Sur la notion de l'équivalence des systèmes déductifs

par

W. Wilkosz (Kraków)

La notion précise d'une théorie déductive ou, comme s'exprime l'École Italienne, d'un système »*hypothetico*-déductif«, a été constituée par les travaux des mathématiciens et logiciens depuis les dernières dizaines d'années du XIX siècle jusqu'à nos temps. On sait qu'un tel système se compose de trois parties dont aucune ne peut être négligée. Ce sont:

A. L'ensemble des ***notions primitives*** du système considéré;

B. l'ensemble de ses ***propositions primitives***, appelées aussi ses ***axiomes*** ou ***postulats***;

C. l'ensemble des règles logiques dont on se sert pour ***définir*** des notions dérivées en sortant de l'ensemble A et pour ***démontrer*** des propositions nouvelles dérivant de celles qui appartiennent à l'ensemble B.

Une condition nécessaire doit être cependant mentionnée: les propositions de l'ensemble B ne doivent contenir dans leur structure que des notions énumérées dans l'ensemble A ou appartenant à la ***logique*** pure.

Au point de vue formel, les notions primitives n'apparaissent dans les axiomes que sous la forme de ***variables logiques*** et l'ensemble B se présente comme une fonction propositionnelle (au sens de Russell et Frege) contenant autant de variables qu'il y a de notions primitives. On s'imagine dans ce but les propositions de l'ensemble B liées entre elles par la ***conjonction logique*** (s'exprimant par la particule »et«).

Désignons cette fonction par:

$$T(a, b, ..., \alpha, \beta, ..., R, S, ...),$$

$a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, R, S, \ldots$ étant des signes pour désigner les éléments classes, relations... primitives constituant l'ensemble A.

On ne suppose pas la fonction T être vraie (vérifiée) pour toutes les valeurs données à ses variables. On suppose seulement la possibilité de trouver un »exemple« vérifiant T et dans ce cas, on appelle la théorie T ***non-contradictoire.*** Le sens de la phrase »trouver un exemple vérifiant T« doit être cependant conventionnellement fixé. Ce n'est que relativement à un autre système déjà jugé être non-contradictoire qu'on doit montrer cette possibilité en trouvant au corps de celui-ci l'exemple demandé. Nous n'insistons pas ici sur le sens absolu de la »non-contradictoriété« d'un système. Quand à la logique C, on doit prendre des mesures spéciales. Il faut spécifier explicitement celle que nous convenons de considérer comme obligatoire dans notre cas.

Nous prenons comme telle la logique formant le système de Whitehead et Russell exposé dans les ***Principia Mathematica***, au sens ***strict***, c'est-à-dire ***sans*** axiome d'infinitude et sans celui de Zermelo.

Ce système sera pour nous la partie commune de ***tous*** les systèmes déductifs que nous allons considérer dans notre travail.

Le système T sera dit ***arithmétisable*** lorsqu'on peut trouver dans l'***arithmétique des nombres entiers*** [p. ex. dans le système de Peano avec la logique adoptée par nous] un exemple qui le vérifie.

On suppose alors avoir trouvé dans l'arithmétique des nombres entiers des éléments $a_0, b_0, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, R_0, S_0 \ldots$ qui, substitués dans T, le ***transforment en une proposition de l'arithmétique.***

Passons maintenant à la notion de l'***équivalence*** de deux systèmes déductifs T_1 et T_2. Le sens courant que l'on attribue à cette notion est le suivant:

On appelle T_1 et T_2 ***équivalents*** lorsqu'on peut trouver dans T_2 un exemple vérifiant T_1 et réciproquement. C'est-à-dire, lorsqu'on peut trouver parmi les notions primitives ou dérivées de la théorie T_2, de telles notions qui, substituées dans T_1, la transforment en une proposition de T_2 et réciproquement.

Nous allons demontrer le théorème méthodologique suivant: ***Tous les systèmes arithmétisables dans lesquels on peut démontrer l'existence au moins d'un ensemble infini, sont équivalents entre eux.***

Pour nous convaincre de la justesse de ce théorème, remarquons d'abord que la notion de l'équivalence étant visiblement ***transitive***, il suffit de comparer les systèmes déductifs considérés avec la théorie T_0 de l'arithmétique des nombres entiers. Or, le système T étant supposé ***arithmétisable***, le système T nous permet de trouver au corps de T_0 un exemple propre à vérifier la théorie T. D'autre part, soit M un ensemble infini quelconque dont l'existence nous est assurée par hypothèse. On sait que, sans faire usage de l'axiome de Zermelo et de celui de l'infinitude, on peut démontrer[1]) l'existence d'un sous-ensemble N ***dénombrable*** de l'ensemble M. Rangeons N dans un ordre R du type ω.

Il est bien connu qu'en désignant par O_R son premier terme, par $\mathrm{seq}_R x$ le successeur immédiat de x dans l'ordre R, N étant le champ de l'ordre R, on est déjà en possession d'un exemple (O_R, seq_R, N) pour vérifier les axiomes de Peano, c'est-à-dire du système T_0, et cela d'un exemple tiré de la théorie T. L'équivalence de T_0 et T devient par cela démontrée.

Le théorème méthodologique démontré tout à l'heure possède de curieuses conséquences. Il va nous montrer que la notion de l'équivalence des systèmes déductifs est pratiquement ***trop large*** et qu'elle aboutit à une complète impossibilité de distinguer les systèmes déductifs les plus connus dans la pratique. Pour le faire voir, prenons quelques exemples en les choisissant parmi les systèmes les plus usités. Soient p. ex.

T_0 = l'arithmétique des nombres entiers, système de Peano,
T_1 = la géométrie euclidienne, système de Hilbert,
T_2 = la géométrie euclidienne, système de M. Pieri,
T_3 = la géométrie hyperbolique, système quelconque,
T_4 = la théorie déductive des nombres réels, système quelconque,
T_5 = la géométrie projective, système de O. Veblen.

Les conditions de notre théorème étant dans ces cas vérifiées, nous devons considérer $T_0 - T_5$ comme ***équivalents***. Or, nous admettrons volontiers l'équivalence de T_1 et T_2 mais, au contraire, celle de T_1 et T_3 ou T_4 p. ex. nous paraîtra très étrange.

Les systèmes usuels étant toujours tels que notre théorème s'y applique, nous voyons que cela aboutit à une complète indiscernibilité de ces systèmes. C'est que nous n'avons certainement

---

[1]) Voir p. ex. mon livre ***Podstawy ogólnej teorii mnogości***, Warszawa 1925.

pas eu en vue en posant la définition de l'équivalence. Le problème se pose: Quelle est la différence essentielle entre les systèmes qui se sont montrés équivalents? Nous voulons l'avoir p. ex. entre T_1 et T_3 et *non* entre T_1 et T_2; comment devons nous caractériser les systèmes déductifs pour obtenir ces résultats? Combien doit-on modifier la notion de l'équivalence, ou bien celle d'un système? Nous réservons la réponse à ces questions pour une note ultérieure.

Kraków, 26. XI. 1936.