# Über Dyadensummen

von

A. Hoborski (Kraków)

Wir setzen die Theorie der Dyadensummen von Gibbs für den Raum $R_3$ als bekannt voraus und werden einige — wie es scheint — neue Sätze angeben.

1. *Wenn $\Phi_2$ die sog. zweite Dyadensumme für $\Phi$ bedeutet und wenn $\Phi_2 = \Phi$ ist, so ist $\Phi$ entweder eine Nullsumme oder eine Dyadensumme der Drehung.*

**Beweis**. Ist $\Phi$ von der Nullsumme verschieden, so kann $\Phi$ weder linear noch eben sein: ist nämlich $\Phi$ linear, so ist $\Phi_2$ eine Nullsumme, was der Gleichung $\Phi_2 = \Phi$ widerspricht; ebenso verhält es sich, wenn $\Phi$ eben ist, da in diesem Falle $\Phi_2$ linear ist.

Es ist also $\Phi$ regulär d. h. es ist seine Discriminante $D(\Phi) \neq 0$. Für jede Dyadensumme $\Phi$ besteht die Gleichung:

$$\Phi_2 \times \Phi_c = \Phi_3 \dot{I}; \tag{1}$$

infolge der Voraussetzung $\Phi_2 = \Phi$ ist also

$$\Phi \times \Phi_c = \Phi_3 \dot{I}. \tag{2}$$

Daraus erhält mann leicht

$$\Phi_3^2 = \Phi_3^3,$$

woraus $\Phi_3 = 1$ folgt, da $\Phi_3 = D(\Phi) \neq 0$ ist. Daraus und aus (2) folgt

$$\Phi \times \Phi_c = \dot{I}. \tag{3}$$

Diese Gleichung sammt $\Phi_3 = 1$ ergiebt nach einem Satze von Gibbs, dass $\Phi$ die Dyadensumme einer Drehung darstellt.

**2.** *Sind $\Phi$ und $\Psi$ zwei Dyadensummen, $\lambda$ ein Skalar und $\lambda \neq 0$ und ist das skalare Produkt $\Phi \times \Psi = \lambda \dot{I}$, wo $\dot{I}$ die identifizierende Dyadensumme bedeutet, so ist*

$$(2) \qquad \Phi \times \Psi = \Psi \times \Phi.$$

**Beweis.** Es ist $\Phi \times (\Psi \times \Phi) = (\Phi \times \Psi) \times \Phi = \lambda \dot{I} \times \Phi = \Phi \times (\lambda \dot{I}) = \Phi \times (\Phi \times \Psi)$, woraus — da $\Phi$ regulär sein muss (es ist $\lambda \neq 0$) — unmittelbar folgt, dass (2) zutrifft.

**3.** *Es ist:*

$$(3) \qquad (\Phi_2)_2 = \Phi_3 \Phi, \quad (\Phi_2)_3 = \Phi_3^2.$$

**Beweis.** Ist $\Phi$ in Dreierform gegeben:

$$(4) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i,$$

so ist

$$\Phi_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} a_i \wedge a_k \, b_i \wedge b_k,$$

wenn wir mit $\wedge$ das vektorielle Produkt bezeichnen. Daraus folgt schon leicht die zweite der Relationen (3). Ferner erhält man

$$(\Phi_2)_2 = \tfrac{1}{8} \sum_{ikjl} (a_i \wedge a_k) \wedge (a_j \wedge a_l)(b_i \wedge b_k) \wedge (b_j \wedge b_l) =$$
$$= \tfrac{1}{8} \sum_{ikjl} [a_k |a_i a_j a_l| - a_i |a_k a_j a_l|][b_k |b_i b_j b_l| - b_i |b_k b_j b_l|]$$
$$= \tfrac{1}{8} \{ \sum_{ikjl} a_k b_k |a_i a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| + \sum_{ikjl} a_i b_i |a_k a_j a_l| \, |b_k b_j b_l| -$$
$$- \sum_{ikjl} a_k b_i |a_i a_j a_l| \, |b_k b_j b_l| - \sum_{ikjl} a_i b_k |a_k a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| \}.$$

Die zwei ersten Summen der letzten Klammer sind gleich; ebenso sind die zwei letzten Summen gleich; es ist also:

$$(\Phi_2)_2 = \tfrac{1}{4} \{ \sum_{ikjl} a_i b_i |a_k a_j a_l| \cdot |b_k b_j b_l| - \sum_{ikjl} a_i b_k |a_k a_j a_l| \, |b_i b_j b_l| \}.$$

Da $i, k, j, l = 1, 2, 3$ ist, so ist leicht zu ersehen, dass die Glieder der letzten Summe gleich Null sind, wenn $i \neq k$ ist. Folglich haben wir:

$$(\Phi_2)_2 = \tfrac{1}{4} \{ \sum_i a_i b_i \cdot \sum_{kjl} |a_k a_j a_l| \cdot |b_k b_j a_l| - \sum_{ijl} a_i b_i |a_i a_j a_l| \cdot |b_i b_j b_l| \} = \Phi_3 \Phi,$$

da $\Phi_3 = |a_1 a_2 a_3| \cdot |b_1 b_2 b_3|$ ist.

4. *Es ist für jede Dyadensumme $\Phi$:*

$$\Phi_2 \overset{2}{\wedge} \Phi = (\Phi_c \times \Phi)_s \Phi - \Phi \times \Phi_c \times \Phi, \tag{5}$$

*wenn* $\overset{2}{\wedge}$ *die doppelte vektorielle Multiplikation,* $\Phi_c$ *die Konjugierte zu* $\Phi$, $\Phi_s$ *den Skalar (oder erste Invariante) von* $\Phi$ *bedeuten.*

**Beweis.** Wir dürfen voraussetzen, dass in (4) die $a_i (i = 1, 2, 3)$ ein ortogonales System von Einheitsvektoren bilden. Dann ergiebt eine leichte Rechnung, dass:

$$\Phi_2 \overset{2}{\wedge} \Phi = \Psi_s \Phi - \Phi \times \Psi \tag{6}$$

ist, wenn

$$\Psi = \sum_{i=1}^{3} b_i b_i$$

ist. Man erhält aber sofort, dass

$$\Phi_c \times \Phi = \sum_{ik} b_i a_i \times a_k b_k = \sum_i b_i b_i = \Psi$$

ist, woraus (5) folgt.