2. J'attends maintenant qu'il vous plaise m'envoyer la copie de mes Traités (1) que je vous ai si souvent demandée pour M. Despagnet.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

Ce 15 juin 1641.

3. Depuis avoir écrit la lettre de M. Frenicle, j'ai trouvé la dernière question que je lui fais (2) :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle.

S'il la veut, je lui en ferai part, et serai cependant bien aise de voir sa solution.

XLVIII.

FERMAT A FRENICLE (3).

< 15 JUIN 1641 >

(B, f° 26 v°-28 r°.)

1. La proposition fondamentale des triangles rectangles est que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés (4).

(1) *Voir* Lettre XLVI, 2.
(2) *Voir* Lettre XLVIII, 11.
(3) Cette pièce inédite, reproduite d'après une copie qui ne porte ni adresse ni date, ne doit être considérée que comme un extrait d'une Lettre de Fermat. Cette Lettre était évidemment adressée à Frenicle, dont nous avons la réponse (ci-après XLIX), datée du 2 août 1641. Le post-scriptum de la Lettre XLVII ci-avant, adressée à Mersenne le 15 juin 1641, prouve d'ailleurs que le présent extrait a bien été fait sur la Lettre pour Frenicle, mise par Fermat dans le paquet envoyé à cette date au Minime. L'auteur de l'extrait n'a copié que ce qui lui a paru avoir un intérêt mathématique et a négligé toutes les transitions d'une question à l'autre.
(4) *Voir* Lettre XLV, 2.

2. La méthode pour trouver les triangles composés en conséquence des primitifs est dans les Livres [1], ou s'en peut tirer aisément :

Soit le nombre donné 65, lequel je trouve être l'hypoténuse de quatre triangles, par la règle déjà envoyée [2]. Les nombres premiers de la qualité requise qui le composent sont 5 et 13. Le triangle [3] de 5 est 5, 4, 3; celui de 13 est 13, 12, 5.

Je multiplie la base 12 par la base 4, vient 48; puis le petit côté 5 par l'autre 3, vient 15; et derechef 12 par 3, en croix, vient 36; puis 4 par 5, vient 20.

La somme des deux premiers produits et la différence des deux seconds font les deux petits côtés d'un des triangles cherchés, qui sera par conséquent : 65, 63, 16.

Et derechef la somme des deux derniers produits et la différence des deux premiers sont les deux petits côtés d'un autre des triangles cherchés, qui sera partant : 65, 56, 33.

(Que si, au lieu de 13, 12, 5, vous aviez pris le même 3, 4, 5, en faisant la même opération, vous n'eussiez trouvé qu'un seul triangle qui est, en mon précédent exemple : 25, 24, 7.)

Les deux autres triangles sont semblables aux deux premiers et se font, l'un en multipliant les côtés du premier par l'hypoténuse du second, et l'autre en multipliant les côtés du second par l'hypoténuse du premier; ils sont donc : 65, 52, 39; 65, 60, 25.

3. Cette méthode est générale, de sorte que toute la difficulté consiste à trouver les triangles primitifs, lorsque le nombre premier qui leur sert d'hypoténuse est donné, et cette question se réduit à la suivante déjà proposée [4] :

Étant donné un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, trouver les deux quarrés qui composent le dit nombre.

(1) Fermat va simplement en effet exposer la méthode de Diophante, III, **22**, pour construire quatre triangles ayant une même hypoténuse.

(2) Dans la Lettre XLV, **2**, 4°.

(3) Le triangle qui a 5 pour hypoténuse.

(4) Probablement dans un passage non conservé de la présente Lettre.

Car si l'on n'a ces deux quarrés, on ne sauroit trouver le triangle primitif. Mais ce problème, de trouver ces deux quarrés, est aussi malaisé que de tâtonner, et l'ordre de la proposition précédente est grandement difficile.

4. Soit un nombre impair donné, comme 15, les couples des nombres sous lesquels il est produit sont 1, 15, et 3, 5. Chacun de ces deux couples le fait être un des petits côtés d'un triangle rectangle, car le premier couple (1) produit le triangle : 113, 112, 15; et le second couple produit le triangle : 17, 15, 8 (j'entends des triangles non composés).

Au premier de ces triangles, 15 est le plus petit côté, au second, le moyen. *On demande quelle est la proportion des deux côtés qui produisent un nombre impair, au-dessus de laquelle le dit nombre impair soit le petit côté, et au-dessous le moyen.*

Je réponds qu'il est impossible de le déterminer exactement en nombres entiers, parce que l'équation d'algèbre produit des nombres irrationaux, quoiqu'on en puisse approcher à l'infini de plus en plus par nombres entiers.

Par exemple : si les deux côtés qui produisent l'impair sont entre eux en proportion moindre que de 2414213 à 1000000 ou égale, le nombre impair fera le moyen côté; que si les deux côtés qui produisent l'impair sont en proportion plus grande que de 2414214 à 1000000 ou égale, le nombre impair fera le petit côté.

On peut approcher ces deux proportions à l'infini, mais non en termes précis; elle sera (2) en termes irrationaux, savoir de 1 à 1 + Rq. de 2.

5. Il y a des triangles qui se peuvent diviser en deux, et subdiviser

(1) En thèse générale, suivant le langage de Diophante, un triangle rectangle en nombre a, b, c, est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq,$$

relations qui entraînent l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$. Mais ici, comme Fermat veut des nombres premiers entre eux et que a, b, c seraient pairs, il prend leurs moitiés.

(2) Fermat renverse la proportion qu'il a indiquée plus haut.

en quatre, seize et ainsi tant que l'on veut, toutes les lignes des divisions demeurant commensurables en nombres entiers [1].

Si l'on entend que l'aire du triangle est double, comme celle de 17, 15, 8, qui est double de l'aire de 13, 12, 5, cela est aisé et se peut ainsi énoncer :

Étant donnés deux nombres entiers, trouver deux triangles, desquels les aires soient en proportion de deux nombres donnés.

Il y a quatre règles pour soudre cette question en ce sens [2].

6. Il y a des triangles dont les moindres côtés ne diffèrent jamais que de l'unité, comme 3, 4, 5; 20, 21, 29, lesquels se forment sur un des termes par règle infaillible à l'infini. Car il ne faut qu'ajouter le double de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés, et le tout, ajouté au moindre côté, fait le côté moindre du triangle requis. Ajoutez-y l'unité, vous aurez le moyen.

Exemple : le double de 29 est 58; ajoutez-y la somme des deux petits côtés, savoir 41, vient 99, auquel ajoutez 20, qui est le petit côté; vient 119, auquel ajoutez l'unité, vous aurez 119 et 120 pour les deux moindres côtés du triangle requis, qui sera : 119, 120, 169.

L'hypoténuse se fait du triple de l'hypoténuse et du double de la somme des deux autres côtés. Le triple de l'hypoténuse est 87, le double de la somme des autres côtés 82, lequel, avec 87, fait 169, qui est l'hypoténuse requise.

Nous avons donc tiré du triangle : 20, 21, 29, celui-ci : 119, 120, 169; de celui-ci, nous en tirerons un autre à l'infini.

Même méthode pour trouver un triangle, la différence des moindres côtés duquel soit un nombre donné. J'omets les règles et les limitations pour trouver tous les possibles de la qualité requise, car la règle est aisée, en supposant les fondements.

7. Il y a des triangles auxquels le moindre côté est toujours différent d'un quarré de chacun des deux autres, comme 20, 21, 29.

(1) *Voir* Lettre XLIX, **4**.

(2) *Voir* l'Observation XXIX sur Diophante et ci-après, **10**, la première de ces règles.

Trouvez, par la précédente, un triangle non composé, les côtés moindres duquel diffèrent par un quarré, comme 20, 21, 29 ou tel autre.

S'il a les qualités requises, il en faut tirer deux de celui-ci par la méthode précédente, et le second qui viendra satisfera à la proposition.

Et s'il n'a pas les conditions requises, le premier qui s'en tirera, par la précédente, satisfera à la proposition.

Comme : 3, 4, 5 ne satisfait qu'à la précédente et non à celle-ci. Le premier qui s'en tirera y satisfera, à savoir : 29, 21, 20, et si de cettui-ci vous en tirez un, viendra 119, 120, 169, qui ne satisfait pas à cette question; mais celui qui s'en tirera, à savoir : 985, 697, 696, et ainsi à l'infini, alternativement, y satisfera.

8. Il y en a d'autres qui pris par couples ont leurs différences relatives [1] comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169.

Pour les former, il faut trouver trois quarrés en proportion arithmétique, qui sont par exemple : 1, 25, 49. Formez l'un des triangles de la somme des côtés des premier et deuxième quarrés et du côté du second, et formez l'autre triangle de la somme des deux côtés du second et du troisième, et du côté du deuxième, vous aurez les deux triangles requis.

Autre exemple [2] : Soient exposés les trois quarrés en proportion arithmétique 49, 169, 289.

Les deux triangles se formeront de 20 et 7 et de 30 et 7, et seront

449, 351, 280;   949, 851, 420.

9. Trouver un nombre qui soit autant de fois qu'on voudra polygone et non plus [3].

(1) C'est-à-dire deux triangles rectangles en nombres (a, b, c) (a_1, b_1, c_1), tels que l'on ait $a - b = b_1 - c_1$ et $b - c = a_1 - b_1$.

(2) Fermat commet dans cet exemple une erreur de plume. Car, d'après sa règle, ayant les carrés 7^2, 13^2, 17^2, il devait former les triangles, l'un de $7 + 13 = 20$ et de 13, l'autre de $13 + 17 = 30$ et de 13; il aurait ainsi trouvé les triangles 569, 520, 231 et 1069, 780, 731, satisfaisant au problème proposé. *Voir* ci-après, XLIX, **6**.

(3) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLIX, **7**.

10. Trouver deux triangles dont les aires soient en proportion donnée [1].

Voici la règle la plus élégante :

Soient les deux nombres qui expriment la proportion donnée, a et b. Les deux triangles se forment : le premier, de a bis $+ b$ et de $a - b$; le second, de b bis $+ a$ et de $a - b$.

Vous aurez donc deux triangles qui seront par leurs aires en proportion donnée. Car, si vous les demandez de 5 à 3, les deux triangles se formeront, le premier de 13 et 2, le second de 11 et 2, et les deux triangles seront : 173, 165, 52 | 125, 117, 44.

11. Étant donné un nombre, trouver combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle [2].

12. Règle pour déterminer les nombres premiers qui, en toute progression, mesurent les puissances -1 seulement, ou $+1$ aussi [3].

XLIX.

FRENICLE A FERMAT [4].

VENDREDI 2 AOUT 1641.

(*Va*, p. 166-168.)

Monsieur,

1. J'étois dans l'impatience de savoir votre retour à Toulouse, pour me donner l'honneur et le contentement de continuer nos conférences, lorsque le Révérend Père Mersenne m'en a donné avis; j'espère qu'elles dureront plus longtemps que je ne pensois, parce qu'il est survenu quelque chose qui m'arrête ici.

(1) *Voir* plus haut, **5**.
(2) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLVII, **3**, et XLIX, **9**.
(3) Question proposée par Frenicle à Fermat. *Voir* Lettre XLVII, **1**, et XLIX, **12**.
(4) Réponse à la Lettre précédente, XLVIII.