XXXV.

FERMAT A MERSENNE.

VENDREDI 22 OCTOBRE 1638.

(A, f^os 39-44; B, f^os 10^vo-12^vo.)

..... 1. Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires (1).

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la Géostatique (2), et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

2. Après cela, je satisferai à la question de la *tangente du galand parallèle à l'axe* (3), c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée par position.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée et qui l'a paru à M. de Roberval, car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes (4), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad locos* (5), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux, pour éviter les asymmétries et cette longueur d'équations qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR (*fig.* 71), la droite donnée par position DNOP, et la ligne Z donnée de grandeur.

La propriété du galand est que, quel point que vous preniez, comme

(1) Le commencement de cette Lettre inédite est perdu.

(2) La Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, I, 73) du 13 juillet 1638 : Examen de la question, savoir si un corps pèse plus ou moins, étant proche du centre de la terre, qu'en étant éloigné.

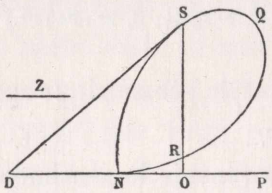
(3) *Voir* Lettre XXXIII, 3. — C'était Roberval qui avait posé cette question, après avoir donné le nom de *galand* (nœud de ruban) à la courbe proposée par Descartes et dont il avait étudié la forme.

(4) Cette solution se trouve dans la Lettre de Descartes à Mersenne du 23 août 1638 (éd. Clerselier, III, 65, p. 354-357). *Comparez* la Lettre du 15 novembre (Clerselier, II, 92; Cousin, VIII, p. 6).

(5) Tome I, page 103-110.

S ou R, le solide sous *Z in* NO *in* OS est égal aux deux cubes NO et OS; ou bien le solide sous *Z in* NO *in* OR est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit.

Fig. 71.



Soit fait. Par ma méthode des tangentes [1], si NO est appelée D, et OS, B, la ligne OD sera égale à

$$\frac{B\,cub.\ \text{bis} - D\,cub.}{Z\ \text{in}\ B - Dq.\ \text{ter}},$$

et si la tangente étoit du côté d'en bas, la ligne OD seroit égale à

$$\frac{D\,cub. - B\,cub.\ \text{bis}}{Dq.\ \text{ter} - Z\ \text{in}\ B}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas.

Supposons que NO, inconnue, s'appelle A, et que OS s'appelle E, nous aurons, pour la ligne OD,

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales; il faudra donc que

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}\ \text{soit égal à}\ E,$$

et, par conséquent,

$$E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.\quad \text{sera égal à}\quad Z\ \text{in}\ Eq. - Aq.\ \text{in}\ E\ \text{ter}.$$

(1) *Voir* Pièce XXXI, 3.

Or, par la propriété de la ligne,

$$A\,cub. \quad \text{est égal à} \quad Z \text{ in } A \text{ in } E - E\,cub.$$

Nous aurons donc (1)

$$E\,cub. - Z \text{ in } A \text{ in } E \quad \text{égal à} \quad Z \text{ in } Eq. - Aq. \text{ in } E \text{ ter}.$$

Divisons le tout par E, nous aurons

$$Eq. - Z \text{ in } A \quad \text{égal à} \quad Z \text{ in } E - Aq. \text{ ter},$$

et enfin

$$Eq. - Z \text{ in } E \quad \text{égal à} \quad Z \text{ in } A - Aq. \text{ ter}.$$

Et partant, nous avons un lieu elliptique, et le point S est *ad ellipsin positione datam; sed est etiam ad curvam positione datam. Ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux et par ma méthode topique (2).

Par la même facilité on fera la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez, par la même méthode, faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée.

En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je sais.

3. Pour *la tangente de la roulette* (3), bien loin d'en faire un mystère, je vous veux faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette même méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à des

(1) Fermat commet ici une faute de calcul. Les premiers termes des équations suivantes devraient être *E cub.* ter; *Eq.* ter; *Eq.* ter. Le lieu est donc un cercle et non un ellipse.

(2) *Voir* plus loin **9**, une seconde solution, également imparfaite. Fermat n'a pas reconnu, comme l'avait fait Descartes, que le problème particulier est plan; il n'avait, semble-t-il, cherché que des méthodes générales.

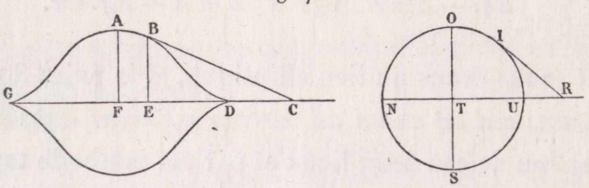
(3) *Voir* Lettre XXXIV, **2**.

lignes droites, me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes.

4. Je vous en ai déjà fait voir l'exemple en la roulette. En voici un autre *en l'ovale* (1) *de laquelle le sphéroïde est au cylindre circonscrit comme le double du diamètre à la circonférence du cercle,* laquelle j'envoyai dernièrement à M. de Roberval.

Soit l'ovale GABD (*fig.* 72) et l'axe GD autour duquel se décrit le

Fig. 72.



sphéroïde. Soit le cercle NOIS, coupé à angles droits par les deux diamètres OS et NU, duquel la circonférence soit double de l'axe GD, en sorte que le quart OU soit égal au demi-axe FD. Soit le point B en l'ovale, duquel il faut tirer la tangente.

Tirons la perpendiculaire BE et faisons la portion du quart OI égale à FE; tirons au cercle la tangente IR qui coupe le diamètre NU au point R. Faisons EC, en l'ovale, double de IR. La ligne BC touchera l'ovale.

5. En voici un autre exemple :

Soit la parabole EDAG (*fig.* 73), de laquelle l'axe AG et le sommet A. *Soit une autre courbe* ABF *de même axe et sommet, et que* BC, *appliquée, soit égale à la portion de parabole* DA, *et l'appliquée* FG *égale à la portion de parabole* EA, *etc., à l'infini.* Il faut trouver, au point B de cette nouvelle courbe, une tangente.

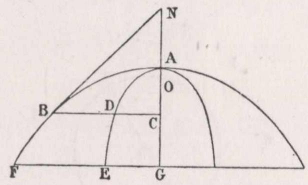
(1) Cette courbe, évidemment imaginée par Fermat, a pour équation rapportée aux axes FA, FD : $y = a\sqrt{\cos\frac{x}{b}}$, b étant le rayon du cercle auxiliaire NOIS.

Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole. Faisons

comme OA + AC à AC, ainsi le quarré BC au quarré CN.

La ligne BN touchera la courbe FBA.

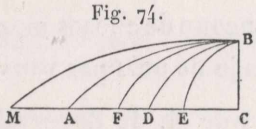
Fig. 73.



6. Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que de faire voir les solutions. Mais, pour le suivant, je le propose à M. de Roberval et encore, si j'osois, à M. Descartes :

Soient autant de courbes que l'on voudra de même sommet B (fig. 74), *comme* BE, BD, BF, BA, *données par position, et soit marquée une autre*

Fig. 74.



courbe de même sommet, comme MB, *en sorte que les appliquées de cette dernière, comme* MC, *soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes*, AB, BF, BD, BE, *et la somme des appliquées* AC, FC, DC, EC. *Il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe.*

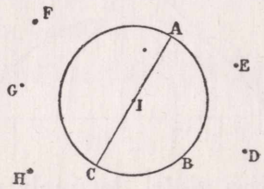
Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce sans aucune asymmétrie, ce qui semble merveilleux.

7. Avant que de quitter la Géométrie, je vous donne encore une spé-

culation qui semble être excellente et qui allonge infiniment l'étrivière au lieu plan : *Si a quotcumque punctis* (1), laquelle j'ai trouvée en cherchant les lieux *ad superficiem* (2) :

C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano,* comme par exemple : *Soient* (fig. 75) *les points*

Fig. 75.



donnés F, G, H, E, D *et le cercle trouvé* ABC *en sorte que, quel point que vous preniez en sa superficie, comme* A, *les quarrés* FA, GA, HA, DA, EA *soient égaux à un espace donné,* je dis que : *Si autour du point* I *comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle* ABC *soit un des grands, quel point que vous preniez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.*

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem,* mais je ne puis pas vous dire tout à la fois.

8. Le quadrilatère (3) de M. de Roberval, que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand, sera différé au premier voyage.

9. Il faut que je vous die encore qu'on peut trouver la tangente de 45 degrés au galand (4) par une voie qui semble plus géométrique. Car, là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

(1) *Voir* Lettre XIX, 1.

(2) *Comparer* Tome I, p. 113.

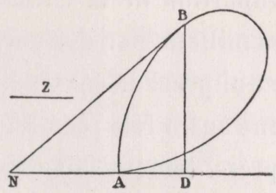
(3) Problème proposé à Descartes par Mersenne, comme n'ayant pas été résolu par Roberval (*Lettres de Descartes,* éd. Clerselier, III, 65, du 23 août 1638; p. 357) :

« Les côtés AD et AE du quadrilatère ADCE étant donnés avec l'angle DAE et la longueur de la diagonale AC, et enfin la proportion qui est entre les deux lignes AG et AH, perpendiculaires sur les côtés inconnus CD et CE, il faut chercher le reste. »

(4) *Voir* plus haut, 2.

Supposons que Z (*fig.* 76), le côté droit du galand, est inconnu, et

Fig. 76.



que AD est une ligne donnée nommée B, que DB est inconnue, nommée A. Donc le côté droit sera

$$\frac{A\,cub. + B\,cub.}{B \text{ in } A}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{B \text{ in } A\,cub. \text{ bis} - Bqq,}{A\,cub. - B\,cub. \text{ bis}},$$

laquelle il faut faire égale à A. Nous aurons donc

$$Aqq. - B\,cub. \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{égal à} \quad B \text{ in } A\,cub. \text{ bis} - Bqq.,$$

et enfin

$$B \text{ in } A\,cub. \text{ bis} + B\,cub. \text{ in } A \text{ bis} - A\,qq. \quad \text{égal à} \quad Bqq.,$$

laquelle équation, pour trouver la valeur de A, se peut résoudre ou par ma méthode topique, ou par telle autre qu'on voudra.

Or, A étant connue, le côté droit Z sera connu, et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire :

comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou B donnée,
ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne

qui déterminera un point semblable au point D, et la question est faite.

S'il y a manque en la supputation, vous la corrigerez, car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

10. Pour Galilée (¹), j'avois commencé de l'examiner par le menu, et, si j'ai du loisir assez, je continuerai.

Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouverez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avois desseigné.

Je suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

FERMAT.

Ce 22 octobre 1638.

11. Puisque mes deux vers (²) ont eu votre approbation, en voici deux autres de même main qu'on estime ici plus que les premiers et desquels vous me direz, s'il vous plaît, votre sentiment :

Optato patriam afflictam Delphine beavit
Rex Justus : nunquam justior ille fuit.

XXXVI.

FERMAT A MERSENNE (³).

DIMANCHE 26 DÉCEMBRE 1638.

(A, f^{os} 23-24; B, f^{o} 25 v^{o}.)

1. Pour les nombres, je peux trouver par ma méthode toutes les questions des parties aliquotes (⁴), mais la longueur des opérations me rebute et la recherche des nombres premiers, à laquelle toutes ces

(¹) *Voir* Lettre XXXIII, 5.

(²) Ces vers de Fermat ne sont pas connus.

(³) Cette Pièce est un extrait d'une Lettre perdue, déjà publié par M. Charles Henry (*Recherches, etc.*, pp. 177-178) d'après le brouillon d'Arbogast, qui dérive d'une copie de Mersenne.

(⁴) *Voir* Lettre XXXIII, 4.