Sur le changement du système de référence pour un champ électromagnétique déterminé.

Par

S. Zaremba.

Professeur à l'Université de Cracovie.

1. La force électrique e et la force magnétique m dérivant d'un champ électromagnétique déterminé (C) doivent être regardées comme des éléments qui dépendent non seulement du champ (C) lui-même mais aussi du système de référence auquel on rapporte le champ électromagnétique considéré. Le passage d'un système de référence (S) à un autre système de référence (S'), fixe par rapport au premier, n'influe évidemment en rien sur les vecteurs e et m mais il n'en est plus le même [1]) au cas où le système (S') se déplace par rapport au système (S). On est donc conduit à envisager le problème suivant:

I. Problème. *Connaissant la force électrique e et la force magnétique m d'un champ électromagnétique (C) par rapport à un système de coordonnées (S), déterminer les éléments analogues e' et m' relatifs à un système de coordonnées (S') qui se déplace d'une façon donnée par rapport au système (S).*

Il est très aisé de voir que le problème précédent équivaut au suivant:

II. Problème. *Les forces électrique et magnétique dérivant d'un champ électromagnétique (C) étant données par rapport à un certain système de coordonnées (S), déterminer les forces dérivant du champ (C) et qui solliciteraient un pôle électrique et un pôle magnétique*

---

[1]) S. Zaremba. Sur un groupe de transformations qui se présente en électrodynamique. Voir p. 3 du T. V, année 1926 de ces Annales.

d'intensités égales à l'unité, ces pôles se déplaçant suivant une loi donnée par rapport au système de coordonnées (S).

D'autre part, les physiciens admettent implicitement l'hypothèse que voici:

III. Hypothèse. *Le mouvement de chacun des deux pôles considérés dans l'énoncé II n'influe sur la force dérivant du champ (C) et le sollicitant à un instant t que par la vitesse par rapport au système (S) du pôle considéré à l'époque t.*

Cette hypothèse étant admise, il résulte de l'équivalence des problèmes I et II que le cas général du problème I se ramène au cas particulier où le système (S') est animé par rapport au système (S) d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Or, dans le mémoire rappelé plus haut, j'ai étudié ce cas particulier en supposant que le champ électromagnétique (C) soit situé dans le vide et j'ai ramené la question à l'intégration d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Il y a donc intérêt à intégrer ce systéme d'équations aux dérivées partielles et à en discuter les intégrales. Tel sera précisément le sujet du mémoire actuel.

C'est dans le dernier numéro du mémoire, le No. 12 que l'on trouvera la discussion des intégrales précédentes ainsi que la conclusion générale qui s'en dégage.

2. Pour formuler les résultats que j'ai obtenus, dans le mémoire cité plus haut, j'admettrai que chacun des systèmes (S) et (S') soit un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, les axes de mêmes numéros dans les deux systèmes étant de même sens. Cela posé, désignons par e_i, m_i, e'_i, m'_i, et u_i $(i = 1, 2, 3)$ respectivement les projections orthogonales sur l'axe de numéro i du système (S) {ou, ce qui revient au même, du système (S')} des vecteurs e, m, e', m' et du vecteur u représentant la vitesse du système (S') par rapport au système (S) et posons

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = \sum_{i=1}^{3} e_i^2, \\ a_2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2, \\ a_3 = \sum_{i=1}^{3} e_i m_i. \end{array} \right.$$

$$n_i = e_{i+1} \cdot m_{i+2} - e_{i+2} \cdot m_{i+1}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

En se reportant aux formules (19) et (20) de la p. 9. du mémoire, cité à la p. 8 du travail actuel, on reconnaîtra que, selon la théorie que j'ai développée, on a:

$$\left\{\begin{aligned} e_i' &= p_1(u_{i+1}\, e_{i+2} - u_{i+2}\, e_{i+1}) + p_2(u_{i+1}\, m_{i+2} - u_{i+2}\, m_{i+1}) + \\ &\quad + p_3(u_{i+1}\, n_{i+2} - u_{i+2}\, n_{i+1}). \\ m_i' &= q_1(u_{i+1}\, e_{i+2} - u_{i+2}\, e_{i+1}) + q_2(u_{i+1}\, m_{i+2} - u_{i+2}\, m_{i+1}) + \\ &\quad + q_3(u_{i+1}\, n_{i+2} - u_{i+2}\, n_{i+1}) \\ &\qquad i = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\quad q_1,\ q_2,\ q_3 \tag{4}$$

sont des fonctions des seules variables α_1, α_2, α_3, définies par les formules (1), fonctions vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles (23), p. 10 du mémoire cité plus haut.

3. Le système précédent d'équations aux dérivées partielles se simplifie considérablement en prenant pour nouvelles fonctions inconnues les fonctions

$$v_1,\ v_2,\ w,\ M,\ p_3' \text{ et } q_3' \tag{5}$$

définies par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \alpha_3\, p_2 + \alpha_1\, p_1 \\ v_2 &= \alpha_3\, q_1 + \alpha_2\, q_2 \\ w &= \alpha_1\, q_1 + \alpha_2\, p_2 + \alpha_3(p_1 + q_2) \\ M &= \alpha_1\, q_1 - \alpha_2\, p_2 + \alpha_3(q_2 - p_1) \\ p_3' &= p_3\sqrt{\triangle}.\quad q_3' = q_3\sqrt{\triangle},\quad (\sqrt{\triangle} \geqq 0) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

où

$$\triangle = \alpha_1\, \alpha_2 - \alpha_3^2. \tag{7}$$

Après avoir défini les opérateurs h_1, h_2 et h_3 au moyen des formules

$$\left\{\begin{aligned} h_1 &= \quad 2p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + q_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \\ h_2 &= \quad 2q_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \\ h_3 &= -2p_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + 2q_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2) \frac{\partial}{\partial \alpha_3}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

on constate, au moyen d'un calcul facile quoique un peu laborieux, que le système d'équations aux dérivées partielles qui nous occupe équivaut à l'ensemble des quatre suivants:

$$h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = 0, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{9}$$

$$\left| \begin{aligned} & h_1(M) - 2\, q_1\, p_3' + 2 p_1\, q_3' = 0, \\ & h_2(M) - 2\, q_2\, p_3' + 2 p_2\, q_3' = 0, \\ & h_3(M) + 2(q_1\, p_2 - q_2\, p_1) = 0, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

$$\left| \begin{aligned} & h_1(p_3') - (p_1^2 + p_2\, q_1) = 0, \\ & h_2(p_3') - p_2(p_1 + q_2) = 0, \\ & h_3(p_3') = 0, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

$$\left| \begin{aligned} & h_1(q_3') - q_1(p_1 + q_2) = 0, \\ & h_2(q_3') - (q_2^2 + p_2\, q_1) = 0 \\ & h_3(q_3') = 0, \end{aligned} \right. \tag{12}$$

où, comme cela résulte des formules (6), on a:

$$\left| \begin{aligned} & 2\triangle p_1 = (M - w)\alpha_3 + 2 v_1\, \alpha_2, \\ & 2\triangle p_2 = -(M - w)\alpha_1 - 2 v_1\, \alpha_3, \\ & 2\triangle q_1 = -(M + w)\alpha_2 - 2 v_2\, \alpha_3, \\ & 2\triangle q_2 = -(M + w)\alpha_3 + 2 v_2\, \alpha_1. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

4. En abordant l'intégration de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12), il convient de porter tout d'abord son attention sur le déterminant D des expressions (8) des operateurs h_1, h_2, h_3, ces opérateurs étant considérés comme des fonctions des expressions

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_3};$$

on a:

$$D = \begin{vmatrix} 2p_3', & 0, & q_3' \\ 0, & 2q_3', & p_3' \\ -2p_2, & 2q_1, & p_1 - q_2 \end{vmatrix} = 4\{p_2\, q_3'^2 - q_1\, p_3'^2 + (p_1 - q_2)\, p_3'\, q_3'\}. \tag{14}$$

Cela posé, nous commencerons par l'étude du cas singulier où l'hypothèse suivante est vérifiée.

IV. Hypothèse. A l'intérieur d'un certain domaine (T), situé dans l'espace arithmétique $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on a identiquement

$$D = 0. \tag{15}$$

V. Théorème. Lorsque les systèmes d'équations (9), (10), (11) et (12) sont vérifiés, l'hypothèse IV équivaut à la suivante: dans tout le domaine (T) on a identiquement

(16) $$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$$

(17) $$p_1 q_3' - q_1 p_3' = 0$$

(18) $$p_2 q_3' - q_2 p_3' = 0.$$

En effet, il est très aisé de voir que les égalités (17) et (18) entraînent l'égalité (15) car l'expression (14) de D donne:

(19) $$D = 4 q_3'(p_2 q_3' - q_2 p_3') + 4 p_3'(p_1 q_3' - q_1 p_3');$$

il suffira donc de prouver que l'hypothèse IV entraine l'existence des égalités (16), (17) et (18) dans tout le domaine (T). Supposons donc que cette hypothèse soit vérifiée. Il résulte alors des systèmes d'équations (11) et (12) que tous les déterminants du 3-ième degré appartenant à la matrice

(20) $$\left|\begin{array}{ccccc} 2p_3', & 0, & q_3' \quad, & p_1^2 + p_2 q_1, & q_1(p_1 + q_2) \\ 0, & 2q_3', & p_3' \quad, & p_2(p_1 + q_2), & q_2^2 + p_2 q_1 \\ -2p_2, & 2q_1, & p_1 - q_2, & 0 \quad, & 0 \end{array}\right.$$

devront être nuls. Désignons pour un moment d'une façon générale par (i, j, k) le déterminant de degré 3 qui a pour première, deuxième et troisième colonnes respectivement les colonnes de numéros i, j et k le la matrice (20); nous aurons

(21) $$(i, j, k) = 0. \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Considérons en particulier parmi les égalités (21) les trois suivantes:

(22) $$(i, 4, 5) = 0 \qquad (i = 1, 2\ 3)$$

et envisageons les en un point arbitrairement choisi A du domaine (T); à moins d'avoir en A à la fois

(23) $$p_2 = 0, \quad q_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 - q_2 = 0,$$

ou conclura de (22) à l'existence au point A de l'égalité:

(24) $$\begin{vmatrix} p_1^2 + p_2 q_1\,, & q_1(p_1 + q_2) \\ p_2(p_1 + q_2), & q_2^2 + p_2 q_1 \end{vmatrix} = 0.$$

équivalente à l'égalité (16), car le déterminant (24) est identiquement égal à $(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2$.

A cause de la continuité des fonctions p_1, p_2, q_1 et q_2, on serait encore en droit d'affirmer l'existence en A de l'égalité (16) même si en ce point lui-même les égalités (23) étaient vérifiée mais si le point considéré A était un point-limite des points en chacun desquels l'une au moins des égalités (23) n'aurait pas lieu.

Donc, l'existence de l'égalité (16) en A ne serait douteuse qu'au cas où ce point serait situé à l'intérieur de quelque domaine (Ω) dans toute l'étendue duquel chacune des égalités (23) aurait lieu. Mais, dans ce cas, comme cela résulte de la 4-ième des formules (6), on aurait dans tout le domaine (D)

$$M = 0.$$

Donc, en vertu de la 3-ième des équations (10)„ l'égalité (16) aurait lieu dans tout le domaine (Ω) et en particulier en A. En définitive l'égalité (16) subsistera dans tout le domaine (T).

Utilisons maintenant parmi les égalités (21) les deux suivantes:

$$(2, 3, 4) = 0 \quad \text{et} \quad (2, 3, 5) = 0 \tag{25}$$

en ayant soin, pour les développer, de tenir compte de ce que l'égalité (16) entraîne les deux suivantes:

$$p_1^2 + p_2 q_1 = p_1(p_1 + q_2)$$

et

$$q_2^2 + p_2 q_1 = q_2(p_1 + q_2).$$

On trouvera aisément:

$$2(p_1 + q_2)\, p_1 (p_1 q_3' - q_1 p_3') = 0$$

$$2(p_1 + q_2)\, q_1 (p_1 q_3' - q_1 p_3') = 0.$$

Multiplions la première de ces égalités par q_3' et la deuxième par $-p_3'$. Après avoir ajouté membre à membre les équations obtenues, on trouvera:

$$2(p_1 + q_2)(p_1 q_3' - q_1 p_3')^2 = 0. \tag{26}$$

D'une façon analogue on conclura des égalités

$$(1, 3, 4) = 0 \quad \text{et} \quad (1, 3, 5) = 0$$

à la suivante:

$$2(p_1 + q_2)\,(p_2 q_3' - q_2 p_3')^2 = 0. \tag{27}$$

Il résulte des égalités (26) et (27) que les égalités (17) et (18) subsisteront en tout point du domaine (T) sauf peut être au cas où, au point considéré, on aurait,

$$p_1 + q_2 = 0. \tag{28}$$

Supposons donc qu'en quelque point A du domaine (T) l'égalité (28) ait lieu. En se reportant à la formule (14) et en tenant compte de l'égalité (16) ou s'assurera aisément que l'égalité (28) entraîne les deux suivantes:

$$q_1 D = -4(p_1 q_3' - q_1 p_3')^2$$

$$p_2 D = -4(p_2 q_3' - q_2 p_3')^2.$$

Donc, puisque, par hypothèse, nous avons l'égalité (15), nous avons aussi les deux égalités (17) et (18). En définitive notre théorème est complètement démontré

VI. Remarque. L'ensemble des égalités (17) et (18) équivaut à l'intérieur du domaine désigné par (T) dans l'énoncé IV (p. 11) aux deux suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} 2v_1 q_3' - (w + M) p_3' = 0, \\ (w - M) q_3' - 2v_2 p_3' = 0. \end{array}\right. \tag{29}$$

En effet, si l'on désigne pour un instant par F_1 et F_2 les 1-iers membres de (17) et (18) et si l'on se reporte aux formules (6), on reconnaît de suite que les premiers membres des égalités (29) représentent les expressions suivantes:

$$2\alpha_1 F_1 + 2\alpha_3 F_2 \quad \text{et} \quad 2\alpha_3 F_1 + 2\alpha_2 F_2,$$

circonstance qui prouve l'équivalence du système (29) et du système formé par l'ensemble des égalités (17) et (18) au moins dans la partie commune aux domaines (T) et au domaine

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \neq 0.$$

Cela posé, il suffit de tenir compte de la continuité des fonctions que l'on a à considérer pour reconnaître la complète exactitude de notre remarque.

VII. Remarque. L'hypothèse IV (p. 11) étant vérifiée, il résulte du théorème V que le système (10) se réduit au suivant

$$h_k(M) = 0; \qquad (k = 1, 2, 3)$$

par conséquent, lorsque l'hypothèse IV est vérifiée, le système d'équations aux dérivées partielles du problème se compose des équations

(30) $$h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = h_k(M) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

et des systèmes (11) et (12).

VIII. Théorème. Pour effectuer l'étude complète du cas où l'hypothèse IV (p. 11) est vérfiée, il suffit d'envisager successivement les cas où l'on aurait, dans tout le domaine (T), en dehors de l'égalité (15), l'un des systèmes de relations suivants:

(31) $$p_3' \neq 0, \quad q_3' \neq 0;$$

(32) $$p_3' \neq 0, \quad q_3' = 0;$$

(33) $$p_3' = 0, \quad q_3' \neq 0;$$

(34) $$p_3' = q_3' = 0.$$

Le théorème précédent n'est pas tout à fait évident car il pourrait arriver qu'en un point A, situé à l'intérieur du domaine (T) l'un des systèmes de relations (32), (33) ou (34) soit vérifié, sans l'être à l'intérieur d'un domaine, à l'intérieur duquel se trouverait le point A. Mais, si cette circonstance se présentait, le point A serait un point-frontière d'un domaine, (T') à l'intérieur duquel l'un des systèmes de relations (31), (32), (33) ou (34) serait vérifié, donc, connaissant les fonctions (5) à l'intérieur du domaine (T'), on les connaîtrait aussi, à cause de leur continuité, au point A, à moins que ce point ne fasse pas partie du domaine d'existence des fonctions considérées. Notre théorème est donc démontré.

IX. Théorème. L'hypothèse IV (p. 11) étant vérifiée, lorsque l'une au moins des fonctions p_3' et q_3' reste différente de zéro dans le domaine (D), en d'autre termes, lorsque l'un des trois premiers cas énuméres dans la théorème VIII est réalisé, le système d'équations aux dérivées partielles du problème (VII, p. 14) se réduit à celui qui forment les équations

(35) $$h_k(v_1) = h_k(v_2) = h_k(w) = h_k(M) = 0, \qquad (k = 1, 2)$$

conjointement avec les deux systèmes suivants:

(36) $$\begin{cases} h_1(p_3') - (p_1^2 + p_2 q_1) = 0, \\ h_2(p_3') - p_2(p_1 + q_2) = 0, \end{cases}$$

et

$$(37)\qquad \begin{cases} h_1(q_3') - p_1(p_1 + q_2) = 0, \\ h_2(q_3') - (q_2^2 + p_2\, q_1) = 0. \end{cases}$$

En effet, dans le cas actuel on a {V, p. 12} les égalités (16), (17) et (18), égalités qui expriment, comme on le reconnaîtra sans peine, que tous les déterminants du 3-ième ordre appartenant à la matrice (20) sont nuls. D'autre part, puisque, par hypothèse, l'une au moins des fonctions p_3' et q_3' est différente de zéro, la matrice

$$\begin{matrix} 2p_3', & 0, & q_3', \\ 0, & 2q_3', & p_3', \end{matrix}$$

est d'ordre 2. Par conséquent dans chacun des quatre systèmes de trois équations dont se compose le système (30) ainsi que dans chacun des systèmes (11) et (12) la 3-ième équation est une conséquence des deux premières.

Il résulte de là que l'ensemble des systèmes (35), (36) et (37) se déduit du système qui, selon la remarque VII, contient *toutes* les équations aux dérivées partielles du problème, par la suppression d'équations qui sont des conséquences de celles que l'on conserve. Notre théorème est donc établi.

5. Commençons par l'étude du premier des quatre cas énumérés dans le théorème VIII (p. 15).

Il résulte de l'égalité (16) {V, p. 12} que l'on a:

$$(37,_1)\qquad \begin{aligned} p_1^2 + p_2\, q_1 &= p_1(p_1 + q_2) \\ q_2^2 + p_2\, q_1 &= q_2(p_1 + q_1). \end{aligned}$$

Cette remarque faite, il résulte des égalités (17) et (18) que les systèmes (36) et (37) entraînent les équations suivantes:

$$(38)\qquad q_3'\, h_k(p_3') - p_3'\, h_k(q_3') = 0. \qquad (k = 1,\ 2)$$

J'observe maintenent que rien n'empêche de poser

$$(39)\qquad \lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$$

puisque, par hypothèse, on a

$$(40)\qquad p_3'\, q_3' \neq 0.$$

Transformons maintenant les équations du problème en prenant la fonction λ pour inconnue auxiliaire et, à cet effet, posons

$$(41)\qquad \begin{cases} \nu_1 = 2\dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} + \lambda \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ \nu_2 = 2\lambda \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_3}. \end{cases}$$

Les équations (38) seront alors équivalentes aux suivantes

$$(42)\qquad \nu_1(\lambda) = 0, \quad \nu_2(\lambda) = 0,$$

lesquelles, sous forme développée, s'écrivent ainsi:

$$(43)\qquad 2\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_3} = 0, \quad 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_3} = 0.$$

D'autre part, après avoir posé,

$$(44)\qquad f = p_3'^2$$

on pourra, (en égard à $(37,_1)$) donner aux équations (36) la forme suivante:

$$(45)\qquad \begin{cases} \nu_1(f) - 2p_1(p_1 + q_2) = 0, \\ \nu_2(f) - 2p_2(p_1 + q_2) = 0. \end{cases}$$

L'inégalité (40) étant vérifié par hypothèse, l'ensemble des équations (36) et (37) équivaut à l'ensemble des équations (36) et (38), équivalent lui-même à l'ensemble des équations (42) et (45). Mais l'inégalité (40) entraîne encore cette conséquence que le système (35) équivaut au suivant:

$$(46)\qquad \nu_k(v_1) = \nu_k(v_2) = \nu_k(w) = \nu_k(M) = 0. \qquad (k = 1, 2).$$

Donc {IX, p. 15}, nous avons le téorème suivant:

X. Théorème. Le système d'équations aux dérivées partielles du problème peut être consideré comme se composant des systèmes (42), (45) et (46).

XI. Théorème. L'hypothèse IV (p. 11) et l'inégalité (40) étant vérifiés, l'ensemble des équations du problème peut être regardé comme se composant des systèmes d'équations aux dérivées partielles (42) et (45), du système

$$(47)\qquad \nu_k(v_1) = \nu_k(v_2) = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

ainsi que des équations (13), de l'équation (39) et des deux équations suivantes

$$(48)\qquad \begin{cases} w + M = 2v_1\lambda, \\ \lambda(w - M) = 2v_2. \end{cases}$$

En effet les équations (47) {X} seront certainement vérifiées, en égard à (39), il en sera de même {VI, p. 14} des équations (48), enfin les équations (13) et (39) seront verifiées en vertu de la définition des fonctions v_1, v_2, w, M et λ.

Donc, il ne reste à montrer que l'ensemble formé par les systèmes (42), (45), (47), (13) et (48) est un système *complet* d'équations du problème. A cet effet, supposons que toutes les équations de ce système soient vérifiées. Il résulte alors des équations (42) et (47) que les valeurs de w et M tirées de (48) satisferont aux équations:

$$\nu_k(w) = \nu_k(M) = 0. \qquad (k = 1, 2)$$

Par conséquent toutes les équations aux dérivées partielles du problème {X, p. 17} seront vérifiées. Mais, à cause de (39) et (40) les équations (48) entraînent les équations (29), équivalentes {VI, p. 14} aux équations (17) et (18) lesquelles, en vertu de la formule (19), entraînent l'égalité

$$D = 0.$$

En définitive, notre théorème est complètement démontré.

Après avoir porté les valeurs de $M - w$ et $M + w$ tirées des équations (48) dans les formules (13) (p. 11), on trouvera:

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \cdot p_1 &= -\frac{v_2}{\lambda}\,\alpha_3 + v_1\,\alpha_2, \\ \Delta \cdot p_2 &= \frac{v_2}{\lambda}\,\alpha_1 - v_1\,\alpha_3, \\ \Delta \cdot q_1 &= v_1\,\lambda\,\alpha_2 - v_2\,\alpha_3, \\ \Delta \cdot q_2 &= -v_1\,\lambda\,\alpha_3 + v_2\,\alpha_1. \end{aligned} \right.$$

Les formules précédentes donnent:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \cdot \lambda^2 p_1(p_1 + q_2) &= (\lambda v_1 \alpha_2 - v_2 \alpha_3)\{v_1 \lambda(\alpha_2 - \lambda \alpha_3) + \\ &+ v_2(\lambda \alpha_1 - \alpha_3)\} = \lambda^2 v_1^2 \alpha_2(\alpha_2 - \lambda \alpha_3) + \\ &+ \lambda v_1 v_2 \{\lambda \Delta - 2\alpha_3(\alpha_2 - \lambda \alpha_3)\} + v_2^2\{\alpha_1(\alpha_2 - \lambda \alpha_3) - \Delta\} = \\ &+ \{\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3\}(\alpha_2 - \lambda \alpha_3) - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta, \end{aligned}$$

d'où

$$p_1(p_1 + q_2) = \frac{\{\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3\}(\alpha_2 - \lambda \alpha_3) - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta}{\Delta^2 \cdot \lambda^2}.$$

En portant la valeur précédente de l'expression $p_1(p_1 + q_2)$

et la valeur de l'expression $p_2(p_1 + q_2)$, obtenue d'une façon analogue, dans les équations (45), on trouve

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} & v_1(f) - 2\frac{(\lambda^2 v_1^2 v_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)(\alpha_2 - \lambda\alpha_3) - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta}{\Delta . \lambda^2} = 0 \\ & v_2(f) - 2\frac{(\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)(\alpha_3 - \lambda\alpha_1) - \lambda^3 v_1^2 \Delta + \lambda v_1 v_2 \Delta}{\Delta . \lambda^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

J'observe maintenant que l'ensemble des intégrales communes des équations (42) ou ce qui revient au même, des équations (43) se compose de celles que donne l'équation

$$(51)\qquad \lambda = C$$

où C représente une constante arbitraire et de celles que fournit l'équation

$$(52)\qquad \alpha_1 \lambda^2 - 2\alpha_3 \lambda + \alpha_2 + \theta(\lambda) = 0$$

où $\theta(\lambda)$ représente une fonction de λ continue avec sa dérivée première mais à cela près quelconque.

1-ier cas. La fonction λ est donné par la formule (51). Pour que cette valeur de λ soit admissible il faut, comme cela résulte de la condition (40) et de la formule (39) que l'on ait

$$(53)\qquad C \neq 0.$$

Posons pour abréger

$$(54)\qquad \zeta = \alpha_1 C^2 - 2\alpha_3 C + \alpha_2$$

Les équations (47) donnent:

$$(55)\qquad v_1 = \varphi(\zeta), \quad v_2 = \psi(\zeta)$$

où $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ sont des fonctions de ζ définies dans un même intervalle, continues avec leurs dérivées premières, mais à cela près arbitraires.

Il ne nous reste plus qu'à déterminer l'expression générale d'une intégrale commune des équations (50). A cet effet, prenons pour nouvelles variables la variable ζ définie par la formule (54) ainsi que les variables

$$(56)\qquad \xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2.$$

A cause le l'inégalité (53), il sera toujours permis d'effectuer le changement de variables précédent. Nous aurons

$$\frac{\partial\alpha_3}{\partial\xi_1}=\frac{C}{2}, \quad \frac{\partial\alpha_3}{\partial\xi_2}=\frac{1}{2C}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}=\xi_2-C\alpha_3, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}=\xi_1-\frac{\alpha_3}{C}$$

$$\nu_1(f)=2\frac{\partial f}{\partial\xi_1}, \quad \nu_2(f)=2C\frac{\partial f}{\partial\xi_2}$$

Cela posé, on s'assurera aisément que les équations (50) donnent une expression de f ou, ce qui revient au même {voir la formule, (44)}, une expression de $p_3'^2$ qui, après le retour aux variables α_1, α_2, α_3 peut s'écrire ainsi:

$$p_3'^2=\frac{2Cv_1v_2\alpha_3-C^2v_1^2\alpha_2-v_2^2\alpha_1}{C^2\Delta}+F(\zeta) \tag{57}$$

où $F(\zeta)$ représente une fonction de ζ continue avec sa dérivée première mais à cela prés arbitraire, le symbole ζ étant défini par la formule (54).

En définitive, dans le cas considéré, le problème est complètement resolu.

2-ième cas. La fonction λ est donnée par une équation de la forme (52). Dans ce cas la fonction λ ne se réduira pas à une constante, les équations (47) donneront

$$v_1=\varphi(\lambda), \quad v_2=\psi(\lambda) \tag{58}$$

où $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ représente des fonctions de λ, continues et ayant chacune une dérivée première continue, mais à cela près quelconques, enfin, il sera permis de transformer les équations (50) en prenant pour nouvelles variables indépendantes la fonction λ et les variables ξ_1 et ξ_2 définies par les équations (56). En tenant compte des équations (42), ou trouvera sans peine:

$$\nu_1(f)=2\frac{\partial f}{\partial\xi_1}, \quad \nu_2(f)=2\lambda\frac{\partial f}{\partial\xi_2};$$

d'autre part, puisque l'équation (52) donne

$$\frac{\partial\alpha_3}{\partial\xi_1}=\frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\partial\alpha_3}{\partial\xi_2}=\frac{1}{2\lambda},$$

ou aura

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_1}=\xi_2-\alpha_3\lambda, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_2}=\xi_1-\frac{\alpha_3}{\lambda}=\frac{\lambda\xi_1-\alpha_3}{\lambda},$$

donc, en définitive, les équations (50) prendront la forme suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{(\lambda^2 v_1^2 \xi_2 + v_2^2 \xi_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)\dfrac{\partial \Delta}{\partial \xi_1} - v_2^2 \Delta + \lambda^2 v_1 v_2 \Delta}{\lambda^2 . \Delta},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \frac{(\lambda^2 v_1^2 \xi_2 + v_2^2 \xi_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3)\dfrac{\partial \Delta}{\partial \xi_2} - \lambda^2 v_1^2 \Delta + v_1 v_2 \Delta}{\lambda^2 . \Delta}.$$

Ces équations fournissent une expression de f, c'est-à-dire de $p_3'^2$ {voir la formule (44)}, qui, après le retour aux variables initiales α_1, α_2, α_3, peut s'écrire comme il suit:

(59) $$p_3'^2 = -\frac{\lambda^2 v_1^2 \alpha_2 + v_2^2 \alpha_1 - 2\lambda v_1 v_2 \alpha_3}{\lambda^2 \Delta} + F(\lambda)$$

où $F(\lambda)$ est une fonction arbitraire de λ, assujettie seulement à être continue avec sa dérivée première.

Il est évident que les formules (58) et (59), conjointement avec les formules (49), (44) et (39) et l'équation (52) font connaître la solution générale du problème.

6. Passons à l'étude du 2-ième et du 3-ième des cas énumérés dans le théorème VIII (p. 15).

Soit d'abord

(60) $$p_3' \neq 0, \quad q_3' = 0.$$

En vertu de ces relations, les équations (17) et (18) {V, p. 12} donnent

(61) $$q_1 = 0, \quad p_2 = 0$$

et, par conséquent {VI, p. 14}, on a aussi

(61) $$M + w = 0, \quad v_2 = 0.$$

Cela posé, en se reportant au théorème IX (p. 15), on constate que les équations aux dérivées partielles du problème se réduisent au système suivant:

(63) $$h_k(v_1) = h_k(M - w) = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

(64) $$\begin{cases} h_1(p_3') = p_1^2 \\ h_2(p_3') = p_2 p_1 \end{cases}$$

car, en vertu des solutions (60), (61) et (62,) l'ensemble des équations (63) et (64) entraîne toutes les équations énumérées dans le théorème IX (p. 15). D'autre part, il résulte des relations (60) et des formules (8) (p. 10) que les symboles de dérivation h_1 et h_2 prennent la forme suivante

$$h_1 = 2p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad h_2 = p_3' \frac{\partial}{\partial \alpha_3}.$$

Cela étant, les équations (63) donnent

$$v_2 = \varphi(\alpha_2), \quad M - w = \psi(\alpha_2) \tag{65}$$

où chacune des fonctions $\varphi(\alpha_2)$ et $\psi(\alpha_2)$ est une fonction arbitraire de α_2 à cela près qu'elle doit être une fonction continue avec sa dérivée première. Quant aux équations (64), elles sont équivalentes aux suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = p_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = 2p_1 p_2, \tag{66}$$

où l'on a posé (comme précédemment)

$$f = p_3'^2. \tag{67}$$

Les équations (65) et (13) (p. 11) donnent

$$\begin{cases} 2\Delta p_1 = \quad \psi(\alpha_2)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_2, \\ 2\Delta p_2 = -\psi(\alpha_2)\,\alpha_1 - 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_3. \end{cases} \tag{68}$$

En s'appuyant sur ces formules, on vérifient aisément que l'expression générale de l'intégrale commune des équations (66) est la suivante

$$f = -\frac{\{\psi(\alpha_2)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\,\alpha_2\}^2}{4\alpha_2 \Delta} + F(\alpha_2) \tag{69}$$

où $F(\alpha_2)$ est une fonction arbitraire de α_2, assujettie seulement à être continue avec sa dérivée première.

Il est aisé de voir que les (68), (67) et (69), avec les égalités (61) et l'égalité qui constituent la 2-ième du relations (60) font connaître la solution générale du problème dans le cas considéré. En effet, toutes les équations aux dérivées partielles du problème seront visiblement vérifiées; d'autre part puisque les égalités

$$q_1 = q_2 = q_3' = 0$$

entraînent les égalités (17) et (18) (p. 12), on aura aussi {formule (19), p. 12}

$$D = 0,$$

de sorte que toutes les conditions du problème seront remplies.

Si au lieu de partir de l'hypothése (60), nous étions parti de la suivante

(70) $$p_3' = 0, \quad q_3' \neq 0,$$

nous aurions trouvé pour nos inconnues les expressions suivantes:

(71) $$p_1 = p_2 = p_3' = 0$$

(72) $$\left|\begin{array}{l} 2\Delta q_1 = -\psi(\alpha_1)\,\alpha_2 - 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_3, \\ 2\Delta q_2 = +\psi(\alpha_1)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_2, \\ q_3'^2 = -\dfrac{\{\psi(\alpha_1)\,\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\,\alpha_2\}^2}{4\alpha_1\Delta} + F(\alpha_1), \end{array}\right.$$

où $\varphi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_1)$ et $F(\alpha_1)$, représentent des fonctions arbitraires de α_1, assujetties seulement à être continues avec leurs dérivées premières.

7. Pour épuiser l'étude de tous les cas compatibles avec l'hypothèse IV (p. 11) il nous reste {VIII, p. 15} à étudier notre problème dans le cas où, dans le domaine considéré, on aurait

(73) $$p_3' = q_3' = 0.$$

Nous aurons {V, p. 12}

(74) $$p_1\, q_2 - p_2\, q_1 = 0.$$

Il résulte des relations (73) et (74) que le système formé par l'ensemble des systèmes (9), (10), (11) et (12) équivaut, dans le cas actuel, au système formé par l'ensemble des deux systèmes d'équations suivant:

(75) $$h_3(v_1) = h_3(v_2) = h_3(w) = h_3(M) = 0$$

et

$$p_1^2 + p_2\, q_1 = 0 \quad p_2(p_1 + q_2) = 0,$$

$$q_1(p_1 + q_2) = 0, \quad q_2^2 + p_2\, q_1 = 0.$$

Mais, en vertu de (74), ce dernier système équivaut au suivant:

$$p_1(p_1 + q_2) = 0, \quad p_2(p_1 + q_2) = 0,$$

$$q_1(p_1 + q_2) = 0, \quad q_2(p_1 + q_2) = 0,$$

et, comme en ajoutant membre à membre la 1-ière et la 4-ième de ces égalités on trouve

$$(p_1 + q_2)^2 = 0,$$

on arrive aisément à la conclusion suivante: dans le cas considéré le problème se réduit à la détermination des inconnues

$$p_1, \; p_2, \; q_1 \text{ et } q_2 \tag{76}$$

par la condition qu'elles satisfassent à l'équation (74), à l'équation

$$p_1 + q_2 = 0 \tag{77}$$

et aux équations (75) où v_1, v_2, w et M ont les valeurs (6) (p. 10).

Actuellement il y a avantage à remplacer dans les équations (75), les inconnues auxiliaires v_1, v_2, w et M par leurs expressions (6) (p. 10); il vient:

$$h_3(p_1) = h_3(p_2) = h_3(q_1) = h_3(q_2) = 0. \tag{78}$$

En définitive, les équations du problème se composent des équations (74), (77) et (78).

A cause de la continuité des fonctions (76), il suffira d'étudier le cas où, dans tout le domaine considéré on a

$$p_1 = 0 \tag{79}$$

et celui où, dans tout ce domaine on aurait

$$p_1 \neq 0. \tag{80}$$

Dans le premier de ces deux cas les équations (77) et (74) donnent

$$q_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_2 q_1 = 0$$

et, dans le 2-ième, il résulte des équations (77) et (74) que l'on aura

$$p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_3 \neq 0.$$

Par conséquent, pour déterminer, dans le cas considéré, toutes les solutions du problème, différentes de la solution évidente

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0, \tag{81}$$

il n'y a qu'à envisager successivement les cas où, dans tout le domaine considéré, ou aurait

$$p_1 = q_2 = q_1 = 0, \quad p_2 \neq 0 \tag{82}$$

$$(83)\qquad p_1 = q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 \neq 0$$

$$(84)\qquad p_1 p_2 q_1 q_2 \neq 0.$$

Dans le premier le ces cas toutes les équations du problème serons satisfaites identiquement sauf l'équation

$$h_3(p_2) = 0,$$

laquelle {dernière des formules (8) p. 10} se réduit à

$$-2p_2 \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$

d'où

(85) $p_2 =$ fonction arbitraire de α_2 et α_3.

Dans le 2-ième ces on trouve d'une façon analogue

$q_1 =$ fonction arbitraire de α_1 et α_3.

Il ne reste donc plus à étudier que le cas où l'inégalité (84) est vérifiée.

Il résulte de la dernière des formules (8) (p. 10) que les équations (78) s'obtiennent en remplaçant, dans l'équation

$$(86)\qquad -2p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + 2q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + (p_1 - q_2) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0$$

la fonction ψ successivement par p_1, p_2, q_1 et q_2. Or, il résulte de (77) que l'équation (86) équivaut à l'équation

$$-p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0,$$

laquelle, comme cela résulte de (84), équivaut à celle-ci:

$$-p_2^2 + p_2 q_1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Mais il résulte des équations (74) et (77) que l'on a

$$p_2 q_1 = p_1 q_2 = -p_1^2.$$

Par conséquent l'équation (86) équivaut à la suivante:

$$-p_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} - p_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + p_1 p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Donc le système (78) équivaut au suivant:

$$(87)\quad \begin{cases} -p_2^2\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} - p_1^2\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_3} = 0 \\ -p_2^2\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} - p_1^2\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\dfrac{\partial p_2}{\partial \alpha_3} = 0 \\ -p_2^2\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} - p_1^2\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha_3} = 0 \\ -p_2^2\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_1} - p_1^2\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha_3} = 0 \end{cases}$$

Mais les équations (77) et (74) donnent

$$(88)\quad \begin{cases} q_2 = -p_1, \\ q_1 = \dfrac{p_1}{p_2}\,q_2 = -\dfrac{p_1^2}{p_2} = -\dfrac{p_1}{\lambda} \end{cases}$$

expressions de q_2 et q_1 qui vérifieront les deux dernières équations du système (87) pourvu que les deux premières soient satisfaites. Il résulte de là que le problème se réduit à l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$-p_2^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} - p_1^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3} = 0,$$

$$-p_2^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} - p_1^2\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + p_1\,p_2\,\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Pour intégrer ce système posons

$$(89)\quad p_2 = \lambda p_1$$

en désignant par λ une inconnue auxiliaire. Il est aisé de voir que la question se ramènera a l'intégration du système suivant:

$$(90)\quad \begin{cases} -\lambda^2\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2} + \lambda\,\dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha_3} = 0, \\ -\lambda^2\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + \lambda\,\dfrac{\partial p_1}{\partial \alpha_3} = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale de la première de ces équations est donnée par l'équation

$$(91)\quad F(\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda) = 0$$

où F est la caractéristique d'une fonction arbitraire des variables

$$\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3 \text{ et } \lambda,$$

assujettie seulement à des conditions de régularité évidentes et telle que l'équation (91) admette par rapport à λ une solution ne se réduisant pas à zéro. La fonction λ étant déterminée, l'expression générale de l'intégrale de la 2-ième des équations (90) sera la suivante:

$$(92) \qquad p_1 = \Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_3, \quad \lambda\alpha_2 + \alpha_3, \lambda)\ ^{1)},$$

où le second membre représente une fonction arbitraire des fonctions

$$(93) \qquad \alpha_1 + \lambda\alpha_3, \quad \lambda\alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \lambda.$$

En définitive, nous avons déterminé toutes les solutions du problème dans le cas que nous avions à étudier dans le numéro actuel.

8. Il ne nous reste plus qu'à intégrer le système formé par l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) dans l'hypothèse où, dans le domaine que l'on considère le déterminant D, défini par la formule (14) (p. 11) satisfait à l'inégalité

$$(94) \qquad D \neq 0;$$

c'est le problème que nous nous proposons de résoudre dans le présent numéro.

Il serait aisé de vérifier que, dans le cas actuel, le système d'équations qu'il s'agit d'intégrer peut être mis sous forme d'un système de six équations aux différentielles totales complètement intégrable mais la méthode que nous allons employer rend superflue la vérification directe, un peu laborieuse, du fait que nous venons de signaler.

XII. Remarque. L'inégalité (94) étant vérifiée dans le domaine que l'on considère, chacune des fonctions v_1, v_2 et w se reduit à une constante.

---

[1]) Si, après avoir disposé de la caractéristique F dans l'équation (91) et après avoir choisi une certaine solution en λ de cette équation, on forme toutes les combinaisons deux à deux des fonctions (93), l'une au moins de ces combinaisons se composera de deux fonctions indépendantes et la fonction p_1 pourra être mise sous forme d'une fonction de ces deux fonctions; toutefois, si l'on considère une combinaison *determinée* de deux des expressions (93), ces expressions pourrons représenter selon la façon dont on disposera des éléments arbitraires dont dépend la fonction λ, ou bien deux fonctions indépendantes des variables α_1, α_2, α_3 ou bien de deux fonctions dont l'une sera une fonction de l'autre; cela étant, pour avoir une expression tout à fait générale de p_1 il a fallu le représenter comme fonction des trois fonctions (93).

C'est en effet ce qui résulte des équations (9) (p. 11) et de la définition du déterminant D.

XIII. Théorème. Lorsqu'à l'intérieur d'un certain domaine (T) l'inégalité (94) est vérifiée, aucune des fonctions p'_3 et q'_3 ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré.

En effet, supposons qu'à l'intérieur d'un certain domaine (T) l'inégalité (94) soit vérifiée et que, contrairement à notre théorème, on ait, dans tout l'intérieur du domaine (T), par exemple

$$p'_3 = 0. \tag{95}$$

Les deux prémières équations du système (11) (p. 11) nous donneront

$$p_1^2 + p_2\, q_1 = 0, \quad p_2(p_1 + q_2) = 0. \tag{96}$$

D'autre part, il résulte de (14) (p. 11) et (95) que l'on aura:

$$D = 4p_2\, q_3'^2,$$

par conséquent, en vertu de (94), on aura

$$p_2 \neq 0 \tag{97}$$

et, par suite, la 2-ième des égalités (96) nous donnera

$$p_1 + q_2 = 0,$$

égalité qui, en vertu des 1-ière et 4-ième des formules (13) (p. 11) nous donnera:

$$-\,2w\alpha_3 + 2v_1\alpha_2 + 2v_2\alpha_1 = 0,$$

pour tout l'intérieur du domaine (T). Or {XII, p. 27} chacune des fonctions w, v_1 et v_2 se réduit à une constante. On a donc nécessairement

$$w = v_1 = v_2 = 0$$

et les formules (13) se réduiront aux suivantes

$$2\Delta p_1 = M\alpha_3,\ 2\Delta p_2 = -M\alpha_1,\ 2\Delta q_1 = M\alpha_2,\ 2\Delta q_2 = -M\alpha_3. \tag{98}$$

En portant les valeurs de p_1, p_2 et q_1, tirées de ces formules dans la première des égalités (96) on trouve

$$M^2(\alpha_3^2 - \alpha_1\,\alpha_2) = 0,$$

d'où

$$M = 0,$$

ce qui, au moyen de la 2-ième des formules (98), donne

$$p_2 = 0,$$

égalité incompatible avec l'égalité (97).

Si en lieu de supposer l'existence de (95) on avait supposé celle de $q_3' = 0$, on aurait rencontré une contradiction analogue à celle que nous venons de mettre en évidence. Notre théorème est donc démontré.

XIV. Remarque. Il résulte du théorème précédent et de la continuité des fonctions p_3' et q_3' que, sans nuire à la généralité, on peut, comme nous le ferons dorènavant, supposer que, dans tout l'intérieur du domaine considéré on a

(99) $$p_3' \cdot q_3' \neq 0.$$

Introduisons maintenant l'inconnue auxiliaire λ, définie par la formule

(100) $$\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}.$$

Il résulte de (99) que la fonction λ sera une fonction continue, vérifiant, à l'intérieur du domaine que l'on considère, l'inégalité

(101) $$\lambda \neq 0.$$

Pour abréger l'écriture, posons

(102) $$M_i = \frac{\partial M}{\partial \alpha_i}. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Les deux premières équations du système (10) (p. 11) pourront alors s'écrire ainsi:

(103) $$\left\{\begin{aligned} 2(M_1 - q_1) + \lambda\,(M_3 + 2p_1) &= 0 \\ M_3 - 2q_2 + 2\lambda\,(M_2 + p_2) &= 0, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 2(M_1 - q_1), & M_3 + 2p_1 \\ M_3 - 2q_2, & 2(M_2 + p_2) \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le 1-ièr membre de cette égalité, on reconnaît que, à cause de la 3-ième des équations (10) (p. 11), elle équivaut à la suivante

(104) $$4M_1 M_2 - M_3^2 = 0,$$

laquelle, par conséquent, sera vérifiée dans tout le domaine considéré.

XV. Théorème. Lorsque les inégalités (94) et (99) sont vérifiées à l'intérieur d'un certain domaine (T), aucune des fonctions

$$(105)\qquad \begin{cases} M_1 - q_1, & M_3 + 2p_1 \\ M_3 - 2q_2, & M_2 + p_2 \end{cases}$$

ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré.

En effet, supposons que, contraîrement au théorème qu'il s'agit d'établir, l'une des fonctions

$$(106)\qquad M_1 - q_1 \quad \text{ou} \quad M_3 + 2p_1$$

soit identiquement nulle à l'intérieur du domaine (T). En vertu de (101) et (103) le seconde des fonctions considérées serait aussi identiquement nulle; nous aurions donc

$$(107)\qquad M_1 - q_1 = 0, \quad M_3 + 2p_1 = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_3} + 2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} = 0$$

dans tout le domaine considéré. Après avoir porté les valeurs (13) (p. 11) de p_1 et q_1 dans l'égalité précédente et après avoir substitué, dans l'équation obtenue, à M_1 et M_3, les expressions que l'on obtient en remplaçant, dans les valeurs de M_1 et M_3 tirées de (107), p_1 et q_1 par les valeurs que fournissent les formules (13) (p. 11), on trouvera finalement que l'on doit avoir identiquement

$$6w\alpha_2\alpha_3 - 6v_1\alpha_2^2 - 2v_2(2\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2) = 0.$$

Donc, puisque w, v_1 et v_2 sont des constantes {XII, p. 27} on a

$$w = v_1 = v_2 = 0$$

et les formules (13) (p. 11) se réduisent aux formules (98). Celles-ci donnent en particulier

$$p_1 + q_2 = 0.$$

Par conséquent, il résulte de la 2-ième des équations (107) que

$$M_3 - 2q_2 = 0,$$

égalité qui, à cause de (103) et (101), entraîne le suivante:

$$(108)\qquad M_2 + p_2 = 0.$$

Après avoir porté les valeurs de M_1, M_3 et M_2 tirées des équations (107) et (108) dans l'égalité (104), on trouvera

$$p_1^2 + p_2 q_1 = 0,$$

égalité qui, en égard aux formules (98), entraîne la suivante:

$$M^2(\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0,$$

d'où

$$M = 0.$$

Donc, comme cela résulte des formules (98), on aurait

$$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$$

égalités qui, comme cela résulte de la formule (14), sont incompatibles avec l'inégalité (94). Il est donc prouvé qu'aucune des fonctions formant la 1-ière ligne du tableau (105) ne peut se réduire à zéro dans tout l'intérieur du domaine considéré. On démontrerait d'une façon analogue qu'aucune des fonctions formant la 2-ième ligne du tableau (105) ne peut se réduire à zéro dans le domaine considéré. Notre théorème doit donc être regardé comme démontré.

XVI. Remarque. Il résulte du théorème précédent qu'il n'existe aucun domaine à l'intérieur duquel on aurait à la fois l'inégalité (94) une égalité exprimant que l'une des fonctions (105) se réduit à zéro. Donc, à cause de la continuité des fonctions que nous avons à considérer, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer comme nous allons le faire dorénavant, que, dans le domaine considéré, aucune des fonctions (105) ne s'annule.

9. Actuellement nous nous proposons de tirer des équations (11) et (12) les expressions de p_3' et de q_3' en fonction de M: on verra que l'on peut y arriver sans connaître la forme de la fonction M.

Le système (11) donne:

$$D \frac{\partial p_3'}{\partial \alpha_3} = 4(p_1^2 + p_2 q_1) p_2 q_3' - 4p_2(p_1 + q_2) q_1 p_3' \tag{109}$$

où D a la valeur (14). En portant dans l'expression de D la valeur de q_3' tirée de (100), on trouve:

$$D = 4p_3'^2\{\lambda p_1 - q_1 + \lambda(\lambda p_2 - q_2)\}. \tag{110}$$

En tenant compte de cette expression de D et en substituant à q'_3 dans le second membre de (109) sa valeur tirée de (100), on reconnaît que, en égard à (99), l'équation (100) équivaut à la suivante:

$$(111) \qquad \{\lambda p_1 - q_1 + \lambda(\lambda p_2 - q_2)\}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = \\ = 2p_2\{(\lambda p_1 - q_1)p_1 + (\lambda p_2 - q_2)q_1\}$$

D'autre part, les équations (103) équivalent aux suivantes:

$$(112) \qquad \begin{cases} 2(\lambda p_1 - q_1) = -(2M_1 + \lambda M_3), \\ 2(\lambda p_2 - q_2) = -(2\lambda M_2 + M_3). \end{cases}$$

En portant les valeurs de $\lambda p_1 - q_1$ et de $\lambda p_2 - q_2$ tirées de ces équations dans (111), on obtient une équation équivalente à la suivante

$$(113) \qquad 2\{M_1 + \lambda M_3 + \lambda^2 M_2\}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = \\ = 2p_2\{(2M_1 + \lambda M_3)p_1 + (2\lambda M_2 + M_3)q_1\}$$

où l'on a posé

$$(114) \qquad f = p_3'^2.$$

XVII. Lemme. L'une au moins des dérivées M_1 et M_2 de la fonction M est différente de zéro.

En effet, il résulte de (104) qu'au cas où chacune des fonctions M_1 et M_2 ne serait pas différente de zéro, la fonction M_3 serait nulle. Si donc chacune des fonctions M_1, M_2 était égale à zéro, on aurait

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

et il résulterait des équations (112) et (110) que, contrairement à l'hypothèse, on aurait

$$D = 0.$$

Notre lemme est donc démontré.

Cela posé, nous allons transformer l'équation (113) en envisageant successivement l'hypothèse où l'on aurait

$$(115) \qquad M_1 \neq 0$$

et celle où

$$(116) \qquad M_2 \neq 0.$$

Multiplions l'équation (113) par $2M_1$ et éliminons de l'équation obtenue la quantité M_2 au moyen de (104); il viendra

$$(117)\quad (2M_1+\lambda M_3)^2\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1+\lambda M_3)(2M_1p_1+M_3q_1),$$

équation qui, à cause de (115), équivaut à (113). Mais

$$(118)\qquad 2M_1+\lambda M_3 \neq 0,$$

puisque la fonction

$$(2M_1+\lambda M_3)^2=4M_1(M_1+\lambda M_3+\lambda^2 M_2)$$

est égale, comme cela résulte de (112) et (110), à $2D$ et que, par hypothèse on a l'inégalité (94). Cela étant, l'équation (117) équivaut à

$$(119)\qquad (2M_1+\lambda M_3)\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1p_1+M_3q_1),$$

laquelle {XVI, p. 31} équivaut à celle que l'on obtient en la multipliant par

$$M_3+2p_1,$$

en substituant dans cette dernière à l'expression

$$\lambda(M_3+2p_1)$$

l'expression $2(M_1-q_1)$ qui lui est égale à cause de la 1-ière des équations (103), il vient

$$(120)\quad 2(2M_1p_1+M_3q_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=2p_2(2M_1p_1+M_3q_1)(M_3+2p_1).$$

Mais il résulte de (118) et de ce que (120) a été déduite de (119) en multipliant celle-ci par un facteur non nul, que

$$2M_1p_1+M_3q_1\neq 0$$

donc, l'équation (120) donne

$$(121)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}=p_2(M_3+2p_1).$$

Si nous avions supposé que l'on a l'inégalité (116) il aurait suffit de multiplier (113) par $2M_2$ pour s'assurer, au moyen d'un calcul tout à fait analogue à celui que nous venons de développer, que, dans ce cas encore la formule (121) subsiste. Donc {XVII p. 32} la formule (121) subsiste dans tous les cas.

En introduisant la fonction f, définie par la formule (67) (p. 22), on donnera aux deux premières équations du système (11) (p. 11) la forme suivante:

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} &= p_1^2 + p_2 q_1 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} &= p_2(p_1 + q_2). \end{aligned}\right.$$

Ces équations donneront, après y avoir porté la valeur (121) de $\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}$,

$$(122)\qquad \left|\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= p_2(2q_1 - \lambda M_3) + 2p_1(p_1 - \lambda p_2), \\ 2\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= p_2(2q_2 - M_3). \end{aligned}\right.$$

D'autre part les équations (103) (p. 29) donnent:

$$\begin{aligned} 2q_1 - \lambda M_3 &= 2(M_1 + \lambda p_1), \\ 2q_2 - M_3 &= 2\lambda(M_2 + p_2). \end{aligned}$$

En portant les valeurs précédentes de $2q_1 - \lambda M_3$ et de $2q_2 - M_3$ dans les formules (122) on trouve:

$$(123)\qquad \left|\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= p_2 M_1 + p_1^2, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= p_2(M_2 + p_2). \end{aligned}\right.$$

Après avoir porté dans les équations (121) et (122) les valeurs de p_1 et p_2 tirées des formules (13) (p. 11) on s'assurera aisément que, indépendamment de la forme que pourrait avoir la fonction M, l'ensemble des équations (121) et (123) constitue un système complètement intégrable qui fournit pour la fonction f, ou ce qui, à cause de la formule (67) (p. 22), revient au même, pour la fonction $p_3'^2$ l'expression suivante:

$$(124)\qquad p_3'^2 = c_1 - \frac{\alpha_1(M-w)^2 + 4\alpha_3 v_1(M-w) + 4\alpha_2 v_1^2}{4\Delta},$$

où c_1 représente une constante arbitraire.

On s'assurera aisément que, pour calculer $q_3'^2$, il suffit de substituer, dans les considérations qui nous ont conduit à la formule (124), aux quantités

$$p_1,\ p_2,\ p_3',\ q_1,\ q_2,\ q_3',\ M,\ w,\ v_1,\ v_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,$$

respectivement les quantités

$$q_2,\ q_1,\ -q_3',\ p_2,\ p_1,\ -p_3',\ -M,\ w,\ v_2,\ v_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3.$$

On trouvera de cette façon

$$(125)\qquad q_3'^2 = c_2 - \frac{\alpha_2(M+w)^2 - 4\alpha_3 v_2(M+w) + 4\alpha_1 v_2^2}{4\Delta},$$

en désignant par c_2 une nouvelle constante arbitraire.

10. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la fonction M par la condition qu'elle satisfasse aux trois équations qui forment le système (10) (p. 11) ou, ce qui revient au même, par la condition qu'elle vérifie le système formé par les deux équations (103) et la 3-ième des équations (10), c'est-à-dire le système suivant:

$$(126)\qquad \left|\begin{aligned} 2M_1 + \lambda M_3 - 2(q_1 - \lambda p_1) &= 0,\\ M_3 + 2\lambda M_2 - 2(q_2 - \lambda p_2) &= 0,\\ h_3(M) + 2(q_1 p_2 - q_2 p_1) &= 0,\end{aligned}\right.$$

où λ est définie par la formule (100) (p. 29), les symboles M_1, M_2, M_3 étant définis par les formules (102) (p. 29). En utilisant les formules (13), (124) et (125) on transformerait aisément le système (126) en un autre qui ne contiendrait plus que la seule inconnue M. Toutefois, pour arriver à des équations maniables, il faut procéder avec quelque attention.

Je rappelle d'abord que le système (126) entraîne, comme nous avons déjà eu l'occasion de le constater, l'équation (104) (p. 29). Pour aller plus loin, observons qu'en tenant compte de cette équation on déduit aisément des deux premières équations du système (126) les deux suivantes

$$2(q_1 - \lambda p_1)M_2 - (q_2 - \lambda p_2)M_3 = 0,$$
$$2(q_2 - \lambda p_2)M_1 - (q_1 - \lambda p_1)M_3 = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $q_1 + \lambda p_1$ et la deuxième par $q_2 + \lambda p_2$; en ajoutant membre à membre les équations obtenues, on obtiendra une équation équivalente à la suivante:

$$(127) \quad (q_1^2 - \lambda^2 p_1^2) M_2 + (q_2^2 - \lambda^2 p_2^2) M_1 - (q_1 q_2 - \lambda^2 p_1 p_2) M_3 = 0,$$

où comme cela résulte des égalités (100), (124) et (125), λ^2 doit être regardé comme défini par la formule

$$(128) \quad \lambda^2 = \frac{4 c_2 \Delta - \alpha_2 (M + w)^2 + 4 \alpha_3 v_2 (M + w) - 4 \alpha_1 v_2^2}{4 c_1 \Delta - \alpha_1 (M - w)^2 - 4 \alpha_3 v_1 (M - w) - 4 \alpha_2 v_1^2}.$$

Il résulte de ce qui précède ainsi que du lemme XVII (p. 32) que nous avons le théorème suivant:

XVIII. Théorème. Les valeurs des constantes {XII, p. 27} v_1, v_2 et w étant choisies ainsi que celles des constantes c_1 et c_2 qui figurent dans les formules (124) et (125), la fonction M doit nécessairement satisfaire à l'équation (104), à la dernière des équations (126) ainsi qu'à l'équation (127), sans se reduire à une constante.

Voici maintenant un théorème qui complète le précédent:

XIX. Théorème. Lorsque, sans se réduire à une constante, la fonction M satisfait, dans les conditions énoncées dans le théorème précédent, à l'ensemble des équations (104), (126) et (127), les formules (124) et (125) lui font correspondre précisément deux solutions de l'ensemble des équations (9), (10) (11) et (12); pour aucune de ces solutions le déterminant D {formule (14) p. 11} n'est identiquement nul et ces solutions se déduisent l'une de l'autre en substituant aux expressions de p_3' et de q_3' qui conviennent à l'une des solutions considérées, les produits de ces expressions par le nombre

$$-1.$$

Pour établir ce théorème supposons que l'hypothèse en soit vérifiée.

Si chacune des dérivées M_1, M_2 et M_3 ne jouissait pas de la propriété de ne pas se réduire identiquement à zéro, il existerait, comme cela résulte de (104), un domaine (T) à l'intérieur duquel l'une des dérivées M_1 ou M_2 serait différente de zéro, la deuxième d'entre elles ainsi que la dérivée M_3 étant identiquement nulle. Considérons par exemple le cas où l'on aurait à l'intérieur du domaine (T)

$$(129) \qquad M_1 \neq 0, \quad M_2 = M_3 = 0,$$

l'équation (127) nous donnera

$$q_2^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0$$

ou bien

$$(q_2 - \lambda p_2)(q_2 + \lambda p_2) = 0$$

où λ représente l'une des deux racines de (128). Il existera donc une racine λ' de (128) telle que l'on ait

(130) $$q_2 - \lambda' p_2 = 0.$$

Or p_2 et q_2 ne peuvent pas être nuls identiquement car, comme en vertu des formules (13) (p. 11) on a

(131) $$4\Delta(q_1 p_2 - q_2 p_1) = -M^2 + w^2 - 4v_1 v_2,$$

on aurait si l'on avait identiquement

$$p_2 = q_2 = 0,$$
$$-M^2 + w^2 - 4v_1 v_2 = 0,$$

et la fonction M, contrairement à l'hypothèse, se réduirait à une constante.

Il résulte de là que l'équation (130) déterminera λ' sans ambiguité si, comme nous le ferons, on impose à λ' la condition d'être continue. La fonction λ' étant déterminée de cette façon, nous allons faire voir que, pour obtenir une solution du problème il n'y à qu'à associer à M les systèmes de déterminations de p_3' et q_3' qui satisfont à la condition

(132) $$\frac{q_3'}{p_3'} = \lambda'.$$

A cet effet il nous faut prouver:

1_0 que pour satisfaire au système (126) avec $\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$ il faut et il suffit que l'on prenne un système de déterminations de p_3' et q_3' qui satisfasse à la condition (132).

2^0 que le déterminant D défini par la formule (14) (p. 11) n'est pas identiquement nul. Or il résulte de (129) et de (130) que l'on a

(133) $$M_3 + 2\lambda' M_2 - 2(q_2 - \lambda' p_2) = 0.$$

D'autre part, puisque, par hypothèse, la 3-ième équation du système (126) est vérifiée, ou aura {voir les formules (8), p. 10} à cause de (129):

$$-2p_2 M_1 + 2(q_1 p_2 - q_2 p_1) = 0$$

d'où, moyennant (130):

$$2M_1 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0$$

ou, puisque $M_3 = 0$,

$$2M_1 + \lambda' M_3 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0. \tag{134}$$

La fonction M satisfait donc aux équations (133) et (134) ainsi que (par hypothèse) à la 3-ième des équations (126). Pour que ce système soit équivalent au système (126) $\left\{ \text{où } \lambda = \frac{q_3'}{p_3'} \right\}$ il est évidemment nécessaire et suffisant que la relation (132) soit satisfaite.

Reste à prouver que le déterminant D n'est pas identiquement nul. Or il résulte de (131) (où, rappelons-le, w, v_1 et v_2 représentent des constantes) que, puisque la fonction M ne se réduit pas à une constante, l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

n'est pas nulle identiquement, donc (V, p. 12) le déterminant D n'est pas identiquement nul.

En définitive, dans le cas particulier où l'on a les relations (129), le théorème est démontré. On l'établirait d'une façon analogue dans le cas où l'on aurait

$$M_2 \neq 0, \quad M_1 = M_3 = 0.$$

Il ne reste donc plus qu'à examiner le cas général où

$$M_1 \,.\, M_2 \,.\, M_3 \neq 0. \tag{135}$$

Désignons par λ' une détermination continue de λ vérifiant l'équation (128), en nous réservant de préciser plus tard quelle est celle des deux déterminations de λ que représente le symbole λ'. L'équation (127) pourra s'écrire ainsi:

$$(q_1^2 - \lambda'^2 p_1^2) M_2 + (q_2^2 - \lambda'^2 p_2^2) M_1 - (q_1 q_2 - \lambda'^2 p_1 p_2) M_3 = 0. \tag{136}$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}(q_1 q_2 - \lambda' p_1 p_2)^2 - 4(q_1^2 - \lambda'^2 p_1)(q_2^2 - \lambda'^2 p_2) = \\ = \{(q_1 - \lambda' p_1)(q_2 + \lambda' p_2) - (q_1 + \lambda' p_1)(q_2 - \lambda' p_2)\}^2 = \\ = 4(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 \lambda'^2.\end{aligned}$$

Or l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

ne peut s'évanouir à l'intérieur d'aucun domaine car, à cause de la relation (131) la fonction M, contrairement à l'hypothèse, se réduirait à une constante. Par conséquent les fonctions

$$q_1^2 - \lambda'^2 p_1^2, \quad q_2^2 - \lambda'^2 p_2^2 \quad \text{et} \quad q_1 q_2 - \lambda'^2 p_1 p_2$$

ne peuvent pas être nulles à la fois.

Cela posé, les équations (136) et (104) permettront de calculer les rapports des quantités M_1, M_2 et M_3. On constate qu'il existe un nombre ε, vérifiant l'égalité

$$\varepsilon^2 = 1$$

et tel que les dérivées M_i $(i = 1, 2, 3)$ soient proportionnelles aux expressions

$$(q_1 - \varepsilon\lambda' p_1)^2, \quad (q_2 - \varepsilon\lambda' p_2)^2, \quad 2(q_1 - \varepsilon\lambda' p_1)(q_2 - \varepsilon\lambda' p_2).$$

Mais si λ' est une racine de (128), $\varepsilon\lambda'$ en est évidemment aussi une.

Par conséquent, nous pouvons préciser la détermination de λ que représentera le symbole λ' en spécifiant que c'est celle à laquelle correspond la valeur $+1$ de ε. La détermination λ' de λ étant précisée de la façon précédente, les quantités M_1, M_2 et M_4 seront proportionnelles aux expressions

$$(q_1 - \lambda' p_1)^2, \quad (q_2 - \lambda' p_2)^2, \quad 2(q_1 - \lambda' p_1)(q_2 - \lambda' p_2)$$

avec un coefficient de proportionalité que l'on déterminera en tenant compte de ce que, par hypothèse, la fonction M satisfait à la 3-ième des équations (126) (p. 35).

Après avoir effectué les calculs précédents on s'assurera que l'on a:

$$2M_1 + \lambda' M_3 - 2(q_1 - \lambda' p_1) = 0,$$
$$M_3 + 2\lambda' M_2 - 2(q_2 - \lambda' p_2) = 0.$$

Pour que ces équations se confondent avec celles que l'on obtient en substituant à λ dans les deux premières des équations (126) le rapport

$$\frac{q_3'}{p_3'}$$

il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on associe à la fonction M un système de valeurs de p'_3 et de q'_3, tiré des équations (124) et (125), tel que l'on ait

$$\frac{q'_3}{p'_3} = \lambda'.$$

Cette condition étant remplie, toutes les équations (9), (10), (11) et (12) seront satisfaites et il ne reste plus qu'à prouver que le déterminant (D) {formule (14), p. 11} n'est pas nul identiquement. Or, puisque, par hypothèse, la fonction M ne se réduit pas à une constante, il résulte de la relation (131) (p. 37) que l'expression

$$q_1 p_2 - q_2 p_1$$

n'est pas identiquement nulle. Par conséquent {V, p. 12} le déterminant D n'est non plus identiquement nul et la démonstration du théorème est achevée.

11. Il résulte des théorèmes XVIII et XIX (p. 36) que le problème étudié se ramène à la détermination de l'intégrale commune des équations (104), (127) et de la dernière des équations (126). Si, après avoir porté dans l'équation (127) la valeur (128) de λ^2, on substitue dans l'équation obtenue ainsi que dans la dernière des équations (126) les valeurs de p_1, p_2, q_1 et q_2 tirées des égalités (13) (p. 11), si en outre, pour déterminer la fonction M des variables α_1, α_2, α_3, on se propose de rechercher une fonction $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M)$ des quatre variables α_1, α_2, α_3 et M, telle que l'équation

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M) = 0 \tag{137}$$

fasse connaître la fonction cherchée M, on constate que après avoir posé pour abréger l'écriture:

$$F_0 = \frac{\partial F}{\partial M}, \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial M_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{138}$$

$$\begin{cases} l = M^2 - w^2 + 4uv, & l' = M^2 - w^2 - 4uv, \\ a_1 = 2v_1(w + M) \quad , & a_2 = 2v_2(w - M) \quad , \end{cases} \tag{139}$$

on peut écrire les équations du problème comme il suit:

$$4F_1 . F_2 - F_3^2 = 0, \tag{140}$$

$$(141)\quad l\{(2a_1\alpha_3+l'\alpha_1)F_1-(2a_3\alpha_3+l'\alpha_2)F_2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)F_3\}+$$
$$+4c_1\{[(M+w)\alpha_3-2v_2\alpha_1]^2F_1+[(M+w)\alpha_2-2v_3\alpha_3]^2F_2+$$
$$+[(M+w)\alpha_3-2v_2\alpha_1]\,[(M+w)\alpha_2-2v_2\alpha_3]F_3\}+$$
$$-4c_2\{[(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3]^2F_1+[(M-w)\alpha_3+2v_1\alpha_2]^2F_2+$$
$$+[(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3]\,[(M-w)\alpha_3+2v_1\alpha_2]F_3\}=0.$$

$$(142)\quad 2\{(M-w)\alpha_1+2v_1\alpha_3\}F_1+2\{(M+w)\alpha_2-2v_2\alpha_3\}F_2+$$
$$+2\{M\alpha_3+v_1\alpha_2-v_2\alpha_1\}F_3-lF_0=0,$$

où, bien entendu, les variables α_1, α_2, α_3 et M doivent être regardées comme des variables indépendantes.

Introduisons maintenant au lieu des variables α_1, α_2, α_3 les variables σ_1, σ_2, σ_3, définies par des formules de la forme

$$\sigma_i=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\,\alpha_k \qquad (i=1,2,3)$$

où les a_{ik} sont des fonctions de la seule variable M, fonctions telles que l'expression qui est multipliée par l dans l'équation (141), c'est-à-dire l'expression

$$(2a_1\alpha_3+l'\alpha_1)F_1-(2a_2\alpha_3+l'\alpha_2)F_2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)F_3$$

prenne la forme suivante

$$\varrho_1\,\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\varrho_2\,\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\varrho_3\,\sigma_3\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}$$

où les ϱ_k représentent des fonctions de la seule variable M. On trouve aisément que l'on peut prendre:

$$(143)\quad\left\{\begin{aligned}\sigma_1&=(M-w)^2\alpha_1+4v_1^2\alpha_2+4v_1(M-w)\alpha_3,\\ \sigma_2&=4v_2^2\alpha_1+(M+w)^2\alpha_2-4v_2(M+w)\alpha_3,\\ \sigma_3&=-2v_2(M-w)\alpha_1+2v_1(M+w)\alpha_2+l'\alpha_3.\end{aligned}\right.$$

A la suite de ce changement de variables les équations (141) et (142) prennent la forme suivante

$$l^2\left\{\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}-\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}\right\}+$$
$$+4c_1\left\{\sigma_3^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\sigma_2^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\sigma_3\,\sigma_2\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}\right\}+$$
$$-4c_2\left\{\sigma_1^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}+\sigma_3^2\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}+\sigma_3\,\sigma_1\frac{\partial F}{\partial\sigma_3}\right\}=0,$$

$$l \frac{\partial F}{\partial M} + 4M \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = 0.$$

Effectuons maintenant, dans ces équations, le changement de variables suivant:

(144) $$s_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \quad s_3 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_3} - \sigma_3,$$

il viendra:

(145) $$l^2 \left\{ s_1 \frac{\partial F}{\partial s_1} - s_2 \frac{\partial F}{\partial s_2} \right\} - 4 s_3 \left\{ c_1 \frac{\partial F}{\partial s_1} - c_2 \frac{\partial F}{\partial s_1} \right\} = 0,$$

(146) $$l \frac{\partial F}{\partial M} + 4 M s_3 \frac{\partial F}{\partial s_3} = 0.$$

En se reportant à la première des formules (139), on reconnaît de suite que, après avoir posé

(148) $$\varphi = \frac{s_3}{(M^2 - w^2 + 4uv)^2},$$

ou peut représenter l'intégrale générale de l'équation (146) au moyen de la formule suivante

$$F = F_1(\varphi, s_1, s_2)$$

où $F_1(\varphi, s_1, s_2)$ représente une fonction arbitraire des variables φ, s_1 et s_2, assujettie seulement à remplir des conditions de régularité évidentes. En exprimant que l'expression précédente de la fonction F satisfait à l'équation (145) et après avoir posé

(148) $$\psi = s_1 s_2 - 4(c_1 s_2 + c_2 s_1)\varphi,$$

on trouve que la solution commune la plus générale des équations (145) et (146) peut être representée par la formule suivante:

(149) $$F = F_2(\varphi, \psi)$$

où le second membre représente une fonction arbitraire de φ et de ψ.

Reste à exprimer que l'expression (149) de F satisfait à l'équation (140); moyennant un calcul tout à fait élémentaire mais un peu long, on reconnaît que la condition nécessaire et suffisante pour que la valeur (149) de F satisfasse à l'équation (140) est que la fonction $F_2(\varphi, \psi)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante:

(150) $$\left\{4\psi^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\right\}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \psi}\right)^2 + \\ + 4\varphi\psi \frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\frac{\partial F_2}{\partial \psi} + \varphi^2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right)^2 = 0$$

Mais en réalité ce que nous cherchons c'est la relation entre M, α_1, α_2, α_3, que définit l'équation (137) ou, ce qui, à cause de la formule (149), revient au même, la chose qu'il nous importe de connaître c'est la relation entre φ et ψ que définit l'équation

$$F_2(\varphi, \psi) = 0.$$

Or, il résulte de (150) que la relation en question se confond avec celle qui définit l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\{4\psi^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\}\, d\varphi^2 - 4\varphi\,\psi\, d\varphi\, d\psi + \varphi^2\, d\psi^2 = 0,$$

laquelle peut encore s'écrire ainsi:

$$(2\psi\, d\varphi - \varphi\, d\psi)^2 - 4(\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2)\, d\varphi^2 = 0,$$

d'où

(151) $$\psi + 16 c_1 c_2 \varphi^2 = (c_3 \varphi - 1)^2$$

où c_3 représente une constante arbitraire.

Moyennant les formules (143), (144), (147) et (148) on exprimera les fonctions φ et ψ au moyen de M et d'élements connus et l'équation (151) fera connaître alors la fonction M qu'il s'agissait de déterminer.

En se reportant aux théorèmes XVIII et XIX (p. 36) et en remarquant que la fonction M, déterminée au moyen de l'équation (151), ne se réduit pas à une constante, on reconnaît que l'on a le théorème suivant.

XX. Théorème. Il existe une solution de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) (p. 11) n'annulant pas identiquement le déterminant D défini par la formule (14); cette solution dépend de six constantes arbitraires dont trois représentant les valeurs constantes (XII, p. 27) des fonctions v_1, v_2 et w, les trois autres étant les constantes c_1, c_2 et c_3 entrant dans les équations (124), (125) et (151); le choix des six constantes précédentes étant arrêté, on pourra procéder comme il suit pour former la solution correspondante du problème: on choisira arbitrairement une détetermination M vérifiant l'équation (151), ou portera cette détermination de M dans les équations (124) et (125) et après avoir choisi arbitrairement l'une des deux déterminations de l'une des fonctions p_3' et q_3', on lui associera (ce qui sera toujours possible) celle des déterminations de la seconde de ces fonctions qu'il faudra choisir pour que la valeur

$$\lambda = \frac{q_3'}{p_3'}$$

de λ satisfasse aux équations obtenues en portant la détermination considérée de M dans les deux premières équations du système (126), après avoir préalablement substitué dans ces équations aux fonctions p_1, p_2, q_1 et q_2 leurs valeurs tirées des équations (13) (p. 11).

12. Ayant déterminé toutes les intégrales du système formé par l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12), appliquons les résultats obtenus au problème de physique qui nous a conduit aux équations précédentes.

En se reportant aux formules (1) (p. 9) on reconnaît que les fonctions

$$(152) \qquad p_1, \; p_2, \; p_3, \; q_1, \; q_2, \; q_3$$

qui entrent dans les formules (3) (p. 10), doivent être déterminées dans le domaine que définit l'ensemble des relations suivantes

$$(153) \qquad \alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \geqq 0.$$

Il faut évidemment chercher des expressions des fonctions (152) telles que chacune des fonctions (152) soit continue dans tout le domaine (153).

Dans les numéros précédents nous avons reconnu que, au point de vue de la forme analytique, il y a lieu de distinguer huit solutions différentes de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12); l'une d'elles est caractérisée par la condition que la valeur correspondante du déterminant D, défini par la formule (14) (p. 11) ne se réduise pas identiquement à zéro; c'est celle à laquelle se rapporte le théorème XX (p. 43); en dehors de cette solution il y en a encore sept autres ayant cela de commun qu'il correspond à chacune d'elles une valeur identiquement nulle du déterminant D, pour deux de ces solutions (voir le No. 5) le produit $p_3' . q_3'$ n'est pas identiquement nul; l'une de ces solutions est donnée par les formules suivantes

$$
(154)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta p_1 &= -\frac{v_2}{C}\,\alpha_3 + v_1\,\alpha_2, \\
\Delta p_2 &= \frac{v_2}{C}\,\alpha_1 - v_1\,\alpha_3, \\
\Delta q_1 &= v_1 C\alpha_1 - v_2\,\alpha_3, \\
\Delta q_2 &= -v_1 C\alpha_3 + v_2\,\alpha_1, \\
p_3'^2 &= \frac{2Cv_1\,v_2\,\alpha_3 - C^2 v_1^2 \alpha_2 - v_2^2 \alpha_1}{C^2 \Delta} + F, \\
q_3' &= Cp_3',
\end{aligned}
\right.
$$

où C est une constante arbitraire non nulle, les quantités v_1, v_2 et F étant des fonctions arbitraires de la fonction

$$
(155)\qquad \alpha_1 C^2 - 2\alpha_3 C + \alpha_2;
$$

la deuxième des solutions considérées est donnée par les formules suivantes

$$
(156)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta p_1 &= -\frac{v_2}{\lambda}\,\alpha_3 + v_1\,\alpha_2 \\
\Delta p_2 &= \frac{v_2}{\lambda}\,\alpha_1 - v_1\,\alpha_3 \\
\Delta q_1 &= v_1\,\lambda\,\alpha_3 - v_2\,\alpha_3 \\
\Delta q_2 &= -v_1\,\lambda\,\alpha_3 + v_2\,\alpha_1 \\
p_3'^2 &= \frac{2\lambda v_1\,v_2\,\alpha_3 - v_2^2 \alpha_1 - v_1^2 \alpha_2}{\lambda^2 \Delta} + F,
\end{aligned}
\right.
$$

où v_1, v_2 et F sont des fonctions arbitraires de la fonction λ laquelle est définie par l'équation

$$
(157)\qquad \alpha_1\,\lambda^2 - 2\,\alpha_3\,\lambda + \alpha_2 + \theta(\lambda) = 0
$$

dans laquelle $\theta(\lambda)$ représente une fonction arbitraire de λ; viennent maintenant les deux solutions (voir le No. 6, p. 21) où l'une des fonctions p_3' et q_3' et une seule est identiquement nulle; l'une des solutions précédentes est donnée par les formules:

$$
(158)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\Delta p_1 &= \psi(\alpha_2)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\alpha_1 \\
2\Delta p_2 &= -\psi(\alpha_2)\alpha_1 - 2\varphi(\alpha_2)\alpha_3 \\
p_3{}^2 &= -\frac{\{\psi(\alpha_2)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_2)\alpha_2\}^2}{4\,\alpha_2\,\Delta} + F(\alpha_2) \\
q_1 &= q_2 = q_3' = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où $\varphi(\alpha_2)$, $\psi(\alpha_2)$ et $F(\alpha_2)$ représentent des fonctions arbitraires de α_2; la deuxième des deux solutions considérées est la suivante:

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 &= p_2 = p_3' = 0, \\ 2\Delta q_1 &= -\ \psi(\alpha_1)\alpha_2 - 2\varphi(\alpha_1)\alpha_3 \\ 2\Delta q_2 &= \quad \psi(\alpha_1)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\alpha_2 \\ q_3'^2 &= -\frac{\{\psi(\alpha_1)\alpha_3 + 2\varphi(\alpha_1)\alpha_2\}^2}{4\alpha_1\Delta} + F(\alpha_1) \end{aligned}\right.$$

où $\varphi(\alpha_1)$, $\psi(\alpha_1)$ et $F(\alpha_1)$ représentant des fonctions arbitraires de α_1; enfin, en dehors du cas dénué d'intérêt où toutes les fonctions $p_1, p_2, p_3', q_1, q_2, q_3'$ sont identiquement nulles, nous avons encore (voir le No. 7) trois solutions où l'on a identiquement

$$(160)\quad p_3' = q_3' = 0;$$

l'une de ces solutions est définie par les formules:

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} & p_1 = q_2 = q_1 = 0, \\ & p_2 = \text{une fonction arbitraire de } \alpha_2 \text{ et } \alpha_3; \end{aligned}\right.$$

une seconde solution est la suivante:

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} & p_1 = q_2 = p_2 = 0 \\ & q_1 = \text{une fonction arbitraire de } \alpha_1 \text{ et } \alpha_3; \end{aligned}\right.$$

voici enfin les formules qui font connaître la 3-ième solution du genre considéré; le symbole λ désignant une fonction définie par l'équation

$$(163)\quad F(\alpha_1 + \alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda) = 0$$

où $F(\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda)$ représente une fonction arbitraire des expressions

$$(164)\quad \alpha_1 + \lambda\alpha_3,\quad \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\quad \lambda,$$

on a

$$(165)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_2,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda) \\ p_2 &= \lambda p_1 \\ q_1 &= -\frac{p_1}{\lambda} \\ q_2 &= -p_1 \end{aligned}\right.$$

où $\Phi(\alpha_1 + \lambda\alpha_3,\ \lambda\alpha_2 + \alpha_3,\ \lambda)$ représente une fonction arbitraire des expressions (164).

On pourrait se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir des expressions admissibles pour les inconnues (152) (p. 44) sans supposer qu'elle dussent être définies dans toute l'étendue du domaine (153) (p. 44) par une *seule* des huit solutions différentes de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) (p. 11); dans ce cas le domaine (153) (p. 44) se décomposerait en plusieurs régions de telle sorte que dans des régions différentes nos inconnues seront définies par des solutions différentes des équations (9), (10), (11) et (12). Toutefois, pour éviter de nous engager dans des considérations compliquées et probablement inutiles, nous nous bornerons à considérer successivement chacune des huit solutions de l'ensemble des équations (9), (10), (11) et (12) en étudiant pour chacune d'elles la question suivante: la solution considérée peut-elle, peut-être moyennant une particularisation convenable des éléments arbitraires qu'elle contient, fournir des expressions admissibles des fonctions (152) et valables dans tout le domaine (153)?

XXI. Théorème. La 1-ière des huit solutions énumérées plus haut, celle à laquelle se rapporte le théorème XX (p. 43) doit être rejettée comme impropre à fournir des expressions admissibles des inconnues (152), valables dans tout le domaine (153).

En effet, chacune des fonctions v_1, v_2 et w se réduisànt {XII p. 27} à une constante, il résulte de la continuité des fonctions (152) et des formules (6) (p. 10) que la solution considérée ne pourrait être admissible qu'à la condition d'avoir

(166) $$v_1 = v_2 = w = 0.$$

Or, dans ce cas, ainsi que cela résulte des formules (143), (144), (147) et (148), l'équation (151) pourrait s'écrire ainsi:

(167) $$M^4 + 2[c_3\alpha_3 - 2(c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1)]\,M^2 + 16c_1c_2\Delta = c_3^2\Delta$$

et, à cause de (166), les formules (124) et (125) se réduiraient aux suivantes:

(168) $$\left|\begin{array}{l} p_3'^2 = c_1 - \dfrac{\alpha_1 M^2}{\Delta}, \\[2ex] q_3'^2 = c_2 - \dfrac{\alpha_2 M^2}{\Delta}. \end{array}\right.$$

J'observe maintenant que {formules (6) (p. 10} l'on a

169) $$p_3'^2 = p_3^2\Delta, \quad q_3' = q_3^2\Delta.$$

Donc, puisque les fonctions p_3 et q_3 sont continues, il résulterait de (168) que l'on a:

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{c_1 - \frac{\alpha_1 M^2}{\Delta}\right\} = 0$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{c_2 - \frac{\alpha_2 M^2}{\Delta}\right\} = 0.$$

Ces égalités étant incompatibles, on voit que la solution considérée ne peut par fournir des expressions admissibles de nos inconnues.

XXII. Théorème. Aucun des systèmes de formules (154), (156), (158) et (159) ne fournit pour les inconnues (152) des valeurs admissibles ne se réduisant pas aux suivantes:

(170) $$p_i = q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La marche à suivre étant en principe la même dans chacun des quatre cas qu'il y a à considérer, nous nous bornerons à discuter les formules (154).

Envisageons les systèmes de valeurs des variables α_1, α_2 et α_3 tels que l'on puisse poser

(171) $$\alpha_2 = t^2\alpha_1, \quad \alpha_3 = t\alpha_1$$

et n'envisageons que les systèmes de valeurs de α_1 et t pour lesquels l'expression (155) conserve une valeur constante ζ_0. Nous aurons

(172) $$\alpha_1 C^2 - 2\alpha_1 Ct + \alpha_1 t^2 = \zeta_0.$$

D'autre part, puisque, dans les formules (154), les fonctions v_1 et v_2 sont des fonctions de la seule fonction (155), ces fonctions coserveront des valeurs constantes $v_1^{(0)}$ et $v_2^{(0)}$ pour tous les systèmes de valeurs de α_1 et t qui vérifient (172). Portons les valeurs (171) de α_2 et de α_3 dans la 1-ière des équations (154) en supposant que (171) soit satisfaite. Comme on a

$$\Delta = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2,$$

il viendra

$$0 = \left\{-\frac{v_2^{(0)}}{C}t + v_1^{(0)}t^2\right\}\alpha_1,$$

pourvu que (171) soit satisfaite. Nous aurons donc

$$v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = 0.$$

Mais la constate ζ_0 a une valeur arbitraire. On a donc identiquement

$$v_1 = v_2 = 0.$$

En s'adressant à la 5-ième des formules (154) et en tenant compte de la 1-ière des relations (169), on prouvera aisément que la fonction F, fonction de la seule fonction (155), se réduit identiquement à zéro. Donc, les seules valeurs admissibles pour nos inconnues que peuvent fournir les formules (154) sont bien celles que définissent les équations.

Le raisonnement étant, comme nous l'avons déjà fait remarquer, tout à fait semblable dans chacun des trois cas qu'il y aurait encore à considérer, notre théorème doit être regardé comme établi.

Les deux théorèmes précédents nous amènent à la conclusion suivante: *on a dans tous les cas relations* (160) *ou* (formules (6), p. 10), *ce qui revient au même:*

$$p_3 = q_3 = 0;$$

quant aux autres inconnues p_1, p_2, q_1 et q_2, *on ne peut hésiter qu'entre les expressions* (161), (162) *ou* (165) *de ces inconnues.*