ANNÉE 1662.

CXII.

FERMAT A C. DE LA CHAMBRE.

DIMANCHE 1 JANVIER 1662.

(D., III, 51; *Ccrrespondanoe Huygens*, n° 990.)
Bibl. Nat. fr. n. a. 3280.

MONSIEUR,

1. Il est juste de vous obéir et de terminer enfin par votre entremise le vieux démêlé qui a été depuis si longtemps entre M. Descartes et moi sur le sujet de la réfraction, et peut-être serai-je assez heureux pour vous proposer une paix que vous trouverez avantageuse à tous les deux partis.

Je vous ai dit autrefois, dans ma première lettre [1], que M. Descartes n'a jamais démontré son principe; car, outre que les comparaisons ne servent guère à fonder des démonstrations, il emploie la sienne à contre-sens et suppose même que le passage de la lumière est plus aisé par les corps durs que par les rares, ce qui est apparemment faux. Je ne vous redis rien du défaut de la démonstration en elle-même, quand bien la comparaison dont il se sert seroit bonne et admissible en cette matière, pource que j'ai traité tout cela bien au long dans mes lettres à M. Descartes pendant sa vie, ou dans celles que j'ai écrites à M. Clerselier depuis sa mort [2].

(1) Lettre LXXXVI.
(2) Les Lettres à Mersenne XXII et XXIV, à Clerselier XC, XC *bis*, XCV, XCVII.

2. J'ajoute seulement qu'ayant vu le même principe de M. Descartes dans plusieurs auteurs qui ont écrit après lui, leurs démonstrations, non plus, ne me paroissent point recevables et ne méritent point de porter ce nom : Hérigone ([1]) se sert, pour le démontrer, des équipondérants et de la raison des poids sur les plans inclinés ; le Père Maignan ([2]) y veut parvenir d'une autre manière. Mais il est aisé de voir qu'ils ne démontrent ni l'un ni l'autre, et qu'après avoir lu et examiné avec soin leurs démonstrations, nous sommes aussi incertains de la vérité des principes qu'après avoir lu M. Descartes.

Pour sortir de cet embarras et tâcher de trouver la véritable raison de la réfraction, je vous indiquai dans ma lettre que, si nous voulions employer dans cette recherche ce principe si commun et si établi, que *la nature agit toujours par les voies les plus courtes,* nous pourrions y trouver facilement notre compte. Mais parce que vous doutâtes d'abord que la nature, en conduisant la lumière par les deux côtés d'un triangle, puisse jamais agir par une voie aussi courte que si elle la conduisoit par la base ou par la soustendante, je m'en vais vous faire voir le contraire de votre sentiment ou plutôt de votre doute, par un exemple aisé.

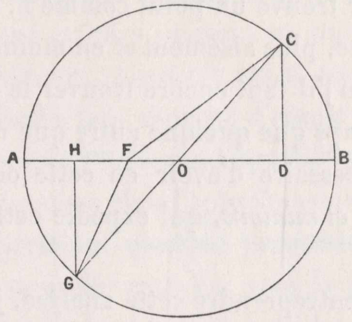
3. Soit, en la figure à part (*fig.* 100), le cercle ACBG, duquel le diamètre soit AOB, le centre O et un autre diamètre GOC. Des points G et C soient tirées les perpendiculaires sur le premier diamètre, GH, CD. Supposons que le premier diamètre AOB sépare deux milieux différents, dont l'un qui est celui de dessous, AGB, soit le plus dense et celui de dessus, ACB, soit le plus rare, en telle sorte, par exemple, que le passage par le plus rare soit plus aisé que celui par le plus dense en raison double.

([1]) Cursus mathematicus tomus quintus, Paris, chez Simeon Piget, MDC XLIV, p. 129-130. Axiome V : « Les puissances de pénétrer divers mediums diaphanes, qu'ont les rayons optiques, s'augmentent ou diminuent proportionnellement par la mutation des mediums ; et il y a mesme proportion entre les puissances des rayons d'incidence et de réfraction qu'entre les pressemens qu'ils recevroient des poids égaux s'ils en soustenoient. »

([2]) Perspectiva horaria seu de horographia gnomonica tum theoretica tum practica libri quatuor. Rome, 1648 ; in-fol., pages 631-647.

Il suit de cette supposition que le temps qu'emploie le mobile ou la lumière de C en O est moindre que celui qui les conduit de O en G, et que le temps du mouvement de C en O, qui se fait dans le milieu le plus rare, n'est que la moitié du temps du mouvement de O en G. Et par conséquent la mesure du mouvement entier par les deux droites CO

Fig. 100.



et OG peut être représentée par la somme de la moitié de CO et de la totale OG; de même, si vous prenez un autre point, comme F, le temps du mouvement par les deux droites CF et FG peut être représenté par la somme de la moitié de CF et de la totale FG.

Supposons maintenant que le rayon CO soit 10, et par conséquent le diamètre total COG sera 20; que la droite HO soit 8, la droite OD soit aussi 8; et qu'enfin la droite OF ne soit que 1. Je dis qu'en ce cas le mouvement qui se fait par la droite COG se fera en un temps plus long que celui qui se fait par les deux côtés du triangle CF, FG.

Car si nous prouvons que la moitié de CO, jointe à la totale OG, contient plus que la moitié de CF jointe à la totale FG, la conclusion sera manifeste, puisque ces deux sommes sont justement la mesure du temps de ces deux mouvements. Or la somme de la moitié de CO et de la totale OG fait justement 15, et il est évident par la construction que la droite CF est égale à la racine quarrée de 117 et que la droite FG est égale à la racine quarrée de 85. Mais la moitié de la première racine, jointe à la seconde, fait moins que $\frac{59}{4}$, et $\frac{59}{4}$ sont encore moindres que 15. Donc la somme de la moitié de CF et de la totale FG est moindre que la somme de la moitié de CO et de la totale OG, et partant le mouvement par les deux droites CF, FG se fait plus tôt et en moins de temps que par la base ou soustendante COG.

4. Je suis venu jusques-là sans beaucoup de peine, mais il a fallu porter la recherche plus loin et, parce que, pour satisfaire à mon principe, il ne suffit pas d'avoir trouvé un point comme F, par où le mouvement naturel se fait plus vite, plus aisément et en moins de temps que par la droite COG, mais [qu]'il faut encore trouver le point qui fait la conduite en moins de temps que quelque autre que ce soit, pris des deux côtés, il m'a été nécessaire d'avoir en cette occasion recours à ma méthode *de maximis et minimis,* qui expédie cette sorte de questions avec assez de succès.

Dès que j'ai voulu entreprendre cette analyse, j'ai eu deux obstacles à surmonter : le premier, que, bien que je fusse assuré de la vérité de mon principe, qui est qu'il n'y ait rien de si probable ni de si apparent que cette supposition, que la nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'accourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération (ce que le précédent calcul confirme, d'autant plus qu'il paroît que la lumière a plus de difficulté à traverser les milieux denses que les rares, puisque vous voyez que la réfraction vise vers la perpendiculaire dans mon exemple, ainsi que l'expérience le confirme, ce qui pourtant est contraire à la supposition de M. Descartes), néanmoins j'ai été averti de tous côtés, et principalement par M. Petit, que j'estime infiniment, que les expériences s'accordent exactement avec la proportion que M. Descartes a donnée aux réfractions, et que, bien que sa démonstration soit fautive, il est à craindre que je tenterai inutilement d'introduire une proportion différente de la sienne, et que les expériences qui se feront après que j'aurai publié mon invention la pourront détruire sur l'heure.

Le second obstacle qui s'est opposé à ma recherche a été la longueur et la difficulté du calcul, qui, dans la résolution du problème dont je vous parlai dans ma lettre et que je vous témoignois n'être pas des plus aisés, présente d'abord quatre lignes par leurs racines quarrées et engage par conséquent en des asymmétries qui aboutissent à une très grande longueur.

Je me suis défait du premier obstacle par la connoissance que j'ai qu'il y a infinies proportions, différentes de la véritable, qui approchent d'elle si insensiblement qu'elles peuvent tromper les plus habiles et les plus exacts observateurs. Ainsi n'y ayant que le second obstacle à vaincre, je m'étois résolu très souvent d'employer la bien-aimée (1) Géométrie (c'est ainsi que Plutarque l'appelle) pour vous satisfaire et pour me satisfaire moi-même. Mais l'appréhension de trouver, après une longue et pénible opération, quelque proportion irrégulière et fantasque, et la pente naturelle que j'ai vers la paresse, ont laissé la chose en cet état, jusqu'à la dernière semonce que M. le Président [de] Miremont vient de me faire de votre part, que je prends pour une loi plus forte que ni mon appréhension ni ma paresse : si bien que je me suis résolu de vous obéir sans autre retardement.

5. J'ai donc procédé sans remise en vertu de l'obédience, comme parlent les moines, à l'exécution de vos ordres, et j'ai fait l'entière analyse en forme, dans laquelle le désir passionné que j'ai eu de vous satisfaire m'a inspiré une route qui a abrégé la moitié de mon travail et qui a réduit les quatre asymmétries que j'avois eu en vue la première fois à deux tant seulement, ce qui m'a notablement soulagé.

Mais le prix de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fut jamais. Car, après avoir couru par toutes les équations, multiplications, antithèses et autres opérations de ma méthode, et avoir enfin conclu le problème que vous verrez dans un feuillet séparé (2), j'ai trouvé que mon principe donnoit justement

(1) Plutarque, *Marcellus,* xiv, 5 : Τὴν γὰρ ἀγαπωμένην ταύτην....
En fait, il s'agit dans ce passage, relatif à Archimède, de Mécanique, non de Géométrie.
(2) Voir l'*Analysis ad refractiones,* t. I, p. 170 et suiv.

et précisément la même proportion des réfractions que M. Descartes a établie.

J'ai été si surpris d'un événement si peu attendu, que j'ai peine à revenir de mon étonnement. J'ai réitéré mes opérations algébraïques diverses fois et toujours le succès a été le même, quoique ma démonstration suppose que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les rares, ce que je crois très vrai et indisputable, et que néanmoins M. Descartes suppose le contraire.

Que devons-nous conclure de tout ceci? Ne suffiroit-il pas, Monsieur, aux amis de M. Descartes que je lui laisse la possession libre de son théorème? N'aura-t-il pas assez de gloire d'avoir connu les démarches de la nature dans la première vue et sans l'aide d'aucune démonstration? Je lui cède donc la victoire et le champ de bataille, et je me contente que M. Clerselier me laisse entrer du moins dans la société de la preuve de cette vérité si importante, et qui doit produire des conséquences si admirables.

6. J'ajoute même, en faveur de son ami, qu'il semble que cette grande vérité naturelle n'a pas osé tenir devant ce grand génie, et qu'elle s'est rendue et découverte à lui sans s'y laisser forcer par la démonstration, à l'exemple de ces places qui, quoique bonnes d'ailleurs et de difficile prise, ne laissent pas, sur la seule réputation de celui qui les attaque, de se rendre sans attendre le canon.

Je vous annonce donc, Monsieur, j'annonce à M. Clerselier et à tous les amis de M. Descartes qu'il ne tiendra plus à l'incrédulité des géomètres qu'on ne doive attendre les merveilles que M. Descartes a fait espérer avec raison de ses lunettes elliptiques et hyperboliques, pourvu qu'on puisse trouver des ouvriers assez habiles pour les faire et pour les ajuster.

Il resteroit encore une petite difficulté que la comparaison de M. Descartes semble produire. C'est qu'il ne paroît pas encore pourquoi la balle qui est poussée dans l'eau n'approche pas de la perpendiculaire, ainsi que la lumière; mais, outre qu'on pourroit soupçonner que la réflexion se mêle dans cet exemple à la réfraction, et que la figure ou la gravité peuvent contribuer à la différence de ce mouvement, je n'ai garde d'entrer dans une matière purement physique. Ce seroit entreprendre sur vous, Monsieur, qui en êtes le maître, et faire irruption dans votre domaine.

Je finis donc après vous avoir déclaré que je consens, si vous le trouvez à propos, que l'accommodement entre les Cartésiens et moi soit publié dans les Académies, [et] après vous avoir conjuré de recevoir au moins l'effet de ma prompte obéissance pour une preuve certaine et plus que démonstrative de la passion avec laquelle je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, le 1 de l'an 1662.

P. S. Si vous persistez toujours à n'accorder pas un mouvement successif à la lumière, et à soutenir qu'il se fait en un instant, vous n'avez qu'à comparer ou la facilité ou la fuite et résistance plus ou moins grande, à mesure que les milieux changent. Car cette facilité ou cette résistance étant plus ou moins grande en différents milieux, et ce en une proportion diverse à mesure que les milieux diffèrent davantage, elles pourront être considérées en une raison certaine et par conséquent tomber dans le calcul aussi bien que le temps du mouvement, et ma démonstration y servira toujours d'une même manière.

Je n'ai pas étendu mon opération tout entière : et il n'a pas été nécessaire, puisque ma méthode est imprimée tout au long dans le sixième tome du *Cours mathématique* d'Hérigone et que j'en ai assez dit pour être entendu. Si vous m'ordonnez de parcourir tous les détours de l'analyse en forme, je le ferai et je n'aurai pas même beaucoup de peine à faire la démonstration par la composition, c'est-à-dire en parlant le langage d'Euclide.