Über spezielle Ebenen des Raumes R_4

von

A. Hoborski (Kraków)

§ 1. Im vierdimansionalen, euklidischen Raume R_4 giebt es Ebenen, die die Eigenschaft besitzen, dass jede reguläre Kurve, die in ihr liegt, isotrop ist. Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir zuerst folgendes Problem lösen: es sollen alle isotropen Vektoren des R_4 bestimmt werden, die zu einem gegebenen isotropen Vektor ortogonal sind.

Wir erinnern an folgende allgemeine Definitionen [1]): ein Vektor mit den Komponenten u_i $(i=1,2,...,n)$ ist isotrop, wenn er zwei Bedingungen erfüllt:

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} |u_i| > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0.$$

Zwei Vektoren mit den Komponenten u_i, resp. v_i $(i=1,2,...,n)$ nennt man ortogonal, wenn:

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 0$$

ist; sie sind parallel, wenn es zwei, nicht zugleich verschwindende Zahlen λ, μ von der Art giebt, dass die Relationen

(3)
$$\lambda u_i + \mu v_i = 0 \qquad (i=1,2,...,n)$$

zutreffen.

Für R_2 und R_3 gilt der bekannte Satz: *Sind zwei isotrope Vektoren des R_2 oder R_3 zu einander ortogonal, so sind sie auch parallel.* Dieser Satz ist aber unrichtig [2]) für R_n, wenn $n \geqslant 4$ ist. Deshalb ist unser obiges Problem nicht trivial.

---

[1]) Wir setzen in dieser Note voraus, dass der Raum R_n auf ein ortogonales Achsensystem bezogen ist.

[2]) Dass im Falle $n=4$ der Satz unrichtig ist, beweist ein einfaches Beispiel zweier Vektoren $(1,i,0,0)$, $(0,0,1,i)$, das vom Herrn S. Gołąb stammt.

§ 2. Es sei also ein isotroper Vektor u_i $(i=1,2,3,4)$ im R_4 gegeben; wir wollen alle isotrope Vektoren v_i $(i=1,2,3,4)$ finden, die zum Vektor u_i ortogonal sind. Es soll also sein:

$$\sum_{i=1}^{4} u_i^2=0, \quad \Sigma|u_i|>0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{4} v_i^2=0, \quad \sum_{i=1}^{4}|v_i|>0, \quad \sum_{i=1}^{4} u_i v_i=0. \tag{5}$$

Ausserdem werden wir annehmen, dass es keine Zahl λ giebt, für welche die Relation

$$v_i=\lambda u_i \qquad (i=1,2,3,4) \tag{6}$$

zutreffen könnte; wir tun diese Annahme, um die triviale Lösung (6) auszuschalten.

Zur Lösung des Problems bedienen wir uns der bekannten Vektorrechung für R_3. Auf Grund (4) sind wenigstens zwei Zahlen u_i von Null verschieden. Wir nehmen zuerst an, dass $u_1 \neq 0$ ist. Mit e_k $(k=2,3,4)$ bezeichnen wir ein ortogonales Dreibein von Einheitsvektoren in einem Hilfsraum R_3 und führen zwei Vektoren ein:

$$\boldsymbol{u}=\sum_{k=2}^{4} u_k \boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{v}=\sum_{k=2}^{4} v_k \boldsymbol{e}_k, \tag{7}$$

wodurch (4) und (5) folgende Form annehmen[1]):

$$u_1^2+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=0, \quad |u_1|+\sum_{k=2}^{4}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_k|>0; \tag{$8_{1,2}$}$$

$$v_1^2+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0, \quad |v_1|+\sum_{k=2}^{4}|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_k|>0, \quad u_1v_1+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=0. \tag{$9_{1,2,3}$}$$

Da $u_1 \neq 0$, so folgt aus (9_3):

$$v_1=-\frac{1}{u_1}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}, \tag{10}$$

worauf (9_1) ergiebt:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})^2+u_1^2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0;$$

hieraus und (8_1) folgt weiter:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})^2-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}\;\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0$$

oder

$$(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})=0. \tag{11}$$

---

[1]) Mit $\times$ bezeichnen wir das innere (skalare) Produkt, mit $\wedge$ das äussere (vektorielle) Produkt zweier Vektoren für R_3.

Weder $\boldsymbol{u}$ noch $\boldsymbol{v}$ ist ein Nullvektor und da nach Voraussetzung (6) nicht erfüllt ist, ist auch $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ kein Nullvektor; dies sammt (11) ergiebt, dass $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ ein isotroper Vektor des Raumes R_3 ist; es lassen sich also die Komponenten von $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ längs $\boldsymbol{e}_k$ durch zwei Parameter λ, μ in folgender Weise ausdrücken:

$$(12_{1,2,3}) \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2| = \lambda^2 - \mu^2, \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3| = 2\lambda\mu, \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_4| = i(\lambda^2 + \mu^2),$$

wobei $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ die Determinante der Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ bezeichnet. Die Parameter λ, μ sind jedoch nicht beliebig, denn es ist:

$$\sum_{k=2}^{4} |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_k| u_k = |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \sum_{k=2}^{4} u_k \boldsymbol{e}_k| = |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}| = 0;$$

daraus folgt die Relation:

$$(\lambda^2 - \mu^2) u_2 + 2\lambda\mu u_3 + i(\lambda^2 + \mu^2) u_4 = 0$$

oder:

$$(13) \qquad \lambda^2 (u_2 + i u_4) + 2\lambda\mu u_3 - \mu^2 (u_2 - i u_4) = 0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem (I) $u_2 + i u_4 = 0$ oder (II) $u_2 + i u_4 \neq 0$ ist.

I. Ist $u_2 + i u_4 = 0$, so ist $u_2^2 + u_4^2 = 0$, also nach (4) auch $u_1^2 + u_3^2 = 0$ und da $u_1 \neq 0$ ist, so ist auch $u_3 \neq 0$. Aus (13) erhalten wir jetzt:

(I, 1) $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ und beliebig oder (I, 2) $\lambda = \dfrac{u_2}{u_3} \mu$, $\mu \neq 0$ und beliebig. Im Falle (I, 1), den wir zuerst betrachten, bekommen wir aus (12):

$$(14) \qquad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2| = \lambda^2, \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3| = 0, \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_4| = i\lambda^2.$$

Aus (14_2) folgt zuerst, dass $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{e}_3$ in einer Ebene liegen, es existieren also Zahlen ϱ und σ, dass:

$$(15) \qquad \boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u} + \varrho \boldsymbol{e}_3, \quad |\varrho| + |\sigma| > 0.$$

ist. Wenn man dies in (14_3) einsetzt, so erhält man $u_2 \neq 0$ und

$$\varrho = \frac{\lambda^2 i}{u_2};$$

bei diesem Werte von ϱ ist auch (14_1) erfüllt. Wir erhalten also ($\tau = \lambda^2$ gesetzt):

$$(16) \qquad \boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u} + \frac{i\tau}{u_2} \boldsymbol{e}_3,$$

nachher ergibt (10):

$$v_1 = \sigma u_1 - \frac{i\tau}{u_1 u_2} u_3.$$

Daraus und aus (16) folgt:

$$(17)\qquad v_1 = \sigma u_1 - \frac{i\tau}{u_1 u_2} u_3, \quad v_2 = \sigma u_2, \quad v_3 = \sigma u_3 + \frac{i\tau}{u_2}, \quad v_4 = \sigma u_4.$$

Man überzeigt sich leicht, dass wir damit eine Lösung unseres Problems erhalten haben.

Im Falle (I, 2) übergehen die Gleichungen (12) in folgende

$$(18)\qquad \begin{gathered} |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2| = -\frac{u_3^2 + u_4^2}{u_3^2}\mu^2, \quad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3| = -\frac{2iu_4}{u_3}\mu^2, \\ |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_4| = \frac{i(u_3^2 - u_4^2)}{u_3^2}\mu^2. \end{gathered}$$

Aus diesen Relationen erhält man:

$$(19)\qquad |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, i\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 - \frac{u_4}{u_3}\boldsymbol{e}_3| = 0;$$

es giebt also zwei solche Zahlen ϱ, σ, dass:

$$(20)\qquad \boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u} + \varrho\left(i\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 - \frac{u_4}{u_3}\boldsymbol{e}_3\right).$$

Wenn wir diesen Ausdruck in (18) einsetzen, so erhalten wir:

$$\varrho = -\frac{\tau}{u_3},$$

wenn $\tau = \mu^2$ ist. Für diesen Wert für ϱ ergiebt (20):

$$(21)\qquad \boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u} - \frac{\tau}{u_3}\left(i\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 - \frac{u_4}{u_3}\boldsymbol{e}_3\right).$$

Hieraus und aus (10) folgt:

$$v_1 = \sigma u_1 + \frac{\tau u_4}{u_1 u_3}.$$

Es ist also, wenn wir noch $\tau = \varrho u_1 u_3^2$ setzen:

$$(22)\qquad \begin{gathered} v_1 = \sigma u_1 + \varrho u_3 u_4, \quad v_2 = \sigma u_2 - i\varrho u_1 u_3, \quad v_3 = \sigma u_3 + \varrho u_1 u_4, \\ v_4 = \sigma u_4 - \varrho u_1 u_3. \end{gathered}$$

Im Falle II (sog. allgemeine F.) erhält man zuerst aus (13):

$$(23)\qquad \lambda = \frac{-u_3 + \varepsilon i u_1}{u_2 + iu_4}\cdot\mu \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Setzen wir für (23):

$$\lambda^2 - \mu^2 = a_2 \mu^2, \quad 2\lambda\mu = a_3 \mu^2, \quad i(\lambda^2 + \mu^2) = a_4 \mu^2, \tag{24}$$

so ist

$$\begin{gathered} a_2 = -\frac{2(u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon i u_1 u_3 + i u_2 u_4)}{(u_2 + i u_4)^2}, \quad a_3 = -\frac{2(u_3 - \varepsilon i u_1)}{u_2 + i u_4}, \\ a_4 = -\frac{2i(u_1^2 + u_4^2 + \varepsilon i u_1 u_3 - i u_2 u_4)}{(u_2 + i u_4)^2}, \end{gathered} \tag{25}$$

Da jetzt $u_2 + i u_4 \neq 0$ ist, so setzen wir:

$$\frac{v_2 + i v_4}{u_2 + i u_4} = \sigma \quad \text{oder} \quad v \times (e_2 + i e_4) = \sigma (u_2 + i u_4). \tag{26}$$

Die Gleichungen (12) ersetzen wir durch folgende:

$$u \wedge v = (a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4)\mu^2$$

und berechnen $(u \wedge v) \wedge (e_2 + i e_4)$; wir erhalten leicht:

$$v(u_2 + i u_4) - u\sigma(u_2 + i u_4) = (i a_3 e_2 + (a_4 - i a_2) e_3 - a_3 e_4)\mu^2.$$

Es ist $a_4 - i a_2 = 2i$, wie aus (25) leicht folgt. Setzen wir $\mu^2 = \tau(u_2 + i u_4)$, so bekommen wir:

$$v = \sigma u + (i a_3 e_2 + 2 i e_3 - a_3 e_4)\tau,$$

es ist also nach (10):

$$v_1 = \sigma u_1 + 2\varepsilon\tau.$$

Wir erhielten also folgende Lösung:

$$\begin{gathered} v_1 = \sigma u_1 + 2\varepsilon\tau, \quad v_2 = \sigma u_2 + i a_3 \tau, \quad v_3 = \sigma u_3 + 2 i \tau, \\ v_4 = \sigma u_4 - a_3 \tau. \end{gathered}$$

Wenn wir noch $\tau = (u_2 + i u_4)\varrho$ setzen, so nimmt die gefundene Lösung folgende Form an:

$$\begin{cases} v_1 = \sigma u_1 + 2\varepsilon\varrho(u_2 + u_4 i), & v_2 = \sigma u_2 - 2i\varrho(u_3 - \varepsilon i u_1), \\ v_3 = \sigma u_3 + 2i\varrho(u_2 + i u_4), & v_4 = \sigma u_4 + 2\varrho(u_3 - \varepsilon i u_1) \end{cases} \tag{27}$$

Setzen wir hier $u_2 + i u_4 = 0$; wir erhalten — wie leicht zu ersehen ist — die Formeln (17); dazu genügt es nämlich in (17)

$$\sigma + \frac{i\tau}{u_3 u_2} = \sigma', \quad \tau = 2\varrho u_3 (u_3 - \varepsilon i u_1)$$

zu setzen. (Man vergesse auch nicht, dass in dem Falle (I, 1) $u_1^2 = -u_3^2$ ist!).

Die Lösungen (17) sind folglich in (27) als Grenzfall enthalten.

Es bleiben also zwei Fälle übrig, die durch die Formeln (22) und (27) bestimmt sind. Sie sind ganz verschieden, denn aus (22) erhält man

$$v_2 + i v_4 = -2 i \varrho u_1 u_3 \neq 0,$$

da man $\varrho \neq 0$ wählen muss; aus (27) folgt aber für $u_2 + i u_4 = 0$, dass auch $v_2 + i v_4 = 0$ ist.

Wir haben folgendes bewiesen:

Satz 1. *Wenn u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Komponenten eines gegebenen isotropen Vektors im R_4 beteuten, so sind die Komponenten v_i aller isotropen Vektoren, die zum Gegebenen ortogonal sind, durch folgende Formeln bestimmt:*

(A) *Formeln* (22), *wenn* $u_1 \neq 0$, $u_2 + i u_4 = 0$, $|\sigma| + |\varrho| > 0$, *sonst* σ, ϱ *beliebig;*

(B) *Formeln* (27), *wenn* $u_1 \neq 0$, $|\sigma| + |\varrho| > 0$, *sonst* σ, ϱ *beliebig.*

Im Falle, wenn $u_1 \neq 0$, $u_2 + i u_4 = 0$ ist, haben wir ausser (22) noch Vektoren, die aus (27) folgen:

$$v_1 = \sigma u_1, \quad v_2 = \sigma u_2 - i\tau, \quad v_3 = \sigma u_3, \quad v_4 = \sigma u_4 + \tau, \tag{28}$$

wenn $\tau \neq 0$, sonst σ, τ beliebig.

§ 3. Wie aus den Formeln (22) und (27) zu ersehen ist, liegen die Vektoren (22) in einer Ebene des R_4, dasselbe gilt für die Vektoren (27). Wenn wir mit x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die ortogonalen Kartesischen Koordinaten bezeichnen, so ist durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} x_1 = y u_1 + z u_3 u_4, \quad x_2 = y u_2 - i z u_1 u_3, \quad x_3 = y u_3 + z u_1 u_4, \\ x_4 = y u_4 - z u_1 u_3 \end{gathered} \tag{29}$$

bei beliebigen y, z eine Ebene durch den Koordinatenursprung bestimmt; es soll $u_1 \neq 0$, $u_2 + i u_4 = 0$ sein. In dieser Ebene liegen unendlich viele isotrope Vektoren mit dem Anfanspunkt im Punkte (0, 0, 0, 0). Dies ist eine Eigenschaft, die den Ebenen des R_3 nicht zukommt.

Eine zweite elementare Eigenschaft—die man leicht beweist—beruht darauf, dass die Ebene (29) nur einen einzigen reellen Punkt (nämlich den Ursprung) besitzt.

Noch eine — gewiss die interessanteste — Eigenschaft wollen wir angeben: jede reguläre Kurve dieser Ebene ist isotrop. Wir erhalten aus (29), dass $ds^2 = \Sigma dx_i^2 = 0$, ist, was unsere eingangs ausgesprochene Behauptung beweist.

Wenn $u_2 + iu_4 \neq 0$, so erlauben uns die Formeln (27) folgende Ebene zu definieren

$$(30) \quad \begin{aligned} x_1 &= y\,u_1 + z\varepsilon(u_2 + i\,u_4), & x_2 &= y\,u_2 - z\,i(u_3 - \varepsilon\,i\,u_1) \\ x_3 &= y\,u_3 + i\,z(u_2 + i\,u_4), & x_4 &= y\,u_4 + z(u_3 - \varepsilon\,i\,u_1). \end{aligned}$$

[Wenn aber $u_2 + i\,u_4 = 0$, so soll hier $\varepsilon = \pm 1$ so gewählt werden, dass $u_3 \neq \varepsilon\,i\,u_1$ ist]. Auch für diese Ebene ist $ds^2 = 0$.

Kraków, 16 IV 1936.