11. Sur le sujet des triangles, voici ce que je vous proposerai encore :

Une hypoténuse composée étant donnée avec les quarrés premiers entre eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221 soit l'hypoténuse donnée avec les quarrés qui la composent, savoir : 100, 121 et 196, 25, il faut trouver par le moyen d'iceux que 221 a 13 et 17 pour parties.

12. J'attends de vous la manière (¹) de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances — 1 en toute analogie, et principalement en celle de 2.

Je suis etc.

L.

FRENICLE A FERMAT (²).

VENDREDI 6 SEPTEMBRE 1641.

(*Va*, p. 169-173.)

MONSIEUR,

1. Votre règle (³) pour trouver les triangles pareils à 11, 60, 61 et 119, 120, 169, est fort bonne; je m'étois seulement arrêté à l'exemple, sans la considérer autrement.

2. Mais celle que vous mettez ensuite, pour les triangles dont le moindre côté diffère d'un quarré des deux autres (⁴), sert à la vérité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous, ainsi que vous prétendez : car, prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1 de quelque nombre au

(¹) *Voir* Lettre XLVII, **1**.

(²) Réponse à une Lettre perdue, par laquelle Fermat avait répliqué à la précédente, XLIX.

(³) *Voir* Lettres XLVIII, **8** et XLIX, **6**.

(⁴) *Cp.* Lettre XLIX, **5**.

double — 2 du même nombre, on ne trouvera pas les triangles qui se font par 29 et 12 ou par 60 et 13, et une infinité d'autres; mais on les trouvera tous par la règle que vous mettez en l'écrit particulier (1) que vous avez envoyé, qui se fait mettant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de deux quarrés premiers entre eux et de divers ordres.

Et cette dernière méthode sert à trouver tous les primitifs dont les côtés des quarrés (2) sont comme d'un nombre impair à un autre nombre. Par exemple, on trouvera par icelle qu'il y a deux triangles où les côtés des quarrés sont comme de 65 à un autre nombre, et dont le moindre côté est différent d'un quarré des deux autres : savoir les deux qui sont faits de 65 et 14 et de 65 et 24 et les autres qui sont en même proportion.

Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrés sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60 à quelque autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette seconde règle, sinon après un long tâtonnement (3), et la première règle ne donne que la raison de 60 à 1861; mais il y a encore trois autres proportions, outre celle-là, qui ont toutes 60 pour un de leurs termes.

J'ai deux règles différentes dont chacune donne tous les triangles

(1) Écrit perdu. — La première règle de Fermat consiste à prendre pour les nombres servant à former le triangle rectangle (*voir* page 223, note 1)

$$p = r^2 + 1, \qquad q = 2r - 2.$$

La seconde règle à prendre, r et s étant premiers entre eux,

$$p = r^2 + s^2, \qquad q = 2(r - s)s.$$

(2) Frenicle appelle ici *côtés* ou *racines des quarrés* les nombres servant à former le triangle rectangle, désignés par p et q dans la note précédente.

(3) Si l'on pose

$$p = \frac{r^2 + 1}{2} \quad \text{et} \quad q = r - 1,$$

et que l'on fasse $q = 60$, on aura

$$r = 61, \qquad p = 1861.$$

Les trois autres proportions sont

$$60,\ 293; \qquad 60,\ 269; \qquad 60,\ 157.$$

susdits, avec cette différence que l'une regarde la proportion qui commence par un pair et l'autre celle qui commence par un impair.

Et celle-ci n'est pas beaucoup différente de votre dernière (¹), car, ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypoténuse pour le premier terme, et pour l'autre, j'ôte d'un des côtés du triangle la différence de l'autre côté à l'hypoténuse.

Exemple : Que 20, 21, 29 soit le triangle, 29 le premier terme; pour l'autre, j'ôte de 20 la différence de 21 à 29, ou de 21 la différence de 20 à 29, et restera 12. On aura donc 29 et 12 dont les quarrés composeront le triangle cherché.

3. Votre première règle (²) pour trouver trois quarrés en proportion arithmétique a le même défaut que la précédente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle. Par exemple, on ne trouvera pas les quarrés de 1, 29, 41, ou de 17, 53, 73. Mais, par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier, on les peut tous comprendre.

Vous pouviez aussi donner aisément par la première règle le troisième quarré, sans obliger à prendre la différence des deux quarrés trouvés. Comme : en l'exemple que vous apportez, le quarré -2 de 5 est 23; le quarré suivant $+1$ est 37 : si on veut avoir le troisième nombre, il faut ajouter à 37 le double de 5, et on aura 47.

Si on prenoit 4, son quarré -2 est 14; le quarré suivant $+1$ est 26, auquel ajoutant 8, double de 4, on aura 34. Les trois nombres, étant réduits, sont 7, 13, 17.

La méthode dont je me sers pour trouver ces trois quarrés proportionaux, est tout autre que celle-là (³), et voici comme on procède pour les avoir tous :

(¹) Cette règle de Frenicle revient en effet à la seconde de Fermat.

(²) *Cp.* Lettre XLVIII, 8. — La règle générale de Fermat paraît avoir consisté de fait à prendre pour les racines des trois carrés les nombres $r^2 - 2s^2$, $r^2 + 2rs + 2s^2$, $r^2 + 4rs + 2s^2$. La première règle revenait à supposer $s = 1$.

(³) Cette règle de Frenicle, revenant à prendre pour les racines des trois carrés en progression arithmétique les nombres $p^2 - 2pq - q^2$, $p^2 + q^2$, $p^2 + 2pq - q^2$, concorde en réalité avec la règle générale de Fermat (*voir* note précédente), si l'on a $p = r + s$ et $q = s$.

L'hypoténuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré; la différence des deux côtés du triangle sera le moindre côté, et leur somme sera le plus grand.

Exemple : Que le triangle soit 28, 45, 53. Le moyen côté sera l'hypoténuse, 53; la différence de 28 à 45, qui est 17, sera le moindre, et leur somme, 73, sera le plus grand. On aura donc 17, 53, 73 pour les racines des quarrés cherchés.

Et si l'on prend tous les triangles, commençant par le premier : 3, 4, 5, on aura tous les dits quarrés.

4. Après cette règle générale, j'en ai considéré deux particulières, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, savoir que, le moindre des trois quarrés demeurant toujours le même, on ait les deux autres en une infinité de façons, et à laquelle vous croyez que je n'ai pas pris garde, quoiqu'il y ait déjà longtemps que je l'ai trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectangles :

Car tout nombre et chacun d'iceux est la différence des deux moindres côtés d'une infinité de triangles;

Et tout nombre premier, différent de l'unité d'un multiple de 8, ou composé desdits nombres premiers seulement, est la différence des moindres côtés d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et, y ayant des voies certaines pour trouver tous les triangles qui ont une même différence en leurs moindres côtés, on aura aisément tous les quarrés susdits.

Sur quoi il faut remarquer que, si le nombre proposé, qui doit être la racine du moindre quarré des trois et qui doit être la différence des deux petits côtés du triangle, n'est divisible que par un seul nombre premier différent de 1 d'un octonaire, comme sont 7, 49, 343; 17, 289, etc., le nombre sera la différence des petits côtés de deux triangles qu'on peut nommer *surprimitifs,* pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, et ces deux triangles sont toujours les moindres dont l'un commence par un pair et l'autre par un impair, et d'iceux se forme l'infinité des autres.

Voici la manière dont je me sers : si je veux, par exemple, avoir tous les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres côtés, je cherche les deux premiers triangles qui ont cette différence, et trouve 5, 12, 13 et 8, 15, 17. Je prends les racines des quarrés de chaque triangle, savoir 3, 2 et 4, 1, et mets chaque couple en tête d'une colonne. J'ai donc pour le premier : 3, 2. Pour avoir le triangle suivant, je prends la plus grande racine du premier pour la moindre du second, savoir 3, et pour la plus grande je prends le double de la plus grande du premier, plus la moindre. Ainsi j'aurai 8, qui est double de 3, + 2. Ce 8 sera la moindre racine du troisième triangle, et la plus grande du dit troisième sera 19, qui est double de 8, + 3. On fera la même chose à l'autre couple 4, 1, et on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

3.	2.	4.	1.
8.	3.	9.	4.
19.	8.	22.	9.
46.	19.	53.	22.
...	...	...	...

Ayant donc tous les triangles qui ont 7 pour différence de leurs moindres côtés, il sera facile, par ce qui a été dit ci-devant, de trouver tous les quarrés arithmétiquement proportionaux, dont le moindre est 49.

Si le susdit moindre quarré étoit divisible par *deux* nombres premiers de même nature que les susdits, il y auroit *quatre* souches dont tous les triangles dépendroient.

S'il étoit divisible par *trois* nombres premiers, il y en auroit *huit*, qui ne dépendroient point l'un de l'autre.

Etc.

Ainsi 161, composé de 7 et 23, est la différence des petits côtés des triangles *surprimitifs* :

19. 180. 181. | 60. 221. 229 | 279. 440. 521 | et 400. 561. 689,

et de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs qui auront le même 161 pour différence, et partant, le quarré de 161 sera le moindre quarré des trois proportionaux en une infinité de sortes.

Il faut excepter l'unité de ce qui a été dit, car elle sert bien de différence à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule souche, qui est le triangle 3, 4, 5, d'où dépendent tous les autres.

On aura donc les quarrés proportionaux (¹) dont les racines sont ici :

7.	13.	17.	7.	17.	23.
7.	73.	103.	7.	97.	137.
7.	425.	601.	7.	565.	799.
7.	2477.	3503.	7.	3293.	4657.
..	.....	.....	..	.....	.....

et on les peut continuer tant qu'on voudra en continuant les triangles.

Voilà donc pour la première chose qui appartient aux dits quarrés.

5. La seconde est de trouver les dits trois quarrés en telle sorte qu'ils soient comme enchaînés l'un à l'autre et que le dernier et plus grand des trois soit le premier des trois suivans : comme on peut voir en ces colonnes, la fabrique desquelles je vous envoierai au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1.	29.	41
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.	....	....	....	....	....	....
...	....	....	....	....	....	....	....	....

Il y a aussi des voies pour avoir les différences égales desdits quarrés : car, en la première colonne, si on multiplie 24 par les sommes de tous les quarrés, lesquelles sommes sont 1, 5, 14, 30, etc., on aura

(¹) Frenicle reprend la construction de trois carrés en progression arithmétique d'après les séries de triangles commençant par 5, 12, 13; 8, 15, 17.

les différences des quarrés, et en la seconde colonne, il faudroit multiplier 24 par les sommes des seuls quarrés impairs.

Il y a d'autres choses à considérer là-dessus, que je n'ai pas maintenant le loisir de déduire plus au long.

6. Me voici maintenant à l'endroit de votre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtés d'un triangle ([1]) et, sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne sûsse pas que chacun de ces nombres peut servir de différence à une infinité de quarrés et de doubles quarrés. Vous vous êtes fondé sur un avertissement que je donnois, que les dits nombres sont toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; mais je n'ai pas dit qu'ils fûssent seulement deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, comme vous croyez avoir lu. Il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres pour ne s'être pas aperçu d'abord que 7 est quatre fois la différence entre de fort petits nombres : savoir entre 1 et 8, 2 et 9, 18 et 25, 25 et 32. Et je ne vous ai pas coté cela pour une propriété des dits nombres; mais, vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtés, sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont il est la différence ([2]), il falloit vous avertir que les dits nombres étoient toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Car il y a deux couples dont je me sers pour avoir le dit triangle. Par exemple, pour avoir le triangle dont 7 est la somme des deux côtés, je me sers de 1 et 8, et de 2 et 9. Et, pource que j'étois pressé, je n'eus pas le loisir de m'éclaircir davantage. Je n'entends pas que les dits couples soient 2, 9 et 18, 25, comme vous avez cru, mais 1, 8 et 2, 9; et ce que j'observe en ceci est que les dites sommes sont deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la différence donnée : savoir, à un des couples le quarré est moindre, et à l'autre couple c'est le

([1]) *Voir* Lettres XLVIII, **11**, et XLIX, **9**.
([2]) *Voir* Lettre XLIX, **10**.

double quarré. Cela s'observe toujours ainsi; et aux nombres qui sont composés de *deux* nombres premiers, comme 119, il a *quatre* couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la méthode dont je me sers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux auxquels un des nombres est moindre que la différence.

Ainsi, à 17, les deux couples utiles sont 1, 18 et 8, 25, à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17, et, selon votre méthode même, on se servira aussi bien de 1, 18 que de 25, 8. Car si à 25, 8, on prend 2 et la différence de 5 à 2, de même à 1, 18, on aura 3 et la différence de 1 à 3, et on aura, en l'une et l'autre sorte, les mêmes nombres 2, 3.

De même, si on donnoit 161, on auroit *quatre* couples, savoir :

1. 162 | 8. 169 | 81. 242 | 128. 289,

à chacun desquels il y a un nombre moindre que 161.

Et, pour trouver les triangles, je me sers des racines des doubles quarrés, car elles sont les racines des quarrés qui composent l'hypoténuse. Ainsi à 17, on aura 2 et 3, racines des doubles quarrés 8, 18; mais, quand il y en a *quatre*, comme à 161, je prends les extrêmes, savoir 9, 8, et celles du milieu, 2, 11, qui donneront les triangles : 17, 144, 145, et 44, 117, 125.

1.	162	1.	9.
169.	8	13.	2
81.	242	9.	11
289.	128	17.	8

Pour avoir le côté pair du triangle, il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrés : ainsi le double de 9 par 8 est 144, et le double de 2 par 11 est 44.

Mais pour le côté impair, on prend le produit des racines des quarrés simples : ainsi 1 par 17 donne 17, et 9 par 13 donne 117, le premier pour le triangle 17, 144, 145, le second pour 44, 117, 125.

7. Vous voyez si j'ai eu raison de dire que les nombres susdits sont la différence de *deux* couples quand ils sont premiers, et de *quatre* couples lorsqu'ils sont divisibles par deux nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux est la façon de trouver tous les couples dont un des dits nombres est la différence : car, selon ma méthode, il est nécessaire d'avoir ces deux couples qui font comme deux souches.

Exemple : *On me demande tous les quarrés et doubles quarrés dont 7 est la différence.* Je cherche les deux couples utiles à chacun desquels il y a un nombre moindre que 7; j'aurai 1, 8 et 9, 2. Je prends leurs racines et en fais deux colonnes séparées comme on voit ici :

Quarrés.	Doubles quarrés.	Quarrés.	Doubles quarrés.
1	2	3	1
5	3	5	4
11	8	13	9
27	19	31	22
65	46	75	53
157	111	181	128
...	...	...	...

et mets en chaque colonne les racines des quarrés d'un côté et celles des doubles quarrés de l'autre. J'ai donc d'un côté 1, 2; pour avoir les racines des couples suivans, je prends la somme de 1, 2, qui est 3, pour la racine du double quarré, et la somme des racines des deux doubles quarrés prochains pour la racine du quarré. Ainsi la somme de 1, 2 est 3, et celle de 3, 2 est 5 : j'ai donc 5 et 3. Pour le troisième couple, la somme de 5, 3 est 8, celle de 8 et 3 est 11. On poursuit ainsi autant qu'on veut, et l'autre colonne qui commence par 3, 1, se fait de même.

A chaque colonne la rangée de main droite, dont les nombres sont pairs et impairs alternativement, contient les racines des doubles quarrés, lesquels sont plus grands que les quarrés, lorsque la racine du double quarré est paire, comme 1, 2 et 11, 8; mais le double quarré est moindre quand sa racine est impaire, ce qui a lieu lorsque le moindre quarré des deux qui composent l'hypoténuse du triangle dont la dite différence est la somme des côtés, est impair, comme à 3, 4, 5; mais c'est le rebours, quand le moindre quarré est pair, comme au triangle 5, 12, 13.

8. Je laisse le reste pour le premier voyage, auquel je vous envoierai aussi la méthode dont je me sers pour former les triangles relatifs en différence [1], comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169; car je ne me sers pas des trois quarrés proportionaux.

Voici seulement ce que je vous proposerai :

1° *Trouver le moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra, et non plus, la somme de deux quarrés* [2].

2° *Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la différence des deux moindres côtés, il reste un quarré*. Par exemple, si le triangle cherché étoit 7, 24, 25, il faudroit qu'ôtant 98 de 289, le reste 191 fût un quarré.

3° *Trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à tant de triangles qu'on voudra, et non plus à chacun desquels le produit du moindre côté par l'hypoténuse soit plus grand que le quarré du moyen côté.*

4° *Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrés constitutifs des triangles doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles aient la propriété du troisième problème.*

Pour ceci, il y a autant de danger que les racines pèchent en excès qu'en défaut, mais elles ont un espace assez grand pour s'égayer, et elles ne sont pas gênées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines sont en proportion double ou moindre, ou si elles sont en proportion triple ou plus grande, les triangles n'auront pas la dite propriété. Entre ces deux proportions, il y a un grand espace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'est pas si grand que la différence et intervalle des proportions double et triple, mais est un peu plus rétréci.

(1) *Voir* Lettres XLVIII, 8, et XLIX, 6.
(2) *Voir* l'Observation VII sur Diophante, t. I, p. 296.

9. Vous n'avez pas pris garde que je vous avois proposé, par ma précédente [1], de faire la même chose de l'enceinte entière du triangle, que vous demandiez de la somme des deux moindres côtés.

Je suis etc.

(1) Lettre XLIX, 10.