ANNÉE 1656.

LXXVI.

FERMAT A CARCAVI (1).

1656.

(Bibl. Nat. fr. 20945, XVII, p. 78-84.)

< Monsieur >,

1. J'ai reçu un très grand contentement de vos lettres du 19 du mois passé, lesquelles m'ont été rendues il y a deux jours, et je me tiens fort obligé à la civilité de M. Pascal, duquel, si l'estime que j'en ai pouvoit être plus grande, elle seroit augmentée par tant de démonstrations que j'en ai reçues. Je vous prie donc (vous qui m'avez fait l'honneur de me faire connoître une personne si savante) de lui témoigner le respect et l'estime que j'ai pour lui, et que, si je ne puis pas correspondre avec les effets à tant de grâces qu'il lui a plu de me faire, je ne manquerai pas au moins d'y satisfaire avec ma bonne volonté que j'ai voulu vous faire connoître présentement par la réponse que je vous envoie de ce qu'on m'a proposé. Le temps est court; mais, n'espérant pas de pouvoir la semaine prochaine avoir la commodité de m'appliquer à de semblables spéculations, je suis contraint de vous en dire mon sentiment sur le champ.

2. Il est bien vrai qu'il me déplaît que d'abord je ne suis pas du sentiment de M. Pascal touchant l'*Analyse speciose*, de laquelle je fais plus grand cas

(1) Cette lettre a été publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 197-200) d'après une copie sans date, sans adresse et sans signature. La date de 1656 a été attribuée à cette lettre à cause des allusions aux jansénistes et molinistes, et au séjour de Huygens à Paris que le savant hollandais quitta le 30 novembre 1655 (*OEuvres complètes*, I, p. 367). Le texte n'est qu'une traduction passablement incorrecte de l'original qui était rédigé en latin, comme on peut le conclure d'après les nombreux mots de cette langue que le traducteur, parfois embarrassé, a transcrits dans l'interligne.

que lui, et j'ose dire que les preuves que j'en ai sont si grandes que non seulement elles me persuadent, mais elles m'obligent d'en faire une estime bien grande. J'avoue que le retour en est bien souvent difficile; mais, parce que, quand j'ai fait exactement l'analyse, je suis aussi sûr de la solution du problème comme si je l'eusse démontré par synthèse, je ne me soucie pas quelquefois d'en chercher la construction la plus aisée, me persuadant ce qu'en une autre occasion M. Pascal (1) dit : *non esse par labori præmium*. Mais, en cela comme en toutes autres choses, je laisse volontiers que chacun suive son propre sentiment.

3. Je viens au problème des < cercles > tangens dont on désire une plus grande explication. Aussitôt que vous me l'envoyâtes, il me souvint que j'avois songé à cette matière en cherchant le *lieu que décriroit le centre d'un cercle qui toucheroit deux autres cercles donnés, ou un cercle donné et une ligne donnée, etc.*, et que j'avois démontré que, quand deux cercles sont égaux < et qu' > ils se doivent toucher avec un autre cercle qui les enferme ou qui les exclut tous deux, le lieu est la ligne droite qui les divise également et qu'elle est perpendiculaire à la ligne qui unit les centres des cercles donnés; mais, quand ils sont inégaux et qu'il faut qu'ils se touchent comme ici-dessus, alors le lieu est hyperbole ou, pour mieux dire, il est les sections opposées, les foyers desquelles sont les centres des cercles donnés et le côté transvers égal à la différence des semidiamètres des dits cercles.

Or, dans le cas dans lequel il faudra inclure l'un et exclure l'autre en le touchant, les sections opposées ont les foyers comme auparavant, mais le côté transvers est l'aggrégé et non pas la différence des semidiamètres.

Je passe les autres problèmes que j'ai démontrés en cette matière, parce qu'ils ne sont pas à propos pour nous; mais je dirai seulement en passant que, quand les donnés sont un cercle et une ligne droite qui le coupe, le lieu est à deux paraboles qui ont toutes deux pour foyer le centre du cercle donné et passent par les intersections du dit cercle et de la ligne donnée.

Ainsi, en recevant vos lettres, je m'aperçus qu'en laissant une détermination dans le problème de M. Pascal (2), il se feroit local, en la manière ici-dessous :

Étant donné un cercle et une ligne, trouver un autre cercle qui, touchant

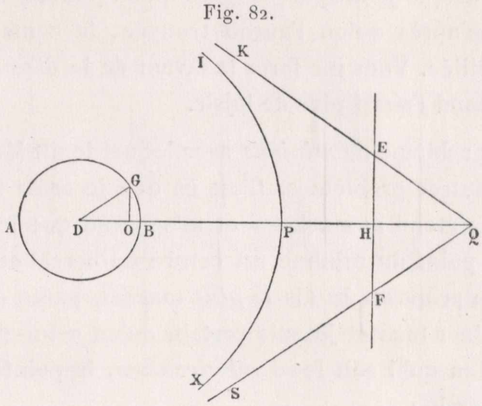
(1) Dans les écrits connus de Pascal, on ne trouve guère qu'une expression analogue : *ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes*, mots qui terminent le *De numericis ordinibus tractatus*.

(2) *Comp*. Lettre LXX, **9**.

le donné, soit coupé par la ligne en sorte que le segment soit capable d'un angle donné.

Soit le cercle ABG (*fig.* 82) donné, la ligne < EF, le > centre D; soit la perpendiculaire DBH et qu'on fasse l'angle HDG égal à l'angle donné. Menant GO perpendiculaire, que ci-après on coupe BH en P dans la raison GD à DO, et qu'on prolonge la ligne DH en Q en sorte que la raison DO à HQ soit la même que celle du quarré GO au quarré GD avec le rectangle HDO.

Fig. 82.



Qu'après, par le point Q, on tire les angles HQK, HQS égaux à l'angle donné, et que par le point P, autour des asymptotes QS, QK, on décrive l'hyperbole IPX.

Je dis qu'elle satisfera à la proposition, c'est-à-dire que le cercle quelconque qui, ayant son centre sur ladite hyperbole, touchera le cercle donné, sera aussi coupé par la ligne donnée en sorte que son segment soit capable de l'angle GDO. Mais cela, on ne le doit entendre qu'en cas que l'angle donné soit aigu, puisque, s'il est droit, le lieu est la ligne droite < donnée >, comme il est clair, et que, s'il est obtus, le lieu est aussi une hyperbole, mais il y a alors quelque peu de mutation dans la construction. — Mais il n'est pas nécessaire de dire tous les détails.

Cela étant supposé, on peut facilement résoudre le problème par les lieux solides en cas quelconque, c'est à dire en décrivant cette dernière hyperbole et les autres sections opposées dont j'ai parlé ici-dessus, puisque leur intersection donnera toujours le centre du cercle qu'on cherche.

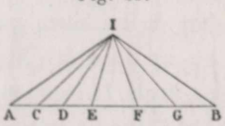
Mais, parce que le problème est plan et craignant le scrupule des géomètres, je l'ai résolu alors par les lieux plans généralement; mais, parce que je m'aperçus que la construction en étoit beaucoup embrouillée, je choisis au plus facile les donnés et je les appliquai en nombres; et c'est tout ce que je vous envoyai alors et je ne vous enverrai autre chose, parce que le susdit Monsieur ne veut pas la solution simplement analytique, mais qu'il veut aussi une construction gentille et facile, laquelle je n'ai pas pour à cette heure le loisir de la chercher.

4. Pour ce qui est de l'autre < problème > de cinq lignes données [1], je ne sais pas qui lui a dit que je l'estime facile. Je ne crois pas vous avoir écrit une telle chose, puisque je m'aperçus alors qu'on pouvoit venir difficilement à l'équation et qu'après qu'on l'auroit trouvée, la construction en seroit beaucoup embrouillée. Vous me ferez la faveur de le dire à M. Pascal et je songerai à cela quand j'aurai plus de loisir.

5. Je viens au problème *de minimis* avec lequel le dit Monsieur dit qu'il a résolu plusieurs autres problèmes. C'est ce que je crois facilement, parce que ma méthode s'étend aux mêmes et m'apprend que le plus souvent en ces problèmes le point du minime est centre du cercle ou de la sphère qui satisfait à ce qu'on propose. Je dis *le plus souvent,* parce que je n'ai pas le loisir de les examiner tous et je suis certain qu'en celui-ci, dont M. Pascal ne parle point, bien qu'il soit local *ad circulum,* le point du minime n'est pas le centre du cercle :

Étant donné quelconque nombre de points en une ligne droite, comme A, C, D, E, F, G, B (*fig.* 83), *trouver un autre comme* I, *duquel menant les lignes* IA, IC, ID, IE, IF, IG, IB, *l'assemblage des quarrés des dites lignes ait au triangle* AIB *la raison minime de toutes les possibles.*

Fig. 83.



C'est à quoi je voudrois prier M. Pascal de me faire la faveur d'appliquer sa méthode.

6. Après, < pour > le lieu du problème duquel il dit que dépendent tous les lieux plans proposés par lui, je n'ai pas voulu manquer de le chercher et aussitôt j'ai trouvé que c'était un cercle, en la manière ci-dessous :

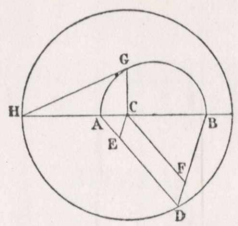
Soit donnée la ligne droite AB (*fig.* 84) *coupée* utcumque *en* C *et qu'il*

[1] Peut-être un problème ayant rapport à l'*hexagramme* de Pascal.

faille trouver le lieu sur lequel étant pris le point D, *et étant tirées les lignes* DA, DB *et les parallèles* CE, CF, *les rectangles* ADE, BDF *pris ensemble soient égaux au quarré de la ligne donnée* Z.

Qu'on décrive sur la ligne AB le demi-cercle AGB et qu'après, élevant la perpendiculaire CG, on tire la ligne GH égale à la ligne Z et terminée à la ligne AB allongée s'il le faut. Je dis que, si du centre C, avec la distance CH, on décrit le cercle HD, il sera le lieu qu'on cherche.

Fig. 84.



Vous pouvez proposer à M. Pascal, avec les mêmes données, de *trouver le point* D, *en sorte que les deux rectangles* DAE, DBF *soient égaux au quarré de la* < *ligne* > Z *donnée :* c'est ce que j'ai trouvé en un même temps.

7. J'ai cherché le lieu de cet autre : *Étant donnés autant de cercles qu'on voudra et une ligne droite, trouver un point duquel menant des tangentes aux cercles donnés et une perpendiculaire à la ligne donnée, les quarrés des tangentes aient à la perpendiculaire une raison donnée,* et j'ai trouvé qu'il peut être ellipse, parabole ou hyperbole selon la diversité des données. Mais il seroit trop long d'écrire tout, car il faudroit faire un livre et non pas une lettre; je mettrai ici seulement pour essai la détermination qui est que, toutes les fois que la raison donnée sera la même que la raison du nombre des cercles donnés à l'unité, le lieu sera parabole; si elle est plus petite, il sera ellipse, et si elle est plus grande, il sera hyperbole.

8. Le *porisme* des anciens à la description des sections coniques me semble très joli, mais je n'ai pas le loisir de les examiner pour à cette heure; je conserverai le tout pour un meilleur temps, comme aussi de vous parler des quarrés que ces Messieurs appellent *magiques,* desquels M. Pascal fait quelque mention dans sa lettre.

9. J'y ajoute seulement que vous dites le vrai quand vous dites qu'il vous souvient que je vous ai parlé autrefois des *deux moyennes,* parce qu'il y a longtemps que j'ai trouvé la méthode de les trouver en une infinité de façons (j'entends par les lieux solides); mais, entre tous, ceux là m'ont plu davantage qui résolvent le problème *per circulum et ellipsim :* c'est ce que je vous prie de proposer à M. Pascal pour savoir s'il lui est peut-être arrivé tout de même.

10. Je vous prie de me donner quelques nouvelles des jansénistes et molinistes, comme aussi quelque objection qu'on fait à M. Descartes; et je voudrois savoir en quel estime M. Hugenius, gentilhomme hollandois, est auprès de ces Messieurs. Il a imprimé plusieurs petits livres de Géométrie [1] et il a demeuré quelque temps à Paris.

LXXVII.

FERMAT A CARCAVI [2].

JUIN 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 301.)

.... **1.** Si A et B jouent avec deux dés en sorte que, si A amène 6 points en ses deux dés avant que B en amène 7, le joueur A gagne et, si B amène 7 avant que A ait amené $<6>$, le joueur B aura gagné, et de plus le joueur A a la primauté, l'avantage de A à B est comme 30 à 31.

[1] Christiani Hugenii, Const. F., Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. viri Gregorii a S. Vincentio editæ anno CIↃ IↃ CXLVII, Lugd. Batavorum, 1651, 4°. — De circuli magnitudine inventa : accedunt ejusdem Problematum quorundam illustrium constructiones. Lugd. Batavorum, 1654, 4°.

[2] Cette pièce est un extrait adressé par Carcavi à Huygens. Dans la lettre d'envoi, du 22 juin 1656, Carcavi écrivait (*Corresp. Huyg.*, n° 300) :

« M. de Fermat m'a envoyé, il y a déjà quelques jours, la solution de ce que vous aviez » proposé touchant le parti des jeux, et vous verrez par l'extrait que je vous fais de sa » lettre qu'il a la démonstration générale de ces sortes de questions, et conclurez certai- » nement avec nous, non seulement pour la résolution de ce problème, mais aussi pour » quantité de plusieurs autres très belles spéculations que nous avons vu de lui, tant » en ce qui concerne les nombres que pour la géométrie, que c'est un des plus grands » génies de notre siècle. Je tâche, il y a déjà longtemps, d'en tirer ce que je puis pour le