celle des cubes, et pour vous montrer jusques où va la connaissance que j'en ai, le quarré de 8, qui est 64, se peut disposer en autant de façons différentes, et non plus, qu'il y a d'unités en ce nombre

1 004 144 995 344,

ce qui sans doute vous effraiera, puisque Bachet et les autres que j'ai vus n'en donnent qu'une seule.

Je rangerai de même tous les quarrés et cubes à l'infini et déterminerai en combien de façons et non plus, avec la démonstration.

3. Pour savoir si M. Frenicle ne procède point par tables, proposez lui (1) de

Trouver un triangle rectangle duquel l'aire soit un nombre quarré;

Trouver deux quarréquarrés desquels la somme soit quarréquarrée;

Trouver quatre quarrés en proportion arithmétique continue;

Trouver deux cubes desquels la somme soit cube;

S'il vous répond que jusques à un certain nombre de chiffres il a éprouvé que ces questions ne trouvent point de solution, assurez-vous qu'il procède par tables.

XL.

FERMAT A MERSENNE.

< JUIN? 1640. >

(*Va*, p. 176-178.)

Mon Révérend Père,

1. J'ai reçu avec grande satisfaction votre lettre accompagnée de celle (2) de M. Frenicle, qui me confirme en l'estime que je faisois de

(1) *Voir* Lettre XII, 2, où Fermat proposait déjà à Sainte-Croix trois de ces problèmes impossibles, et un dernier analogue au troisième de la présente.

(2) En réponse à la Lettre XXXVIII *bis*.

lui. J'y réponds succinctement et premièrement, sur ce qu'il a douté que j'eusse une méthode générale pour ranger tous les quarrés pairs à l'infini. Je vous prie de l'assurer du contraire, car il est très certain qu'il y a plus de dix ans que je la découvris et en donnai dès lors des exemples sur des quarrés plus hauts que ceux de Bachet, comme M. Despagnet vous pourroit témoigner.

2. Il est vrai que je n'avois pas songé de déterminer exactement en combien de façons ces quarrés pouvoient être ordonnés, et j'avoue que je n'avois pas vu toutes les manières qui y conduisent, puisque je doutois même que le quarré pût demeurer magique en levant une seule enceinte (1); mais, ayant trouvé une règle pour les ordonner en beaucoup de façons, je crus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me semble excusable, puisque je vous envoyai ma Lettre aussitôt après la première méditation que j'eus fait sur ce sujet.

3. Depuis que j'ai reçu la dernière de M. Frenicle, j'ai aussitôt découvert que la question du quarré de 22 étoit de ma portée et, pource que l'opération seroit trop longue qui consiste à ranger le quarré de 22 en telle sorte que, levant trois enceintes, il reste magique, et du restant encore deux et qu'il demeure magique, et puis une seule du reste à la même condition, je me contenterai pour ce coup de vous envoyer le carré qui reste après les trois premières et les deux secondes enceintes ôtées, duquel si vous levez une seule enceinte, le reste demeure magique, comme vous verrez.

Pource que le temps me manque, je diffère à vous envoyer les cinq enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22, jusques au départ du prochain courrier (2).

Après cela vous devez croire que, dès que j'aurai loisir, j'irai aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

(1) *Comparer* Lettres XXXVIII *bis*, **6** et **7**, et XXXIX, **2**.
(2) La Lettre ainsi annoncée fait défaut.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	253	254	255	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	300	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	322	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	119	367	368	358

4. Pour ce qui est des cubes (1), je n'en sais pas plus que M. Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les diagonales seules des quarrés que nous pouvons supposer parallèles à l'horizon seront égales aux côtés des quarrés, ce qui n'est pas peu de chose, en attendant qu'une plus longue méditation découvre le reste. Je dresserai celui de 8, 10 et 12 à ces conditions, si M. Frenicle me l'ordonne.

5. Pour les quarrés qui ont des cellules vides (2), j'y travaillerai au plus tôt.

6. Ce que j'estime le plus est l'abrégé (3) pour l'invention des nombres parfaits, à quoi je suis résolu de m'attacher, si M. Frenicle ne me fait part de sa méthode.

(1) *Voir* Lettre XXXVIII *bis*, 8.
(2) *Voir* Lettre XXXVIII, 4.
(3) *Voir* Lettre XXXIX, 1.

Voici trois propositions que j'ai trouvées, sur lesquelles j'espère de faire un grand bâtiment :

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	etc.,

soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pource que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent. Mettez, au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle : 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leurs exposants.

Cela supposé, je dis que :

1° Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé. Comme, parce que 6, exposant de 63, est composé, je dis que 63 est aussi composé.

2° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant. Comme, parce que 7, exposant de 127, est nombre premier, je dis que 126 est multiple de 14.

3° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant ou que le double de l'exposant. Comme, parce que 11, exposant de 2047, est nombre premier, je dis qu'il ne peut être mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22, comme 23, ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22 : en effet 2047 n'est mesuré que par 23 ou par 89, duquel, si vous ôtez l'unité, reste 88, multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées et prouvées non sans peine : je les puis appeler les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que M. Frenicle ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, et sans doute ces propositions passeront pour très belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matières, et je serai bien aise d'apprendre le sentiment de M. de Roberval.

7. Au reste, vous ou moi avons équivoqué de quelques caractères au nombre que j'avois cru parfait (¹), ce que vous connoîtrez aisément puisque je vous baillois 137 438 953 471 pour son radical, lequel j'ai pourtant depuis trouvé, par l'abrégé tiré de ma troisième proposition, être divisible par 223; ce que j'ai connu à la seconde division que j'ai faite, car, l'exposant dudit radical étant 37, duquel le double est 74, j'ai commencé mes divisions par 149, plus grand de l'unité que le double de 74; puis, continuant par 223, plus grand de l'unité que le triple de 74, j'ai trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces abrégés j'en vois déjà naître un grand nombre d'autres et *mi par di veder un gran lume*.

Je vous entretiendrai un jour de mon progrès, si M. Frenicle me vient au secours et m'abrège par ce moyen ma recherche des abrégés. En tout cas, je vous conjure de faire en sorte que M. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vaquer à ces choses.

Je suis etc.

XLI.

ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 4 AOUT 1640.

(*Va*, p. 165-166.)

MONSIEUR,

1. Encore que depuis près de trois ans je n'aie eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ai pourtant pas été privé entièrement

(¹) Probablement dans la partie perdue de la Lettre XXXIX.