

qu'en la condition précédente, il en faut 16 au premier,  $5\frac{1}{2}$  au second, et  $5\frac{1}{2}$  au troisième, sans se servir des combinaisons, car elle va partout seule et sans obstacle.

6. Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité; mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque *une* partie à l'un, *une* à l'autre et *deux* à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale et n'est bonne généralement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que, comme vous n'aviez pas ma méthode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens différens sur ce sujet.

Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez en la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis etc.

## LXXIII.

FERMAT A PASCAL (1).

SAMEDI 29 AOUT 1654.

*(Oeuvres de Pascal, IV, p. 435-437.)*

MONSIEUR,

1. Nos coups fourrés continuent toujours et je suis aussi bien que

(1) Cette lettre a été écrite par Fermat avant qu'il eût reçu la précédente.

vous dans l'admiration de quoi nos pensées s'ajustent si exactement qu'il semble qu'elles aient pris une même route et fait un même chemin. Vos derniers Traités du *Triangle arithmétique* et de son application en sont une preuve authentique : et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence (1) couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris.

(1) La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* est énoncée ainsi :  
*Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire.*

Pascal appelle *cellules de la dividente* celles que la bissectrice de l'angle droit du triangle traverse diagonalement : par exemple les cellules G,  $\psi$ , C, P,  $\rho$ .

G 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$\psi$ 2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	C 6	10	15	21	28	36		
1	4	10	P 20	35	56	84			
1	5	15	53	$\rho$ 70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

La proposition des nombres figurés de Fermat est celle de l'*Observation XLVI sur Diophante* et de la lettre XII, 42 (voir plus haut, page 70, note 1). La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal ne correspond de fait qu'à la première partie de la proposition de Fermat, à savoir que  $m(m+1)$  est le double du triangle de côté  $m$  ; pour retrouver dans l'œuvre de Pascal le reste de cette proposition, il faut, à la onzième conséquence, ajouter la douzième, etc., en mettant d'ailleurs celle-ci sous la forme de la proposition XI du *Traité des ordres numériques*.

Je n'ai garde de faillir tandis que je rencontrerai de cette sorte, et je suis persuadé que le vrai moyen pour s'empêcher de faillir est celui de concourir avec vous. Mais, si j'en disois davantage, la chose tiendrait du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées.

Ce seroit maintenant à mon tour à vous débiter quelque'une de mes inventions numériques; mais la fin du parlement augmente mes occupations, et j'ose espérer de votre bonté que vous m'accorderez un répit juste et quasi nécessaire.

2. Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en 17, 5 et 5 : de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui 17 hasards égaux, lorsque chacun des < deux > autres n'en a que 5.

3. Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, à cette proposition :

Les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers.

Le quarré de 2, augmenté de l'unité, fait 5 qui est nombre premier.

Le quarré du quarré fait 16 qui, augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le quarré de 16 fait 256 qui, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Le quarré de 256 fait 65 536 qui, augmenté de l'unité, fait 65 537, nombre premier.

Et ainsi à l'infini.

C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée et je vous avoue que je n'ai pu

encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout (1).

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois.

Je suis, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

A Toulouse, le 29 août 1654.

---

LXXIV.

FERMAT A PASCAL (2).

VENDREDI 25 SEPTEMBRE 1654.

(*Oeuvres de Pascal*, IV, p. 437-441.)

MONSIEUR,

1. N'apprehendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi.

Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez.

Je n'y trouve que 17 combinaisons pour le premier et 5 pour chacun des deux autres : car, quand vous dites que la combinaison *acc* est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en

(1) Voir Tome I, p. 131, et Tome II, p. 206.

(2) Réponse à la lettre LXXII.