Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo σ_2.

Nota di

Giuseppe Vitali a Padova.

In un mio recente lavoro [1]) ho considerato, per ogni superficie il cui σ_2 sia di $2+k$ dimensioni ($k=2, 3$), un sistema ortogonale di k direzioni del σ_2 perpendicolari alla superficie, sistema che risponde ad una definizione simmetrica rispetto all'insieme delle sue direzioni, e che ho chiamato *sistema principale*.

I risultati ottenuti in detto lavoro suggeriscono anche la definizione di analoghi *sistemi principali* per le varieta' a piu' di due dimensioni.

Nella parte 1ª della presente nota io do' la descrizione di tali sistemi.

La trattazione della questione in forma generale suggerisce altri modi di introdurre dei sistemi ortogonali di perpendicolari alla varieta' giacenti nel σ_2, la cui definizione ha il carattere di simmetria richiesto, e che conducono ad altri sistemi, contrariamente a quanto avevo ritenuto probabile durante la compilazione della mia nota citata.

Le molteplici maniere di introdurre tali sistemi ortogonali, e che sono suggerite dal contenuto della 1ª parte di questa nota, sono esposte nella 2ª parte, e fra queste ve ne e' una che conduce ad un sistema di normali che per le superficie generiche dello spazio lineare a 4 dimensioni coincide con quello che il Tonolo [2]) ha recentemente trovato con considerazioni geometriche.

---

[1]) G. Vitali. „Sopra alcuni invarianti associati ad una varieta' e sopra i sistemi principali di normali delle superficie". [Annales de la Société Polonaise de Mathématique. T. VII. Année 1928. pp. 43—67].

[2]) A. Tonolo. „Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dell' S_4. [Memoria della R. Acc. di Torino] in corso di stampa.

PARTE 1ª.

1. Sia

$$f = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

l'equazione di una varieta' V_n ad n dimensioni dello spazio hilbertiano [1]), ed indichiamo con g il campo di variabilita' della t.

Indichiamo poi con f_i la derivata di f rispetto ad u_i, e poniamo

[1] $$a_{r,s} = \int_g f_r f_s \, dt.$$

La forma

[2] $$\sum_1^n {}_{rs} \, a_{r,s} \, du_r \, du_s$$

da' il quadrato dell'elemento lineare della V_n, ed il suo discriminante a e' diverso da zero.

Poniamo

$$W_{r,s;\,p,q} = (2\, a_{r,s}\, a_{p,q} - a_{r,p}\, a_{s,q} - a_{r,q}\, a_{s,p}) : 2$$

ed indichiamo con W il determinante di ordine

$$\nu = \binom{n+1}{2}$$

formato coi $W_{r,s;p,q}$ facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie rs e pq tutte le ν combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

[3] $$1, 2, \ldots, n,$$

e mettendo in una medesima riga tutti gli elementi colla stessa coppia rs, ed in una stessa colonna quelli colla medesima coppia pq.

In un altro mio recente lavoro [2]) dimostro che

$$W = (-1)^{\binom{n+1}{2}} . (1-n) \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} . a^{n+1},$$

e quindi si puo' concludere che

$$W \neq 0.$$

Indico con $W^{r,s;p,q}$ il reciproco moltiplicato per $2^{\varepsilon_{rs}+\varepsilon_{pq}}$: 4 di $W_{r,s;\,pq}$ in W, dove ϵ_{rs} vale *zero* od 1 secondo che r ed s sono differenti od uguali.

---

[1]) G. Vitali. „Geometria nello spazio hilbertiano". [Atti del R. Istituto Veneto. 1927—28. Tomo LXXXVII — Parte seconda, pp. 349—428].

[2]) G. Vitali. „Calcolo indiretto di alcuni determinanti". [R. Istituto Veneto. Tomo LXXXVIII — 1928—29] in corso di stampa

Il sistema $W^{r,s;p,q}$ e' un sistema controvariante a 4 apici di 1ª classe (cioe' nel calcolo assoluto di Ricci).

2. Indichiamo con $f_{r,s}$ le derivate seconde covarianti di f rispetto alla forma [2].

Se

$$x_{r,s}$$

e' un covariante a 2 indici di 1ª classe, noi diremo il suo *pseudo-reciproco* il controvariante

$$x^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{r,s;p,q} x_{p,q}.$$

Si vede facilmente che si ha

$$x_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W_{r,s;p,q} x^{p,q},$$

e diremo che $x_{r,s}$ e' lo *pseudo-reciproco* del controvariante $x^{r,s}$.

Se

$$x_{r,s} \quad \text{ed} \quad y_{r,s}$$

sono due covarianti a due indici di 1ª classe, e se

$$x^{r,s} \quad \text{ed} \quad y^{r,s}$$

sono i loro pseudo-reciproci, noi porremo

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} y^{r,s}.$$

Si ha subito

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} \sum{}_{pq} W^{r,s;p,q} y_{p,q}$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} \sum_{1}^{n}{}_{rs} W^{r,s;p,q} x_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} x^{p,q} = (y, x).$$

In particolare sara'

$$(x, x) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} x^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W^{r,s;p,q} x_{r,s} x_{p,q} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} x^{r,s} x^{p,q}.$$

3. Def. Se $n + k$ $(k \leq \nu)$ e' il numero delle dimensioni del σ_2 di una V_n, noi diremo *sistema principale* di normali di V_n in σ_2, ogni insieme di k parametri normali

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

per cui sia

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0$$

per ogni coppia i, j di numeri diversi scelti fra i numeri

$$1, 2, \ldots, k,$$

dove

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int\limits_{g} \underset{i}{X} f_{r,s}\, dt.$$

4. Teor. Ogni varieta' ammette uno od infiniti sistemi principali di normali nel σ_2.

Dim. Consideriamo l'equazione

[4] $$\Delta(\rho) = 0$$

in cui $\Delta(\rho)$ indica il determinante formato cogli elementi

$$\Delta_{r,s;\,p,q} = A_{r,s;\,p,q} - \rho\, W_{r,s;\,p,q} \qquad \left(A_{r,s;\,p,q} = \int\limits_{g} f_{r,s} f_{p,q}\, dt\right).$$

come il determinante W e' stato formato coi $W_{r,s;\,p,q}$. Poiche' $W \neq 0$ il grado di [4] e' $= \nu$.

Poniamo

$$F_x = \sum_{1}^{n}{}_{rspq}\, A_{r,s;\,p,q}\, x^{r,s} x^{p,q} \qquad (x^{r,s} = x^{s,r}).$$

Io dico che per ogni sistema reale delle $x^{r,s}$ e'

$$F_x \geq 0,$$

infatti e'

$$F_x = \int\limits_{g} \left(\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, f_{r,s} x^{r,s}\right)^2 dt \geq 0.$$

Per noti teoremi [1]) noi possiano affermare che la [4] ha tutte radici reali, e che se ρ_1 e' una sua radice reale τ — upla, la caratteristica della matrice $\Delta(\rho_1)$ e' uguale a $\nu - \tau$.

Le radici di [4] diverse da zero sono in numero di k. Sia ρ_1 una radice diversa da zero di [4], e supponiamo che essa sia τ — upla. La caratteristica della matrice di $\Delta(\rho_1)$ sara' $\nu - \tau$, ed il sistema di equazioni lineari nelle $\lambda^{r,s}$ $(\lambda^{r,s} = \lambda^{s,r})$

[5] $$\sum_{1}^{n}{}_{rs} \left(A_{r,s;\,p,q} - \rho_1 W_{r,s;\,p,q}\right) \lambda^{r,s} = 0$$

ha, se $\tau > 1$, infinite soluzioni che sono tutte le combinazioni lineari

---

[1]) A. Capelli. „Istituzioni di analisi algebrica" [Napoli. Ed. Pellerano Quarta edizione. pag. 923—4, n° 1567, pag. 926—8, n°. 1569].

di τ di esse fra loro indipendenti, e quindi i parametri di direzioni

[6] $$\sum_1^n{}_{rs} f_{r,s} \lambda^{r,s}$$

corrispondenti a tutte queste soluzioni danno tutte le direzioni di uno spazio lineare a τ dimensioni. Scegliamo un sistema di τ soluzioni delle [5] in modo che i corrispondenti parametri [6] formino un sistema ortogonale di parametri normali, il che, nella nostra ipotesi di $\tau > 1$, si puo' fare in infiniti modi. Se $\tau = 1$ si ha un solo parametro normale [6] (individuato all'infuori del segno, il che non ha importanza), e noi prenderemo questo parametro.

Fatto questo per tutte le radici $\neq 0$ di [4] si arriva (ed anche in piu' maniere) in possesso di k parametri normali

[6′] $$\underset{i}{X} = \sum_1^n{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

ciascuno dei quali corrisponde ad una radice ρ_i della [4] e corrispondentemente ad essa si ha

$$\sum_1^n{}_{rs} (A_{r,s;\,p,q} - \rho_i W_{r,s;\,p,q}) \underset{i}{\lambda}^{r,s} = 0,$$

ossia

[7] $$\int_g f_{p,q} \left(\sum_1^n{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s}\right) dt = \rho_i \sum_1^n{}_{rs} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s}.$$

Poniamo

$$\underset{i}{x}_{p,q} = \int_g f_{p,q} \underset{i}{X} dt = \int_g f_{p,q} \left(\sum_1^n{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s}\right) dt,$$

ed abbiamo

[7′] $$\underset{i}{x}_{p,q} = \sum_1^n{}_{rs} W_{r,s;\,p,q} (\rho_i \underset{i}{\lambda}_{r,s}),$$

e quindi i sistemi

$$\underset{i}{x}_{p,q} \quad \text{e} \quad \rho_i \underset{i}{\lambda}^{p,q}$$

sono pseudo-reciproci, e noi potremo scrivere

[7″] $$\underset{i}{x}^{p,q} = \rho_i \underset{i}{\lambda}^{p,q}.$$

Moltiplicando i due membri della [7] per $\underset{j}{\lambda}^{p,q}$ $(j \neq i)$ e sommando rispetto a pq, si ha

[8] $$\sum_1^n{}_{rspq} A_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = \rho_i \sum_1^n{}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}$$

e tenendo conto delle [6]

$$\int_g \underset{i}{X} \cdot \underset{j}{X} dt = \rho_i \sum_{rspq}^{n}{}_1 \; W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}.$$

Ora se $\rho_i = \rho_j$, i parametri $\underset{i}{X}$ ed $\underset{j}{X}$ sono fra loro ortogonali, ossia

[9] $$\int_g \underset{i}{X} \cdot \underset{j}{X} dt = 0,$$

e, poiche' $\rho_i \neq 0$, sara'

[10] $$\sum_{rspq}^{n}{}_1 W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = 0.$$

Se poi $\rho_i \neq \rho_j$, la [8] scambiando fra loro i e j diventa

[8′] $$\Sigma_{rspq} A_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = \rho_j \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}$$

e dalle [8] ed [8′] si deducono le [9] e [10]. Allora i parametri [6] formano un sistema ortogonale. Resta a provare che per ogni coppia i, j $(i \neq j)$ e'

[11] $$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0.$$

Ora, tenendo presente le [7′], [7″] e [10], si ha

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = \Sigma_{pq} \underset{i}{x}_{p,q} \underset{j}{x}^{p,q} = \sum_{pq}^{n}{}_1 (\Sigma_{rs} W_{r,s;\,p,q}\, \rho_i \underset{i}{\lambda}^{r,s}) \,.\, \rho\, \lambda^{r,s}$$
$$= \rho_i \rho_j \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q} = 0.$$

Dunque il sistema [6] e' un sistema principale di normali in σ_2 ed il teor. e' dimostrato.

E' interessante calcolare le $(\underset{i}{x}, \underset{i}{x})$.

Si ha subito

$$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i^2 \sum_{rspq}^{n}{}_1 \; W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{i}{\lambda}^{p,q}.$$

Ma dalle [8], tenendo conto del fatto che i parametri [6] sono normali si ha

$$1 = \rho_i \Sigma_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{i}{\lambda}_{p,q},$$

dunque

[12] $$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i.$$

5. Consideriamo i parametri [6] come un sistema cartesiano ortogonale nello spazio S_k (euclideo a k dimensioni) appartenente

al σ_2 e perpendicolare alla V_n, indichiamo con x_i le coordinate di un punto rispetto a questo sistema, e consideriamo il cono quadrico Q di equazione

$$\sum_1^n {}_{rs} \frac{x_i^2}{\rho_i} = 0.$$

Il sistema delle [6′] e' un k-edro ortogonale autopolare di questo cono.

Per gli studi da me fatti per $n = 2$, si sa che per $n = 2$ e $k = 3$ questo cono e' il cono geodetico.

Per $n > 2$, il cono geodetico non e' in generale un cono quadrico, ma ha qualche relazione con il cono Q. Vale il

Teor. Il cono geodetico e' contenuto nel cono Q.

Dim. Un punto del cono geodetico sia dato da

$$f + \sum_1^k {}_i x_i \underset{i}{X}.$$

Ricordando le [6′], esso e' allora dato

$$f + \Sigma_{rs} \mu^{r,s} f_{r,s}$$

dove

[13] $$\mu^{r,s} = \sum_1^k x_i \underset{i}{\lambda}^{r,s} = \sum_1^k {}_i \, x_i \underset{i}{x}^{r,s} : \rho_i,$$

e dovranno essere le $\mu^{r,s}$ proporzionali alle $du_r du_s$. Sia $\mu^{r,s}$ lo pseudo-reciproco di $\mu^{r,s}$. Allora

$$(\mu, \mu) = \sum_1^n {}_{rs} \mu^{r,s} \mu_{r,s} = \sum_1^n {}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} \mu^{r,s} \mu^{p,q} =$$

$$K \sum_1^n {}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} du_r du_s du_p du_q,$$

dove K e' un conveniente fattore di proporzionalita'. Ma, tenendo presente l'espressione di $W_{r,s;\,p,q}$,

$$\sum_1^n {}_{rspq} W_{r,s;\,p,q} du_r du_s du_p du_q = (2\, U^2 - U^2 - U^2) : 2 = 0,$$

dove

$$U = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} du_r du_s,$$

dunque

$$(\mu, \mu) = 0.$$

Ed osservando che da [13] si ricava

$$\mu_{r,s} = \sum_1^k {}_i x_i \underset{i}{x}_{r,s} : \rho_i;$$

si ha, tenendo conto delle [11] e delle [12],

$$0=(\mu,\mu)=\sum_{1}^{k}{}_{i}\; x_i^2\,.\,(x,x):\rho_i^2=\sum_{1}^{k}{}_{i}\, x_i^2:\rho_i,$$

e questo prova appunto che il cono geodetico appartiene al cono Q.

Cor. Se $k=n$, il cono geodetico coincide col cono Q, e quindi e' un cono quadrico.

Dim. Infatti se $k=n$, il cono geodetico ha lo stesso numero di dimensioni del cono Q, dunque esso coincide con Q.

PARTE 2^a.

1. Le considerazioni della parte 1^a, escluse quelle del n° 5, si possono ripetere anche quando al posto del sistema $W_{r,s;\,p,q}$ si mettesse un altro sistema simmetrico rispetto agli indici di ciascuna delle coppie rs e pq e rispetto a queste due coppie, col corrispondente determinante W diverso da zero, ed in particolare se si pone

$$W_{r,s;\,p,q}=\lambda a_{r,s}\,a_{p,q}+\mu\,(a_{r,p}\,a_{s,q}+a_{r,q}\,a_{s,p}),$$

con $\mu \neq 0$ ed $n\lambda+2\mu \neq 0$, oppure se, indicando con $a^{r,s}$ il reciproco di $a_{r,s}$, e se il sistema

$$\alpha_{r,s}=\xi\,.\,a_{r,s}+\zeta\,.\sum_{1}^{n}{}_{pq}\,A_{r,s;\,p,q}\,a^{p,q}$$

in cui ξ e ζ sono numeri noti, ha il discriminante diverso da zero, ponendo

$$W_{r,s;\,p,q}=\lambda\alpha_{r,s}\,\alpha_{p,q}+\mu\,(\alpha_{r,p}\,\alpha_{s,q}+\alpha_{r,q}\,\alpha_{s,p}),$$

con $\mu \neq 0$ e $n\lambda+2\mu \neq 0$. In questo ultimo caso, se $\lambda=2$ e $\mu=-1$, si possono ripetere anche le considerazioni del n° 5.

2. Siano

$$\underset{i}{z}_{r,s} \qquad (i=1,2,\ldots \nu)$$

ν covarianti a 2 indici di 1^a classe, ed indichiamo con Z il determinante di ordine ν che ha per elementi della i-esima riga le

$$2\,\underset{i}{z}_{r,s}:2^{\varepsilon_{rs}},$$

e costante in ogni colonna la coppia di indici rs. Evidentemente una sostituzione invertibile che porta dalle variabili u alle variabili v muta il determinante Z in

$$Z'=PZ,$$

dove P e' il determinante formato cogli elementi $P_{r,s;\,p,q}$ definiti dalle relazioni

$$P_{r,s;p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_q} + \frac{\partial u_r}{\partial v_q} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_p}, \text{ se } r \neq s$$

$$P_{r,r;p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial v_q},$$

come il determinante W e' stato formato coi $W_{r,s;\,p,q}$. Ma P e' un determinante di Scholtz-Hunyady[1]) formato col determinante funzionale Δ delle u rispetto alle v, e vale Δ^{n+1}.

Dunque

$$Z : (\sqrt{a})^{n+1}$$

e' un invariante, e se noi indichiamo con Z^{rs} i complementi algebrici divisi per $(\sqrt{a})^{n+1}$ degli elementi della prima riga di Z, si vede che

[14] $$\sum_{1}^{n}{}_{rs} Z^{r,s} \underset{1}{z}_{r,s}$$

e' un invariante.

Ora, se noi teniamo fissi gli ultimi $\nu - 1$ $\underset{i}{z}_{r,s}$, vediamo che il sistema $Z^{r,s}$ e' fisso. Questo sistema e' tale che, qualunque sia il sistema $\underset{i}{z}_{r,s}$, la funzione [14] e' un invariante. Si puo' dunqne concludere che il sistema $Z^{r,s}$ e' un controvariante a due indici di 1ª classe.

3. Supponiano ora di poter associare alla varieta' V_n $\nu - 2$ covarianti simmetrici a due indici di classe 1 indipendenti da t. Ad essi accompagniamo il sistema $f_{r,s}$ e con questi $\nu - 1$ covarianti fabbrichiamo un sistema controvariante come il precedente $Z^{r,s}$, e che noi indicheremo con $F^{r,s}$.

Poniamo poi

$$\phi_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W_{r,s;\,p,q} F^{p,q},$$

dove il $W_{r,s;\,p,q}$ ha lo stesso significato che ha nella parte 1ª di questa nota.

Allora tutte le considerazioni precedenti si possono ripetere sostituendo alle $f_{r,s}$ le $\phi_{r,s}$, ossia alle $A_{r,s;\,p,q}$ le $\int_g \phi_{r,s}\, \phi_{p,q}\, dt$.

[1]) E. Pascal „I determinanti" [U. Hoepli ed. Milano. Seconda edizione. 1923. pp. 156—160].

4. Nel caso di $n=2$ si ottengono le normali di Tonolo prendendo al posto delle $A_{r,s;\,p,q}$ le $\int\limits_g \phi_{r,s}\,\phi_{p,q}\,dt$, e le $F^{r,s}$ uguali ai minori di 2° ordine presi con segno alternato e divisi per $(\sqrt{a})^3$ della matrice

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & 2f_{1,2} & f_{2,2} \\ a_{1,1}:2 & 2(a_{1,2}:2) & a_{2,2}:2 \end{vmatrix}$$

e quindi, essendo

$$W_{1,1;\,1,1}=W_{2,2;\,2,2}=W_{1,1;\,1,2}=W_{1,2;\,2,2}=0$$
$$W_{1,1;\,2,2}=a,\quad W_{1,2;\,1,2}=-(a:2),$$

con

$$\phi_{1,1}=(a_{1,2}\,f_{1,1}-a_{1,1}\,f_{1,2}):\sqrt{a}$$
$$\phi_{1,2}=(a_{2,2}\,f_{1,1}-a_{1,1}\,f_{2,2}):(2\sqrt{a})$$
$$\phi_{2,2}=(a_{2,2}\,f_{1,2}-a_{1,2}\,f_{2,2}):\sqrt{a}.$$

Effettivamente il Tonolo ha trattato il solo caso delle superficie nell'S_4, ma sono le formule da lui trovate che mi hanno suggerito le estensioni che sono contenute ai n^i. 2 e 3 della parte 2ª.
