10. Trouver deux triangles dont les aires soient en proportion donnée (1).

Voici la règle la plus élégante :

Soient les deux nombres qui expriment la proportion donnée, a et b. Les deux triangles se forment : le premier, de a bis $+ b$ et de $a - b$; le second, de b bis $+ a$ et de $a - b$.

Vous aurez donc deux triangles qui seront par leurs aires en proportion donnée. Car, si vous les demandez de 5 à 3, les deux triangles se formeront, le premier de 13 et 2, le second de 11 et 2, et les deux triangles seront : 173, 165, 52 | 125, 117, 44.

11. Étant donné un nombre, trouver combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle (2).

12. Règle pour déterminer les nombres premiers qui, en toute progression, mesurent les puissances — 1 seulement, ou + 1 aussi (3).

XLIX.

FRENICLE A FERMAT (4).

VENDREDI 2 AOUT 1641.

(*Va*, p. 166-168.)

Monsieur,

1. J'étois dans l'impatience de savoir votre retour à Toulouse, pour me donner l'honneur et le contentement de continuer nos conférences, lorsque le Révérend Père Mersenne m'en a donné avis; j'espère qu'elles dureront plus longtemps que je ne pensois, parce qu'il est survenu quelque chose qui m'arrête ici.

(1) *Voir* plus haut, **5**.
(2) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLVII, **3**, et XLIX, **9**.
(3) Question proposée par Frenicle à Fermat. *Voir* Lettre XLVII, **1**, et XLIX, **12**.
(4) Réponse à la Lettre précédente, XLVIII.

2. J'ai mille remerciements à vous faire de la limitation des côtés que vous m'avez envoyée [1], laquelle véritablement je prise fort. J'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle et pour cela je m'étois contenté des raisons de 10 à 24 et à 25, mais vous l'entendez ici à l'infini. J'avois cru, par la lecture de votre précédente [2], par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous prétendissiez de donner une raison rationelle pour cette limitation; c'est ce qui m'avoit fait dire que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parce que je la savois être impossible.

Je sais que l'Algèbre de ce pays-ci n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer : c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'Analyse particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages.

Si la démonstration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer : car, si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous détournassiez de vos études à cette occasion.

Cette même raison, de 1 à $1+\sqrt{2}$, se peut aussi appliquer à la proportion des côtés des quarrés qui composent l'hypoténuse, mais en un sens contraire à celui des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtés pairs, au même sens qu'aux parties des impairs.

3. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les méthodes [3] que vous donnez, tant pour trouver les quarrés que les côtés des triangles qui appartiennent aux hypoténuses composées, sont véritablement fort belles, et vous avez la méthode de si bien disposer vos règles, que cela leur donne une certaine grâce qui les fait encore agréer davantage, mais elles ne suivent pas mon intention, car

[1] *Voir* XLVIII, 4.
[2] Lettre perdue.
[3] *Voir* XLVIII, 2.

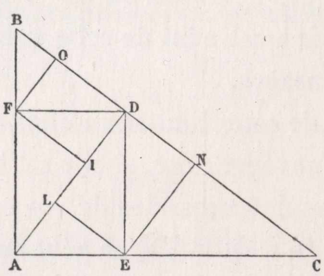
je n'ai point entendu qu'on se servît des quarrés ni des triangles des parties des hypoténuses composées, mais seulement des dites parties.

Par exemple, je demande une manière de trouver que 65 est composé des quarrés 64, 1 et 49, 16, supposant seulement qu'il a 5 et 13 pour les parties premières, sans employer à cet effet les quarrés 4 et 1, ni les côtés 3 et 4, non plus que ceux qui appartiennent à 13.

4. Des quatre propriétés des triangles que je vous avois proposées, vous avez fort bien trouvé la deuxième (1); pour les trois autres, vous n'avez pas suivi mon intention. Partant, il faut que je m'éclaircisse plus que je n'avois fait.

La première est facile (2) : Que le triangle rectangle soit ABC (*fig.* 78); il le faut diviser en deux triangles ABD, ADC avec la per-

Fig. 78.



pendiculaire AD; et derechef le triangle ADC en deux triangles EDC, EDA par la perpendiculaire DE et l'autre pareillement ABD en deux, savoir ADF, BDF, par la perpendiculaire DF; et derechef les triangles BDF, ADF, ADE, DEC par les autres perpendiculaires FO, FI, EL, EN; et continuer ainsi tant qu'on voudra et faire que toutes les lignes et sections d'icelles, comme AL, LI, ID, BO, OD, DN, NC, soient nombres entiers.

5. Vous donnez par après (3) les triangles dont le moindre côté est différent d'un quarré de chacun des deux autres : je sais bien que la

(1) Lettre XLVIII, 6.
(2) Lettre XLVIII, 5.
(3) Lettre XLVIII, 7.

moitié de ceux qui ont 1 pour différence de leurs petits côtés ont aussi cette propriété, savoir ceux qui commencent par un nombre pair (1), mais je n'attendois pas que vous dûssiez vous servir de ceux-là, espérant que vous donneriez le moyen de les trouver tous; et, afin d'exclure les susdits, on pourroit ainsi proposer le problème :

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour différence de leur petit côté à chacun des deux autres côtés, en sorte que l'une des différences ne puisse pas mesurer l'autre.

6. Pour l'autre propriété des triangles (2), qui est d'avoir un autre triangle relatif en différences, en sorte que la différence des deux grands côtés du premier soit celle des deux petits côtés du second, et la différence des deux petits côtés du premier soit celle des deux grands côtés du second, comme on voit aux triangles :

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} & 49 & & 1 & & & 1 & & 49 & \\ 11 & & 60 & & 61 & 119 & & 120 & & 169, \end{array}$$

vous n'avez pas considéré attentivement cette proposition, car les triangles que vous donnez :

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} & 98 & & 71 & & & 98 & & 431 & \\ 449 & & 351 & & 280 & 949 & & 851 & & 420, \end{array}$$

n'ont pas cette propriété, mais en ont une autre, qui est que les grands côtés de chacun ont pareille différence, savoir 98, et en outre que les deux hypoténuses ont pareille différence que les deux grands côtés. Mais ce n'est pas ce que je demande, car aux triangles

$$\begin{array}{cccccccccc} & 49 & & 1 & & & & 1 & & 49 & \\ 11 & & 60 & & 61 & \text{et} & 119 & & 120 & & 169, \end{array}$$

vous voyez que 120 et 169 n'ont pas même différence que 60 et 61, ni 61 et 169 même différence que 60 et 120. Il faudroit donc, pour satisfaire à la question, qu'en vos triangles il y eût même différence de 449 à 351 que de 851 à 420, et de 351 à 280 que de 949 à 851.

(1) C'est-à-dire dont le plus petit côté est pair.
(2) Lettre XLVIII, 8. *Voir* les notes.

7. Vous me proposez par après (1) de *trouver un nombre qui soit polygone autant de fois qu'on voudra et non plus.*

Je vous dirai qu'il y a quelques années que je m'étois mis à la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'avisai que les figures qui sont maintenant en usage sont si extravagantes, lorsqu'on les veut mettre en pratique, j'entends quand on les veut représenter avec des jetons ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimères ou grotesques que figures, lesquelles, si elles ne sont entièrement régulières, au moins doivent-elles en approcher le plus que faire se peut.

Cela fut cause que je quittai ce que j'avois commencé pour me mettre à réformer ces figures, et Dieu m'a fait la grâce d'y réussir en quelque façon, car j'ai trouvé une manière de faire des figures régulières en nombres d'une infinité de sortes, et d'autres aussi qui n'ont point d'angles *ingrédiens*, de tant de côtés qu'on voudra. J'ai ensuite considéré quelques-unes de leurs propriétés et ce qui dépend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arrêté aux figures communes, que je nommerois plutôt progressions de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles par lequel elles sont formées. Je crois bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en êtes-vous pas encore avisé; mais pour les communes, on peut considérer votre question en deux manières :

8. La première, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte qu'il enveloppe tous les polygones inférieurs, c'est-à-dire que, si ce nombre est, par exemple, heptagone, il doive aussi être hexagone, pentagone, quarré et triangle. Et ainsi, pour avoir un nombre qui fût sept fois polygone, il en faudroit donner un qui fût figure de 9, 8, 7, 6, 5, 4 et 3 côtés; ce qui seroit à la vérité fort difficile, et il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres

(1) *Voir* Lettre XLVIII, 9. Cette question dérive de celle qui termine le Livre *Des nombres polygones* de Diophante. Fermat ne paraît pas être jamais arrivé à une solution qui l'ait satisfait.

qui sont seulement triangles, quarrés et pentagones deviennent incontinent fort grands, et c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre considération est qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non. Je n'ai pas encore recherché cela; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

9. L'autre question que vous me faites (¹) contient deux problèmes :

L'un de *choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra et non plus;*

L'autre est de *déterminer à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtés.*

Pour soudre ces problèmes, il faut considérer que tout nombre premier, différent de l'unité d'un nombre divisible par 8, est la somme des deux petits côtés d'un triangle, et tout nombre qui est la somme des deux petits côtés d'un triangle auquel les côtés sont premiers entre eux, diffère de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondements, il faut faire la même chose avec ces nombres qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs $+1$, pour trouver ce qui est requis par les problèmes, si on demandoit des hypoténuses au lieu de la somme des deux petits côtés. Il seroit superflu de déduire cela plus au long : *intelligenti loquor.*

10. Si votre méthode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, et aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtés sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont elle est la différence. Car ces sommes ont cette propriété d'être toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; et, si cette somme est un nombre composé d'autres de même nature, comme 119 composé de 17 et 7, il sera quatre fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la même chose pour l'enceinte entière des triangles que pour la somme des deux petits côtés.

(¹) *Voir* Lettre XLVIII, **11**.

11. Sur le sujet des triangles, voici ce que je vous proposerai encore :

Une hypoténuse composée étant donnée avec les quarrés premiers entre eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221 soit l'hypoténuse donnée avec les quarrés qui la composent, savoir : 100, 121 et 196, 25, il faut trouver par le moyen d'iceux que 221 a 13 et 17 pour parties.

12. J'attends de vous la manière [1] de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances -1 en toute analogie, et principalement en celle de 2.

Je suis etc.

L.

FRENICLE A FERMAT [2].

VENDREDI 6 SEPTEMBRE 1641.

(*Va*, p. 169-173.)

Monsieur,

1. Votre règle [3] pour trouver les triangles pareils à 11, 60, 61 et 119, 120, 169, est fort bonne; je m'étois seulement arrêté à l'exemple, sans la considérer autrement.

2. Mais celle que vous mettez ensuite, pour les triangles dont le moindre côté diffère d'un quarré des deux autres [4], sert à la vérité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous, ainsi que vous prétendez : car, prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré $+1$ de quelque nombre au

(1) *Voir* Lettre XLVII, **1**.

(2) Réponse à une Lettre perdue, par laquelle Fermat avait répliqué à la précédente, XLIX.

(3) *Voir* Lettres XLVIII, **8** et XLIX, **6**.

(4) *Cp.* Lettre XLIX, **5**.