Les matrices dans la théorie des espaces vectoriels

par

W. Wilkosz (Kraków)

Dans la théorie des espaces vectoriels, on se sert beaucoup de matrices à éléments numériques et plusieurs auteurs ne s'aperçoivent pas de ce que cet usage est double: ou bien une matrice de ce genre représente *dans un système de coordonnées* une opération linéaire entre les vecteurs de l'espace, ou bien elle détermine un *passage d'un système de coordonnées à un autre*. Il y a là une distinction à faire qui est importante à plusieurs points de vue. Il y a aussi lieu de préciser, en passant, la notion même de matrice, ce qui n'est pas toujours fait avec assez de soin. Un autre but de la présente note, c'est l'exposition d'un calcul symbolique dans la théorie des espaces vectoriels, qui s'adapte facilement à ce double emploi des matrices et permet d'éviter les confusions provenant de la méconnaissance de cette duplicité d'usage, confusions que l'on retrouve réellement dans les livres touchant cette question.

§ I. Espace vectoriel. 1. On définit un espace vectoriel à n dimensions dans un champ F (corps algébrique) de nombres $x, y, \ldots$ en se donnant une *classe* $\mathfrak{A}$ d'éléments: $\hat{a}, \hat{b}, \ldots$ appelés *vecteurs* et en définissant la *somme* $\hat{a}+\hat{b}$ de deux *vecteurs* ainsi que le *produit* $x\hat{a}$ d'un *nombre* du champ par *un vecteur*, et cela de telle manière que les conditions suivantes se trouvent vérifiées:

I. La *somme* de deux vecteurs quelconques est un *vecteur* bien déterminé.

II. On a toujours:

$$\hat{a}+\hat{b}=\hat{b}+\hat{a}, \quad (\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}=\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c})$$

III. Le *produit* $x\hat{a}$ d'un nombre arbitraire x du champ F par un vecteur quelconque $\hat{a}$ représente toujours un *vecteur* bien déterminé.

On pose par définition: $\hat{a}x = x\hat{a}$.

IV. On a toujours:

$$x(\hat{a}+\hat{b}) = x\hat{a} + x\hat{b}, \qquad (x+y)\hat{a} = x\hat{a} + y\hat{a}, \qquad x(y\hat{a}) = (xy)\hat{a}.$$

V. Il existe n éléments de la classe $\mathfrak{A}$:

$$\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n,$$

tels que chaque vecteur $\hat{x}$ puisse être mis, et *cela d'une seule manière*, sous la forme:

$$\hat{x} = x_1\hat{a}_1 + \ldots + x_n\hat{a}_n,$$

les x étant des nombres du champ F bien déterminés.

2. On démontre dans la théorie de ces espaces les faits suivants [v. p. ex. Dickson, *Algebras and their arithmetics*, Chicago 1924 ou Scorza, *Corpi numerici e algebre*. Messina 1924]:

1) Il existe un élément déterminé et unique $\hat{0}$ tel que toujours:

$$\hat{a} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{a} = \hat{a},$$

2) $0\hat{a} = \hat{0}$, $\alpha\hat{0} = \hat{0}$, $1\hat{a} = \hat{a}$.

3) En posant $-\hat{a} = (-1)\hat{a}$, $\hat{a} - \hat{b} = \hat{a} + (-\hat{b})$ on a l'équivalence des deux égalités:

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{c} \quad \text{et} \quad \hat{a} = \hat{c} - \hat{b}.$$

4) $x\hat{a} = 0$ implique $x = 0$ ou $\hat{a} = \hat{0}$.

5) Si $x \neq 0$, $x\hat{a} = \hat{b}$ équivaut à $\hat{a} = \dfrac{1}{x}\hat{b}$.

6) On appelle $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m$ *dépendents* ou *non*, selon qu'il existe ou non des nombres $x_1, \ldots, x_m$, *non tous nuls* et tels que:

$$x_1\hat{a}_1 + \ldots + x_m\hat{a}_m = \hat{0}.$$

En se servant de cette locution, on a les faits suivants:

α) il existe n vecteurs indépendants,

β) $n+h$ vecteurs $(h>0)$ quelconques sont toujours dépendants,

γ) les vecteurs qui entrent dans la condition V sont indépendants,

δ) il n'est pas possible de satisfaire à la condition V avec un nombre des vecteurs plus petit que n.

Remarque historique: La théorie des espaces vectoriels fût constituée, en principe, par H. Grassmann dans son ouvrage

Ausdehnungslehre (1844—1862). Développée depuis ce temps par plusieurs auteurs, elle se montra particulièrement importante dans les théories modernes de la Relativité et des Quanta [v. p. ex. H. Weyl: ***Raum, Zeit, Materie*** et ***Gruppentheorie und Quantenmechanik***].

§ II. Matrices. 1. Voici la définition précise et générale des matrices:

On appelle *matrice* à m lignes et n colonnes $(m > 0,\ n > 0)$ toute *fonction* (opérateur) $f(i, k)$ définie seulement pour les couples (i, k) de nombres entiers i et k tels que:

$$1 \leqq i \leqq m, \quad 1 \leqq k \leqq n,$$

et dont les valeurs $f(i, k)$ sont d'ailleurs complètement arbitraires.

Définie de cette façon, la notion de matrice est analogue à celle d'une suite finie d'éléments arbitraires.

En respectant la tradition mathématique, on écrit $f_{ik}, a_{ik}, \ldots$ au lieu de $f(i, k), a(i, k), \ldots$ et on représente la matrice par un tableau à double entrée comme p. ex.:

$$\begin{pmatrix} f_{11}, \ldots, f_{1n} \\ \vdots \\ f_{m1}, \ldots, f_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dans le calcul, on représente souvent une matrice par une seule lettre comme $A, B, \ldots, F, \ldots$

Une matrice à m lignes et n colonnes sera dite »de type (m, n)«; lorsque $m = n$, elle sera nommée »quadratique et de dimension n«.

Nous convenons d'écrire:

$$(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

au lieu de:

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

et nous nous servirons aussi de la notation abrégée: $\| a_{ik} \|_{m,n}$ au lieu de

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Au cas $m = n = 1$, nous écrivons simplement a_{11} au lieu de (a_{11}) ou $\|a_{ik}\|_{1,1}$. Dans la théorie des espaces vectoriels, nous ne rencontrerons dans la suite que des matrices dont les éléments seront ou bien des *nombres* (éléments du champ fondamental) ou bien des *vecteurs*.

2. *Somme et produit de deux matrices, produit d'une matrice par un élément.*

On définit habituellement:

$$\|a_{ik}\|_{m,n} + \|b_{ik}\|_{m,n} = \|a_{ik} + b_{ik}\|_{m,n},$$
$$\|a_{ik}\|_{m,n} \cdot \|b_{ik}\|_{n,p} = \|c_{ik}\|_{n,p},$$

avec:

$$c_{ik} = \sum_{s/1}^{n} a_{is} b_{sk},$$
$$s\|a_{ik}\|_{m,n} = \|sa_{ik}\|_{m,n}.$$

On voit que la *somme* $\|a_{ik}\| + \|b_{ik}\|$ n'a de sens que lorsque les deux matrices ont le même type et les sommes $a_{ik} + b_{ik}$ sont calculables.

De même, le produit $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$ est dépourvu de sens, excepté le cas où le nombre des *colonnes* de $\|a_{ik}\|$ coïncide avec celui des *lignes* de $\|b_{ik}\|$ et où les expressions $\sum\limits_{s/1}^{n} a_{is} b_{sk}$ ont des valeurs définies. Enfin, $s\|a_{ik}\|$ exige que les produits sa_{ik} soient calculables.

Nous supposons les règles élémentaires du calcul des matrices connues au lecteur. Remarquons seulement que, grâce aux propriétés des nombres et des vecteurs, la multiplication des matrices sera toujours associative (mais non nécessairement commutative!).

Remarque historique. La théorie des matrices a été fondée par Hamilton dans ses *Lectures on quaternions*, Dublin 1853; Cayley dans: *A memoir on the theory of matrices* (1857) et Laguerre: *Sur le calcul des systèmes linéaires*, J. Éc. Pol. 187 ont retrouvé de nouveau les principes de la théorie.

Parmi les oeuvres récentes, on doit citer specialement: Mac Duffee: *The Theory of Matrices.* Berlin 1933 et Wedderburn: *Lectures on Matrices.* New York 1934.

§ III. Systèmes de coordonnées. 1. Observons que lorsque:

$$\hat{x} = x_1 \hat{e}_1 + \dots + x_n \hat{e}_n$$

on a:

$$\hat{x} = (\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(v. les conventions p. 73)}$$

en remarquant encore que ***l'ordre de facteurs*** est bien déterminé par la comparaison des types de matrices qui entrent dans cette équation. Soient maintenant:

$$\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$$

n vecteurs ***indépendants***. Dans ce cas, nous appellerons la ***matrice***

$$S = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$$

base de l'espace vectoriel (à n dimensions) considéré. Pour chaque vecteur $\hat{x}$, les nombres $x_1, \dots, x_n$ tels que:

$$\hat{x} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sont déterminés, et cela d'une seule façon [1]). Nous appellerons la ***matrice***:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le ***représentant*** du vecteur $\hat{x}$ dans la ***base*** S ou dans le système de coordonnées défini par S et nous la désignerons par $\hat{x}_S$.

Les nombres $x_1, \dots, x_n$ seront dits ***coordonnées*** (première, seconde, ... n-ième).

On aura donc:

(1) $$\hat{x} = S \cdot \hat{x}_S$$

Remarque: On vérifiera que: S est du type $(1, n)$, $\hat{x}_S$ du type $(n, 1)$, donc le produit du type $(1, 1)$; d'autre part, $\hat{x}$ représente, grâce à notre convention, une matrice du type $(1, 1)$.

Le produit $\hat{x}_S \cdot S$ nous donnerait la matrice:

$$\begin{pmatrix} x_1 \hat{e}_1, \dots, x_1 \hat{e}_n \\ \vdots \\ x_S \hat{e}_1, \dots, x_n \hat{e}_n \end{pmatrix}$$

différente de $(\hat{x})$.

---

[1]) V. p. ex. Dickson, *op. cit.* n. 6, p. 14, 15.

2. Lorsque S est une base, on a:

$$\hat{x} = S \cdot \hat{x}_S, \quad \hat{y} = S \cdot \hat{y}_S,$$

donc:

$$\hat{x} + \hat{y} = S(\hat{x}_S + \hat{y}_S), \quad (\hat{x} + \hat{y})_S = \hat{x}_S + \hat{y}_S.$$

On aura aussi:

$$k\hat{x} = k \cdot S\hat{x}_S = S \cdot k\hat{x}_S,$$

donc:

$$(k\hat{x})_S = k \cdot \hat{x}_S.$$

3. $S = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ étant une ***base***, $\hat{x}$ un vecteur quelconque, on désignera son représentant $\hat{x}_S$ par la notation:

$$\hat{x}_S = \frac{1}{S}\,\hat{x}.$$

L'opérateur $\frac{1}{S}$ a un sens bien déterminé seulement lorsque S représente une ***base composée*** de n vecteurs ***indépendants***.

§ IV. Transformations linéaires[1]**. 1.** Un opérateur α entre ***vecteurs*** et ***vecteurs*** d'un même espace vectoriel à n-dimensions sera dit ***transformation linéaire*** ou ***homographie vectorielle*** lorsque:

1) le champ d'application de l'opérateur α est composé de tous les vecteurs.

2) On a toujours:

$$\alpha(\hat{x} + \hat{y}) = \alpha\hat{x} + \alpha\hat{y},$$

3) ainsi que:

$$\alpha(k\hat{x}) = k\alpha\hat{x},$$

(k = un nombre arbitraire du champ F).

Une homographie α sera dite ***singulière*** lorsqu'il existe n vecteurs ***indépendants*** $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$, tels que les vecteurs transformés: $\alpha\hat{e}_1, \ldots, \alpha\hat{e}_n$ soient ***dépendants***. Une homographie non-singulière (ou régulière) transforme toujours un n-uple de vecteurs indépendants en un autre, composé lui aussi de vecteurs indépendants.

2. Voici quelques théorèmes bien connus dans la théorie des homographies vectorielles.

Théorème. Pour qu'une homographie α soit singulière, il faut et il suffit qu'elle transforme chaque n-uple de vecteurs en un n-uple de vecteurs dépendants.

---

[1]) V. pour les détails l'ouvrage de MM. Burali-Forti et Marcolongo: *Analisi Vettoriale Generale*, v. I, Bologna 1929.

Théorème. Pour qu'une homographie α soit singulière, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $\hat{a}$ ***non nul***, tel que $\alpha\hat{a} = \hat{0}$.

Théorème. L'homographie α est ***réversible***, c'est à dire l'équation $\alpha\hat{x} = \hat{a}$ admet toujours solution et une seule, lorsqu'elle est régulière et seulement dans ce cas.

[V. p. ex. les indications dans le livre cité de Burali-Forti et Marcolongo].

L'inverse α^{-1} d'une homographie régulière est aussi une homographie vectorielle non-singulière.

3. Soit maintenant $S = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ la base d'un système de coordonnées, α une homographie vectorielle. Le vecteur $\hat{x}$ étant donné, son transformé par α: $\hat{y} = \alpha\hat{x}$ est un vecteur bien déterminé.

Nous avons:

$$S\hat{y}_S = \hat{y} = \alpha\hat{x} = \alpha \cdot S\hat{x}_S,$$

$$\hat{y}_S = \frac{1}{S}\hat{y} = \frac{1}{S} \cdot (\alpha \cdot S\hat{x}_S),$$

donc $\hat{y}_S$ est une fonction de $\hat{x}_S$.

Déterminons la forme de cette fonction. Nous avons droit de poser:

$$\hat{x} = S\hat{x}_S = x_1\hat{e}_1 + \ldots + x_n\hat{e}_n,$$

$$\hat{y} = \alpha\hat{x} = x_1\alpha\hat{e}_1 + \ldots + x_n\alpha\hat{e}_n.$$

On peut poser aussi:

$$\alpha\hat{e}_k = a_{1k}\hat{e}_1 + \ldots + a_{nk}\hat{e}_n, \qquad k = 1, \ldots n$$

d'où:

$$\hat{y} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} x_k \right) \hat{e}_i,$$

donc:

$$\hat{y}_S = \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $\|a_{ik}\|_{m,n}$ déterminée par S et α sera appelée le ***représentant*** de l'homographie α dans la base S et désignée par α_S.

Les égalités:

(2) $$\hat{y} = \alpha\hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{y}_S = \alpha_S\hat{x}_S,$$

sont équivalentes.

On démontre facilement le théorème: pour que l'homographie α soit singulière, il faut et il suffit que α_S soit une matrice singulière (à déterminant nul) et cela pour chaque base S (il suffit que cela ait lieu pour l'une quelconque d'entre elles).

Supposons maintenant α ***réversible.*** L'égalité:

$$\hat{y} = \alpha\hat{x}$$

nous donne: $\hat{x} = \alpha^{-1}\hat{y}$, d'où:

$$\hat{y}_S = \alpha_S\hat{x}_S, \quad \hat{x}_S = (\alpha^{-1})_S\,\hat{y}_S, \quad \hat{x}_S = (\alpha^{-1})_S\,\alpha_S\,\hat{x}$$

et cela pour un $\hat{x}$ arbitraire. Donc:

$$(\alpha^{-1})_S\alpha_S = E, \qquad (E\text{=matrice-unité})$$

ou bien:

$$(\alpha^{-1})_S = (\alpha_S)^{-1}.$$

Au cours de ce §, nous avons rencontré les matrices numériques dans leur ***première*** fonction, comme ***représentants des homographies*** vectorielles dans divers systèmes de coordonnées.

§ V. Transformateurs des coordonnées. 1. Soient $S=(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$, $T = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$, S étant une ***base.***

On peut poser:

$$\hat{f}_k = \hat{e}_1 p_{1k} + \ldots + \hat{e}_n p_{nk} \qquad k=1, \ldots, n.$$

En appelant $\frac{T}{S}$ la matrice (unique!) $\|p_{ik}\|_{n,n}$, on aura:

$$T = S \cdot \frac{T}{S}. \tag{3}$$

Remarque. L'ordre des facteurs dans (3) est facile à retenir: pour avoir la matrice T du type $(1, n)$ (une ligne) on peut seulement multiplier S du type $(1, n)$ par $\frac{T}{S}$ du type (n, n) et non $\frac{T}{S}$ par S, ce qui nous donnerait une matrice du type $(n, 1)$ (une colonne).

La matrice $\frac{T}{S}$ sera appelée ***„transformateur de S en T“.***

2. On voit facilement que:

1) $\frac{T}{S}$ n'est défini que lorsque S est une ***base;***

2) lorque S et T sont toutes les deux des bases, $\frac{T}{S}$ et $\frac{S}{T}$ seront définies et encore:

(4) $$\frac{S}{T} = \left(\frac{T}{S}\right)^{-1}$$

$$\left\{S = \frac{T}{S} \cdot T = \frac{T}{S}\left(\frac{S}{T} \cdot S\right) = \left(\frac{T}{S} \cdot \frac{S}{T}\right) \cdot S, \quad E = \frac{T}{S} \cdot \frac{S}{T}, \quad \frac{S}{T} = \left(\frac{T}{S}\right)^{-1}\right\}$$

3) S et T étant deux bases, W une ligne de n vecteurs, on aura:

(5) $$\frac{W}{S} = \frac{T}{S} \cdot \frac{W}{T}$$

$$\left\{W = T \cdot \frac{W}{T} = \left(S \cdot \frac{T}{S}\right) \cdot \frac{W}{T} = S \cdot \left(\frac{T}{S} \cdot \frac{W}{T}\right) = S \cdot \frac{W}{S}\right\}.$$

C'est sous la forme de ***transformateurs*** que les matrices numériques apparaissent pour la ***seconde*** fois dans la théorie des espaces vectoriels. Les deux modes de leur fonctionnement, comme représentants des homographies vectorielles et comme transformateurs sont bien différents. Grâce aux notations introduites dans ce travail, il ne sera pas possible, nous le croyons, de confondre ces deux modes de leur emploi.

3. ***Passage de*** $\hat{x}_S$ ***à*** $\hat{x}_T$.

Soient S et T deux bases. On aura:

$$\hat{x} = S\hat{x}_S = \left(T \cdot \frac{S}{T}\right)\hat{x}_S = T \cdot \left(\frac{S}{T}\hat{x}_S\right),$$

donc:

(6) $$\hat{x}_T = \frac{S}{T}\hat{x}_S,$$

ce qu'on peut écrire aussi:

(6′) $$\hat{x}_T = \frac{1}{T}(S\hat{x}_S)$$

4. ***Passage de*** α_S ***à*** α_T.

Soit: $\hat{y} = \alpha\hat{x}$. On aura:

$$\hat{y}_T = \frac{S}{T}\hat{y}_S = \frac{S}{T} \cdot \alpha_S \hat{x}_S = \frac{S}{T} \cdot \alpha_S \cdot \frac{T}{S}\hat{x}_T = \left(\frac{S}{T}\alpha_S\frac{T}{S}\right)\hat{x}_T,$$

donc:

(7) $$\alpha_T = \frac{S}{T}\alpha_S\frac{T}{S}.$$

5. *Produit scalaire relatif de Wedderburn.*

Soit $A = \|a_{ik}\|_{m,n}$; définissons A^* ou »transposée de A« par l'équation:

$$A^* = \|b_{ik}\|_{n,m} \quad \text{avec} \quad b_{ik} = a_{ki}.$$

On connait la relation: $(AB)^* = B^* \cdot A^*$.

Soit maintenant $S = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ une base. Nous posons avec Wedderburn:

$$\hat{x} \underset{S}{\times} \hat{y} = \hat{x}_S^* \cdot \hat{y}_S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$$

[»produit scalaire de $\hat{x}$ par $\hat{y}$ *relatif* à la base S«].

Passage de $\hat{x} \underset{S}{\times} \hat{y}$ *à* $\hat{x} \underset{T}{\times} \hat{y}$.

Soient S et T deux bases. Nous faisons le calcul suivant:

$$\hat{x} \underset{T}{\times} \hat{y} = (\hat{x}_T)^* \cdot (\hat{y}_T) = \left(\frac{S}{T}\hat{x}_S\right)^* \cdot \left(\frac{S}{T}\hat{y}_S\right) = \hat{x}_S^* \cdot \left(\frac{S}{T}\right)^* \cdot \frac{S}{T} \cdot \hat{y}_S =$$
$$= \hat{x}_S^* \cdot \left[\left(\frac{S}{T}\right)^* \cdot \frac{S}{T}\right] \cdot \hat{y}_S = \hat{x}_S \times_S \left[\left(\frac{S}{T}\right)^* \left(\frac{S}{T}\right)\right] \hat{y}_S$$

Ces exemples nous sufissent pour montrer avec quelle facilité on effectue les calculs et on obtient les formules dans la théorie des espaces vectoriels. On pourrait aller plus loin et, en introduissant la notion du produit de deux vecteurs, soit interne (produit de deux vecteurs=un nombre) soit externe (produit de deux vecteurs = un vecteur), se diriger vers la ***géometrie métrique*** ou vers ***l'algèbre***. Mais, pour le moment, nous n'avons pas l'intention de suivre cette voie.

Cracovie, 22.IX 1936.