Sur le conventionalisme arithmétique

par

W. Wilkosz (Kraków)

1. On appelle ***conventionalisme géométrique*** la doctrine philosophique concernant les fondements de la géométrie, émise par H. Poincaré dans son livre célèbre ***La Science et l'Hypothèse***. Qu'il nous soit permis de citer le passage suivant de son oeuvre. Ayant donné quelques arguments explicatifs, H. Poincaré poursuit son raisonnement en ces termes: »***Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques*** à priori ***ni des faits expérimentaux.*** — Ce sont des ***conventions***; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est ***guidé*** par des faits expérimentaux; mais il reste ***libre*** et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester ***rigoureusement*** vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives...

En d'autres termes, ***les axiomes de la géométrie (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique)*** [1] ***ne sont que des définitions déguisées.***

Dès lors, que doit on penser de cette question: La géométrie euclidienne est-elle vraie? Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être ***plus commode***«.

Le fait principal qui sert de base à cette opinion est bien connu. On sait qu'***aucune expérience*** ne peut discerner entre la géométrie euclidienne et p. ex. celle de Łobaczewski lorsqu'on suppose seulement la courbure de l'espace de Łobaczewski

---

[1]) Souligné par moi.

assez petite en valeur absolue. Ce fait mis en évidence avec toute la clarté par H. Poincaré a résolu, au moins dans l'opinion des mathématiciens qui réfléchissent sur les bases de leur science, la question concernant la nature de la vérité géométrique. Or, quand à l'arithmétique, l'opinion de Poincaré semble ne pas s'accorder avec ses vues conventionalistes. Les mots soulignés par moi dans le passage cité semblent le confirmer avec évidence.

C'est aussi l'opinion partagée par plusieurs mathématiciens et philosophes. J'ai eu l'occasion, il y a trois ans, de présenter à la Société Polonaise de Mathématique [séance du 16.X.1933] un exemple d'une famille de pseudo-arithmétiques qui jouent, à mon avis, un rôle tout-à-fait analogue à celui des diverses géométries hyperboliques avec des constantes de courbure spatiale différentes. Comme mon résultat a été signalé dans la littérature [1]), je me propose de le publier dans la présente note. Il s'agit d'ailleurs d'un fait très simple et cela m'avait jusqu'a présent dissuadé de la présenter au public mathématique ou philosophique.

2. Nous allons construire par voie axiomatique une famille de pseudo-arithmétiques, et cela de la manière suivante:

I. Notions fondamentales:

1 (unité), N (classe des nombres naturels), $+$ (addition).

II. Axiomes:

A_1: 1 appartient à N.

A_2: a et b appartenant à N, leur »somme« $a+b$ y appartient aussi et est un nombre bien déterminé.

A_3: a, b, c appartenant à N, si $b+a=c+a$, on a:

$$b=c.$$

A_4: a appartenant à N, on a:

$$a+1 \neq 1$$

A_5: [Principe d'induction].

Supposons que:

(1) 1 possède une certaine propriété W,

---

[1]) V. le beau livre de M. Chwistek, *Granice Nauki* (Les Confins de la Science).

(2) lorsque a est un nombre de la classe N et possède la propriété W, alors $a+1$ la possèdera aussi.

Dans ce cas: tout nombre de la classe N doit posséder la propriété W.

A_6: Il existe un nombre naturel k tel que a et b étant des nombres arbitraires, on ait toujours:

$$a+(b+1)=a\oplus b\oplus E(b\oplus k, k).$$

La signification des signes $\oplus$ et E sera donnée tout de suite.

Ne considérons pour le moment que les axiomes A_1-A_5 et désignons par:

$$\text{seq}\, a \text{ (sequens } a\text{) l'expression } a+1.$$

Remarquons que:

B_1: 1 appartient à N (grâce à A_1).

B_2: a appartenant à N, seq a y appartiendra aussi (grâce à A_2).

B_3: a et b appartenant à N, si:

$$\text{seq}\, a=\text{seq}\, b, \quad \text{on aura} \quad a=b \qquad \text{(grâce à } A_3\text{)}.$$

B_4: a appartenant à N, on aura:

$$\text{seq}\, a\neq 1 \qquad \text{(grâce à } A_4\text{)}.$$

B_5: Lorsque 1 possède une propriété W et lorsque du fait qu'un nombre a la possède, on peut toujours conclure que seq a la possèdera aussi, on doit attribuer la propriété W à tous les éléments de la classe N (grâce à A_5).

Les propriétés B_1—B_5 constituent le célebre système d'axiomes pour l'arithmétique classique des nombres naturels donné par G. Peano dans ses ***Arithmetices Principia Nova*** (Turin 1889) avec une modification bien connue ayant pour but d'exclure le nombre *zéro* de la classe des nombres considérés. En partant de là et en se servant seulement des axiomes A_1—A_5, on peut donc constituer toute l'arithmétique classique des nombres naturels. Je renvoie pour les détails à mon livre ***Arytmetyka liczb całkowitych. System aksjomatyczny*** (Kraków 1932), et je ne m'arrête que sur les deux points suivants:

(1) On introduira la somme »classique«, que je désignerai par $a\oplus b$ en posant des définitions: a et b étant des nombres:

$$\text{(I)} \qquad a\oplus 1=\text{seq}\, a$$
$$\text{(II)} \qquad a\oplus \text{seq}\, b=\text{seq}\,(a\oplus b).$$

L'opération $\oplus$ aura les propriétés connues de la somme classique.

(2) On introduira de la manière classique la notion de la »partie entière« du quotient de a par b ou $E(a, b)$.

L'expression $E(a, b)$ ne sera définie que lorsque a et b appartiennent à N et $a \geqq b$, c'est à dire lorsque $a = b$ ou bien s'il existe un nombre c tel que $a = b \oplus c$.

Ces notions une fois introduites, elles nous permettent de comprendre le sens de l'axiome A_6.

3. Pour nous convaincre que le système A_1—A_6 n'est pas contradictoire, imaginons l'arithmétique classique des nombres naturels entièrement donnée et soit N la classe des nombres naturels classiques, **1** égal à l'unité classique. Fixons un nombre naturel k et définissons la somme par: (1) $a + 1 = a \oplus 1$, (2) $a + (b + 1) = = a \oplus b \oplus E(b \oplus k, k)$, les signes $\oplus$ et E désignant les notions classiques.

On voit immédiatement que les axiomes A_1—A_6 se trouveront satisfaits, ce qui nous assure le caractère non-contradictoire de nos pseudo-arithmétiques lorsque nous supposons l'arithmétique classique dépourvue de contradiction.

4. Passons maintenant à l'application de nos pseudo-arithmétiques dans le monde de l'expérience.

L'objet de nos considérations sera formé par les ***collections d'objets concrets***, telles qu'elles nous sont fournies par l'expérience quotidienne. Pour arriver à la notion du nombre d'objets d'une collection, nous introduisons la pratique d'échange »un contre un« considérée comme un procédé tout-à-fait empirique. Aux collections dont les objets pourront être mis en correspondance biunivoque par ce procédé et seulement à celles-ci, nous attribuerons une marque commune appelée ***nombre*** d'objets de la collection donnée. L'ensemble des nombres ainsi formés nous donne l'image empirique de la classe N.

Parmi les collections, considérons celles qui sont composées ***d'un seul élément***, c'est à dire ne contenant pas d'objets ***différents*** [une collection concrète n'est jamais vide!]. L'expérience nous montre que toutes les collections de ce genre auront le même nombre d'objets que nous appellerons 1.

Pour arriver à la notion de ***somme***, considérons deux nombres quelconques a et b. Choisissons les collections A et B de façon que:

(1) $a =$ nombre d'objets dans A,

(2) $b =$ nombre d'objets dans B,

(3) A et B n'aient pas d'objets en commun.

Formons la collection C, composée des objets de la collection A et de ceux de la collection B. Nous appellerons $a + b$ le nombre d'objets de la collection C.

Cherchons maintenant à vérifier les axiomes $A_1 — A_6$. Quand à $A_1 — A_5$, nous devons les supposer vérifiés, de même que dans l'arithmétique classique. Il n'y aura de doute que pour l'axiome A_6. Or, nous voyons que:

$$a + b = a \oplus b.$$

lorsque a et b sont inférieurs au nombre k. Choisissons donc pour les besoins actuels de l'expérience le nombre k assez grand pour qu'***aucune expérience actuelle ne nous permette*** d'arriver pratiquement à des collections aussi nombreuses. Dans ce cas, l'expérience sera incapable de nous montrer un seul cas où $a + b$ différerait de la somme classique $a \oplus b$ et nous pouvons supposer A_6 vérifié, même si nos sommes sont toujours égales aux sommes classiques. Nous sommes donc incapables de faire empiriquement une distinction entre l'arithmétique classique et celles de nos pseudo-arithmétiques dans lesquelles la constante k a été choisie assez grande.

5. Nous croyons avoir montré par cet exemple qu'à côté du conventionalisme géométrique, nous pouvons en mettre un autre: ***le conventionalisme arithmétique.***

Kraków, 24.XI.1936.