywności	Metoda rozwiązania równań równowagi
9	Bajera (1988)	MES		SYM	
10	Bruneta (1988)	MES	MFK	SYM	Newtona - Raphsona
11	Bartholda i Bishoffa (1988)	MES	MWL	SYM	Newtona
12	Charliera i Cescolta (1988)	MES		SYM	Newtona - Raphsona
13	Chena i Yeha (1988)	MES	MWL	SYM	Prędkości liczone met. całkowania bezpośredniego Newmarka
14	Curniera i Alarta (1988)	MES		SYM	Uogólniona Newtona
15	Feijoo, Barbosa i Zouaina (1988)	MES	MWL	SYM	Gausa - Seidela
16	Kalkera (1988)	MES	MWL	NSYM	programowania kwadratowego tzw. proces Panagiotopoulosa (1975)
17	Kvaka i Lee (1988)	MES		SYM	programowania kwadratowego
18	Doudoumisai i Mitsopoulou (1988)	MES		SYM	programowania nieliniowego, procedura Hildreth d'Esopo

Algorytm proponowany przez:	Metoda rozwiązania			
	Aprokey- macja	Transfor- macja	Macierz sztywności	Metoda rozwiązania równań równowagi
19 Klarbringa i Björkma- na (1988)	MES			rozszerzony algo- rytm Kaneko dla Linear Complemen- tarity Problem (LCP)
20 Odena i Kikuchie- go (1988)	MES	MFK	SYM	uogólniona met. Newtona
21 Raousa, Chabranda i Lebona (1988)	MES		SYM	met. nadrelaksacji z rzutowaniem (SORP), met. pro- gramowania kwadra- towego Lemke, met. całkowania w punk- cie stałym (fixed point method on boundary condi- tions)

ad 6* Algorytm ten został opisany w pracach: Rońdy, Mahrenholtza, Bogacza i Brzozowskiego (1986) oraz Rońdy, Bogacza i Brzozowskiego (1986).

Skróty występujące w Tabelicy 2 mają następujące znaczenia:

MES - metoda elementów skończonych,

MEB - metoda elementów brzegowych,

MWL - metoda współczynników Lagrange'a,

MFK - metoda funkcji kary,

BFGS - metoda aktualizacji macierzy sztywności opracowana przez Broydena, Flethera, Goldfarba i Shano,

SYM - macierz symetryczna,

NSYM - macierz niesymetryczna.

skończonych do dyskretyzacji po przestrzeni oraz metodę Newtona do rozwiązania zagadnień nieliniowych.

Algorytm Feijóo, Barbosy i Zouaina (1988) zawiera metodę mnożników Lagrange'a oraz algorytm Gaussa - Seidla.

Kwak i Lee (1988) zastosowali metodę elementów brzegowych oraz

technikę programowania kwadratowego.

Procedura iteracyjna typu Hildreth d'Esopo oraz sformułowanie problemu jako ciągu zagadnień programowania nieliniowego było omówione w pracy Doudoumisa i Mitsopoulou (1988).

Algorytm Kaneko programowania liniowego (parametric linear complementarity problem) zastosowali Klarbring i Björkman (1988).

Raous, Chabrand i Lebon (1988) zastosowali algorytm, gdzie do rozwiązania problemu może być użyta jedna z trzech metod: metoda nadrelaksacji z rzutowaniem (SORP), metoda programowania kwadratowego zaproponowana przez Lemke, metoda całkowania w punkcie stałym (the fixed point method on boundary conditions).

4.1.2 STRATEGIE KONTAKTOWE

Określenie obszaru styku ciał jest ważnym stadium rozwiązania problemu kontaktowego. Obszar styku ciał określa się sprawdzając odpowiednie warunki brzegowe w obszarach, gdzie kontakt jest możliwy. Warunki te można podzielić na wyrażone w przemieszczeniach (tzw. geometryczne) lub określone w zależności od stanu naprężenia.

Strategie kontaktowe stosowane w algorytmach opisanych w poprzednim rozdziale bazują na pomysłach takich jak:

- wprowadzanie dla każdego ciała dodatkowej warstwy elementów w strefie, gdzie możliwy jest kontakt (Padovan i Paramadilok (1985)),
- wstępne przenikanie dwóch obszarów geometrycznych wyobrażających oddziałujące ciała i rugowanie węzłów z obszarów wewnętrznych oraz określanie ich położenia na powierzchni kontaktowej na podstawie warunków geometrycznych (Roñda i Brzozowski (1985)),
- znajdowanie pośredniej powierzchni styku na podstawie interpolacji wewnątrz elementów kontaktowych (Simo, Wriggers i Taylor (1985)).

Wprowadzenie dodatkowych warstw elementów w okolicach przewidywanego obszaru styku ciał powoduje zwiększenie kosztów

numerycznych. Liczbę tych dodatkowych elementów określa się arbitralnie przed rozpoczęciem obliczeń i nie zależy ona od wielkości i kształtu obszaru kontaktowego.

W przypadku styku ciała sztywnego z ciałem odkształcalnym dobre wyniki daje metoda dopuszczająca wstępne przenikanie się ciał. W procesie iteracyjnym węzły leżące w obszarze ciała sztywnego są przesuwane na brzeg obszaru styku. Wielkość przesunięcia i położenie węzłów ustala się stosując prostą zależność geometryczną. Proces rugowania węzłów ciała odkształcalnego z obszaru wewnętrznego narzędzia przyspiesza się stosując metodę funkcji kary. Taki sposób postępowania pozwala prowadzić obliczenia bez konieczności zmiany kroku czasowego (lub przyrostowego).

Określenie pośredniej powierzchni styku składa się z następujących procesów: interpolacji położenia powierzchni wspólnej dla dwóch ciał wewnątrz elementów kontaktowych oraz generacji węzłów leżących na tej powierzchni.

Metoda poszukiwania pośredniej powierzchni styku jest szczególnie przydatna w przypadku kontaktu dwóch ciał odkształcalnych.

4.2. SPOSÓB ROZWIĄZANIA NIESTACJONARNEGO PROBLEMU KONTAKTOWEGO

Niestacjonarny problem kontaktowy rozwiązuje się wykorzystując metodę elementów skończonych do aproksymacji funkcyjonału zdefiniowanego przez prawo zachowania (2.21) tj.

$$\varphi(\underline{u}, \underline{\lambda}) := \langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle + \int_{\Gamma_s} g_{\lambda_0}(\gamma \# u) d\sigma - \langle \underline{f}, \underline{v} \rangle, \quad \forall \underline{v} \in V. \quad (4.1)$$

Minimalizację funkcyjonału $\varphi(\underline{u}, \underline{\lambda})$ wykonuje się stosując metodę kwadratowej funkcji kary, która pozwala na minimalizację bez ograniczeń.

4.2.1 OPIS ALGORYTMU

Algorytm rozwiązania problemu oddziaływania ciała sprężysto-plastycznego i sztywnego realizuje następujące zadania:

- aproksymacja funkcjonału (4.1),
- minimalizacja $\varphi(u, \lambda)$,
- określenie stanu elementu materialnego i wyznaczenie obszaru styku ciał,
- rozwiązanie układu równań równowagi dla elementów skończonych.

UWAGA: Dalej w rozdziale 4 u , v , λ będą przedstawione bez podkreśleń "˘". "Falka" pod symbolami \underline{K} , \underline{U} , \underline{M} i \underline{C} odnosi się do macierzy.

Metoda elementów skończonych, jaka jest wykorzystywana do przybliżania funkcjonału (4.1), jest związana z tworzeniem zmiennych wskaźnikowych takich jak: macierz masy \underline{M} niezależna od czasu, liniowa i nieliniowa macierz sztywności $\underline{K}_{n \sim L}$, $\underline{K}_{n \sim NL}$, wektor sił powierzchniowych $\underline{R}_{n \sim S}$, wektor sił residualnych $\underline{R}_{n \sim I}$ występujących w elementach, wektor przemieszczeń węzłowych \underline{U} i wektor przyspieszeń węzłowych $\underline{\ddot{U}}$.

Stan elementów określa się sprawdzając warunek plastyczności w węzłach należących do poszczególnych elementów.

Obszar oddziaływania dwóch ciał wyznacza się stosując reguły postępowania nazwane strategią kontaktową. Sposób określania stanu materiału i strategia kontaktowa zostały opracowane przez Rońdę i Brzozowskiego.

Całkowanie równań ruchu względem czasu wykonuje się stosując schemat Houbolta. Równania równowagi elementów skończonych rozwiązuje się metodą iteracyjną Newtona - Raphsona.

Rozwiązanie układu równań liniowych otrzymuje się stosując metodę nadrelaksacji SOR.

4.2.1.1 MINIMALIZACJA FUNKCJONAŁU

Funkcjonał $\varphi(u, \lambda)$ zawiera schemat różnicowy "w tył" dla przyspieszenia \ddot{u}_n w postaci

$$D_n(\ddot{u}) = a_{1, n-2} u_{n-2} + a_{2, n-1} u_{n-1} + a_{3, n} u_n$$

Operator różnicowy $D_n(\ddot{u})$ może być zastąpiony innymi jawnymi lub niejawnymi schematami aproksymującymi przyspieszenie.

Wobec tego bez wpływu na ogólność sformułowania zawartego w

rozdziale 2 funkcjonal (4.1) można zapisać następująco dla $u = v$

$$\begin{aligned} \varphi(u, \lambda) = & a(u, u) + \int_{\Omega} \rho D_n \dot{u} u_i dV + \int_{\Omega} \tau_{kl} u_{k,l} dV + \\ & - \int_{\Gamma_F} F_i u_i d\sigma + \int_{\Gamma_S} F_N u_N d\sigma + \int_{\Gamma_S} \lambda \gamma_n u_i d\sigma, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie pominięto siły masowe.

Funkcjonał (4.2) w zależności od metody minimalizacji można przedstawić w postaci odpowiedniej dla metody mnożników Lagrange'a (Chan i Tuba (1971), Hughes, Taylor, Sachman, Curnier i Kanoknukulchai (1976), Chen i Tsai (1986)) lub metody funkcji kary (Kikuchi i Oden (1984)).

FUNKCJONAŁ (4.2) dla METODY MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A

$$\begin{aligned} \varphi(u, \lambda, \beta, \omega_c) = & a(u, u) + \int_{\Omega} \rho D_n \dot{u} u_i dV + \int_{\Omega} \tau_{kl} u_{k,l} dV + \\ & - \int_{\Gamma_F} F_i u_i d\sigma + \int_{\Gamma_S} F_N u_N d\sigma + \int_{\Gamma_S} \lambda \gamma_n u_i d\sigma + \\ & + \int_{\Gamma_S} \beta [\mathcal{F}(x_{i_{SZ}}) - \mathcal{F}(x_{i_{S-PL}}) - \omega_c^2] d\sigma, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie $\mathcal{F}(x_i)$ jest funkcją powierzchni styku ciał, która spełnia następujące warunki

- dla ciała sztywnego

$$\mathcal{F}(x_{SZ}) \geq 0 \quad \text{dla } x_{SZ} \in \Omega_{SZ} \quad (i)$$

- dla ciała sprężysto-plastycznego

$$\mathcal{F}(x_{S-PL}) \leq 0 \quad \text{dla } x_{S-PL} \in \Omega_{S-PL} \quad (ii) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{F}(x_{\Gamma_S}) = 0 \quad \text{dla } x_{\Gamma_S} \in \Gamma_S \quad (iii)$$

Funkcję $\mathcal{F}(x_i)$ wprowadzono dla poglądowego przedstawienia warunków geometrycznych kontaktu opisanych w rozdziale 2 (§2.1 i §2.3) oraz w rozdziale 4 (§4.2.3). Przyjmując, że na ciało działają obciążenia zewnętrzne, warunki (4.4) są spełnione wtedy, kiedy funkcja $\mathcal{F}(x_i)$ jest monotoniczna względem jednostkowego wektora normalnego \bar{n} w sąsiedztwie powierzchni kontaktowej Γ_S .

To założenie o monotoniczności \mathcal{F} jest nieinterpretowalnym warunkiem dla fizycznej powierzchni styku ciał obciążonych siłami

zewnątrznymi. Warunki (4.4)(i) oraz (ii) można zapisać jako równanie

$$\mathcal{F}(x_i)_{SZ} - \mathcal{F}(x_i)_{S-PL} - \omega_c^2 = 0 \quad (4.5)$$

gdzie ω_c jest dodatkową zmienną.

W (4.3) występują funkcje - mnożniki Lagrange'a $\lambda(x_i)$ i $\beta(x_i)$. Mnożnik $\lambda(x_i)$ ma znaczenie wynikające z prawa tarcia Coulomba, tj. jeśli $|{}^n F_T| = \mu |{}^n F_N|$ wówczas $\exists \lambda(x_i) \geq 0$ takie, że ${}^n u_T = -\lambda {}^n F_T$. Drugi z mnożników przyjęto dla uściślenia opisu geometrycznych warunków kontaktowych na ${}^n \Gamma_S$. Mnożniki $\lambda(x_i)$, $\beta(x_i)$, przemieszczenie $u(x_i)$ oraz zmienną pomocniczą ω_c traktuje się jako niezależne zmienne w funkcjonał $\varphi(u, \lambda, \beta, \omega_c)$.

Warunki Kuhna-Tuckera (Luenberger (1973)), które są warunkami stacjonarności funkcjonału $\varphi(u, \lambda, \beta, \omega_c)$, wyrażają się (Chen i Tsai (1986)) następująco:

$$\frac{\partial \varphi(u, \lambda, \beta, \omega_c)}{\partial u} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi(u, \lambda, \beta, \omega_c)}{\partial \lambda} = 0 \quad (4.6)$$

$$\int_{n\Gamma_S} \beta [\mathcal{F}(x_i)_{SZ} - \mathcal{F}(x_i)_{S-PL}] d\sigma = 0 \quad ; \quad (4.7)$$

$$\int_{n\Gamma_S} [\mathcal{F}(x_i)_{SZ} - \mathcal{F}(x_i)_{S-PL}] d\sigma = 0 \quad , \quad (4.8)$$

gdzie pochodna jest brana w sensie Gateaux a zmienne x_i są współrzędnymi punktów materialnych w układzie kartezjańskim.

FUNKCJONAŁ ODPOWIADAJĄCY (4.2) DLA METODY FUNKCJI KARY

Funkcjonał $\varphi(u)$ dla metody funkcji kary zapisuje się w postaci

$$\begin{aligned} \varphi(u) = & a(u, u) + \int_{n\Omega} \rho D_n(u) u_i dV + \int_{n\Omega} {}^n \tau_{kl} u_{k,l} dV + \quad (4.9) \\ & - \int_{n\Gamma_F} {}^n F_i u_i d\sigma + \int_{n\Gamma_S} {}^n F_N u_N d\sigma + \alpha/2 \int_{n\Gamma_S} k(u) d\sigma + k/2 \int_{n\Gamma_S} h(u) d\sigma + \\ & + \beta \int_{n\Gamma_S} 1(|F_N, F_T|) u_T d\sigma, \end{aligned}$$

gdzie α, β i k są współczynnikami kary i ponadto w formie jawnej występują ograniczenia jednostronne i dwustronne

$$h(u) = 0, \quad k(u) \leq 0, \quad l(F_N, F_T) \leq 0. \quad (4.10)$$

Funkcje $h(u)$ i $k(u)$ są określone przez wyrażenia kwadratowe np. w postaci równości $h(u) = (u_{n_i} - \phi_i)^2$ wynikającej z warunków dla przemieszczeń oraz w formie nierówności $k(u) = 2\alpha_i x_i u_i - a_i u_i^2 \leq 0$, $i = 1, 2$ otrzymanej z warunku nieprzenikalności dwóch ciał tj. $R^2 \leq a_i (x_i - u_i)^2$, $i = 1, 2$, gdzie $R^2 = a_i x_i^2$ jest równaniem sztywnego walca. Ograniczenia jednostronne wynikające z prawa tarcia są wyrażone w postaci $l(F_N, F_T) = \text{sgn}(F_T^{k-1}) (|F_T^k| - \mu |F_N^k|)^{2.79} \leq 0$, gdzie k oznacza numer iteracji. Mnożnik $\text{sgn}(F_T^{k-1})$ zapewnia zwrot funkcji ograniczeń zgodny ze zwrotem siły stycznej.

Przyrównując pochodną Gateaux funkcjonału $\phi(u)$ do zera otrzymuje się warunek stacjonarności

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{ijkl}^{EP} e_{ij} \delta e_{kl} dv + \int_{\Omega} n_{kl} \tau_{kl} \delta \eta_{ij} dv + \int_{\Omega} \rho \delta C_{n_i} \delta u_i dv + \\ & + \int_{\Omega} n_{kl} \tau_{kl} \delta e_{kl} dv - \int_{\Gamma_F} F_i \delta u_i ds + \int_{\Gamma_S} F_N \delta u_N ds + \\ & + \alpha \int_{\Gamma_S} (u_i - \phi_i) \delta u_i ds + k \int_{\Gamma_S} (a_i x_i - a_i u_i) \delta u_i ds + \\ & + \beta \int_{\Gamma_S} \text{sgn}(F_T^{k-1}) (|F_T^k| - \mu |F_N^k|)^{2.79} \delta u_T ds = 0. \quad (4.11) \end{aligned}$$

UWAGA 4.1

W metodzie mnożników Lagrange'a dla każdego ograniczenia wprowadza się funkcję - mnożnik Lagrange'a ($\lambda(x)$, $\beta(x)$), co powoduje zwiększenie liczby niewiadomych i jest przyczyną zwiększenia układu równań równowagi otrzymanych w wyniku aproksymacji funkcjonału (4.3) i warunków (4.6), (4.7), (4.8) metodą elementów skończonych. Macierz sztywności zawiera wyrazy zerowe na głównej przekątnej, co eliminuje z użycia niektóre metody rozwiązania układu równań równowagi elementów. Zaletą metody mnożników Lagrange'a jest to, że warunki kontaktowe są spełnione dokładnie.

UWAGA 4.2

W metodzie funkcji kary nie wprowadza się nowych zmiennych a dokładność rozwiązania silnie zależy od współczynnika kary. Wybór zbyt dużego współczynnika kary prowadzi do utraty dokładności rozwiązania. Zbyt mały współczynnik może powodować przenikanie

stykających się ciał. Wielkość współczynnika kary szacuje się biorąc pod uwagę dokładność komputera, całkowitą liczbę niewiadomych oraz mniejszą ze sztywności stykających się ciał. W tej metodzie warunki kontaktowe są spełnione w sposób przybliżony.

4.2.1.2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Algorytm rozwiązania problemu kontaktowego sformułowanego w §2 zawiera procedurę bazującą na metodzie funkcji kary, ponieważ minimalizację funkcjonału (4.11) można wykonać wprowadzając mniejszą liczbę niewiadomych niż w przypadku zastosowania mnożników Lagrange'a.

Stosując metodę elementów skończonych do aproksymacji funkcjonału (4.9) warunek stacjonarności (4.11) otrzymuje się w postaci

$$\begin{aligned} & \tilde{U}^T \left[\langle \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} [B_{n \sim L}^{(e)}]^T n_{n \sim L}^{EP} B_{n \sim L}^{(e)} dV^{(e)} \rangle + \langle \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} [B_{n \sim NL}^{(e)}]^T n_{n \sim NL} B_{n \sim NL}^{(e)} dV^{(e)} \rangle \right] \tilde{U} + \\ & \rho \tilde{U}^T \langle \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} [H_{n \sim L}^{(e)}]^T H_{n \sim L}^{(e)} dV^{(e)} \rangle \tilde{U} = \tilde{U}^T \left[- \langle \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} [B_{n \sim L}^{(e)}]^T n_{n \sim L} dV^{(e)} \rangle + \right. \\ & + \langle \sum_{\Gamma_F^e} \int_{\Gamma_F^e} [H_{n \sim F}^{S(e)}]^T F_{n \sim F} d\sigma^{(e)} \rangle - \langle \sum_{\Gamma_S^e} \int_{\Gamma_S^e} [H_{n \sim S}^{S(e)}]^T F_{n \sim S} d\sigma^{(e)} \rangle + \\ & - \alpha \langle \epsilon_{i \sim i} \epsilon_{i \sim i}^T \tilde{U} - \phi_{i \sim i} \rangle + k \langle a_{i \sim i} \epsilon_{i \sim i}^T \tilde{U} - a_{i \sim i} x_{i \sim i} \rangle \Big] + \\ & + \langle \beta \sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} [H_{n \sim T}^{S(e)}]^T (|n_{n \sim T}^{k-1}| - \mu |n_{n \sim N}^{k-1}|)^2 d\sigma \rangle, \quad (4.12) \end{aligned}$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

$$n_{n \sim L}^{(e)}(x, y) = n_{n \sim L} H(x, y) \tilde{U}; \quad n_{n \sim NL}^{(e)}(x, y) = n_{n \sim NL} B^{(e)}(x, y) \tilde{U};$$

$$n_{n \sim F}^{(e)}(x, y) = n_{n \sim F} B^{(e)}(x, y) \tilde{U};$$

$n_{n \sim T}^{(e)}$ - przemieszczenie w elemencie (e),

\tilde{U} - wektor globalnych składowych przemieszczenia we wszystkich węzłach całego układu elementów,

\tilde{U}^C - wektor przyspieszeń węzłowych,

$n_{n \sim L}^{S(e)}$, $n_{n \sim NL}^{S(e)}$ - macierze kształtu tzn. macierze interpolacji przemieszczeń na brzegu i wewnątrz elementu,

$\underset{\sim}{B}^{(e)}$, $\underset{\sim}{B}^{(e)}$ - liniowa i nieliniowa macierz transformacji odkształcenie - przemieszczenie. Wiersze macierzy $\underset{\sim}{B}^{(e)}$ i $\underset{\sim}{B}^{(e)}$ powstają w wyniku operacji liniowych i różniczkowania wierszy macierzy $\underset{\sim}{H}^{(e)}$.

$\underset{\sim}{e}_i$ - wektor zawierający zera i tylko jeden element niezerowy na miejscu i -tym.

$\underset{\sim}{C}^{EP}$ - sprężysto - plastyczna macierz materiałowa,
 $\underset{\sim}{C}$ - macierz naprężenia Kirchhoffa (Cauchy),

$\underset{\sim}{F}$, $\underset{\sim}{F}_N$, $\underset{\sim}{F}_T$ - wektory sił węzłowych,

$\underset{\sim}{\phi}$ - wektor przemieszczeń zadanych na brzegu pasma sprężysto - plastycznego.

Układ równań równowagi, wynikający z (4.12) dla układu elementów skończonych, otrzymuje się w postaci wektorowej

$$\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{K}_{NL}\underset{\sim}{U} + \alpha\underset{\sim}{\epsilon}\underset{\sim}{\epsilon}^T\underset{\sim}{U} - k\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{\epsilon}\underset{\sim}{\epsilon}^T\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}_K - \underset{\sim}{R}_I + \underset{\sim}{R}_{SF} - \underset{\sim}{R}_S \quad (4.13)$$

gdzie niewiadomymi są przemieszczenia węzłowe w całym układzie elementów skończonych $\underset{\sim}{U}$.

W wyrażeniu (4.13) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\underset{\sim}{K}_{NL} = \sum_{\bullet} \int_{\Omega^e} [\underset{\sim}{B}^{(e)}]^T \underset{\sim}{n} \underset{\sim}{C}^{EP} \underset{\sim}{B}^{(e)} dV^{(e)}; \quad \underset{\sim}{K}_{NL} = \sum_{\bullet} \int_{\Omega^e} [\underset{\sim}{B}^{(e)}]^T \underset{\sim}{n} \underset{\sim}{B}^{(e)} dV^{(e)};$$

$$\underset{\sim}{M} = \rho \sum_{\bullet} \int_{\Omega^e} [\underset{\sim}{H}^{(e)}]^T \underset{\sim}{H}^{(e)} dV^{(e)};$$

$$\underset{\sim}{R}_K = \alpha \underset{\sim}{\epsilon} \underset{\sim}{\epsilon}^T - k \underset{\sim}{a} \underset{\sim}{\epsilon} \underset{\sim}{\epsilon}^T + \beta \int_{\Gamma_F^{(e)}} [\underset{\sim}{H}^{S(e)}]^T \underset{\sim}{n} (|F_{NT}^{k-1}| - \mu |F_N^{k-1}|) d\sigma; \quad 2.78$$

$$\underset{\sim}{R}_I = \sum_{\bullet} \int_{\Omega^e} [\underset{\sim}{B}^{(e)}]^T \underset{\sim}{n} \underset{\sim}{T} dV^{(e)}; \quad \underset{\sim}{R}_{SF} = \sum_{\bullet} \int_{\Gamma_F} [\underset{\sim}{H}^{S(e)}]^T \underset{\sim}{F} d\sigma^{(e)};$$

$$\underset{\sim}{R}_S = \sum_{\bullet} \int_{\Gamma_S} [\underset{\sim}{H}^{S(e)}]^T \underset{\sim}{F}_N d\sigma^{(e)}$$

Wektorowe równanie równowagi (4.13) można zapisać w następującej formie

$$\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}, \quad (4.14)$$

gdzie

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{K}_{NL} + \underset{\sim}{K}_{NL} + \alpha\underset{\sim}{\epsilon}\underset{\sim}{\epsilon}^T - k\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{\epsilon}\underset{\sim}{\epsilon}^T,$$

$$\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}_K - \underset{\sim}{R}_I + \underset{\sim}{R}_{SF} - \underset{\sim}{R}_S.$$

4.2.1.3 ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

Układ równań równowagi (4.14) rozwiązuje się stosując następujące techniki: metodę Houbolta całkowania po czasie, zmodyfikowaną metodę iteracyjną Newtona - Raphsona oraz metodę SOR lub FFT do rozwiązania układu równań liniowych.

Stosując zmodyfikowaną metodę iteracyjną Newtona - Raphsona do (4.14) otrzymuje się układ równań w chwili czasu $(n+1)$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{n+1} \tilde{U}^{(k-1)} + \tilde{K} \Delta \tilde{U}^{(k)} &= {}^{n+1} \tilde{R}^{(k-1)}; \\ \tilde{U}^{(k)} &= \tilde{U}^{(k-1)} + \Delta \tilde{U}^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdzie k jest numerem iteracji a równowaga jest rozpatrywana w chwili $(n+1)$.

W metodzie Houbolta całkowania po czasie wykorzystuje się aproksymację różnicową prędkości i przyspieszenia stosując następujące wyrażenia:

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2 \tilde{U}_i^{n+1} - 5 \tilde{U}_i^n + 4 \tilde{U}_i^{n-1} - \tilde{U}_i^{n-2}] \quad (4.16)(i)$$

$$\tilde{U}_i^{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} [11 \tilde{U}_i^{n+1} - 18 \tilde{U}_i^n + 9 \tilde{U}_i^{n-1} - 2 \tilde{U}_i^{n-2}] \quad (4.16)(ii)$$

Wstawiając (4.16) do (4.15) otrzymuje się zależność

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{\Delta t^2} \tilde{M} + \tilde{K} \right] \tilde{U}^{(k)} &= \tilde{K} \tilde{U}^{(k-1)} + {}^{n+1} \tilde{R}^{(k-1)} + \\ &+ \frac{5}{\Delta t^2} \tilde{M} \tilde{U} - \frac{4}{\Delta t^2} \tilde{M} \tilde{U}^{n-1} + \frac{1}{\Delta t^2} \tilde{M} \tilde{U}^{n-2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

którą można zapisać w postaci

$$\tilde{K}_{\tilde{M}} \tilde{U}^{(k)} = {}^{n+1} \tilde{R}_{\tilde{M}} \quad (4.18)$$

gdzie $\tilde{K}_{\tilde{M}} = \frac{2}{\Delta t^2} \tilde{M} + \tilde{K}$, a ${}^{n+1} \tilde{R}_{\tilde{M}}$ oznacza prawą stronę wyrażenia (4.17).

Równanie (4.18) rozwiązuje się metodą eliminacji Gaussa, w której stosuje się rozkład $\tilde{K}_{\tilde{M}} = \tilde{L} \tilde{D} \tilde{L}^T$ na iloczyn macierzy diagonalnej \tilde{D} i trójkątnych \tilde{L} , \tilde{L}^T .

Przemieszczenie $\tilde{U}^{(k)}$ znajduje się w dwóch krokach

$$\tilde{L} \tilde{V} = {}^{n+1} \tilde{R}_{\tilde{M}}, \quad (4.19)(i)$$

$$\underline{D} \underline{L}^T \underline{U}^{(k)} = \underline{V}, \quad (4.19)(ii)$$

gdzie \underline{V} oblicza się z zależności (4.19)(i)

$$\underline{V} = \underline{L}_{k-1}^{-1} \dots \underline{L}_2^{-1} \underline{L}_1^{-1} \underline{R}^{(k)}, \quad (4.19)(iii)$$

a rozwiązanie $\underline{U}^{(k)}$ otrzymuje się biorąc podstawienie odwrotne w (4.19)(ii) tj.

$$\underline{L}^T \underline{U}^{(k)} = \underline{D}^{-1} \underline{V}.$$

W (4.19)(iii) zastosowano rozkład macierzy trójkątnej $\underline{L} = \underline{L}_1 \underline{L}_2 \dots \underline{L}_{k-1}$ na iloczyn macierzy \underline{L}_i , w których wyrazy niezerowe leżą pod główną przekątną w i -tej kolumnie.

Przyspieszenie \underline{U} oblicza się z zależności (4.16)(i).

Układ równań równowagi opisujący oddziaływanie sztywnego walca i odkształcalnego pasma składa się z równań (4.15) oraz równań ruchu dla walca zawieszonoego lepkosprężystości tj.

$$\underline{M}_{\sim R} \underline{U}_{\sim R}^{(k-1)} + \underline{C}_{\sim R} \underline{U}_{\sim R}^{(k-1)} + \underline{K}_{\sim R} \underline{U}_{\sim R}^{(k)} = \underline{F}_{\sim S}^{(k-1)}, \quad (4.20)$$

gdzie $\underline{M}_{\sim R}$, $\underline{C}_{\sim R}$, $\underline{K}_{\sim R}$ są odpowiednio macierzami masy, tłumienia i sztywności, a $\underline{U}_{\sim R}$ jest przemieszczeniem środka walca. Siły działające na walec $\underline{F}_{\sim S}$ są równe sumie sił występujących w węzłach znajdujących się w obszarze styku ciał.

Stosując schemat Houbolta do (4.20) otrzymuje się równanie określające przemieszczenie $\underline{U}_{\sim R}^{(k)}$ środka walca

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t^2} \underline{M}_{\sim R} + \frac{11}{6\Delta t} \underline{C}_{\sim R} + \underline{K}_{\sim R} \right) \underline{U}_{\sim R}^{(k)} = \\ & = \underline{F}_{\sim S}^{(k-1)} + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \underline{M}_{\sim R} + \frac{3}{\Delta t} \underline{C}_{\sim R} \right) \underline{U}_{\sim R} + \\ & - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \underline{M}_{\sim R} + \frac{3}{2\Delta t} \underline{C}_{\sim R} \right) \underline{U}_{\sim R}^{(k-1)} + \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M}_{\sim R} + \frac{1}{3\Delta t} \underline{C}_{\sim R} \right) \underline{U}_{\sim R}^{(k-2)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Równania (4.17) i (4.21) stanowią kompletny układ równań do określania przemieszczeń $\langle \underline{U}_{\sim U}^{(k)}, \underline{U}_{\sim R}^{(k)} \rangle$ węzłów sprężysto - plastycznego pasma oraz sztywnego walca.

4.2.2. OKREŚLENIE STANU MATERIAŁU

Określenie aktualnej granicy plastyczności oraz stanu materiału w poszczególnych węzłach i elementach jest ściśle związane z metodą rozwiązania równania równowagi (4.13) dla elementów skończonych.

Metody rozwiązania nieliniowego równania równowagi elementów zostały omówione między innymi w monografiach Kleibera (1985) i Bathe (1982).

Znanymi sposobami poprawiania dokładności rozwiązania równań równowagi są metody zmiennej sztywności, które można podzielić na iteracyjne i mające charakter nieiteracyjny. Metody sił korekcyjnych i macierzy uśrednionej są technikami nieiteracyjnymi. Metoda Newtona-Raphsona lub jej modyfikacja przedstawiona przez Broydena, Flethera, Goldfarba i Shano (BFGS) należą do drugiej grupy metod poprawiania jakości rozwiązania.

Sposób uzmienniania elementów macierzy sztywności zaproponowany przez Brzozowskiego i Rońdę można uznać za jedną z modyfikacji metody zmiennej sztywności.

Jeśli znany jest przyrost odkształcenia, to składowe przyrostu tensora naprężenia, od których zależą elementy macierzy sprężysto-plastycznej \underline{C}^{EP} , oblicza się z równania konstytutywnego (2.2)(1) w postaci przyrostowej

$$\Delta \tau_{ij} = \int_0^{\Delta e_{kl}} C_{ijkl}^{EP} de_{kl} \quad (4.22)$$

zastępując całkę kwadraturami Gaussa (np. Bathe (1982) str. 274).

W przedstawionych rozważaniach przyjęto, że stan początkowy elementu w danej chwili jest taki sam jak w końcu poprzedniego etapu obliczeniowego. W związku z tym dla zadanego początkowego naprężenia i znanego przyrostu przemieszczenia w obszarze styku ciał oblicza się przyrost naprężenia. Znając aktualny stan naprężenia oblicza się stałe materiałowe, które zależą od naprężenia np. \underline{C}^{EP} lub od stanu materiału tzn. naprężenia i odkształcenia plastycznego tak jak współczynnik wzmocnienia izotropowego liczony wg pracy plastycznej.

Równania konstytutywne (4.22) dla składowych tensora naprężenia Kirchhoffa $\underline{\tau}$ i liniowej części odkształcenia Greena mają następujące postacie

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{11} &= \int_0^{\Delta e_{kl}} C_{11kl}^{EP} de_{kl} = \int_0^{\Delta e_{11}} C_{1111}^{EP} de_{11} + \\ &+ \int_0^{\Delta e_{22}} C_{1122}^{EP} de_{22} + \int_0^{\Delta e_{12}} C_{1112}^{EP} de_{12}, \end{aligned} \quad (4.23)(i)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{22} &= \int_0^{\Delta e_{kl}} C_{22kl}^{EP} de_{kl} = \int_0^{\Delta e_{11}} C_{2211}^{EP} de_{11} + \\ &+ \int_0^{\Delta e_{22}} C_{2222}^{EP} de_{22} + \int_0^{\Delta e_{12}} C_{2212}^{EP} de_{12}, \end{aligned} \quad (4.23)(ii)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{12} &= \int_0^{\Delta e_{kl}} C_{12kl}^{EP} de_{kl} = \int_0^{\Delta e_{11}} C_{1211}^{EP} de_{11} + \\ &+ \int_0^{\Delta e_{22}} C_{1222}^{EP} de_{22} + \int_0^{\Delta e_{12}} C_{1212}^{EP} de_{12}, \end{aligned} \quad (4.23)(iii)$$

gdzie elementy macierzy C^{EP} są wyrażone przez (2.29) i zależą od składowych naprężenia

$$\begin{aligned} C_{1111}^{EP} &= C(\tau_{11}, \tau_{11}), & C_{1122}^{EP} &= C(\tau_{11}, \tau_{22}), & C_{1112}^{EP} &= C(\tau_{11}, \tau_{12}), \\ C_{2211}^{EP} &= C(\tau_{22}, \tau_{11}), & C_{2222}^{EP} &= C(\tau_{22}, \tau_{22}), & C_{2212}^{EP} &= C(\tau_{22}, \tau_{12}), \\ C_{1211}^{EP} &= C(\tau_{12}, \tau_{11}), & C_{1222}^{EP} &= C(\tau_{12}, \tau_{22}), & C_{1212}^{EP} &= C(\tau_{12}, \tau_{12}). \end{aligned}$$

Zastępując całki w (4.23) kwadraturami Gaussa otrzymuje się równania konstytutywne w postaci

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{11} &= \sum_{i=1}^n C_{1111}^{EP}(\tau_{11}^{(i)}) \tau_{11}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)11, (in)11} \tau_{11}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)11, (i)11} \alpha_{11} + \\ &+ \sum_{j=1}^m C_{1122}^{EP}(\tau_{22}^{(j)}) \tau_{22}^{(j)} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)11, (in)22} \tau_{22}^{(j)} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)22, (j)22} \alpha_{22} + \\ &+ \sum_{k=1}^l C_{1112}^{EP}(\tau_{12}^{(k)}) \tau_{12}^{(k)} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)11, (in)12} \tau_{12}^{(k)} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)12, (k)12} \alpha_{12} \end{aligned} \quad (4.24)(i)$$

$$\Delta \tau_{22} = \sum_{i=1}^n C_{2211}^{EP}(\tau_{11}^{(i)}) \tau_{11}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)22, (in)11} \tau_{11}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)11, (i)11} \alpha_{11} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^m C_{2222}^{EP} C_{(in)\tau_{22}} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)\tau_{22}} C_{(in)\tau_{22}} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)\tau_{22}} C_{(j)\alpha_{22}} + \\
 & + \sum_{k=1}^l C_{2212}^{EP} C_{(in)\tau_{22}} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)\tau_{22}} C_{(in)\tau_{12}} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)\tau_{12}} C_{(k)\alpha_{12}}
 \end{aligned}$$

(4.24)(ii)

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau_{+12} & = \sum_{i=1}^n C_{1211}^{EP} C_{(in)\tau_{12}} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)\tau_{12}} C_{(in)\tau_{11}} + \sum_{i=1}^n \delta_{(i)\tau_{11}} C_{(i)\alpha_{11}} + \\
 & + \sum_{j=1}^m C_{1222}^{EP} C_{(in)\tau_{12}} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)\tau_{12}} C_{(in)\tau_{22}} + \sum_{j=1}^m \delta_{(j)\tau_{22}} C_{(j)\alpha_{22}} + \\
 & + \sum_{k=1}^l C_{1212}^{EP} C_{(in)\tau_{12}} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)\tau_{12}} C_{(in)\tau_{12}} + \sum_{k=1}^l \delta_{(k)\tau_{12}} C_{(k)\alpha_{12}}
 \end{aligned}$$

(4.24)(iii)

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \delta_{(1)\tau_{11}} & = C_{1111}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{11}} C_{(1)P_{11}^-} C_{(0)P_{11}} + \\
 & + C_{1122}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{22}} C_{(1)P_{22}^-} C_{(0)P_{22}} + \\
 & + C_{1112}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{12}} C_{(1)P_{12}^-} C_{(0)P_{12}} ; \\
 \delta_{(2)\tau_{11}} & = C_{1111}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} C_{(2)P_{11}^-} C_{(1)P_{11}} + \\
 & + C_{1122}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{22}} + \delta_{(1)\tau_{22}} C_{(2)P_{22}^-} C_{(1)P_{22}} + \\
 & + C_{1112}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{12}} + \delta_{(1)\tau_{12}} C_{(2)P_{12}^-} C_{(1)P_{12}} ; \\
 \delta_{(n)\tau_{11}} & = C_{1111}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} + \dots + \delta_{(n-1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} + \\
 & \dots + \delta_{(n-1)\tau_{11}} C_{(n)P_{11}^-} C_{(n-1)P_{11}} + \\
 & + C_{1122}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} + \dots + \delta_{(n-1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{22}} + \delta_{(1)\tau_{22}} + \\
 & \dots + \delta_{(n-1)\tau_{22}} C_{(n)P_{22}^-} C_{(n-1)P_{22}} + \\
 & + C_{1112}^{EP} C_{(in)\tau_{11}} + \delta_{(1)\tau_{11}} + \dots + \delta_{(n-1)\tau_{11}} C_{(in)\tau_{12}} + \delta_{(1)\tau_{12}} + \\
 & \dots + \delta_{(n-1)\tau_{12}} C_{(n)P_{12}^-} C_{(n-1)P_{12}} , \text{ itd.}
 \end{aligned}$$

W zależnościach tych wagi oznaczono przez $\alpha_{(i)ij}$ a punkty próbne przez $(i)P_{ij}$.

ALGORYTM CAŁKOWANIA (4.24) składa się z następujących

etapów:

ETAP PIERWSZY:

1.1 określenie liczby punktów próbnych N_{ij} , określenie położenia punktów próbnych $(i)P_{ij}$, określenie wag $(i)\alpha_{ij}$,

1.2 normalizacja wartości początkowej Δe_{ij} tzn. obliczenie

$$\Delta_{\sigma} e_{ij} = \Delta e_{ij} / |\Delta e_{ij}|, \Delta_{\sigma} e_{ij} \in [-1, 1]$$

1.3 obliczenie początkowych wartości C_{ijkl}^{EP} na podstawie znanych z poprzedniego kroku wartości $(in)\tau_{ij}$,

1.4 obliczenie $\delta_{(\omega)\tau_{ij}}$,

1.5 obliczenie wartości C_{ijkl}^{EP} w punkcie $(\omega)P_{ij}$ tzn.

$$(1)C_{ijkl}^{EP} = C((in)\tau_{ij} + \delta_{(\omega)\tau_{ij}}, (in)\tau_{kl} + \delta_{(\omega)\tau_{kl}}),$$

1.6 obliczenie składnika sumy $(\omega)s_{ij} = (\omega)C_{ijkl}^{EP} (\omega)\alpha_{kl}$,

ETAP DRUGI

2.1 obliczenie $\delta_{(2)\tau_{ij}}$,

2.2 obliczenie wartości C_{ijkl}^{EP} w punkcie $(2)P_{ij}$ tzn.

$$(2)C_{ijkl}^{EP} = C((in)\tau_{ij} + \delta_{(\omega)\tau_{ij}} + \delta_{(2)\tau_{ij}}, (in)\tau_{kl} + \delta_{(\omega)\tau_{kl}} + \delta_{(2)\tau_{kl}}),$$

2.3 obliczenie składnika sumy $(2)s_{ij} = (2)C_{ijkl}^{EP} (\omega)\alpha_{kl}$,

ETAP i-ty

i.1 obliczenie $\delta_{(\omega)\tau_{ij}}$,

i.2 obliczenie wartości C_{ijkl}^{EP} w punkcie $(\omega)P_{ij}$ tzn.

$$(\omega)C_{ijkl}^{EP} = C((in)\tau_{ij} + \delta_{(\omega)\tau_{ij}} + \dots + \delta_{(\omega)\tau_{ij}}, (in)\tau_{kl} + \delta_{(\omega)\tau_{kl}} + \dots + \delta_{(\omega)\tau_{kl}}),$$

i.3 obliczenie składnika sumy $(\omega)s_{ij} = (\omega)C_{ijkl}^{EP} (\omega)\alpha_{kl}$,

JESLI $i = N_{ij}$, to wówczas

ETAP N-ty

N.1 obliczenie sumy $\Delta\tau_{ij} = \sum_{i=1}^N (\omega)s_{ij}$

Zaprezentowana metoda zmiennej sztywności dla przypadku

jednowymiarowego może być zilustrowana przez rys.4.1.

4.2.3. STRATEGIA KONTAKTOWA

Warunki określające wielkość obszaru styku ciał są warunkami brzegowymi nazywanymi warunkami kontaktowymi, które są wyrażone jako relacje między wielkościami geometrycznymi lub siłami. Sformułowanie tych warunków jest związane z uproszczonym opisem ruchu węzłów w obszarze styku ciał.

Metodę postępowania mającą na celu przyspieszenie określenia obszaru styku ciał nazywa się strategią kontaktową. Zawiera ona sprawdzanie warunków kontaktowych lub zależności wynikających z nich i określanie przybliżonego położenia węzłów w obszarze styku.

Sposób postępowania opisany poniżej został opracowany przez Rońdę i Brzozowskiego i przedstawiony w pracach: Rońdy, Bogacza, Brzozowskiego (1986) i Rońdy, Mahrenholtza, Bogacza, Brzozowskiego (1986).

Określając obszar kontaktowy we wstępnej fazie obliczeń rozpatruje się ruch dwóch figur geometrycznych będących obrazami stykających się ciał. Figury te mogą przenikać się, ponieważ przyjęto, że walec tocząc się przyjmuje nowe położenie na początku każdego kroku. W rzeczywistości, węzły znajdujące się w obszarze wspólnym dla dwóch figur leżą na powierzchni kontaktowej. W następnym etapie obliczeniowym węzły te muszą być usunięte z obszaru przenikania tzn. określone jest przybliżone położenie tych punktów w obszarze kontaktowym. W tym celu znajduje się miejsce, gdzie węzeł P pasma (Rys. 4.2) po raz pierwszy styka się z walcem a następnie określa się długość łuku, jaki węzeł P zakreśla pozostając w kontakcie z walcem.

Ruch węzłów opisano w układzie odniesienia, którego początek pokrywa się ze środkiem walca w następnym tzn. $(i+1)$ kroku analizy.

Przyjmuje się, że w krokach (i) i $(i+1)$ punkt P zajmuje położenia $P_{(i)}$ i $P_{(i+1)}$, a ponadto węzeł ten po raz pierwszy styka

się z walcem w punkcie C (Rys. 4.2). Węzeł P pozornie przemieszcza się z punktu $P_{(i)}$ do C_1 , gdy walec obraca się o kąt $\Delta\varphi$. Punkt P przebywa odległość $P_{(i)}C = W_{FR}$ poza walcem a odległość CC_1 pokonuje stykając się z powierzchnią cylindryczną.

Położenie punktu C_1 określa się zakładając, że stosunek W do długości odcinka $P_{(i)}P_{(i+1)}$ jest w przybliżeniu równy ilorazowi kąta $\Delta\varphi_{C \rightarrow P_{(i+1)}}$ i całego przyrostu kąta obrotu $\Delta\varphi$. Wobec tego długość łuku CC_1 można obliczyć ze wzoru

$$CC_1 = R \Delta\varphi_{C \rightarrow P_{(i+1)}} \cong R \Delta\varphi \frac{W_{IN}}{W_{FR} + W_{IN}} \quad (4.25)$$

gdzie W_{IN} jest znaną odległością, którą punkt P przebywa pozornie wewnątrz walca.

Po określeniu położenia węzłów w obszarze styku sprawdza się warunki wyrażone jako relacje między siłami tarcia i siłami stycznymi.

Obszar kontaktowy można podzielić na trzy podobszary w zależności od siły normalnej F_N , wypadkowej siły stycznej F_{RE} oraz zwrotów tych sił. Wypadkową siłę styczną oblicza się ze wzoru

$$F_{RE} = \text{sign}(\Delta u_T)(|F_T| - \nu|F_N|) \quad (4.26)$$

gdzie F_T jest siłą styczną a $\nu|F_N|$ oznacza siłę tarcia Coulomba.

Węzeł P ślizga się po powierzchni cylindrycznej i znajduje się w jednym z dwóch obszarów poślizgu, jeśli $F_{RE} > 0$. Punkt P jest szczepiony adhezyjnie z powierzchnią walca, jeśli $F_{RE} \leq 0$.

Węzeł znajduje się poza obszarem styku, kiedy odległość $OP_{(i+1)}$ jest większa od promienia walca R lub jeśli $OP_{(i+1)} = R$, ale siła F_N ma zwrot dodatni.

Takie punkty jak C_1 określa się dla wszystkich węzłów, dla których $OP_{(i+1)} < R$. Następnie, wypadkową siłę styczną F_{RE} oblicza się z (4.26), jeśli $F_T > \nu|F_N|$.

Kierunek siły normalnej F_N jest określany w każdym węzle, który w kroku poprzednim leżał w obszarze kontaktowym.

Proces iteracyjny, w czasie którego:

- określa się obszar styku ciał,
- rozwiązuje układ równań równowagi elementów znajdując przyrosty przemieszczeń w węzłach,

- sprawdza warunki kontaktowe wyrażone w siłach,
nie może być zakończony, dopóki wewnątrz obszaru walca znajdują
się węzły należące do odkształceniowego pasma.

5. WYNIKI DLA NIESTACJONARNYCH ZAGADNIENI KONTAKTOWYCH

Przedstawiono wyniki dla czterech niestacjonarnych zadań kontaktowych opisujących problemy styku sztywnego walca i sprężysto-plastycznego pasma. Zadania te różnią się sposobem zamocowania pasma, położeniem obszaru styku walca i pasma oraz traktowaniem sił bezwładności. Rozwiązano zagadnienia styku sztywnego walca z pasmem utwierdzonym w jednym punkcie lub pasmem utwierdzonym na dwóch skrajnych pionowych powierzchniach Γ_b i Γ_f . W prezentowanych przykładach przyjęto następujące założenia:

1. Pasma deformuje się w płaskim stanie odkształcenia.
2. Pasma jest zgniatanie przez dwa jednakowe walce usytuowane symetrycznie względem płaszczyzny środkowej Γ_o . Ta symetria pozwala prowadzić obliczenia tylko dla górnego półpasma ograniczonego przez płaszczyznę Γ_o , górną powierzchnię Γ_p oraz dwie powierzchnie pionowe Γ_b i Γ_f .
3. Powierzchnie pionowe Γ_b i Γ_f oraz część górnej powierzchni pasma $\Gamma_p \setminus \Gamma_c$ są brzegami wolnymi od sił zewnętrznych.
4. W obszarze styku walca i pasma Γ_c spełnione są warunki Signoriniego i warunki tarcia wg modelu Coulomba.

5.1. ZAGADNIENIA QUASISTATYCZNE

5.1.1. ODDZIAŁYWANIE RUCHOMEJ WALCA I PASMA UTWIERDZONEGO JEDNOSTRONNIE

Problem toczenia się sztywnego walca po sprężysto-plastycznym pasmie rozwiązano przyjmując następujące założenia:

1. W prawie zachowania (4.9) pominięto siły bezwładności.
2. Ruch środka walca określa funkcja o postaci

$$u_y = A \sin(2\pi u_x / L), \quad (5.1)$$

gdzie A jest amplitudą, L oznacza drogę odpowiadającą okresowi ruchu harmonicznego a u_x jest przemieszczeniem walca w kierunku x .

3. Pasma jest utwierdzone w punkcie A (rys.5.1) leżącym na

przecięciu płaszczyzny Γ_o i powierzchni pionowej Γ_b ograniczającej pasmo z lewej strony. Pozostałe punkty leżące na Γ_o mogą przemieszczać się tylko w kierunku wzdłużnym x.

4. Znana jest głębokość walcowania $g=0.60$ mm, która odpowiada zgniotowi pasma równemu 3 %.

Pasmo sprężysto-plastyczne o wymiarach 225×20 mm podzielono na 270 elementów trójkątnych, które tworzą siatkę o stu osiemdziesięciu czterech węzłach. Na górnej powierzchni pasma Γ_p znajduje się 46 węzłów.

Walec toczący się po paśmie ma średnicę $2R=600$ mm.

Wyniki przedstawiono dla dwóch zbiorów parametrów określających ruch walca.

Amplituda A i okres L przyjmują następujące wartości:

1. $L=20$ mm, $A=0.1$ mm w zbiorze danych oznaczonych symbolem OUTF05
2. $L=10$ mm, $A=0.1$ mm dla OUTF10.

Materiał sprężysto-plastyczny ma następujące właściwości mechaniczne:

- moduł Younga $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa,
- parametr wzmocnienia $\kappa=0.07$,
- liczba Poissona $\nu=0.3$,
- początkowa granica plastyczności $y_o=50$ MPa,
- współczynnik tarcia Coulomba dla styku stalowego walca i stalowego pasma $\mu=0.15$.

Proces walcowania podzielono na dwa etapy. W czasie pierwszego okresu trwającego od pierwszego do trzeciego kroku walec jest wciskany w pasmo i jego środek porusza się tylko w kierunku y. W drugim etapie walec porusza się ruchem okresowym tocząc się po powierzchni pasma z poślizgiem równym 3 %.

Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci rysunkowej. Składowe naprężenia i odkształcenia oraz przemieszczenie u_y a także drugi niezmiennik naprężenia zaprezentowano w formie wykresów pokrytych warstwicami (izoliniami). Warstwice przedstawiają stan materiału w czwartym i siódmym kroku obliczeniowym. Ponadto pokazano kształt

górnjej powierzchni pasma dla dwunastu kroków obliczeniowych i wykresy nacisków normalnych w obszarze kontaktowym.

Linie łączące punkty o jednakowych wartościach pierwiastka kwadratowego z drugiego niezmienniką naprężenia Kirchhoffa τ_{ij} przedstawiono na rys. 5.2. Obszar plastyczny pasma jest ograniczony liniami opisanymi przez 50 MPa.

Na wykresach naprężeń jednostkami miary są MPa.

Trzy podobszary strefy styku walca i pasma są widoczne na rys. 5.3(i). W środku obszaru kontaktowego jest usytuowana strefa z naprężeniami zerowymi, której na rys. 5.4 odpowiada również środkowy podobszar, gdzie odkształcenia ϵ_{xy} są małe.

Z lewej strony warstwiczy zerowej znajduje się obszar, gdzie występują naprężenia ściskające a z prawej strony leży obszar, w którym naprężenia są rozciągające.

Wykresy warstwicowe (rys. 5.3) przedstawiają stan naprężenia w punktach Gaussa, gdzie równania równowagi elementów skończonych są całkowane. Z tego względu, na prezentowanych wykresach składowe stanu naprężenia nie znikają na brzegach swobodnych półpasma. Ten pozorny błąd powoduje uproszczenie procedury graficznej, ponieważ pozwala na ekstrapolację stanu naprężenia (znanego w punktach Gaussa) do węzłów leżących na brzegu pasma.

Na wykresie (rys. 5.5) przemieszczenia u_y można zauważyć, że warstwicze pod walcem mają kształt zbliżony do eliptycznego.

Ewolucja górnjej powierzchni pasma w dwunastu krokach obliczeniowych jest przedstawiona na rys. 5.6. Powstawanie jednej fałdy w czasie walcowania można zaobserwować w trzech kolejnych etapach obliczeniowych. W trzecim kroku walec osiąga dolne położenie a następnie w czwartym kroku porusza się do góry i przemieszcza w lewo. Za walcem powstaje fałda, która rośnie, kiedy walec ponownie jest wciskany w pasmo w kroku piątym.

Wypukłość staje się bardziej widoczna, gdy walec znajduje się dostatecznie daleko i materiał może odciążyć się sprężystości. Fałdy mają różne kształty, ponieważ znajdują się w różnej odległości od podpory nieruchomej i brzegu swobodnego. Podziałka, w której przedstawiono przemieszczenia pionowe u_y , jest sto razy większa od

podziałki przyjętej dla u_x .

Naciski normalne występujące w obszarze styku pokazano na rys. 5.7 dla danych OUTF10 i OUTF05. Wykresy te są odpowiednie dla trzynastego kroku, kiedy walec znajduje się w tej samej odległości od podpory stałej i jest w tej samej fazie drgań dla obydwu zbiorów danych.

5.1.2. WYNIKI DLA NIESKONCZENIE MAŁYCH I SKONCZONYCH ODKSZTAŁCEN

Wyniki dla zagadnień kontaktowych, w których uwzględniono duże lub nieskończenie małe odkształcenia, otrzymano przyjmując następujące założenia:

1. Siły bezwładności zostały pominięte w prawie zachowania (4.9).
2. Proces walcowania podzielono na dwa etapy. W pierwszym stadium kończącym się w trzecim kroku analizy walec jest wciskany w pasmo. W drugiej fazie walcowania rozpoczynającej się w czwartym kroku, walec toczy się po powierzchni pasma i jego środek przemieszcza się tylko w kierunku x .
3. Pasma jest utwierdzone w punkcie A leżącym na przecięciu płaszczyzny symetrii Γ_0 i powierzchni pionowej Γ_b (rys. 5.1).
4. Znana jest głębokość walcowania $g=1.22$ mm, która odpowiada redukcji grubości pasma równemu 3.05%.

Pasma o wymiarach 100x40 mm podzielone zostało na 40 elementów kwadratowych, które tworzą siatkę o pięćdziesięciu pięciu węzłach. Jedenaście węzłów znajduje się na górnej powierzchni pasma.

Walec ma średnicę $2R=600$ mm.

Materiał sprężysto-plastyczny ma takie same właściwości jak w rozdziale 5.1.1.

Wyniki otrzymane dla dwóch zbiorów danych INFINI i LARGE przedstawiono w postaci graficznej. Dane INFINI są wykorzystywane w zagadnieniu kontaktowym sformułowanym dla nieskończenie małych odkształceń a dane LARGE w analizie odpowiedniej dla dużych

odkształceń.

Deformacje siatki prostokątnej w trzech wybranych krokach analizy z wykorzystaniem danych LARGE pokazano na rys.5.8.

Ewolucja kształtu powierzchni górnej pasma Γ_p w czternastu krokach analizy dla skończonych odkształceń jest widoczna na rys.5.9. Przeszyczenia u_y węzłów należących do Γ_p przedstawiono w podziale sto razy większej od podziałki odpowiedniej dla u_x .

Warstwice określające składowe stanu naprężenia τ_{ij} i drugi niezmiennik naprężenia Kirchhoffa w szóstym kroku analizy przedstawiono na rysunkach 5.10 i 5.11. Wykresy dla danych INFINI i LARGE są podobne pod względem jakościowym a ilościowo różnią się nieznacznie dla małego stopnia zgniotu pasma.

Składowe tensora odkształcenia Greena w szóstym kroku przyrostowym dla dwóch zbiorów danych porównano na rys.5.12. Porównanie ilościowe wyników dla szóstego kroku analizy odpowiednich dla węzła leżącego w środku obszaru styku przedstawiono w tabelicy 5.1.

Na wykresach naprężeń jednostkami są MPa. Na wszystkich wykresach warstwicznych linie ciągłe odnoszą się do danych LARGE.

TABLICA 5.1.

Składowa odksz.	α	Składowa naprężenia	α	Składowa przemieszcz.	α
ϵ_{xx}	-3.2	τ_{xx}	3.72	u_x	16
ϵ_{yy}	-0.86	τ_{yy}	-11.3	u_y	0.15
ϵ_{xy}	-22	τ_{xy}	4.5		

gdzie $\alpha = \frac{a_{LARGE} - a_{INFINI}}{a_{LARGE}} 100\%$.

5.1.3. TOCZENIE SIĘ WALCA PO PASMIE UTWIERDZONYM DWUSTRONNIE

Zagadnienie walcowania sprężysto-plastycznego pasma rozwiązano przyjmując, że:

1. W prawie zachowania (4.9) nie uwzględniono sił bezwładności.

2. Ruch walca określa równanie różniczkowe (4.20) tj.

$$\underset{\sim}{M}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k-1)} + \underset{\sim}{C}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k-1)} + \underset{\sim}{K}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k)} = \underset{\sim}{F}_S^{(k-1)},$$

gdzie $\underset{\sim}{M}_R$, $\underset{\sim}{C}_R$ i $\underset{\sim}{K}_R$ są odpowiednio macierzami masy, tłumienia i sztywności a $\underset{\sim}{U}_R$ jest przemieszczeniem środka walca. Masę $\underset{\sim}{M}_R$ określa się dla jednostkowej długości walca.

3. Pasma jest utwierdzone w punktach A i B (rys.5.13), które leżą odpowiednio na przecięciu górnej powierzchni Γ_p z płaszczyznami Γ_b lub Γ_f . Punkty leżące w płaszczyźnie Γ_o mogą przemieszczać się tylko w kierunku x.

4. Znana jest początkowa głębokość walcowania $g=1.71$ mm, która odpowiada zgniotowi pasma równemu 3.42 %.

Pasma sprężysto-plastyczne o wymiarach 427.5x50 mm podzielono na 150 elementów, które tworzą siatkę o nierównomiernych oczkach zawierającą 186 węzłów. Na powierzchni Γ_p znajduje się 31 węzłów. Walec toczący się po pasmie ma wymiary $\phi 400 \times 1$ mm.

W chwili początkowej środek walca znajduje się w odległości 122.19 mm od lewej krawędzi pasma.

Proces obliczeniowy kończy się po 73 krokach czasowych. W tym czasie walec przetacza się na odległość $L=160$ mm co stanowi 37.42% długości całego pasma. Obliczenia wykonano dla kroku czasowego $t=0.25 \cdot 10^{-4}$ s, co odpowiada prędkości pasma $v_x=88$ m/s.

Materiał sprężysto-plastyczny ma następujące właściwości mechaniczne:

- moduł Younga $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa,
- parametr wzmocnienia $\kappa=0.12$,
- liczba Poissona $\nu=0.30$,
- początkowa granica plastyczności $y_o=80$ MPa,
- współczynnik tarcia Coulomba dla stalowego walca stykającego się ze stalowym pasmem $\mu=0.12$,

- gęstość $\rho = 7.8 \text{ g/mm}^3$.

Proces walcowania składa się z dwóch przejść walca po powierzchni pasma. W każdym przejściu można wyróżnić cztery okresy. W czasie od pierwszego do piątego kroku walec opuszcza się i jest wciskany na głębokość 0.9 mm . W drugim stadium ruchu trwającym od szóstego do ósmego kroku walec przemieszcza się wzdłuż y osiągając głębokość $g = 1.71 \text{ mm}$ i ponadto obraca się wokół swojej osi. W tych trzech krokach poślizg rośnie od jednego do trzech procent. W okresie od dziewiątego do szesnastego czwartego kroku walec przemieszcza się w kierunku osi x z prędkością ustaloną v_x oraz wykonuje ruch posuwisto-zwrotny wzdłuż y . W czwartej, ostatniej fazie ruchu rozpoczynającej się w kroku szesnastym piątym walec jest podnoszony do góry. W tym czasie pasmo odciąża się sprężyste.

Wyniki obliczeń dla pierwszego przejścia walca (DATA01) przedstawiono w postaci wykresów zawierających warstwicę pól składowych naprężenia τ_{ij} i pierwiastka kwadratowego z drugiego niezmiennika naprężenia Kirchhoffa I_2 dla trzech kroków czasowych oznaczonych numerami: 23, 47 i 71. Rysunki zestawiono łącząc parami wykresy odpowiadające różnym chwilom czasu. Wykresy przedstawione na rysunkach od 5.14 do 5.17 odnoszą się do pierwszego przejścia walca.

W drugim przejściu dla danych DATA02 walec odbył tę samą drogę co w pierwszym pokonując odległość $L = 180 \text{ mm}$. W pierwszej fazie ruchu walec został wciśnięty w pasmo na głębokość $g = 1 \text{ mm}$. Wyniki porównano biorąc składową styczną naprężenia τ_{xy} (rys. 5.18) i pierwiastek kwadratowy z drugiego niezmiennika naprężenia I_2 (rys. 5.19) dla dwóch przejść DATA01 i DATA02 w chwili czterdziestej siódmej, kiedy walec znajdował się w środku długości pasma. Obserwując wykresy przedstawione na rysunkach 5.18 i 5.19 można zauważyć, że po procesie walcowania występują większe naprężenia reszkowe oraz stwierdzić, że te same warstwicę obejmują większe obszary pasma, ponieważ w drugim przejściu naprężenia pojawiające się w paśmie są większe.

5.2. ZAGADNIENIA DYNAMICZNE

5.2.1. UDERZENIE WALCA W NAROŻE PASMA UTWIERDZONEGO W JEDNYM PUNKCIE

Zagadnienie uderzenia sztywnego walca w naroże sprężysto-plastycznego pasma utwierdzonego w jednym punkcie rozwiązano przyjmując następujące założenia:

1. W prawie zachowania (4.9) uwzględniono siły bezwładności.
2. Ruch walca zawieszonoego lepkosprężystości opisuje równanie (4.20) tj.

$$\underset{\sim}{M}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k-1)} + \underset{t}{\sim}{C}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k-1)} + \underset{t}{\sim}{K}_R \underset{\sim}{U}_R^{(k)} = \underset{t}{\sim}{F}_S^{(k-1)},$$

gdzie $\underset{\sim}{M}_R$, $\underset{t}{\sim}{C}_R$ i $\underset{t}{\sim}{K}_R$ są odpowiednio macierzami masy, tłumienia i sztywności a $\underset{\sim}{U}_R$ jest przemieszczeniem środka walca. Siły działające na walec $\underset{t}{\sim}{F}_S^{(k-1)}$ są równe całce z wektora naprężenia normalnego występującego w obszarze styku. Przyjęto masę walca $M_R=100$ kg, współczynnik tłumienia $C_R=10^{-3}$ m²/s, sztywność walca $K_R=10^6$ MPa.

3. Pasma o wymiarach 200x40 mm jest umocowane w jednym węźle nr 5 i zawiera 80 elementów prostokątnych i 105 węzłów. W chwili początkowej walec uderza w naroże, gdzie znajduje się węzeł nr 101 (rys. 5.20). 4. Znana jest prędkość uderzenia V_x i głębokość walcowania $g=2.5$ mm, która odpowiada zgniotowi pasma równemu 6.25 %. Problem rozwiązano dla trzech prędkości V_x .

Pasma sprężysto-plastyczne ma następujące stałe materiałowe:

- moduł sprężystości Younga $E=2.1 \cdot 10^4$ MPa,
- parametr wzmocnienia $\kappa=0.07$,
- liczba Poissona $\nu=0.3$,
- początkowa granica plastyczności $y_0=30$ MPa,
- współczynnik tarcia Coulomba $\mu=0.07$,
- gęstość $\rho=7.8$ g/mm³.

Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów przyrostów przemieszczenia węzła sto pierwszego oraz wykresów-map składowej naprężenia τ_{xy} i pierwiastka z drugiego niezmiennika naprężenia I_{2T} .

Przyrosty przemieszczenia D_{vx} i D_{vy} w węźle sto pierwszym w czasie procesu deformacji pokazano na rysunkach 5.21(i)+(iv). Przyrost przemieszczenia D_{vy} w chwili piątej jest największy dla wszystkich wartości prędkości V_x . Kształt wykresów D_{vx} i D_{vy} jest charakterystyczny dla ruchu układów wielomasowych z tłumieniem.

Wykres D_{vy} dla $V_x=50$ m/s (rys.5.21dii) przedstawia odcinek prostej łączącej punkty odpowiadające chwili piątej i szesnastej. Wykresy D_{vy} dla $V_x=6.25$ m/s i $V_x=25$ m/s (rys.5.21d,di) również zawierają odcinki prostej, których długość jest proporcjonalna do prędkości. Na złożeniu trzech wykresów przedstawiających D_{vy} (rys.5.21di) można zauważyć, że wszystkie krzywe są styczne do prostej, na której leży odcinek charakterystyczny dla D_{vy} dla $V_x=50$ m/s.

Składowe naprężenia τ_{xy} odpowiednie dla czterech chwil czasu pokazano na rysunkach 5.22 i 5.23 dla $V_x=6.25$ m/s i $V_x=50$ m/s. Na rysunkach widać kształt i zmianę położenia dwóch warstwicz oznaczonych przez -30 i -50 M Pa. Linie te przemieszczają się w kierunku ruchu walca.

Wykresy-mapy przedstawiają stan naprężenia w punktach Gaussa, gdzie układ równań ruchu dla elementów skończonych jest całkowany. Z tego powodu, na prezentowanych wykresach składowe stanu naprężenia nie znikają na brzegach swobodnych półpasma tzn. Γ_b , Γ_f , Γ_p , Γ_c . Ten pozorny błąd powoduje uproszczenie procedury graficznej.

Długość kroków czasowych dobierano w zależności od prędkości tak, aby w n-tej chwili czasu wałek znajdował się w tej samej odległości od brzegu pasma Γ_f .

Drugi niezmiennik naprężenia dla czwartego kroku czasu pokazano na rysunku 5.24. Linie przerywane są odpowiednie dla $V=50$ m/s. W chwili czwartej pierwiastek kwadratowy z I_{2T} dla $V=50$ m/s w nieruchomym węźle piątym leżącym na przecięciu Γ_o i Γ_b jest

mniejszy od 10 MPa i rośnie wolniej niż w przypadku $V=6.25$ m/s. Ponadto na rysunku tym można zauważyć, że w węzłach 5 i 101 drugi niezmiennik I_{2T} osiąga te same wielkości dla $V=6.25$ m/s.

Porównując wykresy-mapy (rys. 5.25) przedstawiające pierwiastek kwadratowy z I_{2T} dla $V=6.25$ m/s i $V=50$ m/s można zauważyć, że linie odpowiednie dla mniejszej prędkości oznaczone przez 10 MPa dzielią lewą część półpasma na cztery podobszary, podczas gdy dla większej prędkości warstwice dla 10 MPa dzielią tę część pasma na dwa podobszary. W drugim przypadku naprężenia w lewej części pasma są większe.

Na rysunkach 5.24 i 5.25 widać, że ruch frontu zaburzenia spowodowanego uderzeniem walca odbywa się ze skończoną prędkością i ma wpływ na reakcję półpasma.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Przedstawiona rozprawa zawiera:

- przegląd literatury dotyczącej problemów kontaktowych,
- wariacyjne sformułowanie tocznego problemu kontaktowego,
- dyskusję istnienia i jednoznaczności rozwiązania niestacjonarnego zagadnienia kontaktowego,
- dyskusję własności operatora $AC_n u$
- omówienie metod aproksymacji i opis algorytmu wykorzystanego do rozwiązania zagadnienia,
- wyniki obliczeń numerycznych dla czterech niestacjonarnych zagadnień kontaktowych.

Zbiór cytowanych publikacji podzielono na trzy grupy biorąc pod uwagę ruch i równania konstytutywne dla stykających się ciał oraz rodzaj tarcia. Przedstawiono krótkie komentarze o opracowaniach dotyczących stacjonarnych i niestacjonarnych zagadnień kontaktowych jak również uderzenia. Należy podkreślić fakt, że istnieje zaledwie kilka prac zawierających rozwiązania następujących problemów: quasistatycznego lub dynamicznego toczenia się walca (sztywnego lub hiposprężystego) po podłożu (sztywnym lub sprężysto-plastycznym) oraz niskopiędkościowego uderzenia walca lub kulki (sztywnej lub sprężystej) w przeszkodę (sprężystą lub niesprężystą, jedno- lub wielowarstwową).

Rozwiązania problemów kontaktowych mają znaczenie dla procesów technologicznych - obróbkowych (tłoczenie, prasowanie, walcowanie), w obróbce powierzchniowej (nagniatanie), w projektowaniu prowadnic obrabiarek i przekładni zębatych. Procesy deformacyjne występujące w obszarze styku sztywnego koła i odkształcalnej szyny lub też hiposprężystego koła i sztywnej jezdni mają wpływ na zużycie trakcji kolejowej lub mają decydujące znaczenie dla bezpieczeństwa lądujących samolotów albo ruchu pojazdów samochodowych.

Problem walcowania pasma przez dwa walce o jednakowych wymiarach i parametrach powierzchniowych sformułowano jako zagadnienie toczenia się sztywnego walca po półpaśmie, które deformuje się w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Pasma

jest utwierdzone jedno- lub dwustronnie i ma cechy materiału sprężysto-plastycznego wykazującego wzmocnienie izotropowe. Współczynnik wzmocnienia zależy od mocy plastycznej dysypowanej w materiale. Problem sformułowano w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a, gdzie zmiennymi konstytutywnymi są drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa S_{ij} i tensor odkształcenia Greena ϵ_{kl} . Ponadto używa się tensora naprężenia Kirchhoffa τ_{ij} . W opisie tym możliwa jest linearyzacja równania konstytutywnego, która pozwala na niejawnie zastąpienie materiału sprężysto-plastycznego modelem materiału hiposprężystego.

Funkcjonał (2.21), który określa zachowanie odkształcalnego pasma, otrzymuje się na podstawie założeń pozwalających na:

- aproxymację warunków tarcia. Przyjmuje się, że siły występujące na powierzchni Γ_n w chwili n -tej są takie same jak na końcu kroku $(n-1)$, co pozwala uniknąć poszukiwania rozwiązania problemu z ruchomym brzegiem.
- aproxymację równania konstytutywnego. W równaniu tym występuje tylko liniowa część odkształcenia e_{ij} .
- przyjęcie, że spełniony jest warunek $S_{kl} u_{n,t,l} (v_{n,i,k} - u_{n,i,k}) \geq 0$,
- aproxymację przyspieszenia przez schemat różnicowy np. różnicę centralną lub schemat Houbolta.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania problemu kontaktowego sformułowanego w rozdziale drugim wynika z twierdzenia (2.1) przy założeniu, że operator $A C_n(u)$ jest ściśle monotoniczny i ciągły w sensie Lipschitza a forma biliniowa $a C_n(u, v)$ jest eliptyczna.

Monotoniczność operatora $A C_n(u)$ jest zapewniona dla materiału sprężystego. Jeśli odkształcalne pasmo uplastycznia się, to uwarunkowanie formy biliniowej $a C_n(u, v)$ jest gorsze, ponieważ w macierzy ζ (3.4) pojawiają się wyrazy ujemne a elementy głównej przekątnej są wyrażone jako różnice członów odpowiadających stanowi sprężystemu oraz stanowi plastycznemu materiału.

Z badania monotoniczności operatora $A C_n(u)$ wynika, że problem kontaktowy nie jest pusty dla takich stanów naprężenia, które spełniają nierówność (3.14) wynikającą z warunku dodatniej określoności najmniejszej wartości własnej λ_{\min} macierzy reprezentującej formę biliniową $a C_n(u, v)$.

Na rysunkach (3.1)(i+k) ilustrujących wyniki numerycznego badania monotoniczności $AC_n(u)$ widać, że obszar dodatniej określoności macierzy \hat{A} (3.6) w trójwymiarowej przestrzeni stanów naprężenia zawiera w sobie powierzchnię plastyczności, co potwierdza sens uwzględniania efektów plastycznych.

Monotoniczność operatora $AC_n(u)$ jest sprawdzana w trakcie obliczeń numerycznych i jeśli macierz \hat{A} nie jest dodatnio określona to, aby dalsze obliczenia miały sens fizyczny należy zwiększyć dokładność obliczeń (tzn. zwiększyć długość słowa maszynowego) lub zmniejszyć krok Δt .

Algorytm rozwiązania problemu kontaktowego realizuje zadania takie jak:

- minimalizacja funkcjonału $\phi(u)$,
- aproksymacja funkcjonału $\phi(u)$ i warunków brzegowych,
- określenie stanu elementów sprężysto-plastycznego pasma,
- wyznaczenie obszaru styku ciał,
- rozwiązanie układu równań równowagi elementów skończonych,
- rozwiązanie układu równań algebraicznych.

Minimalizację funkcjonału $\phi(u)$ (4.1) można wykonać metodą mnożników Lagrange'a lub metodą funkcji kary. W obliczeniach numerycznych zastosowano metodę funkcji kary ze względu na mniejszy koszt numeryczny.

Stosując metodę elementów skończonych (metodę Galerkina) do aproksymacji funkcjonału $\phi(u)$ (4.9) definiuje się zadanie przybliżone (4.12).

Stabilność zadania quasistatycznego w metodzie Galerkina wynika ze znanego lematu:

LEMAT 6.1

Jeśli funkcjonał $RC_n(v)$ w (4.14) jest ograniczony i forma dwuliniowa dla (4.9) jest eliptyczna (V-eliptyczna) ze stałą γ_1 , to zadanie

$$a(u_n, v) = RC_n(v), \quad v \in V_m \subset V,$$

dla $m=1, 2, \dots$ w metodzie Galerkina jest stabilne, co oznacza, że spełniony jest warunek $\|u_m\|_{H_0^1} \leq M/\gamma_1$, $M > 0$.

O stabilności zadania (4.12) decyduje eliptyczność formy

dwuliniowej funkcjonaiu (4.9) oraz ograniczoność $\underline{R}(\underline{U})$ w równaniu (4.14).

Określenie aktualnej granicy plastyczności oraz stanu materiału w poszczególnych elementach jest związane z metodą rozwiązywania wektorowego równania ruchu (4.13), (4.14) dla elementów skończonych. Sposób poprawiania dokładności rozwiązania równań równowagi zaproponowany przez Rońdę i Brzozowskiego jest modyfikacją metody zmiennej sztywności i bazuje na całkowaniu równania konstytutywnego (2.2 i), (4.22) przy użyciu kwadratur Gaussa. Procedura pozwalająca na przyspieszone znajdowanie obszaru styku ciała sztywnego i odkształcalnego zawiera metodę iteracyjną złożoną z następujących etapów:

- wstępne określanie obszarów przenikania dwóch figur geometrycznych będących obrazami stykających się ciał,
- rugowanie węzłów ciała odkształcalnego z podobszaru należącego do ciała sztywnego i określanie przybliżonego położenia tych punktów w obszarze kontaktowym.

Metoda ta opracowana przez Rońdę i Brzozowskiego została przedstawiona w pracach Rońdy, Bogacza i Brzozowskiego (1986) i Rońdy, Mahrenholtza, Bogacza i Brzozowskiego (1986). Całkowanie równań ruchu względem czasu wykonuje się zgodnie ze schematem Houbolta. Równania równowagi dla elementów skończonych rozwiązuje się stosując metodę iteracyjną Newtona-Raphsona. Rozwiązanie układu równań liniowych otrzymuje się stosując metodę nadrelaksacji (SOR) lub szybką, uproszczoną metodę Fouriera (FFT). Niestacjonarne zadania kontaktowe, dla których otrzymano wyniki, różniły się sposobem zamocowania pasma, początkowym położeniem obszaru styku oraz traktowaniem sił bezwładności. Rozwiązano trzy następujące zadania quasistatyczne:

- Z1. (§ 5.1.1) oddziaływanie między pasmem i walcem, którego ruch w kierunku pionowym odbywa się według zadanej funkcji $u_y = A \sin(2\pi u_x / L)$, gdzie u_x jest drogą walca w kierunku x.
- Z2. (§ 5.1.2) porównanie oddziaływania walca i pasma w opisie z małymi lub skończonymi odkształceniami dla przypadku, kiedy $u_y = g = \text{const.}$.
- Z3. (§ 5.1.3) walcowanie pasma sprężysto-plastycznego w dwóch

przejściach, kiedy pasmo jest utwierdzone dwustronnie a na ruch walca nałożono więzy lepkosprężyste.

Ponadto rozwiązano zagadnienie dynamiczne Z4. (§ 5.2.1) sformułowane dla uderzenia walca zawieszzonego lepkosprężystie w naroże pasma utwierdzonego jednostronnie.

Problem Z1. jest uproszczonym modelem walcowania pasma lub oddziaływania między kołem i szyną. Wyniki dla Z1. mogą posłużyć do wyjaśnienia mechanizmu powstawania nierówności na powierzchni pasma lub szyny.

Zadanie Z3. jest uproszczonym modelem wielokrotnego walcowania powierzchni materiału sprężysto-plastycznego w półotwartej matrycy lub oddziaływania sztywnego koła i szyny. Otrzymane wyniki mogą posłużyć do określenia naprężeń residualnych występujących w materiale odkształcalnym po kolejnych przejściach walca lub koła.

Zagadnienie Z4. jest modelem uderzenia walca w naroże pasma w klatce walcowniczej na początku procesu walcowania taśmy (bednarki) lub opisuje uderzenie koła o krzyżownice lub rozjazdy kolejowe. Przedstawione wyniki wskazują, że gładką powierzchnię walcowanej taśmy można uzyskać zwiększając prędkość walcowania lub sztywność klatki walcowniczej tzn. układu walce - korpus walcarki.

7. PODZIĘKOWANIA

Autor niniejszego opracowania pragnie gorąco podziękować:

- Prof. dr hab. M. Kleiberowi i Prof. dr hab. Z. Mrozowi z IPPT PAN za cenne uwagi dotyczące sformułowania problemu i metody jego rozwiązania oraz opiekę naukową w czasie prowadzenia badań nad zagadnieniami kontaktowymi.

- Dr A. Wakuliczowi z Instytutu Matematycznego PAN za dyskusję i nieocenioną pomoc w opracowaniu wariacyjnego sformułowania zagadnienia oraz problemów istnienia i jednoznaczności rozwiązania, jak również za wieloletnią, ciągłą opiekę naukową.

- Doc. Dr. hab R. Bogaczowi z IPPT PAN oraz Dr hab. K. R. Skalskiemu z Politechniki Warszawskiej za wieloletnią owocną współpracę.

Szczególnie serdecznie autor pragnie podziękować Mgr inż. M. Brzozowskiemu z Politechniki Białostockiej za współpracę nad opracowaniem algorytmu i stworzenie pięciu wersji programu ROLLER. Autor pozostaje w głębokiej wdzięczności dla Mgr inż. L. Ceglińskiego za udostępnienie sprzętu mikrokomputerowego należącego do prowadzonej przez niego firmy "Oprogramowanie Komputerów".

Ponadto autor pragnie wyrazić swą wdzięczność Mgr inż. K. Małyszko za pomoc w przygotowaniu manuskryptu.

SPIS LITERATURY

- Abramov, W. M. (1937): Problema kontakta uprugoj połupłoskosti s absolutno żestkim fundamentom pri ućete sił trenja. DAN SSSR, 17, 173-178.
- Aksel, N. (1984): Ueber den Kontakt zwischen einem starren, glatten Zylinder und einem viskoelastischen Balken. Ing. Arch. 54, 43-50.
- Alblas, J. B.; Kuipers, M. (1969): Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. Acta Mech. 8, 133-145.
- Alblas, J. B.; Kuipers, M. (1970 a): The contact problem of a rigid cylinder rolling over a thin viscoelastic layer. Int. J. Engrg. Sci. 8, 363-380.
- Alblas, J. B.; Kuipers, M. (1970 b): On the two-dimensional problem of a cylindrical stamp pressed into a thin elastic layer. Acta Mech. 9, 292-311.
- Alblas, J. B.; Kuipers, M. (1971): The two-dimensional contact problem of a rough stamp sliding slowly on an elastic layer. Int. J. Solids, Structures. 7, 99-109, 225-237.
- Aleksandrov, I. V. (1962): On the approximate solution of a type of integral equation. PMM, 26, 934-943.
- Alexander, J. M. (1955): A slip line field for the hot rolling process. Proc. Instn. Mech. Engrs. 1959, 1021-1034.
- Alexander, J. M.; Ford, H. (1964): Simplified hot rolling calculations. J. Inst. Metals. 92, 397-404.
- Bajer, Cz. (1988): Dynamics of contact problem by adaptive simplex-shaped space-time approximation. J. Mécanique theorique et appliquée. Supplement no.1 to vol. 7, pp.235-248.
- Bapat, C. N.; Batra, R. C. (1984): Finite plane strain deformations of nonlinear viscoelastic rubber-covered rolls. Int. J. Numer. Meths. Engrg. 20, 1891-1928.
- Bagdóev, A. G.; Vantsyan, A. A. (1981): Penetration of thin bodies into an elastic medium. Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Mekh. 34, 3-14.

- Barthold, F. J.; Bischoff, D. (1988): Generalisation of Newton type methods to contact problems with friction. *J. Mécanique théorique et appliquée*. Supplement no.1 to vol.7, pp. 97-110.
- Bathe, K. J. (1982): Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, p. 386.
- Batra, R. C. (1981): Quasistatic indentation of a rubber-covered roll by a rigid roll. *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, 17, 1823-1833.
- Beljaev, N. M. (1917): Primenenije teorii Hertza k podščetam mestnych naprazenij v točke soprikasanija koleasa i relsa. *Vestnik Inžyniera*, 3.
- Bentall, R. H.; Johnson, K. L. (1967): Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers, *Int. J. Mech. Sci.* 9, 389-404.
- Bentall, R. H.; Johnson, K. L. (1968): An elastic strip in plane rolling contact. *Int. J. Mech. Sci.* 10, 637-663.
- Bezine, G.; Fortune, D. (1984): Contact between plates by a new direct boundary integral equation formulation. *Int. J. Solids Structures*. 20, 739-746.
- Bhargava, V.; Hahn, G. T.; Rubin, C. A. (1985 a): An elastic-plastic finite element model of rolling contact. Part 1: Analysis of single contacts. *J. Appl. Mech.* 52, 67-74.
- Bhargava, V.; Hahn, G. T.; Rubin, C. A. (1985 b): An elastic-plastic finite element model of rolling contact. Part 2: Analysis of repeated contacts. *J. Appl. Mech.* 52, 75-82.
- Bowden, F. P.; Tabor, D. (1964): The friction and lubrication of solids. In: vol. 2, Oxford, Clarendon Press.
- Brunet, M. (1988): A finite element method for unilateral contact and friction problem involving finite strain and large displacement. *J. Mécanique théorique et appliquée*. Supplement no.1 to vol.7, pp. 209-220.
- Burdekin, M., Back, N. i Cowley, A. (1978): Contact surfaces with nonzero compliance. *J. Mech. Engrg. Sci.* 20, 129-132.
- Bussinesq, J. V. (1885): Application des Potentiels a l'étude

- de l'équilibre et du Mouvement des Corps Elastiques, Gauthier-Villars, Paris.
- Carter, F. C. (1926): On the action of a locomotive driving wheel. Proc. Roy. Soc. A112, 151-157.
- Cataneo, C. (1938): Sul contratto di due corpi elastici. Distribuzione locale degli sforzi. Rend. Accad. Lincei. 27, 342-348, 434-436, 474-478.
- Chan, S.K.; Tuba, I.S. (1971): A finite element method for contact problems of solid bodies: I Theory and validation. Int. J. Mech. Sci. 13, 627 - 639
- Chandhary, A. B.; Bathe, K. J. (1986): A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. Computers and Structures. 24, 855-873.
- Charlier, R.; Cescotto, S. (1988): Modélisation du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations. J. Mécanique théorique et appliquée. Supplement no. 1 to vol. 7, pp. 177-192.
- Chen, W. H.; Tsai, P. (1986): Finite element analysis of elastodynamic sliding contact problems with friction. Computers and Structures. 22, 925-936.
- Chen, W. H.; Yeh, J. T. (1988): A new finite element technique for dynamic contact problems with friction. J. Mécanique théorique et appliquée. Supplement no. 1 to vol. 7, pp. 161-176.
- Cheng, J. H.; Kikuchi N. (1985): An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 49, 71-106.
- Chenot, J. L.; Espy, M. (1977): A new mechanical model for calculating torque in hot rolling. J. Mécanique Appliquée. 1, 427-444.
- Ciarlet, P. G. (1979): The finite element method for elliptic problems. Amsterdam, New York, Oxford: North Holland Pub. Comp.
- Ciarlet, P. G. i Nečas, J. (1985): Unilateral problems in nonlinear three-dimensional elasticity. ARMA. 8, 319-338.
- Clarke, F. H. (1975): Generalized gradients and

- applications. *Trans. Am. Math. Soc.* 205, 247-262.
- Collins, I. F. (1969): Slip-line field solutions for compression and rolling with slipping friction. *Int. J. Mech. Sci.* 11, 971-986.
- Collins, I. F. (1972): A simplified analysis of the rolling of a cylinder on a rigid perfectly plastic half-space. *Int. J. Mech. Sci.* 14, 1-14.
- Collins, I. F. (1978): On the rolling of a rigid cylinder on a rigid perfectly plastic half-space. *J. Mech. Appl.* 2, 431-488.
- Cocu, M. (1984): Existence of solutions of Signorini problems with friction. *Int. J. Engng. Sci.* 22, 567-575.
- Craggs, J. W.; Roberts, A. M. (1967): On the motion of a heavy cylinder over the surface of an elastic solids. *J. Appl. Mech.* 34, 207-209.
- Curnier, A. (1984): A theory of friction. *Int. J. Solids Structures.* 20, 637-647.
- Curnier, A.; Alart, P. (1988): A generalized Newton method for contact problems with friction. *J. Mécanique théorique et appliquée. Supplement no. 1 to vol. 7.* pp. 67-82.
- Dawson, P. R.; Thompson E. G. (1977): Steady state thermomechanical finite element analysis of elastoviscoplastic metal forming processes. In: Jones, R. F.; Armen, H.; Fong, J. (ed): *Numerical Modeling of Manufacturing Processes.* Am. Soc. Mech. Engineers, pp. 167-182.
- Dawson, P. R.; Thompson E. G. (1978): Finite element analysis of steady-state elastic-visco-plastic flow by the initial stress-rate method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 12, 47-57.
- Demkowicz, L. i Oden, J. T. (1982): On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.* 10, 1075-1093.
- Deresiewicz, H. (1954): Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple. *J. Appl. Mech.* 21, 52-56.
- Dewhurst, P.; Collins, I. F.; Johnson, W. (1973): A class of slip line field solution for the hot rolling of strip. *J. Mech.*

- Engr. Sci. 15, 439-447.
- Durieu, J.; Petit, M. (1984): A 2-D solution of the contact problem in the capstan/tape/roller mechanism of magnetic recorders. *Comp. Meth. Appl. Mech., Eng.* 43, 21-35.
- Duvaut, G. (1969): Probleme de Signorini en viscoelasticite lineaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 268, 1044-1046.
- Duvaut, G. (1970): Problemes unilateraux en mecanique des milieux continus. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice*.
- Duvaut, G.; Lions, J. L. (1976): *Inequalities in mechanics and physics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Duvaut, G. (1980): Problemes mathematiques de la mecanique. Equilibre d'un solide elastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. *C. R. Acad. Sci.* 290A, 263-265.
- Endahl, H. (1986): On the finite element solution of the elastoplastic axisymmetric Hertz contact problem. *Computers and Structures*. 24, 517-523.
- Estivalet, M. C.; Jouanique, D.; Chenot, J. L.; Siener, P.; Faessel, A. (1982): Hot rolling: spread of blooms. A new model for calculating spread and the shape of the free sides of blooms. *J. Mec. Theorique Appliq.* 1, 147-164.
- Feijóo, R. A.; Zouain, N. (1986): Variational formulation for rates and increments in plasticity. *Computational Plasticity*. Ed. Owen, D. R. J.; Hinton, H.; Oñate, E.: Barcelona, pp. 33-57.
- Feijóo, R. A.; Barbosa, H. J. C.; Zouain, N. (1988): Numerical formulations for contact problems with friction. *J. Mecanique theorique et appliquee*. Supplement no.1 to vol. 7, pp. 129-144.
- Fichera, G. (1964): Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigui condizioni al contorno. *Mem. Acad. Naz. Lincei Ser.* 7, 91-140.
- Fichera, G. (1972): Existence theorems in elasticity. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In: *Handbuch der Physik*, 6a/2. Berlin: Springer-Verlag.

- Firbank, T. C.; Lancaster, P. R. (1965): A suggested slip-line field for cold-rolling with slipping friction. *Int. J. Mech. Sci.* 7, 847-856.
- Firbank, T. C.; Lancaster, P. R. (1967): A proposed slip-line field for lubricated cold rolling. *Int. J. Mech. Sci.* 9, 65-73.
- Flamant, M. (1892): *Compt. Rend.* 114, 1465.
- Follansbee, P. S.; Sinclair, G. B. (1984): Quasi-static normal indentation of an elasto-plastic half-space by a rigid sphere. I. Analysis *Int. J. Solids Struct.* 20, 81-91.
- Ford, H.; Ellis, F.; Bland, D. R. (1951): Cold rolling with strip tensions. *J. Iron Steel Inst.* 168, 57-72.
- Frederiksson, B. (1976a): On elastic contact with friction. Ph. D. Thesis, Linköping.
- Frederiksson, B. (1976b): Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. *Comput. Structures.* 6, 281-290.
- Fromm, H. (1927): Calculation of the slipping in the case of rolling deformable bars. *ZAMM.* 7, 24-38.
- Gajewski, H.; Gröger, K.; Zacharias, K. (1974): Nichtlineare operatorgleichungen und operator-differentialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag.
- Galin, L. A. (1953): Kontaktnyje zadaci teorii uprugosti. Moskva: Gostehizdat.
- Galin, L. A. (1945): Vdavlivanie štampa pri naličii trenija i sčepnenija. *Prikl. Matematika i Mechanika.* 9, 413-424.
- Gecit, M. R. (1986): The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer indented by an elastic cylinder. *Int. J. Engng. Sci.* 24, 1571-1584.
- Gladwell, G. M. L. (1969): Contact problems in the classical theory of elasticity. *Sijthoff and Noordhoff Int. Pub.*
- Goudong, W.; Zhang, S. (1981): The strip shape equation and its application. *Iron and Steel.* 16.
- Grassie, S. L.; Gregory, R. W.; Harrison, D.; Johnson, K. L.

- (1982): The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *J. Mech. Engng. Sci.* 24, 77-90.
- Grassie, S. L.; Gregory, R. W.; Johnson, K. L. (1982a): The dynamic response of railway track to high frequency lateral excitation. *J. Mech. Engng. Sci.* 24, 91-95.
- Grassie, S. L.; Gregory, R. W.; Johnson, K. L. (1982b): The behaviour of railway wheelset and track at high frequencies of excitation. *J. Mech. Engng. Sci.* 24, 103-111.
- Grassie, S. L.; Cox, S. J. (1984): The dynamic response of railway track with flexible sleepers to high frequency vertical excitation. *Proc. Instn. Mech. Engrs.* 198, 117-124.
- Green, J. W.; Wallace, J. F. (1962): Estimation of load and torque in the hot rolling process, *J. Mech. Eng. Sci.* 4, 136-142.
- Haslinger, J.; Hlavacek, J. (1982): Contact between elastic perfectly plastic bodies. *Appl. Mat.* 27, 27-45.
- Hertz, H. (1881): Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journ. Reine Angew. Mathem.* 92, 156-171.
- Hills, D. A.; Sackfield, A. (1985): Sliding contact between dissimilar elastic cylinders. *Journal of Tribology.* 107, 463-466.
- Huber, M. T. (1904): Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. *Annalen der Physik.* 14, 153-163.
- Huges, T.J.R.; Taylor, R.L.; Sachman, J.L.; Curnier, A.; Kanoknukulchai (1976): A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 8, 249 - 276
- Hung, N. D.; de Saxce, G. (1980): Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique. *Comput. Structures.* 11, 55-67.
- Hunter, S. C. (1957): Energy absorbed by elastic waves during impact. *J. Mech. Phys. Solids.* 5, 162-171.
- Hunter, S. C. (1961): The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic halfspace. *J. Appl. Mech.* 28, 611-617.
- Jarušek, J. (1983): Contact problems with bounded friction.

- Coercive case. Czech. Math. J. 33, 237-261.
- Jarusek, J. (1984): Contact problems with bounded friction. Coercive case. Czech. Math. J. 34, 619-629.
- Johnson, K. L. (1962a): Tangential tractions and microslip in rolling contact. In: Bidwell, A.G. (ed): Proc. Symp. Rolling Contact Phenomena, pp. 79-166, Amsterdam: Elsevier.
- Johnson, K. L. (1962b): A shakedown limit in rolling contact. Proc. 4th US Nat. Congress App. Mech. 971, Berkeley.
- Johnson, K. L. (1968): An experimental determination of the contact stresses between plastically deformed cylinders and spheres. In: Heyman, J.; Leckie, F. A. (eds): Engineering Plasticity, pp. 341-361.
- Johnson, K. L. (1972): Rolling resistance of a rigid cylinder on an elasto-plastic surface. Int. J. Mech. Sci. 14, 145-148.
- Johnson, K. L.; Gray, G. G. (1975): Development of corrugations on surfaces in rolling contact. Proc. Instn. Mech. Engrs. 189, 45-58.
- Johnson, K. L. (1983): Inelastic contact: plastic flow and shakedown. In: Proc. Int. Symp. Contact mechanics and wear of rail/wheel systems. pp.79-101, Waterloo: University of Waterloo Press.
- Kaczorowski, J. (1983): The terms and shapes of the functions necessary for calculation of the dissipated power in the problem of indentation of a punch into a two-ply material. Rozpr. Inż. 31, 317-330.
- Kalker, J. J. (1971): A minimum principle for the law of dry friction with application to elastic cylinders in rolling contact. J. Appl. Mech. 38, 875-887.
- Kalker, J. J. (1977): Variational principles of contact elastostatics. J. Inst. Math. Applics. 20, 199-219.
- Kalker, J. J. (1979a): Survey of wheel-rail rolling contact theory. Vehicle System Dynamics, 5, 317-358.
- Kalker, J. J. (1979b): The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction. Int. J. Numer. Methods Eng. 14, 1293-1307.

- Kalker, J. J.; Allaert, H. J. C.; De Mul, J. (1981): Nonlinear finite analysis in structural mechanics. In: Proc. Europe-U.S. Workshop, pp. 637-654. Bochum.
- Kalker, J. J. (1983): Two algorithms for the contact problem in elastostatics. In: Proc. Int. Symp. Contact mechanics and wear of rail/wheel systems. University of British Columbia, Vanc. pp. 103-120. Waterloo: University of Waterloo Press.
- Kalker, J. J. (1986a): Contact mechanical algorithms. In: Reports of the Faculty of Mathematics and Informatics. No. 86-48
- Kalker, J. J. (1986b): Numerical calculation of the elastic field in a half space. *Comm. Appl. Num. Meth.* 2, 401-410.
- Kasradze, G. N. (1982): Determination of the beam and base interaction forces with account of the elastic-creep properties of the structure material and base ground. *Sobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 106, 317-320.
- Keer, L. M.; Sve, C. (1971): Indentation of an elastic layer by an array of punches moving with steady velocity. *J. Appl. Mech.* 38, 92-98.
- Kelvin, W. (1848): *Math. J.* Cambridge and Dublin, 3, 37-51.
- Kikuchi, N.; Oden, J.T. (1984): Contact problems in elastostatics. In: Oden, J.T.; Carey, G.F.(ed): *Finite elements: Special problems in solid mechanics.* vol. IV. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Kikuchi, N.; Oden, J.T. (1987): *Contact Problems in Elasticity.* SIAM Publications, Philadelphia.
- Kikuchi, N.; Skalski, K. R. (1981): An elasto-plastic rigid punch problem using variational inequalities. *Arch. Mech.* 33, 865-877.
- Kinderlehrer, D. (1982): Estimates for the solution and its stability in Signorini's problem. *Appl. Math. Optim.* 8, 159-188.
- Klarbring, A. (1986a): Quadratic programs in frictionless contact problems. *Int. J. Engng. Sci.* 24, 1207-1217.
- Klarbring, A. (1986b): General contact boundary conditions and the analysis of frictional systems. *Int. J. Solids Structures*,

22, 1377-1398.

- Klarbring, A.; Mikelič, A. Shillor, M. (1987a): Frictional contact problems with normal compliance. *Int. J. Engng. Sci.* (ukáže sie).
- Klarbring, A.; Mikelič, A. Shillor, M. (1987b): On friction problems with normal compliance. *Int. J. Engng. Sci.* (ukáže sie).
- Klarbring, A. (1988): On discrete and discretized non-linear elastic structures in unilateral contact (stability, uniqueness and variational principles). *Int. J. Solids Structures*. 24, pp. 459-479.
- Klarbring, A.; Björkman, G. (1988): A treatment of problems in contact mechanics by mathematical programming. *J. Mécanique théorique et appliquée*. Supplement no.1 to vol. 7, pp. 93-96.
- Kwak, B. M.; Lee, S. S. (1988): A complementarity problem formulation for two dimensional frictional contact problems. *Computers & Structures*. 28, pp. 469-480.
- Lee, B. C.; Kwak, B. M. (1984): A computational method for elasto-plastic contact problems. *Comput. Struct.* 18, 757-765.
- Lubkin, J. L. (1951): The torsion of elastic spheres in contact. *J. Appl. Mech.* 18, 183-186.
- Luenberger, D.G. (1973): Introduction to linear and nonlinear programming. Addison-Wesley, Reading.
- Lvov, G. I. (1983a): One class of contact problems for a cylindrical shell. *Sov. Appl. Mech.* 19, 595-599.
- Lvov, G. I. (1983b): Creep of thin shells interacting with rigid bodies. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A*, 9, 25-27.
- Lvov, G. I. (1983c): Plastic flow of shallow shells interacting with rigid dies. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A*, 3, 45-48.
- Lynch, F. D. (1969): A finite element method of viscoelastic stress analysis with application to rolling contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1, 379-394.
- Malinin, N. N. (1977): Priblizennye rešenija niekotorych technologičeskich zadač. *Izv. Wys. Uč. Zaw. Masinostrojenie*. 12, 119-122.

- Malinin, N. N. (1985): Elementary theory of hot rolling. *Int. J. Mech. Sci.* 27, 39-44.
- Mandel, J. (1966): Resistance au roulement d'un cylindre indeformable sur un massif parfaitement plastique. In: *Le frottement et usure*. GAMI, Paris.
- Manzhairov, A. V. (1983): Axisymmetric contact problems for non-uniformly aging layered viscoelastic foundations. *J. Appl. Math. Mech.* 47, 558-566.
- Margelson, J. (1971): Rolling contact of a smooth, viscoelastic strip between rotating rigid cylinders. *Int. J. Mech. Sci.* 13, 207-215.
- Marshall, E. A. (1968): Rolling contact with plastic deformation. *J. Mech. Phys. Solids.* 16, 243-254.
- Martins, J.A.C.; Oden, J.T. (1987): Existence and inigness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Journal of Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application*, 11, 623 - 653, 1987
- Merwin, J. E.; Johnson, K. L. (1963): An analysis of plastic deformation in rolling contact. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 177, 676-689.
- Michałowski, R.; Mróz, Z. (1978): Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Archives of Mechanics.* 30, 259-276.
- Michell, J. H. (1902): The inversion of plane stress. *Proc. London Math. Soc.* 34, 134-142.
- Mindlin, R. D. (1949): Compliance of elastic bodies in contact. In: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 16, 259-268.
- Mindlin, R. D.; Mason, W. P.; Osmar, T. F.; Deresiewicz, H. (1952): Effects of an oscillating tangential force on the contact surfaces of elastic spheres. In: *Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech.* 203-207.
- Mindlin, R. D.; Deresiewicz, H. (1953): Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Appl. Mech.* 20, 327-344.
- Morland, L. W. (1962): A plane problem of rolling contact in

- linear viscoelasticity theory. *J. Appl. Mech.* 29, 345-361.
- Morland, L. W. (1967): Exact solutions for rolling contact between viscoelastic cylinders. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 20, 74-86.
- Morland, L. W. (1968): Rolling contact between dissimilar viscoelastic cylinders. *Q. Appl. Math.* 25, 363-376.
- Mossakovski, V. J. (1954): The fundamental general problem of the theory of elasticity for a half-space with a circular curve determining the boundary conditions. *PMM.* 18, 210-226.
- Mossakovski, V. J. (1963): Compression of elastic bodies under condition of adhesion. *PMM.* 27, 418-420.
- Muschelišvili, N. J. (1949): *Nekotorye osnovnye zadachi matematičeskoj teorii uprugosti.* Moskva, Leningrad: Izd. Akademii Nauk SSSR.
- Nadai, A. (1931): *Plasticity.* New York: McGraw-Hill.
- Nečas, J. (1975): Variational inequalities for second-order elliptic systems. *Rend. Math.* 8, 481-498.
- Nečas, J., Jarušek, J. i Haslinger, J. (1980): On the solution of the variational inequality, to the Signorini problem with small friction. *Boll. Uni. Mat. Ital.* 5, 796-811.
- Nečas, J., Hlaváček, J. (1983): Solution of Signorini's contact problem in the deformation theory of plasticity by secant modules method. *Appl. Mat.* 28, 199-214.
- Oden, J. T. (1983): Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. Appl. Mech.* 50, 67-76.
- Oden, J. T.; Kikuchi, N. (1984): Finite elements. Special problems in solid mechanics. In: Oden, J. T.; Carey, G. F. (Eds.): *Texas Finite Element Series*, vol. 5. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.
- Oden, J. T.; Becker, E. B.; Lin, T. L.; Hsieh, K. T. (1984): Numerical analysis of some problems related to the mechanics of pneumatic tires. In: *Research in Structures and Dynamics*, NASA. 297-307.
- Oden, J. T.; Becker, E. B.; Lin, T. L.; Demkowicz, L. (1985):

- Formulation and finite element analysis of a general class of rolling contact problems with finite elastic deformations. In: Whiteman, J. R. (ed.): Mathematics of finite element with applications, vol. 5, 58-65. London, Academic Press.
- Oden, J. T.; Lin, T. L. (1986): On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 52, 527-634.
- Oden, J.T.; Martins, J.A.C. (1985): Models and computational methods for friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 52, 527-634.
- Oden, J. T. (1988): New models of friction for nonlinear elastodynamics problems. *J. Mécanique théorique et appliquée. Supplement no. 1 to vol. 7*, pp. 47-54.
- Oh, S.; Kobayashi, D. (1975): An approximate method for a three-dimensional analysis of rolling. *Int. J. Mech. Sci.* 17, 293-305.
- Olesiak, Z. (1965): Annular punch on elastic semi-space. *Arch. Mech. Stos.* 17, 633-648.
- Orowan, E. (1943): The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 150, 140-167.
- Padovan, J.; Tovchakchaikul, S.; Zeid, J. (1984): Finite element analysis of steadily moving contact fields. *Computers and Structures.* 18, 191-200.
- Padovan, J.; Paramadilok, O. (1985): Transient and steady state viscoelastic rolling contact. *Computers and Structures.* 20, 545-553.
- Panagiotopoulos, P. D. (1978): A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction-boundary value problem in the theory of elasticity. *Ing. Arch.* 44, 421-432.
- Panagiotopoulos, P. D. (1979): A variational inequality approach to the dynamic unilateral contact problem of elastoplastic foundations. In: *Proc. Third Int. Conf. Num. Meth. Geomech.* 47-58.
- Panagiotopoulos, P. D. (1983): Nonconvex energy functions. Hemi-variational inequalities and substationary principles.

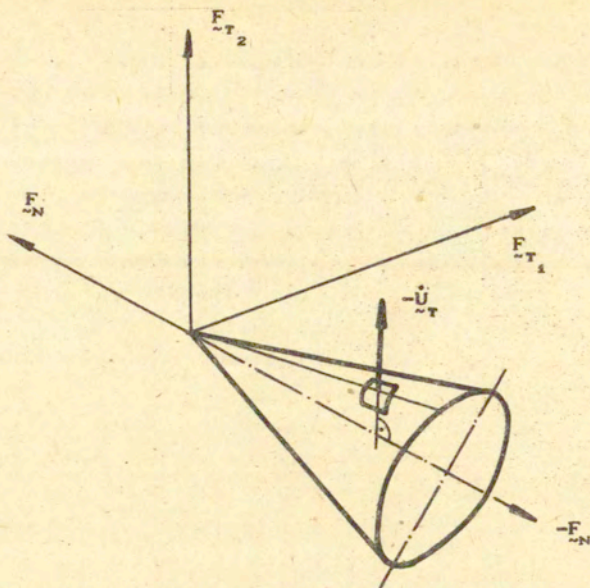
- Acta Mech. 48, 111 - 130.
- Panagiotopoulos, P. D. (1985): Nonsmooth mechanics and its applications. In: Proc. Int. Conf. Nonlinear Mechanics. pp. 33-39. Beijing, Science Press, pp. 33-39.
- Panagiotopoulos, P. D. (1985): Inequality problems in mechanics and applications. Stuttgart, Birkhauser.
- Pawelski, O.; Teutsch, H. (1985): A mathematical model for computing the distribution of loads and thickness in the width direction of a strip rolled in four-high cold-rolling mills. Engng. Fract. Mech. 21, 853-859.
- Petrenko, V. E. (1982): On a nonlinear effect in rolling-contact bearings. Mekh. Gireskopičeskich Sist. 1, 73-77.
- Persson, A. (1974): Shock pressure in oblique impact - a theoretical analysis. J. Appl. Mech. 41, 124-130.
- Piispanen, V. (1973): Die Theorie des simulierten Gleitens für das Walzen auf flacher Balin. Arch. Eisenhüttenwesen. 44, 261-265.
- Piispanen, V. (1976): Plastic deformation of metal: theory of simulated sliding. Wear. 38, 43-72.
- Ponter, A. R. S.; Hearle, A. D.; Johnson, K. L. (1985): Application of the kinematical shakedown theorem to rolling and sliding point contact. J. Mech. Phys. Solids. 33, 339-362.
- Rabier, P.; Martins, J.A.C.; Oden, J.T.; Campos, L. (1986): Existence and local uniqueness of Solution to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws. Int. J. Engineering Science, 24, pp 1755 - 1768.
- Rabinowicz, E. (1965): Friction and Wear of Materials. New York, Wiley.
- Racus, M.; Chabrand, P.; Lebon, F. (1988): Numerical methods for frictional contact problems and applications. J. Mécanique théorique et appliquée. Supplement no. 1 to vol. 7, pp. 11-128.
- Renouard, M. (1972): Determination of the roll forces in the hot rolling of aluminium and its alloys. J. Inst. Metals. 100, 172-176.

- Rimskij, V. K. (1983): Low-speed collision of an elastic cylinder with a deformable multilayer obstacle. *Mat. Issl.* 75, 74-84.
- Robertson, A. R.; Thompson, J. C. (1974): Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of rigid wedge-shaped die. *ZAMM.* 54, 139-144.
- Rogowski, B. (1981): Pierścieniowy stempel na warstwie poprzecznie izotropowej z dowolnymi warunkami na brzegu dolnym. *Rozpr. Inż.* 12, 229-238.
- Rońda, J.; Bogacz, R.; Brzozowski, M. (1986): Infinitesimal and large strain in rolling contact problems. *Ingenieur-Archiv.* 58, 241-253.
- Rońda, J.; Mahrenholz, O.; Bogacz, R.; Brzozowski, M. (1986): The rolling contact problem for an elastic-plastic strip and a rigid roller. *Mech. Res. Comm.* 13, 119-132.
- Rońda, J. (1987): Algorithms and contact strategies in rolling problems. *ZAMM.* 67, T232-T233.
- Rońda, J.; Brzozowski, M. (1987): Effets dynamiques d'un coup de roue non-deformable a l'elastique rail-probleme plat. In: Cabannes, H.; Citrini, C. (eds.): *Vibrations with unilateral constraints. Proc. Euromech 209 Colloquium. Bologna.* Tecnoprint.
- Sabin, G. C. W.; Graham, G. A. C. (1983): Efficient numerical solution of the viscoelastic impact problem. *Util. Math.* 23, 323-346.
- Sackfield, A.; Hills, D. A. (1986): The strength of some non-Hertzian plane contacts. *J. Tribology. Trans. ASME.* 108, 655-658.
- Sadowsky, M. (1928): Zweidimensionale Probleme der Elastizitatstheorie. *ZAMM.* 8, 107-121.
- Saeed, U.; Lenard, J. G. (1980): A comparison of cold rolling theories based on the equilibrium approach. *J. Engng. Materials Technology.* 102, 223-231.
- Sagomonyan, A. Ya.; Gendugov, V. M.; Sagomonyan, E. A. (1982a): On the problem of perforation of a barrier. *Mosc. Univ. Mech. Bull.* 37, 14-18.

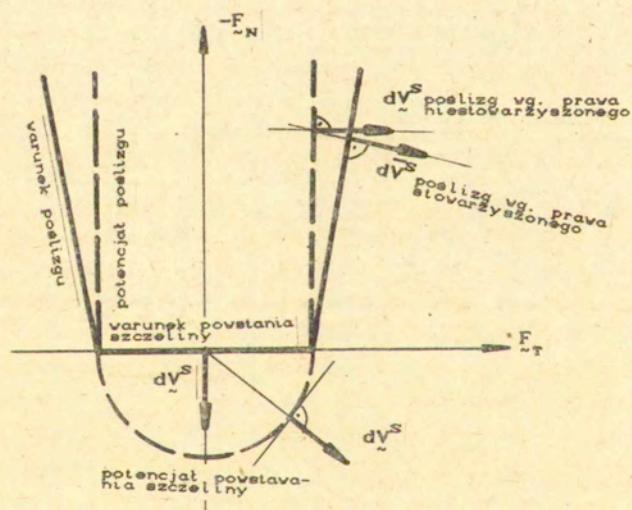
- Sagomonyan, A. Ya.; Gendugov, V. M.; Sagomonyan, E. A. (1982b): On the problem of punching on obstacle. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. I.* 1, 52-56.
- Sakata, M.; Horii, M.; Kimura, T. (1984): Acoustic radiation from a viscoelastic beam impacted by a steel sphere. *J. Sound Vib.* 92, 67-81.
- Sankar, B. V.; Sun, C. T. (1985): An efficient numerical algorithm for transverse impact problems. *Comput. Struct.* 20, 1009-1012.
- Schwartz, J.; Harper, E. Y. (1971): On the relative approach of two-dimensional elastic bodies in contact. *Int. J. Solids Structures*, 7, 1613-1626.
- Signorini, A. (1933): Sopra alcune questioni di elastostatica. In: *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*.
- Signorini, A. (1959): Questioni di elastostatica linearizzata e semilinearizzata. *Rend. di Matem. e delle sue appl.* 18.
- Sims, R. B. (1954): Calculation of roll force and torque in hot rolling mills. *Proc. Inst. Engrs.* 168, 191-200.
- Simo, J. C., Wriggers, P. i Taylor, R. L. (1985): A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 50, 163-180.
- Skalski, K. R. (1986): Zagadnienia kontaktowe dla ciała sprężysto-plastycznego. In: *Prace Naukowe, Mechanika*, z. 94. Warszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej.
- Soong, T. C.; Li, C. (1981a): The rolling contact of two elastic-layer-covered cylinders driving a loaded sheet in the nip. *J. Appl. Mech.* 48, 889-894.
- Soong, T. C.; Li, C. (1981b): The steady rolling contact of two elastic layer bonded cylinders with a sheet in the nip. *Int. J. Mech. Sci.* 23, 263-273.
- Sparling, L. G.; Willows, R. (1971): A study of the hot rolling of thick flat slabs. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* 185, 1127-1137.
- Spence, D. A. (1968): Self-similar solutions to adhesive contact problems. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 305, 55-80.

- Spence, D. A. (1973): An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction. Proc. Phil. Soc. Cambridge, 73, 249-268.
- Tabor, D. (1955): The mechanism of rolling friction: the elastic range. Proc. Roy. Soc. London, A, 229, 198-220.
- Talasilađis, D.; Panagiotopoulos, P. D. (1982): A linear finite element approach to the solution of the variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics. Int. J. Num. Meth. Engng. 18, 1505-1520.
- Theocaris, P. S.; Stassinakis, C. A. (1982): The determination of coefficient of friction between a cylindrical indenter and a plastically deformed body by caustics. Int. J. Mech. Sci. 24, 717-727.
- Thomson, P. F.; Brown, J. H. (1982): A study of deformation during cold rolling using viscoplasticity. Int. J. Mech. Sci. 24, 559-576.
- Tleukenov, S. K. (1985): Energy absorption and discontinuity of displacements on boundaries with nonrigid contact. J. Sov. Math. 30, 2467-2470.
- Tselikov, A. I. (1946): Rolling mills. Moskva: Metallurgizdat.
- Tsai, Y. M. (1968): Stress waves produced by impact on the surface of a plastic medium. J. Franklin Inst. 285, 204-221.
- Tsai, Y. M. (1969): Stress distribution in elastic and viscoelastic plates subjected to symmetrical rigid indentations. Q. Appl. Math. 27, 371-380.
- Tsai, Y. M. (1971): Dynamic contact stresses produced by the impact of an axisymmetric projectile on an elastic half-space. Int. J. Solids Structures, 7, 443-448.
- Tsai, P.; Chen, W. H. (1986): Finite element analysis of elastoplastic contact problems with friction. AIAA Journal, 24, 344-346.
- Vajnberg, B. R.; Krutin, V. N. (1984): A method of making impedance measurements of the viscoelastic properties of a medium by oscillating plates and shells J. Appl. Math. Mech. 48, 58-62.
- Valliappan, S.; Lee, I. K.; Boonlualohr, P. (1984): Nonlinear

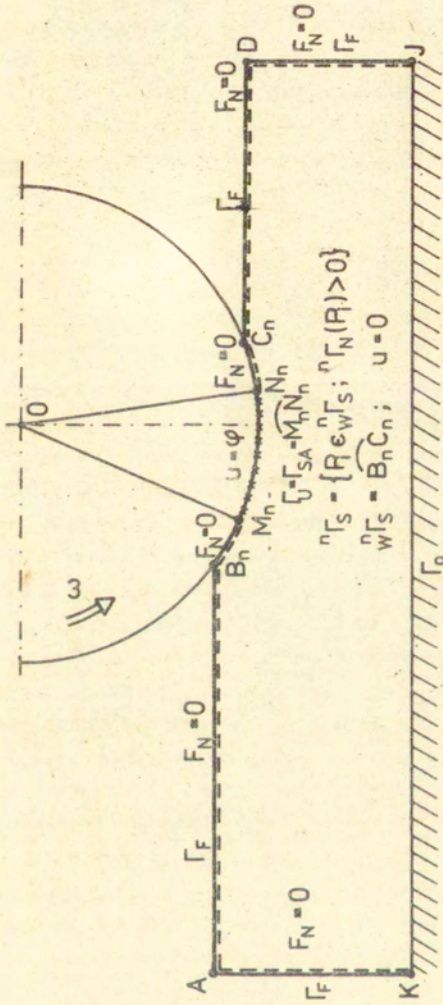
- analysis of contact problems. In: Numerical Methods in Coupled Systems, pp. 231-253.
- Von Karman, Th. (1925): Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Mathematik Mechanik, 5, 139-141.
- Villaneuva-Leal, A. i Hinduja, S. (1984): Real contact surfaces with asperities. Proc. Instn. Mech. Engrs. 198C, 9-13.
- Weber, K. H.; Recke, H. G.; Borman, W. (1982): Elastische Formänderung des Walzenquerschnitts beim Kaltwalzen-Vergleich zwischen Rechnung und Messung. Neue Hütte, 6, 212-216.
- Wood, L. A.; Byrne, K. P. (1981): Analysis of a random repeated impact process. J. Sound Vib. 78, 329-345.
- Zeid, I.; Padovan, J. (1981): Finite element modeling of rolling contact. Computers Structures, 5, 163-170.



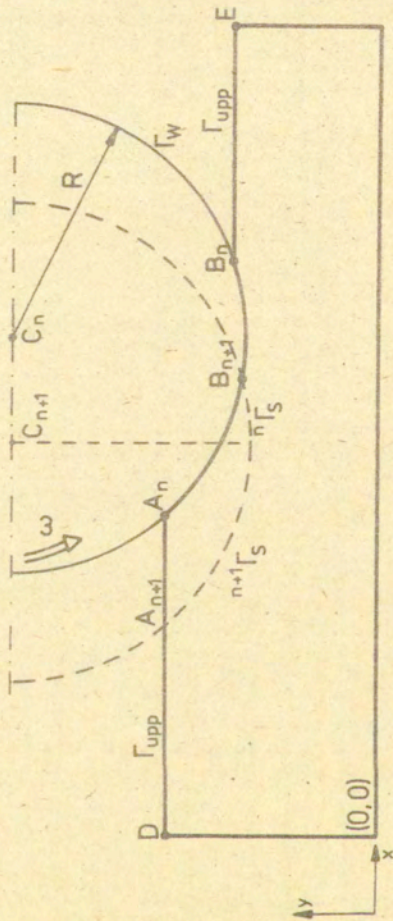
Rys. 2.1.a (Oden i Martins (1985)) Powierzchnia poślizgu dla prawa tarcia Coulomba, do której poślizg $-\dot{U}_T$ nie jest ortogonalny



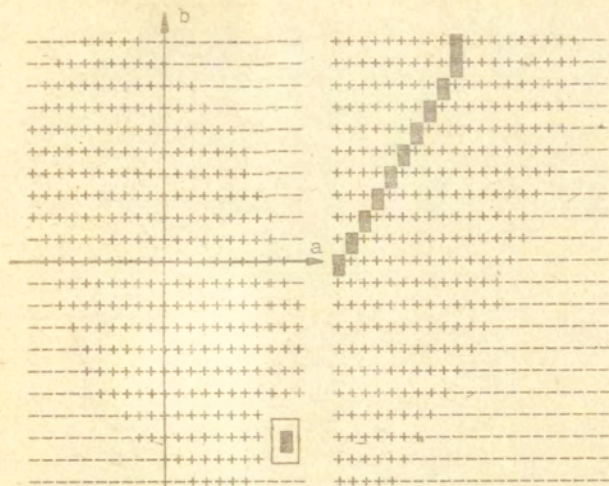
Rys. 2.1.b Stowarzyszone i niestowarzyszone prawa poślizgu (Curnier (1984))



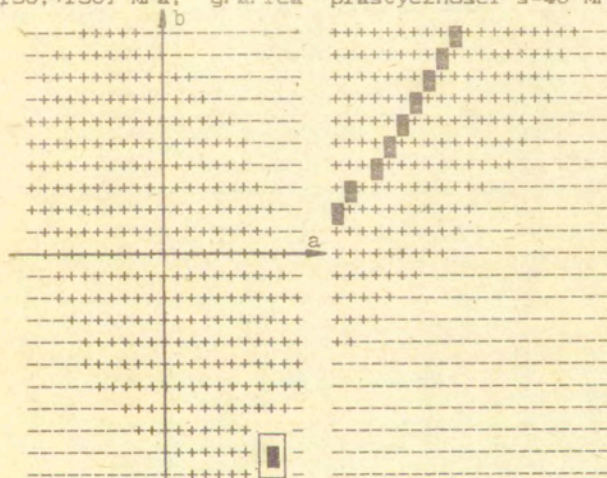
Rys. 2.1. c Model zagadnienia kontaktowego z warunkami brzegowymi Dirichleta w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a.



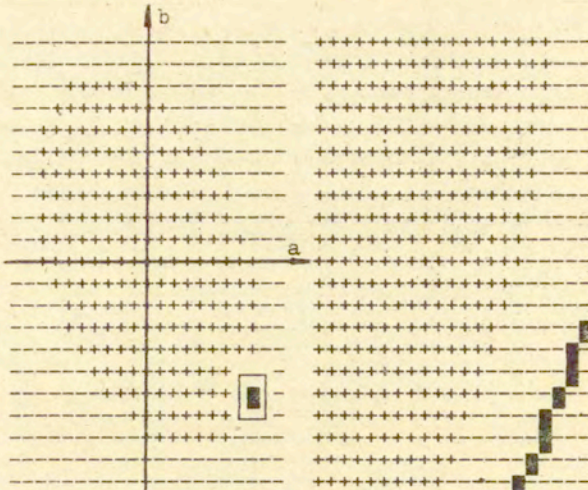
Rys. 2.2. Przybliżone określenie brzegu obszaru Ω oraz podobszaru styku Γ_s dwóch ciał Ω_{n+1} i Ω_n .



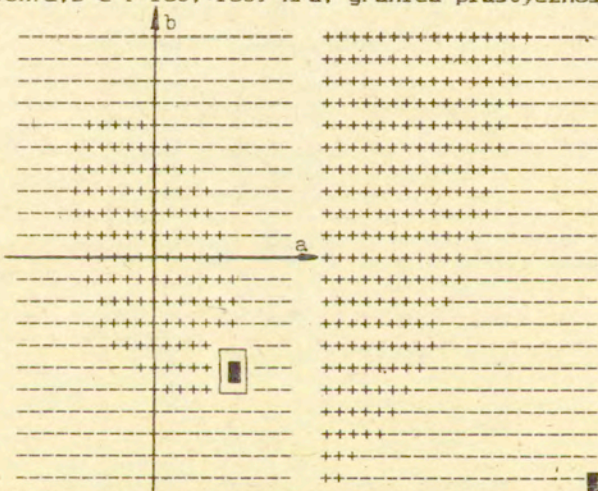
Rys. 3.1.a Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie (a, b) dla $c=0$. Z prawej strony pokazano powiększenie ($\times 10$) otoczenia punktu zakrytego ramką, gdzie $y = I_{2\sigma} = 42.57 \text{ MPa}$, oraz granicę plastyczności. Obliczenia wykonano dla danych: $a, b \in [-150, +150] \text{ MPa}$, granica plastyczności $s=40 \text{ MPa}$.



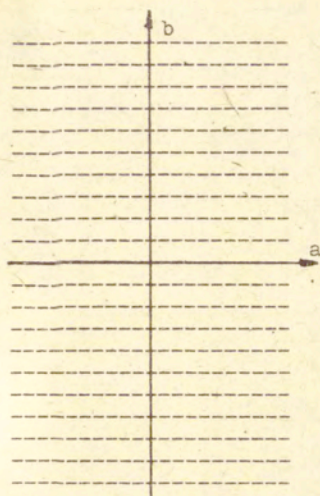
Rys. 3.1.b Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie (a, b) dla $c=-5 \text{ MPa}$. W punkcie zakrytym ramką $y = I_{2\sigma} = 42.86 \text{ MPa}$. Ponadto $a, b \in [-150, +150] \text{ MPa}$, $s=40 \text{ MPa}$.



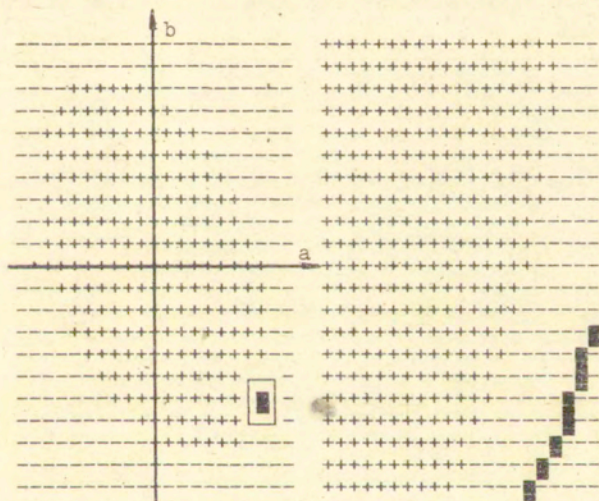
Rys. 3.1.c Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle a, b \rangle$ dla $c = -10 \text{ MPa}$. Z prawej strony pokazano otoczenia punktu zamkniętego ramką, gdzie $y = I_{z\sigma} = 36.74 \text{ MPa}$, oraz granicę plastyczności. Obliczenia wykonano dla danych: $a, b \in [-150, +150] \text{ MPa}$, granica plastyczności $s = 40 \text{ MPa}$.



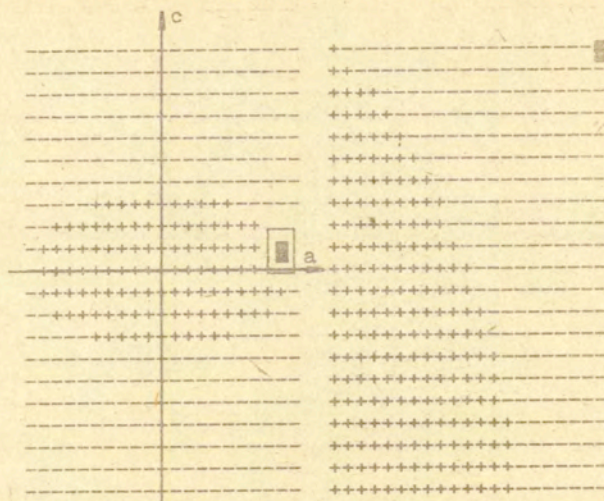
Rys. 3.1.d Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle a, b \rangle$ dla $c = -15 \text{ MPa}$. W punkcie zamkniętym ramką $y = I_{z\sigma} = 31.42 \text{ MPa}$. Ponadto $a, b \in [-150, +150] \text{ MPa}$, $s = 40 \text{ MPa}$.



Rys.3.1.e Macierz A (3.6) w płaszczyźnie (a,b) dla $c=-20\text{MPa}$ nie jest dodatnio określona w żadnym punkcie.

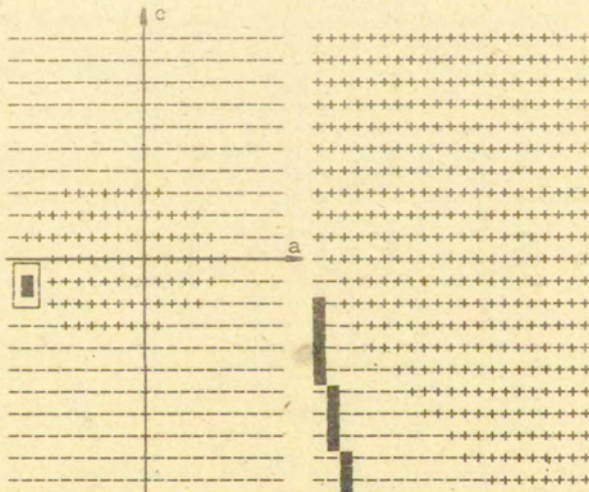


Rys.3.1.f Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie (a,b) dla $c=10\text{MPa}$. Porównując z Rys.3.1.c widać symetrię względem płaszczyzny (a,b) dla $c=0$. W punkcie zakrytym ramką $y=I_{20}=36.74\text{MPa}$. Ponadto $a,b \in [-150,+150]\text{MPa}$, $s=40\text{MPa}$.

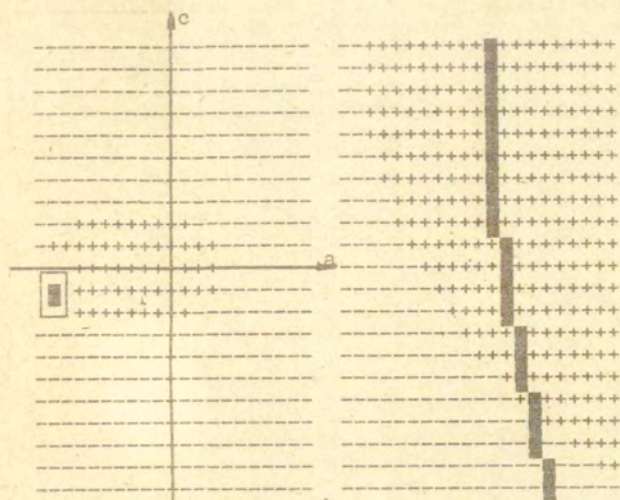


Rys.3.1.g Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle c, a \rangle$ dla $b=0$. Z prawej strony pokazano powiększenie ($\times 10$) otoczenia punktu zakrytego ramką, gdzie $y=I_2 = 32.21 \text{ MPa}$.

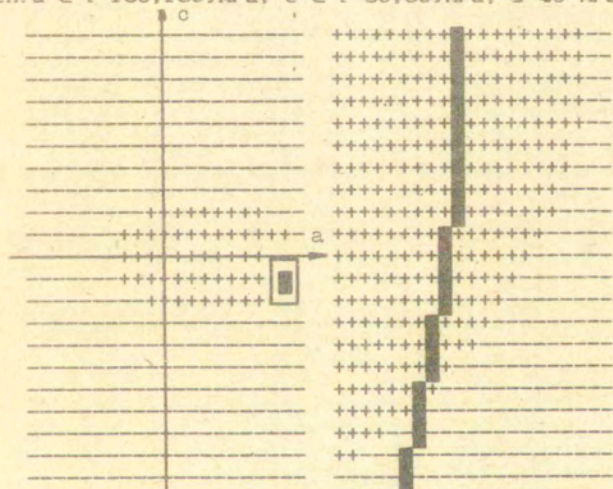
Obliczenia wykonano dla danych: $a \in [-150, 150] \text{ MPa}$, $c \in [-50, 50] \text{ MPa}$, $s=40 \text{ MPa}$.



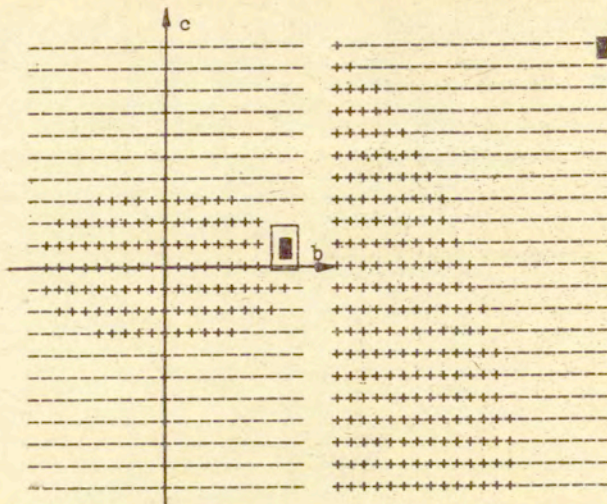
Rys.3.1.h Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle c, a \rangle$ dla $b=-75 \text{ MPa}$. W punkcie zakrytym ramką $y=I_2 = 36.74 \text{ MPa}$. Ponadto $a \in [-150, +150] \text{ MPa}$, $c \in [-50, 50] \text{ MPa}$, $s=40 \text{ MPa}$.



Rys.3.1.1 Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie (c,a) dla $b=-105\text{MPa}$. Z prawej strony pokazano powiększenie ($\times 10$) otoczenia punktu zakrytego ramką, gdzie $y=I_{20}=40.62\text{MPa}$, oraz granicę plastyczności. Obliczenia wykonano dla danych: $a \in [-150,150]\text{MPa}$, $c \in [-50,50]\text{MPa}$, $s=40\text{MPa}$.

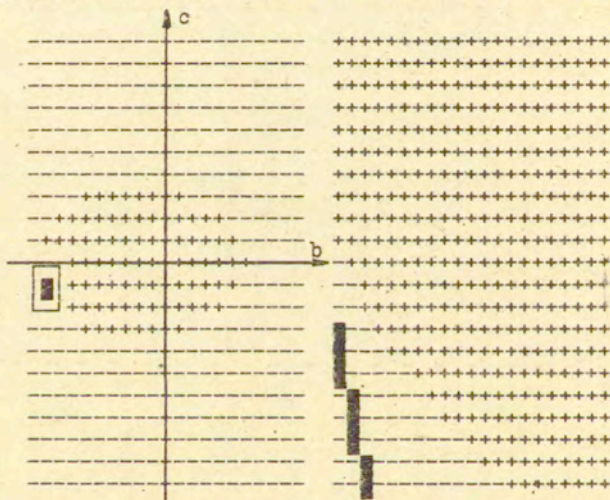


Rys.3.1.2 Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie (c,a) dla $b=105\text{MPa}$. W punkcie zakrytym ramką $y=I_{20}=40.62\text{MPa}$. Ponadto $a \in [-150,+150]\text{MPa}$, $c \in [-50,50]\text{MPa}$, $s=40\text{MPa}$.

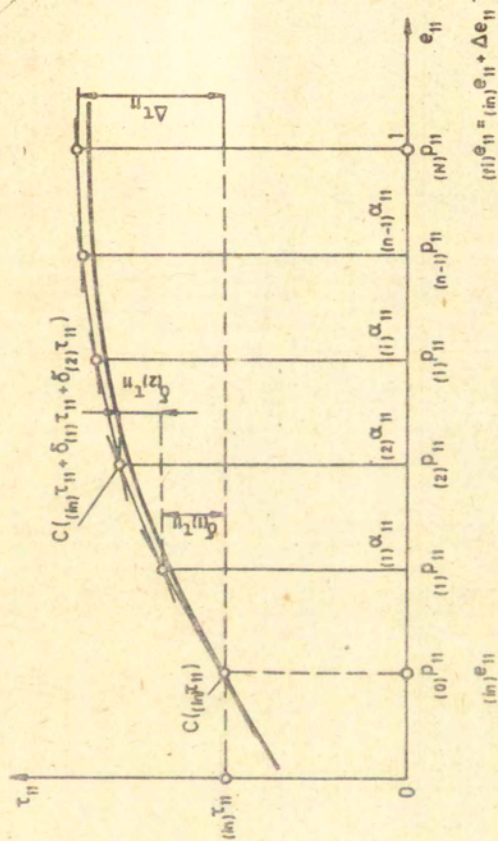


Rys.3.1.k Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle c, b \rangle$ dla $a=0$. Z prawej strony pokazano powiększenie ($\times 10$) otoczenia punktu zakrytego ramką, gdzie $y=I_{20}=32.21\text{MPa}$.

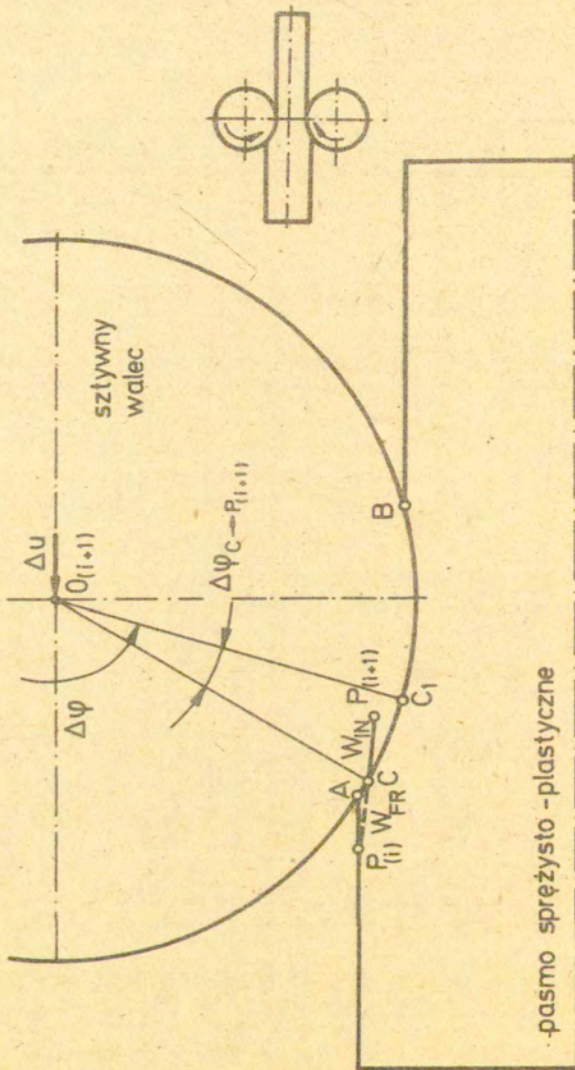
Obliczenia wykonano dla danych: $b \in [-150, 150]\text{MPa}$, $c \in [-50, 50]\text{MPa}$, $s=40\text{MPa}$.



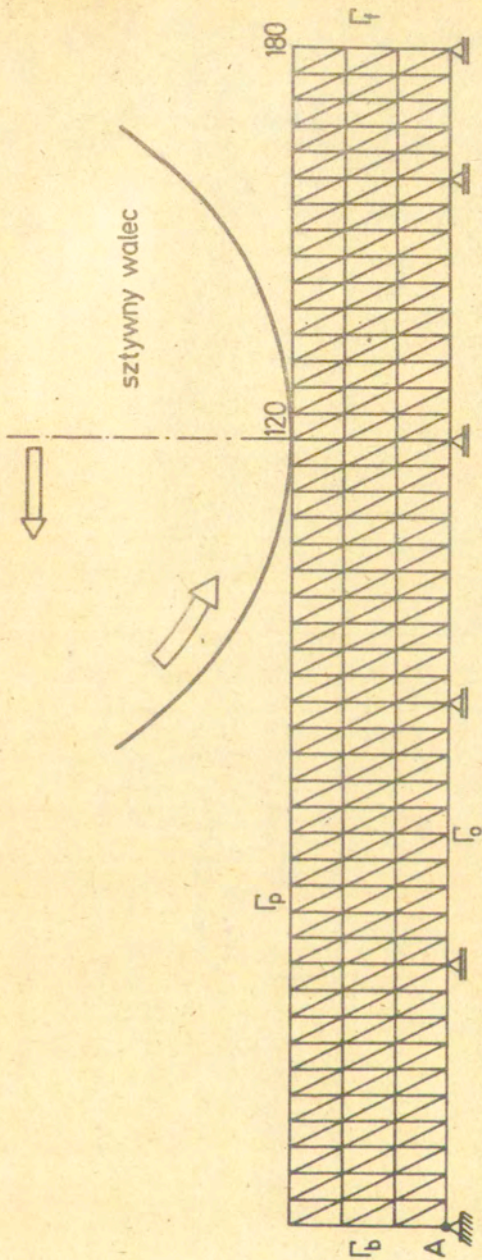
Rys.3.1.l Obszar dodatniej określoności macierzy A (3.6) w płaszczyźnie $\langle c, b \rangle$ dla $a=-75\text{MPa}$. W punkcie zakrytym ramką $y=I_2=36.74\text{MPa}$. Ponadto $b \in [-150, +150]\text{MPa}$, $c \in [-50, 50]\text{MPa}$, $s=40\text{MPa}$.



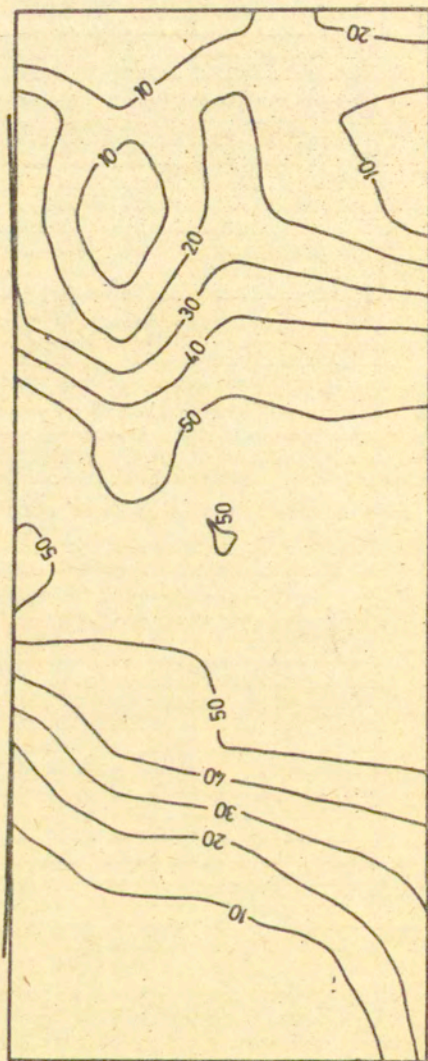
Rys. 4.1. Metoda zmiennej sztywności, w której stałe materiałowe, czyli elementy macierzy sztywności, określa się w punktach próbnych dla kwadratur Gaussa.



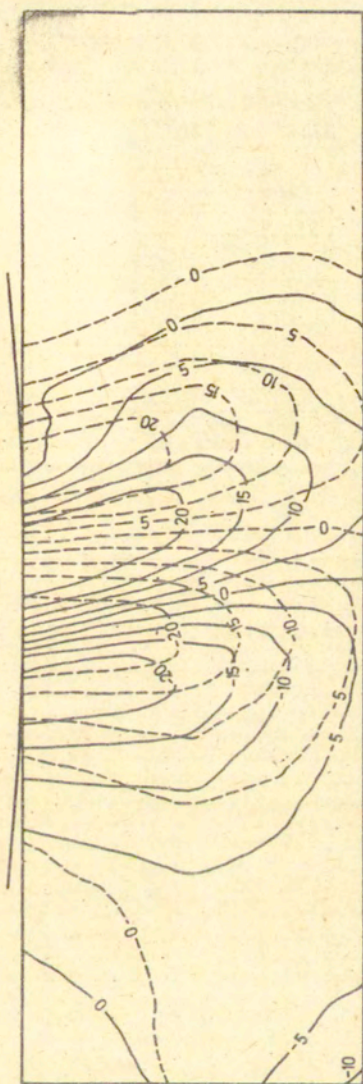
Rys. 4.2. Obszar styku dwóch ciał, gdzie przyjęto następujące oznaczenia: $P_{(i)}$ i $P_{(i+1)}$ są położeniami węzła P odpowiednio w krokach (i) oraz (i+1), przyrost kąta obrotu $\Delta\psi = \varphi_{(i+1)} - \varphi_{(i)}$, $W_{IN}^{(i+1)}$, $W_{FR}^{(i)}$. Ruch punktu w strefie styku walca i pasma na kroku n-tym opisuje się w układzie odniesienia, którego początek znajduje się w punkcie obrotu walca w chwili (n+1).



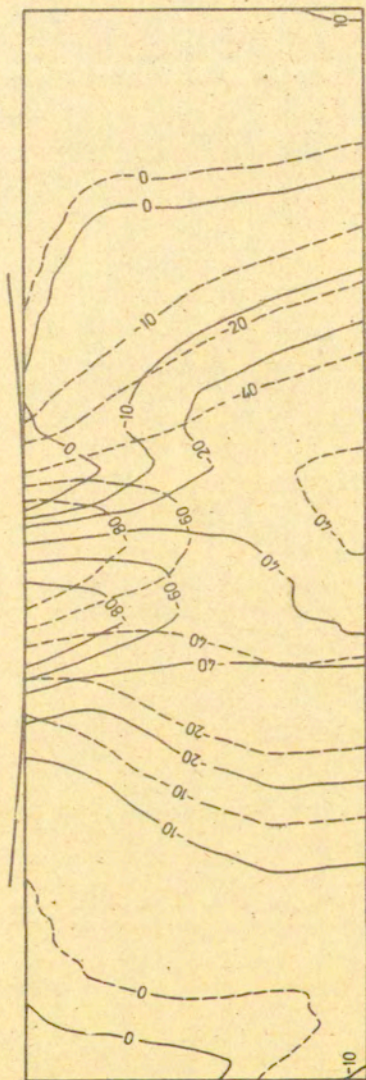
Rys. 5.1. Pasma sprężysto-plastyczne utwierdzone w punkcie A zawiera 270 elementów i 184 węzły.



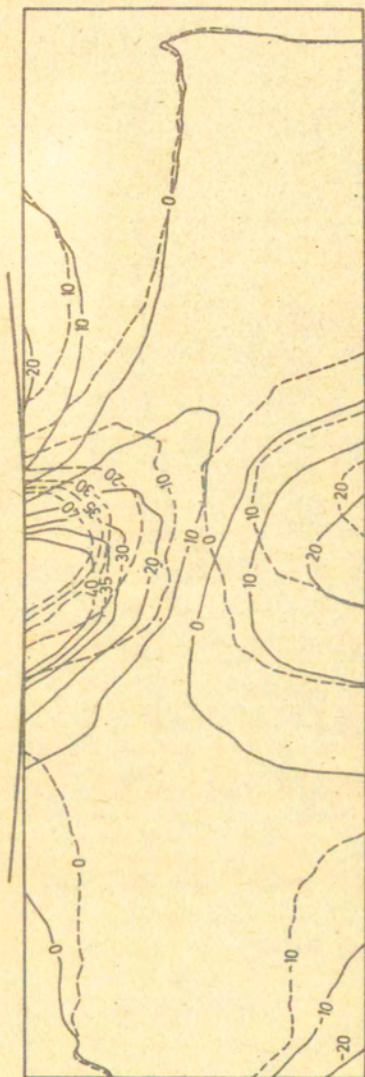
Rys. 5.2. Pierwiastek kwadratowy z drugiego niezmiennika naprężenia Kirchhoffa I².



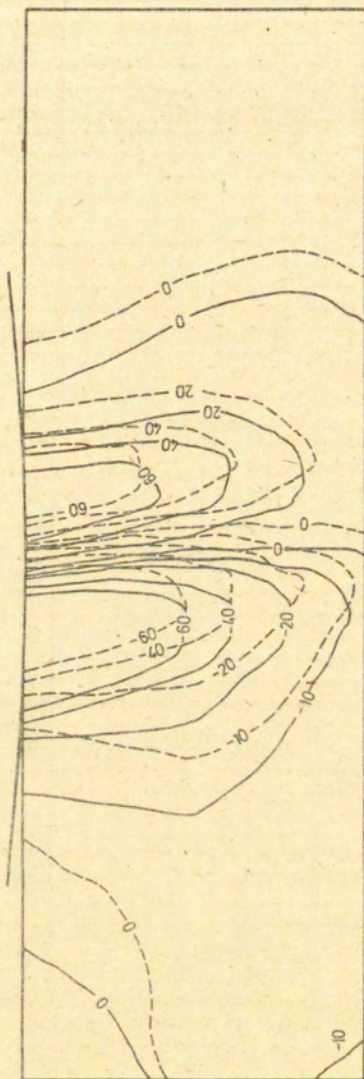
Rys. 5.3(1). Składowa styczna T_{xy} dla czwartego (linie przerywane) i siódmego (linie ciągłe) kroku obliczeniowego.



Rys. 5.3(11). Składowa naprężenia σ_x i σ_y dla czwartego (linie przerywane) i siódmego (linie ciągłe) kroku obliczeniowego.



Rys. 5.3(III). Składowa naprężenia r_{xx} dla czwartego (linie przerywane) i siódmego (linie ciągłe) kroku obliczeniowego.



.. Rys. 5.4. Składowa odkształcenia ε_{xy} dla czwartego (linie przerywane) i siódmego (linie ciągłe) kroku obliczeniowego.

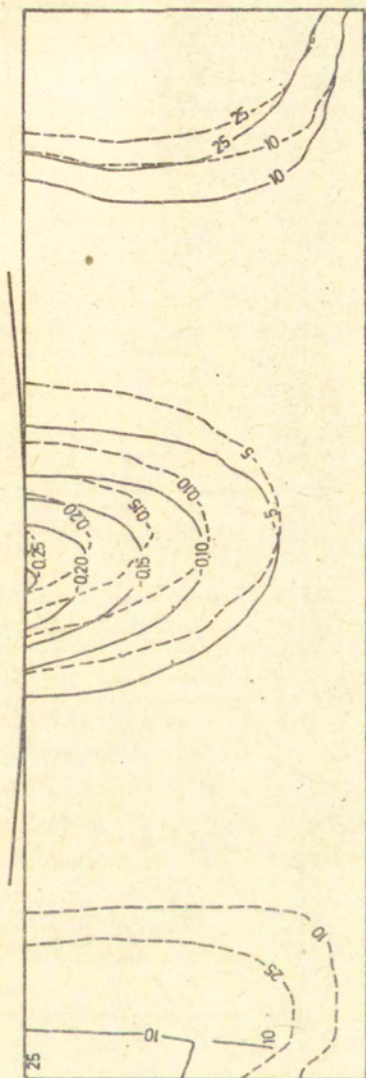
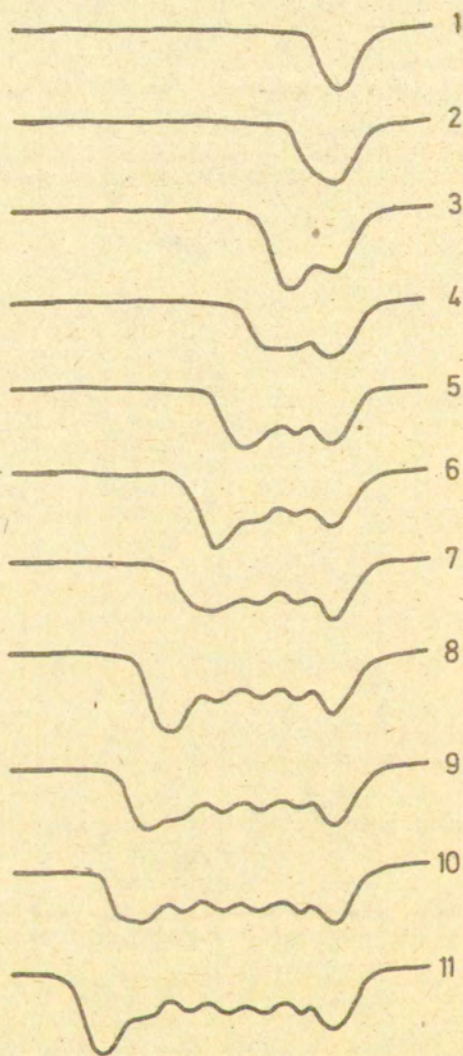
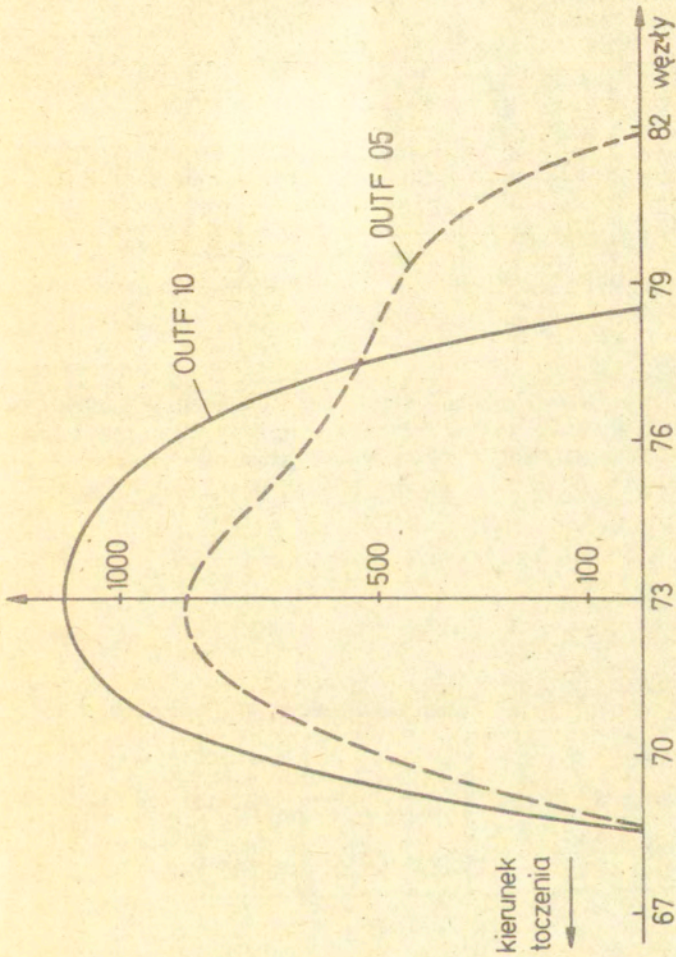


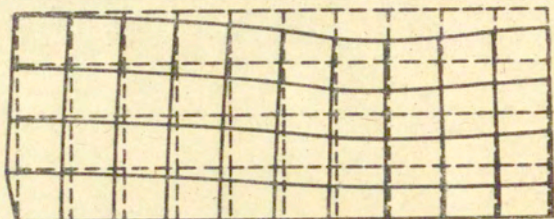
Fig. 3.5. Składowa przemieszczenia u_y dla czwartego (linie przerywane) i siódmego (linie ciągłe) kroku obliczeniowego.



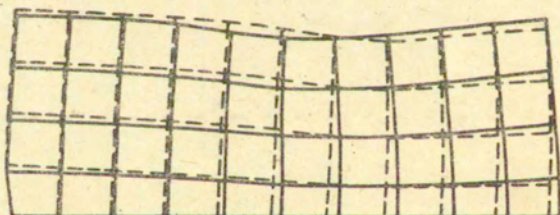
Rys.5.6. Kształt górnej powierzchni pasma dla danych OUTF10.



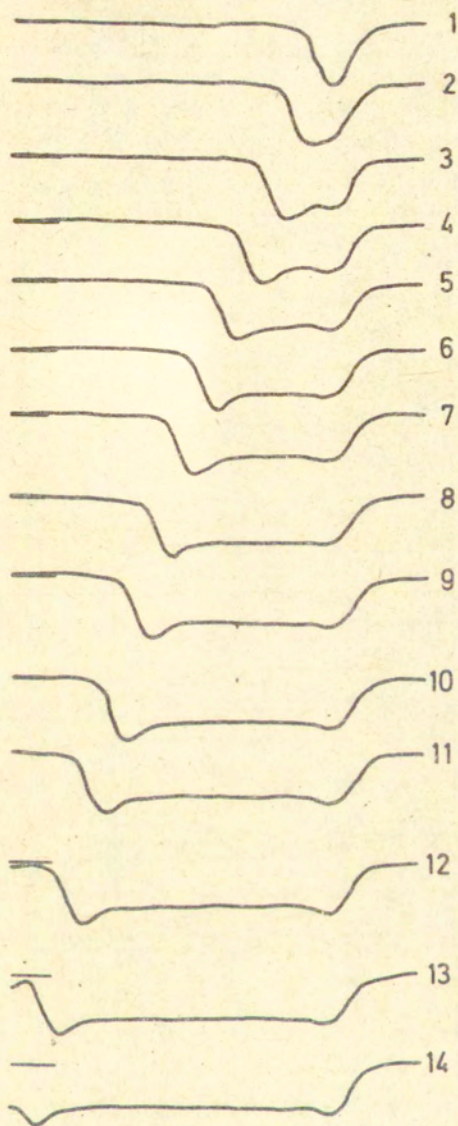
Rys. 5.7. Porównanie nacisków normalnych dla danych OUTF10 i OUTF05 w trzynastym kroku obliczeniowym.



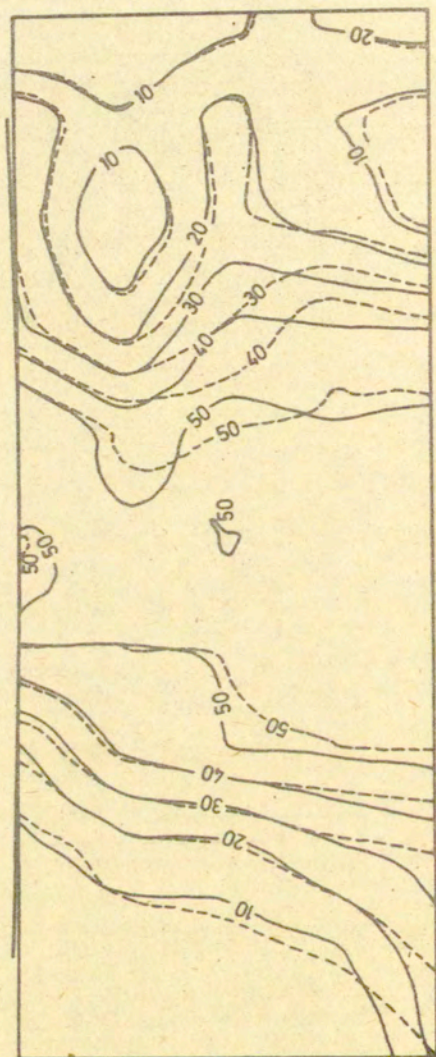
Rys. 5.8(i). Siatka zawierająca 40 elementów skończonych w trzecim kroku analizy (linie ciągłe) na tle siatki nieodkształconej (linie przerywane).



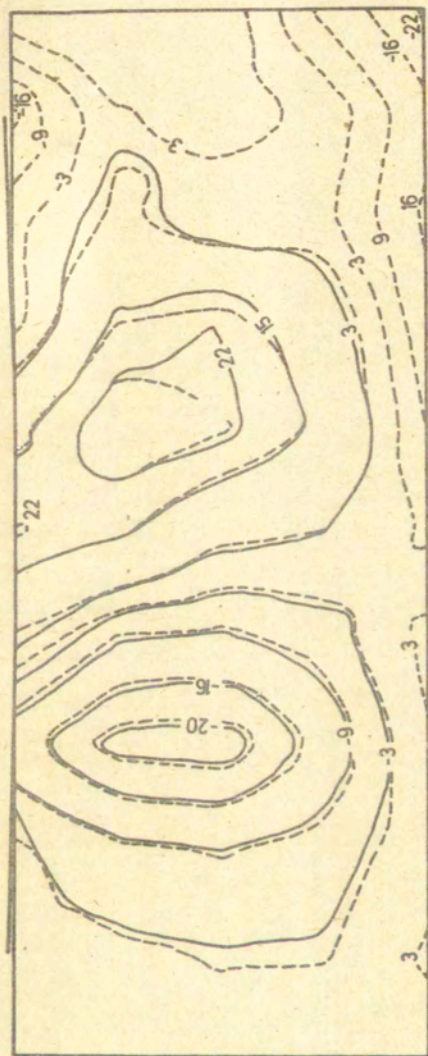
Rys. 5.8(ii). Siatka elementów skończonych dla trzeciego (linie przerywane) i szóstego (linie ciągłe) kroku analizy.



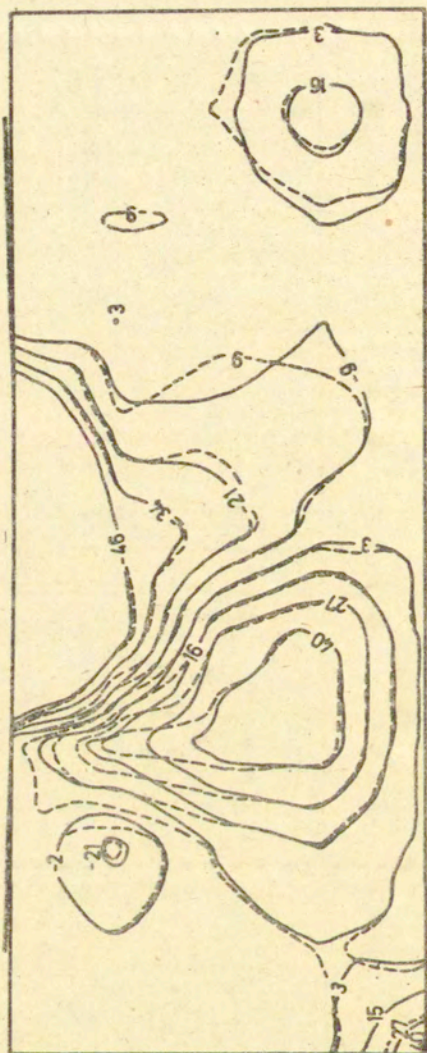
Rys. 5.9. Powierzchnia górna łąska poddanego działaniu sztywnego walca, który przemieszcza się w kierunku y tylko w pierwszych trzech krokach.



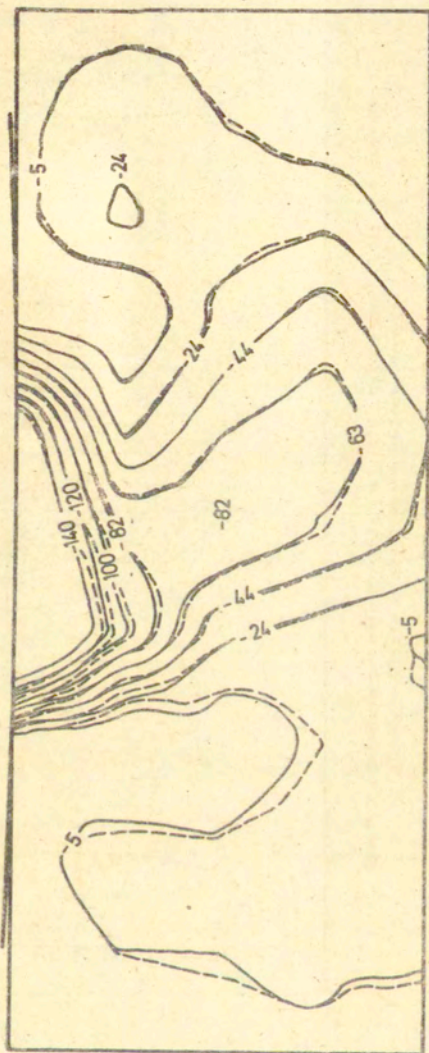
Rys. 5.10. Porównanie wartości pierwiastka kwadratowego z I_{2r} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



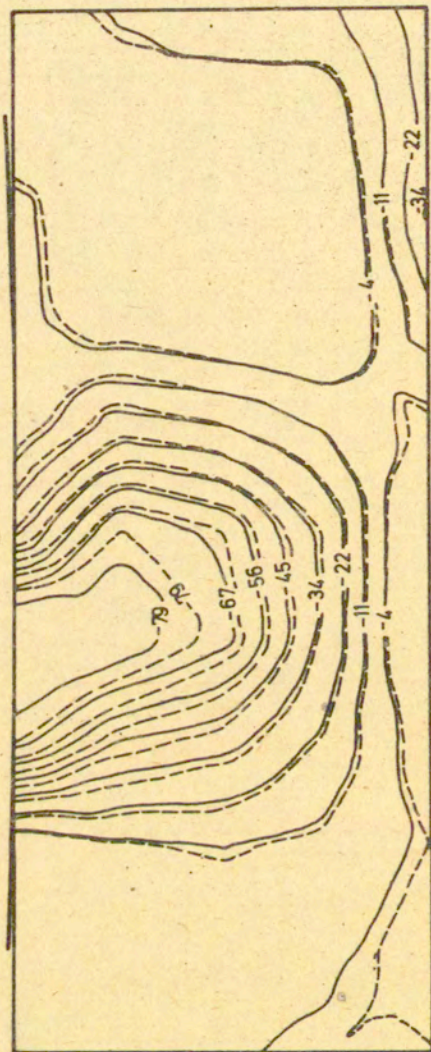
Rys. 5.11(i). Składowa naprężenia r_{xy} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



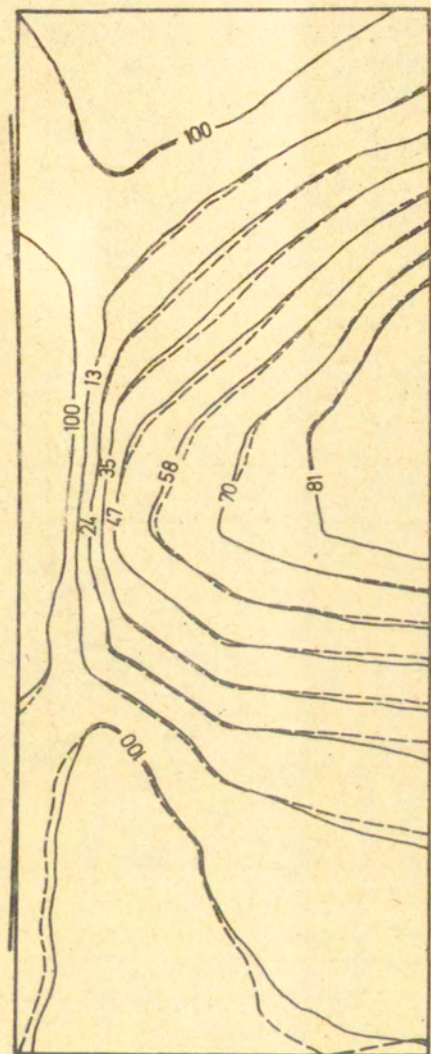
Rys. 5.11(11). Składowa naprężenia τ_{xx} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



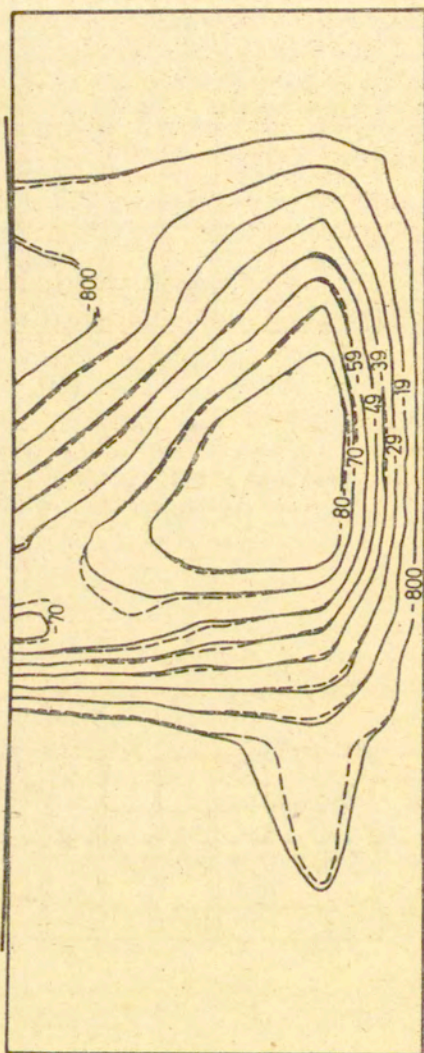
Rys. 5.11(iii). Składowa napeżenia τ_{xy} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



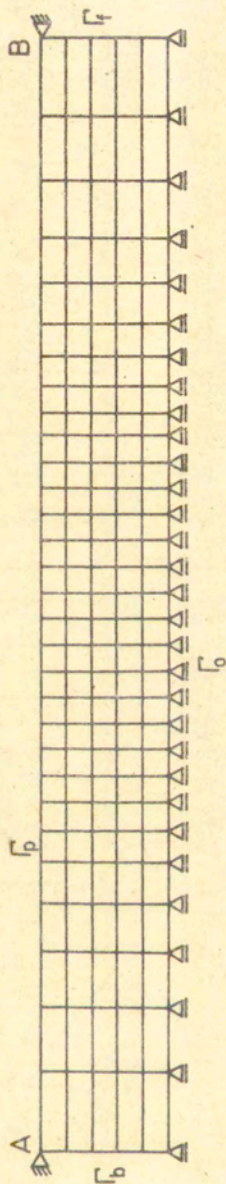
Rys. 5.12(1). Składowa odkształcenia ϵ_{xy} dla danych INFINI (linie przerywane) i. LARGE (linie ciągłe).



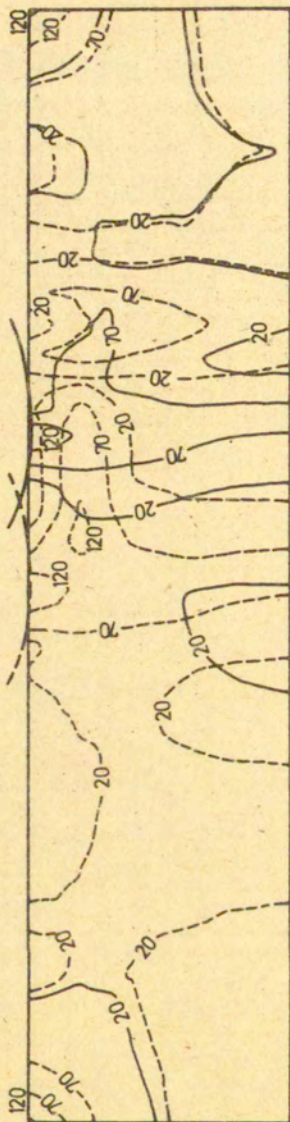
Rys. 5.12(11). Składowa odkształcenia ϵ_{xx} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



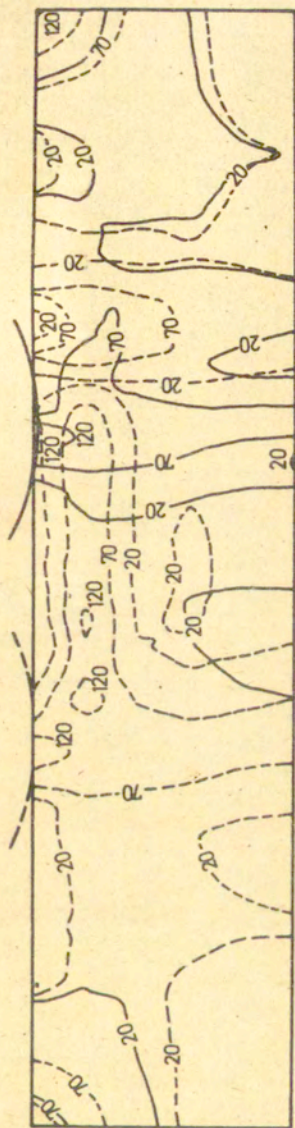
Rys. 5.12(iii). Składowa odkształcenia ϵ_{yy} dla danych INFINI (linie przerywane) i LARGE (linie ciągłe).



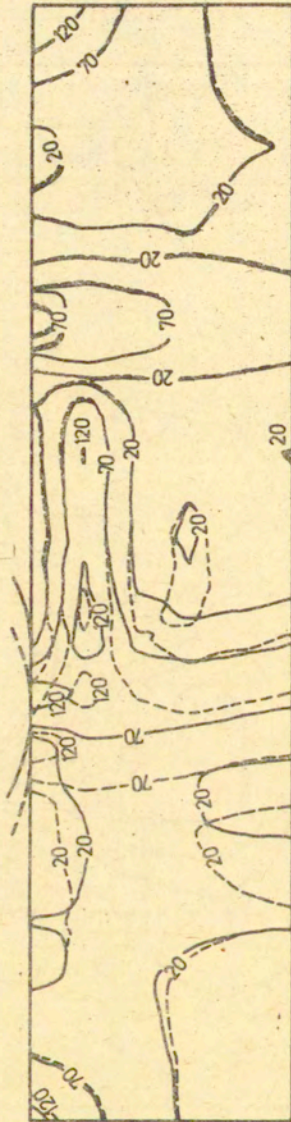
Rys. 5.13. Pasma sprężysto-plastyczne utwierdzone w punktach A i B zostało podzielone na 150 elementów przez siatkę zawierającą 186 węzłów. Na górnej powierzchni pasma znajduje się 31 węzłów.



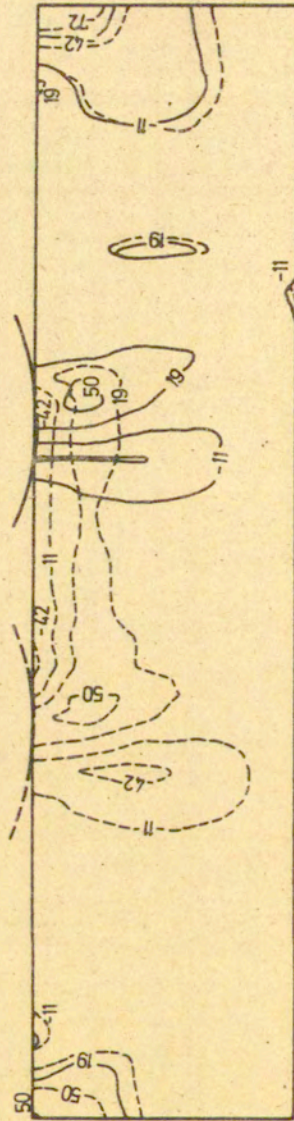
Rys. 5.14(1). Pierwiastek kwadratowy z I_{2r} dla DATA01 dla dwudziestego brzęciego (linie ciągłe) i czterdziestego siódmego (linie przerywane) kroku czasu.



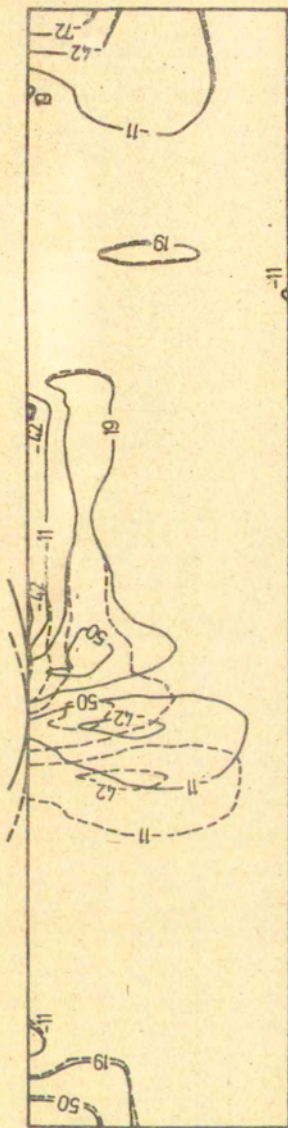
Rys. 5.14(ii). Pierwiastek kwadratowy z I_{2r} dla DATA01 dla dwudziestego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



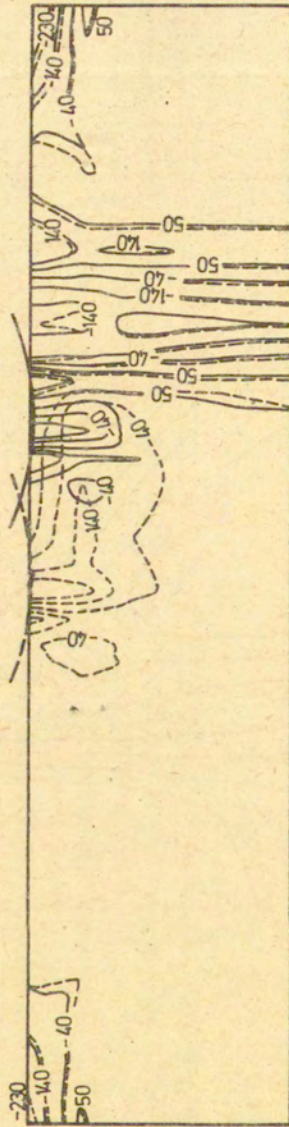
Rys. 5.14(iii). Pierwiastek kwadratowy z I_{2r} dla DATA01 dla sześćdziesiątego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



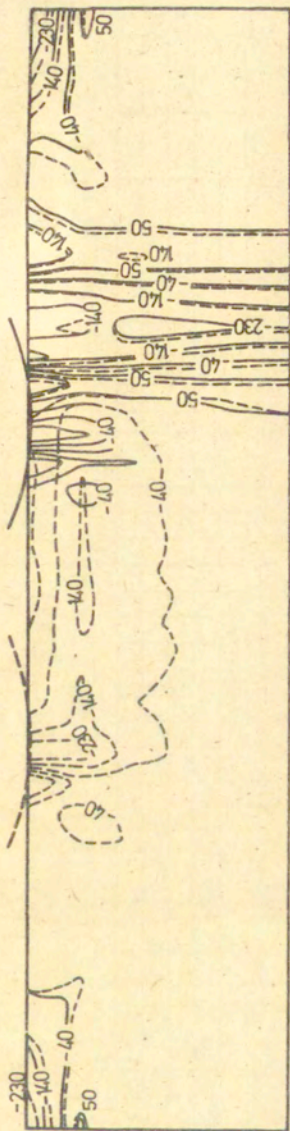
Rys. 5.15(11). Składowa naprężenia τ_{xy} dla DATA01 dla dwudziestego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



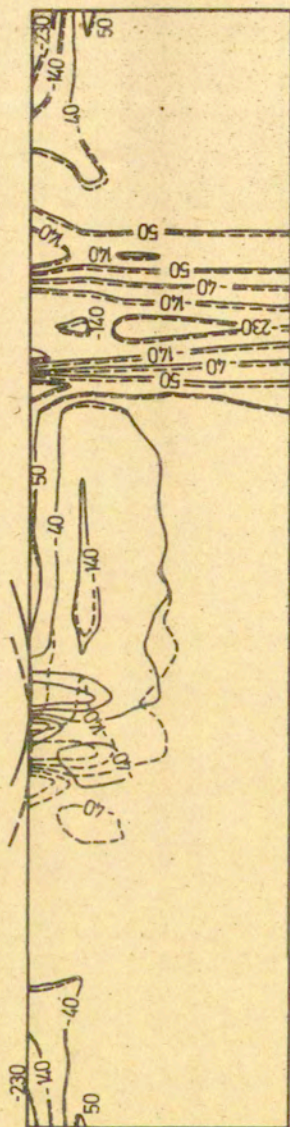
Rys. 5.15(111). Składowa naprężenia τ_{xy} dla DATA01 dla sześćdziesiątego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



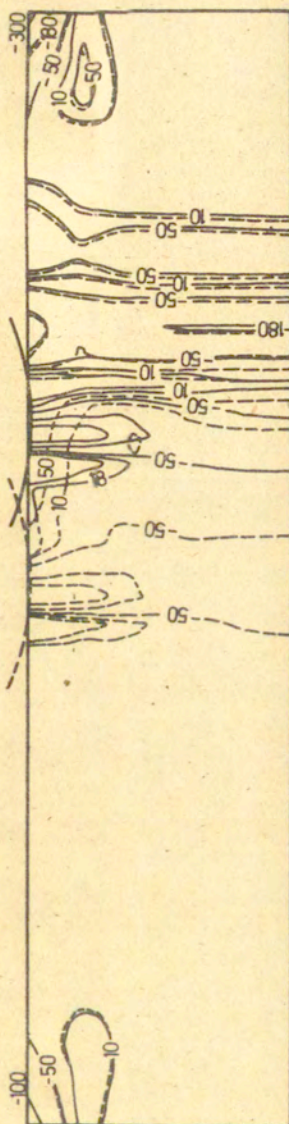
Rys. 5.16(i). Skiadowa naprężenia γ_{xx} dla DATA01 dla dwudziestego trzeciego (linie ciągłe) i czterdziestego siódmego (linie przerywane) kroku czasu.



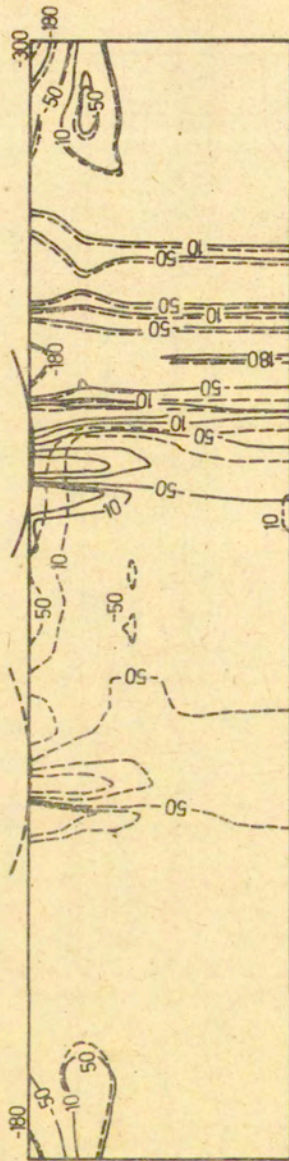
Rys. 5.16(ii). Składowa naprężenia τ_{xx} dla DATA01 dla dwudziestego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



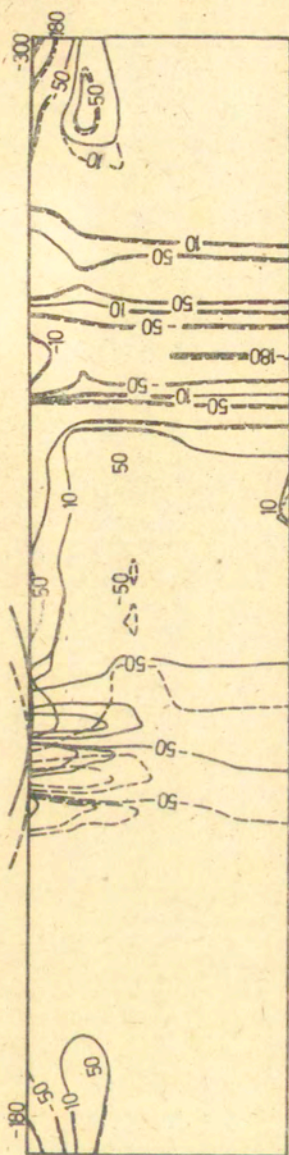
Rys. 5.16(111). Składowa naprężenia τ_{xx} dla DATA01 dla sześćdziesiątego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



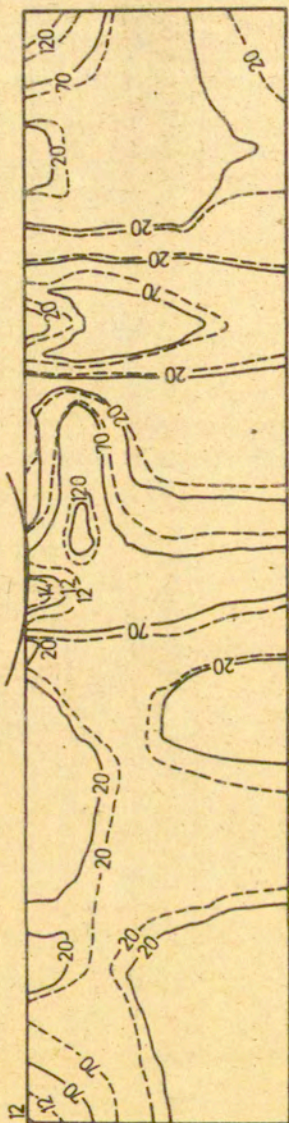
Rys. 5.17(1). Składowa naprężenia τ_{yy} dla DATA01 dla dwudziestego trzeciego (linie ciągłe) i czterdziestego siódmego (linie przerywane) kroku czasu.



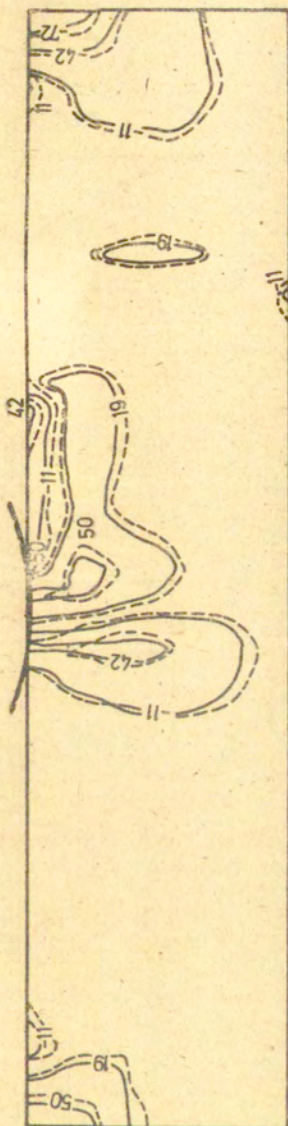
Rys. 5.17(ii). Składowa naprężenia τ_{xy} dla DATA01 dla dwudziestego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego (linie przerywane) kroku czasu.



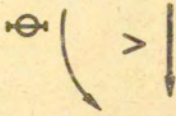
Rys. 5.17(11). Składowa naprężenia τ_{xy} dla DATA01 dla sześćdziesiątego trzeciego (linie ciągłe) i siedemdziesiątego pierwszego (linie przerywane) kroku czasu.



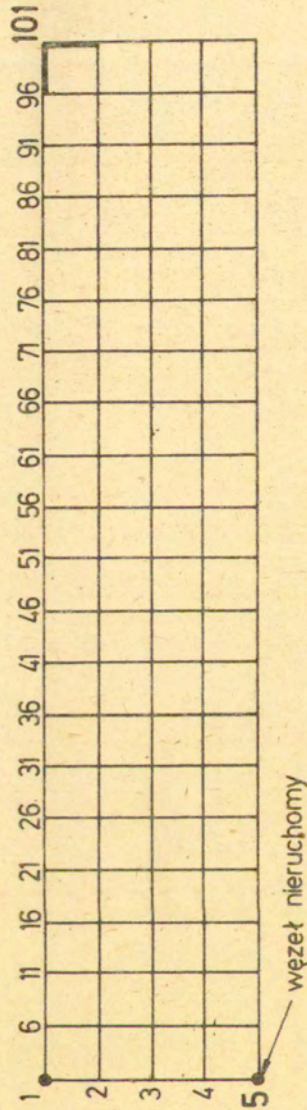
Rys. 5.18. Pierwiastek kwadratowy z I_{2r} w dwóch przejściach walca w czterdziestym siódmym kroku czasu.



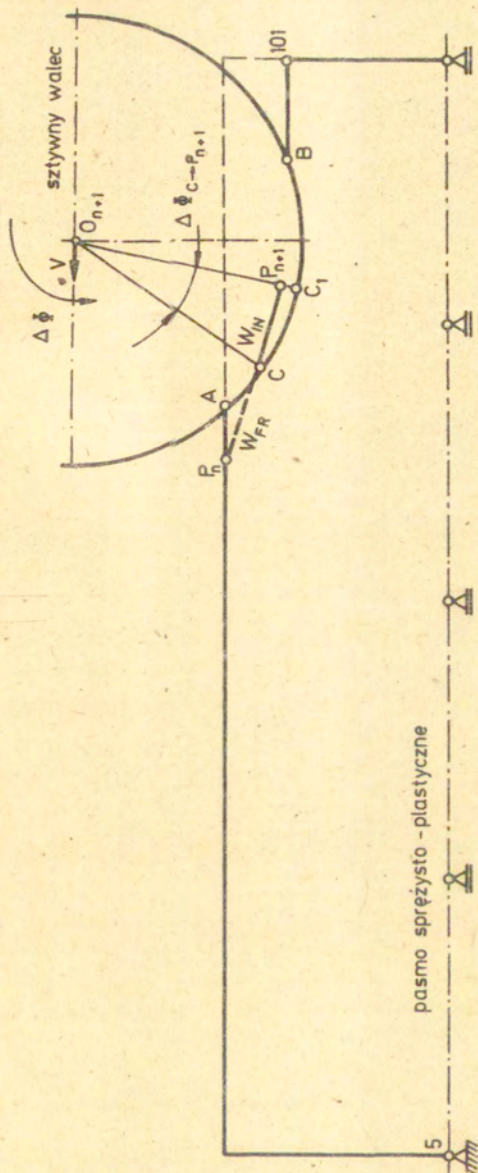
Rys. 5.19. Składowa naprężenia r_{xy} w dwóch przejściach walca w czterdziestym siódmym kroku czasu.



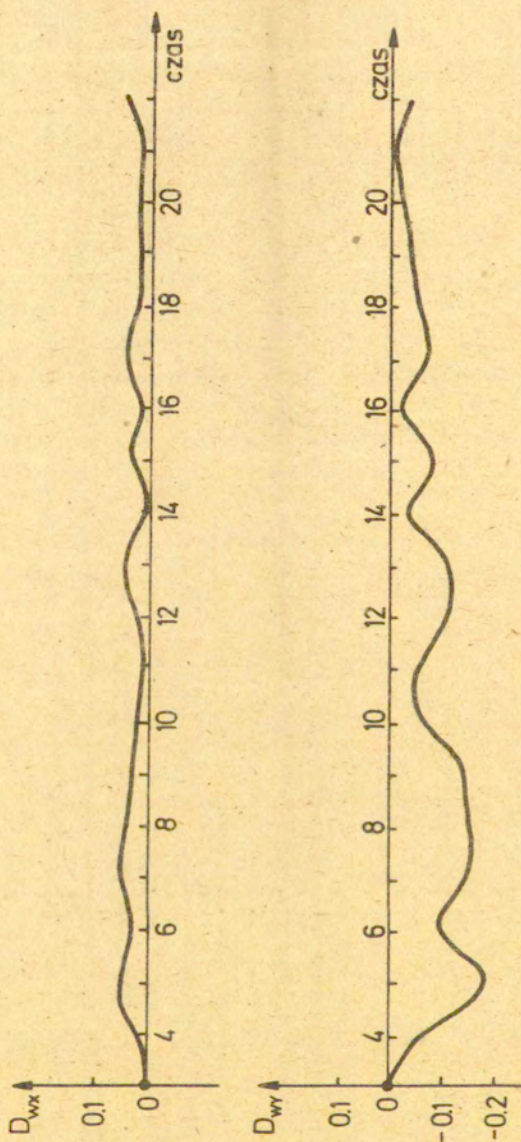
$$V = \begin{cases} 6.25 \text{ m/s} \\ 25 \text{ m/s} \\ 50 \text{ m/s} \end{cases}$$



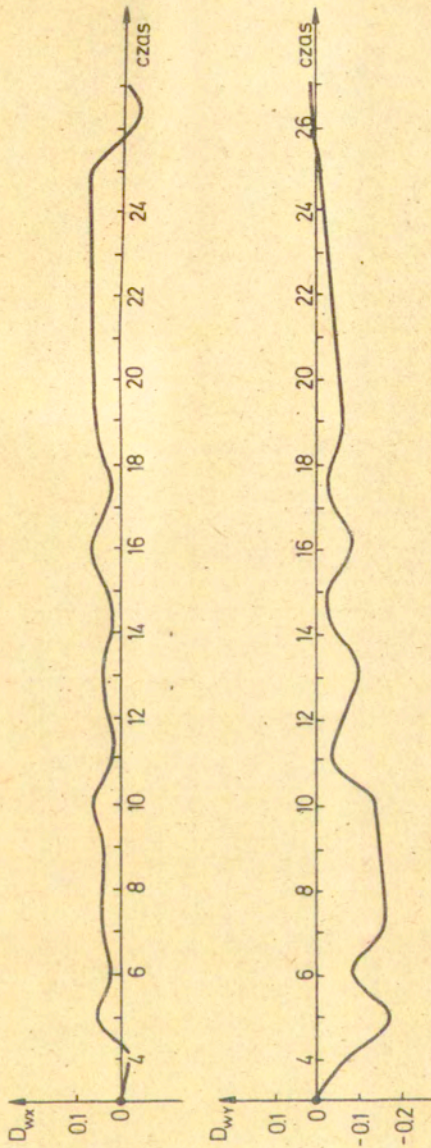
Rys. 5.20. Pasma o wymiarach 200x40mm zamocowane w punkcie A i zawierające 80 elementów i 105 węzłów.



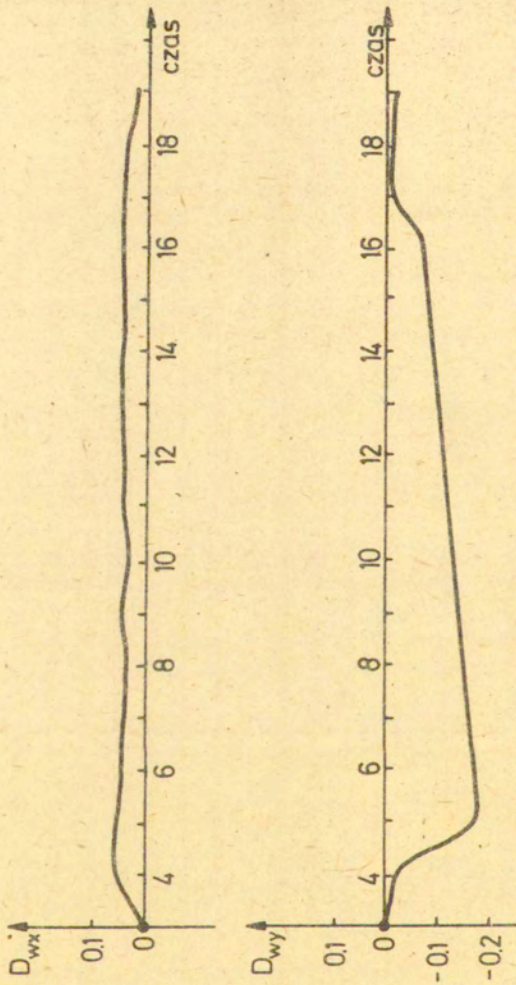
Rys. 5.20(1). Uderzenie sztywnego walca w naroże sprężysto-plastycznego pasma.



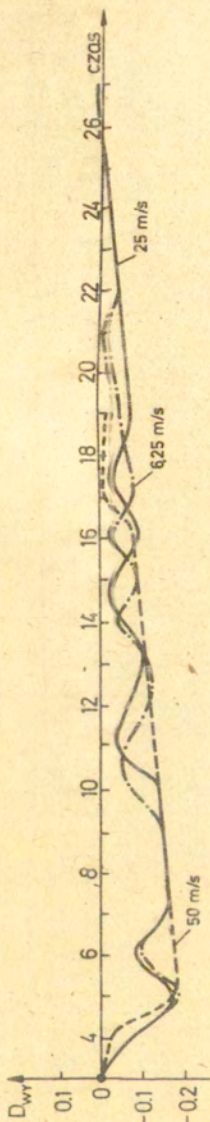
Rys. 5.21(1). Składowe przyrostów przemieszczenia w węźle Nr 101 dla prędkości $V=6.25$ m/s.



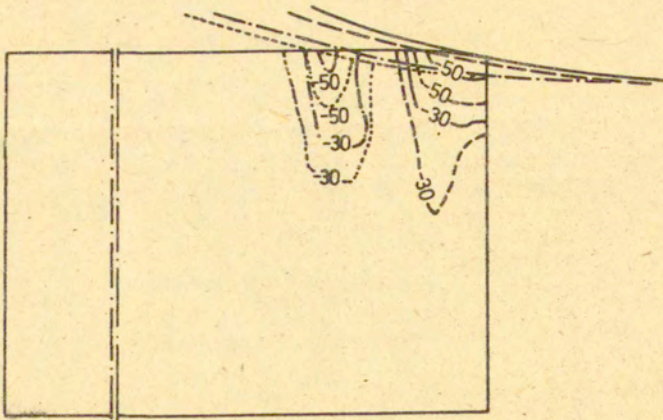
Kys. 5.21(11). Składowe przyrostów przemieszczenia w węźle Nr 101 dla prędkości $v=25.0$ m/s.



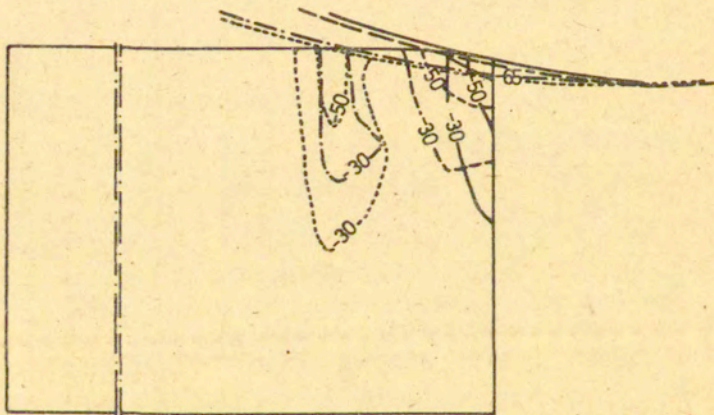
Rys. 5.21(iii). Składowe przyrostów przemieszczenia w węźle Nr 101 dla prędkości $V=50.0$ m/s.



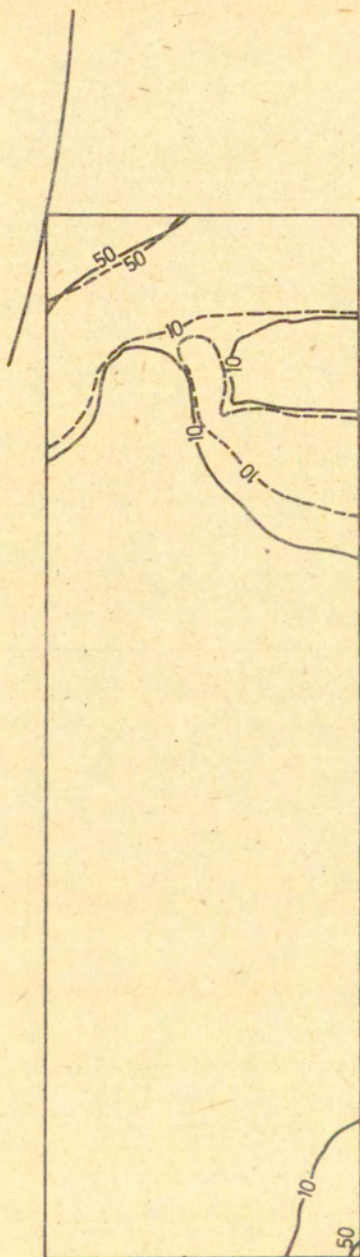
Rys. 5.21(iv). Porównanie przyrostów przemieszczenia D_{vy} w węźle Nr 101 dla trzech prędkości V_w : 6.25 m/s, 25.0 m/s, 50.0 m/s.



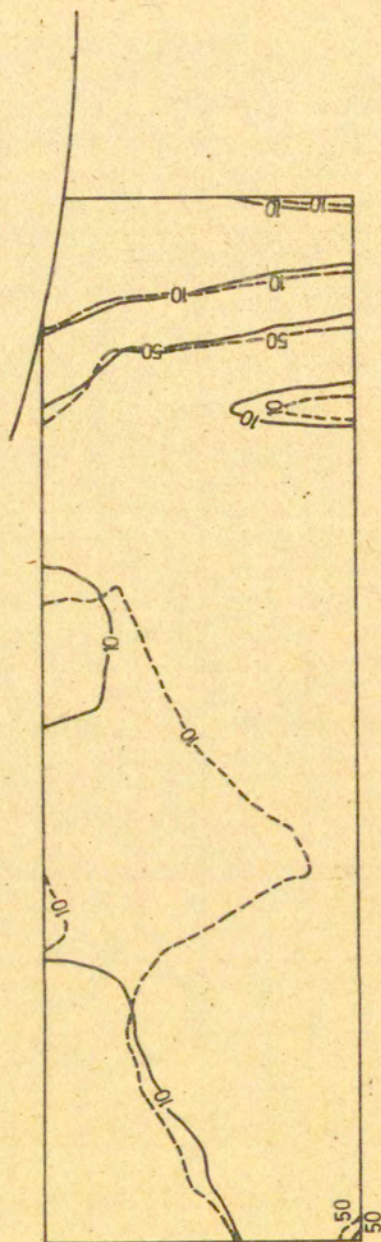
Rys. 5.22. Składowa naprężenia τ_{xy} dla prędkości $V=6.25$ m/s w szóstej (linie ciągłe), ósmej (linie przerywane), czternastej (linie podziałowe), szesnastej (kropki) chwili czasu.



Rys. 5.23. Składowa naprężenia τ_{xy} dla prędkości $V=50.0$ m/s w szóstej (linie ciągłe), ósmej (linie przerywane), czternastej (linie podziałowe), szesnastej (kropki) chwili czasu.



Rys. 5.24. Pierwiastek kwadratowy z J_{2r} w czwartej chwili czasu dla prędkości $V_1=6.25$ m/s (linie ciągłe) i $V_3=50.0$ m/s (linie przerywane).



Rys. 5.25. Pierwiastek kwadratowy z I_{2r} w dwunastym kroku czasu dla prędkości $V=6.25$ m/s (linie ciągłe) i $V=50$ m/s (linie przerywane).

SPIS TREŚCI

Streszczenie	3
1. Wstęp	5
1.1. Problemy kontaktowe w technologii, projektowaniu konstrukcji, transporcie i eksploatacji	5
1.2. Przegląd problemów kontaktowych	6
1.2.1. Niestacjonarne zagadnienia kontaktowe	6
1.2.1.1. Zagadnienia kontaktowe z translacją i obrotem obszaru styku	7
1.2.1.2. Toczne zagadnienie kontaktowe	9
1.2.1.3. Uderzenie	16
1.2.2. Stacjonarne zagadnienia kontaktowe	17
2. Sformułowanie tocznego problemu kontaktowego	23
2.1. Prawo zachowania dla niestacjonarnego zagadnienia kontaktowego	23
2.1.1. Mechanika kontaktowa i modele tarcia	24
2.1.1.1. Model oddziaływania ciał odkształcalnych	24
2.1.1.2. Podstawowe modele tarcia posuwistego	29
2.1.2. Prawo zachowania w opisie Lagrange'a	34
2.1.3. Prawo zachowania w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a	38
2.2. Funkcje materiałowe w zmodyfikowanym opisie Lagrange'a	50
2.3. Warunki brzegowe	52
3. Własności operatora $AC_n u$	54
3.1. Monotoniczność operatora A	55
3.2. Wpływ efektów dynamicznych na własności operatora A	65
4. Metody rozwiązania problemów kontaktowych	67
4.1. Przegląd algorytmów i strategii kontaktowych	67
4.1.1. Algorytmy rozwiązania problemów kontaktowych	67
4.1.2. Strategie kontaktowe	77
4.2. Sposób rozwiązania niestacjonarnego problemu	

kontaktowego	78
4.2.1. Opis algorytmu	78
4.2.1.1. Minimalizacja funkcjonału	79
4.2.1.2. Równania równowagi dla elementów skończonych	83
4.2.1.3. Rozwiązanie równań równowagi	85
4.2.2. Określenie stanu materiału	87
4.2.3. Strategia kontaktowa	91
5. Wyniki dla niestacjonarnych zagadnień kontaktowych	94
5.1. Zagadnienia quasistatyczne	94
5.1.1. Oddziaływanie ruchomego walca i pasma utwierdzonego jednostronnie	94
5.1.2. Wyniki dla nieskończenie małych i skończonych odkształceń	97
5.1.3. Toczenie się walca po paśmie utwierdzonym dwustronnie	99
5.2. Zagadnienia dynamiczne	101
5.2.1. Uderzenie walca w naroże pasma utwierdzonego w jednym punkcie	101
6. Podsumowanie i wnioski	104
7. Podziękowania	109
8. Spis literatury	110
9. Rysunki	128
- rysunki do Rozdziału 2	130
- rysunki do Rozdziału 3	131
- rysunki do Rozdziału 4	137
- rysunki do Rozdziału 5	139-180