laquelle confirme la règle tout à fait. Bien loin d'y remarquer des défauts, je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'à la sienne (1)....

XXXI.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS

EXPLIQUÉE ET ENVOYÉE PAR M. FERMAT A M. DESCARTES (2).

(A, f^os 62 à 67.)

1. La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA (*fig.* 67), de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données; supposons que BA s'appelle B, et que BC s'appelle D. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle A. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit E.

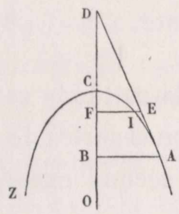
(1) La Lettre est évidemment incomplète. D'après la réponse de Descartes à Mersenne, en date du 27 juillet 1638 (*Lettres de Descartes,* éd. Clerselier, III, 66, p. 374-375), Fermat y aurait répondu à la question V de Sainte-Croix (*voir* p. 64, note), c'est-à-dire donné le nombre 1 476 304 896, comme quatrième connu dont le double soit égal à la somme de ses parties aliquotes. Descartes ajoute :

« ... il met un peu devant, touchant la quatrième question de M. de Sainte-Croix (*voir* p. 29, note 2), que j'aurai peut-être fait la même équivoque, qui lui arriva la première fois qu'elle lui fut proposée, et que j'aurai cru qu'il suffisoit que les nombres cherchés ne fussent ni quarrés, ni composés de deux quarrés, bien qu'ils fussent composés de quatre, ce qui n'est pas pourtant selon le sens de l'auteur etc. »

(2) Pièce jointe à la précédente (*voir* page 152, note 1). — Elle a été publiée par M. Charles Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (pages 184 à 189), d'après le brouillon d'Arbogast. Celui-ci ne l'a connue que par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue.

Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, et, de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Fig. 67.



Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuie à la courbe du point F : — plus grande, lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite, lorsque la courbe est convexe en dedans; car la règle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe. — Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

2. Comme, en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré;

car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

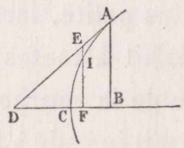
Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les appliquées à la courbe qui ont la propriété que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par E. J'efface tout ce qui reste mêlé avec E et égalise le surplus, de sorte que, par cette dernière équation, je connois la valeur de A et par conséquent la ligne BD et la tangente.

3. Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes ([1]).

Soit la courbe CA (fig. 68), *de laquelle la propriéte est telle que, quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme* A, *tirant la perpendicu-*

Fig. 68.



laire AB, *les deux cubes* CB *et* BA *soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme* N, *et sous les deux lignes* CB *et* BA.

Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par *adéquation,* les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous N, FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE sont en notes

$$D\,cub. - E\,cub. - D\,q.\text{ in }E.3 + D\text{ in }E\,q.\,3$$

$$+\frac{B\,cub.\text{ in }A\,cub. - B\,cub.\text{ in }E\,cub. - B\,cub.\text{ in }A\,q.\text{ in }E.3 + B\,cub.\text{ in }A\text{ in }E\,q.\,3}{A\,cub.};$$

([1]) *Voir* Lettre XXV, 6.

le solide de N, CF, FE, en notes, est

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } A - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E - N \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E + N \text{ in } B \text{ in } Eq.}{A}.$$

Multipliant tout par $Acub.$, il faut comparer

$$\begin{aligned} &Dc. \text{ in } Ac. - Ec. \text{ in } Ac. - Dq. \text{ in } E \text{ in } Ac.\,3 + D \text{ in } Eq. \text{ in } Ac.\,3 \\ &\quad + Bc. \text{ in } Ac. - Bc. \text{ in } Ec. - Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } E.\,3 + Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } Eq.\,3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac. - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Aq. \\ &\qquad - N \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Ac. + N \text{ in } B \text{ in } Eq. \text{ in } Aq. \end{aligned}$$

Otons les choses communes, savoir, du premier terme,

$$Dc. \text{ in } Ac. + Bc. \text{ in } Ac.,$$

et du second,

$$N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac.,$$

qui sont égaux par la propriété de la ligne; — puisque les deux cubes $Dc.$ et $Bc.$, répondant aux cubes des deux lignes BC et BA, sont égaux au solide $N \text{ in } D \text{ in } B$, qui répond à celui de la ligne donnée et des deux lignes BC et BA. — Divisons le reste par E et ôtons ensuite tout ce qui se trouvera mêlé avec E; restera enfin

$$Dq. \text{ in } A \text{ ter} + B\,cub. \text{ ter} \quad \text{égal à} \quad N \text{ in } D \text{ in } B + N \text{ in } B \text{ in } A,$$

et ainsi nous aurons

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B = B\,cub. \text{ ter}}{Dq. \text{ ter} = N \text{ in } B} \text{ égal à } A,$$

ce qu'il falloit chercher.

Nous avons mis, suivant la méthode de Viète (1), deux lignes = pour la marque du défaut, parce qu'il n'appert point, s'il n'a été dit d'ail-

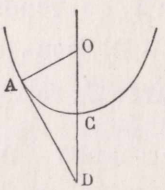
(1) *Viète*, In Artem analyticen Isagoge, cap. IV, præc. II (éd. Schooten, Leyde, Elzevirs, 1646, page 5) :

« Cum autem non proponitur utra magnitudo sit major vel minor, et tamen subductio » facienda est, nota differentiæ est = id est, minus incerto : ut propositis A quadrato et » B plano, differentia erit A quadratum = B plano, vel B planum = A quadrato. »

leurs, quelle est la proportion des deux lignes *B* et *D*, ou bien BA et BC, données. Car il peut arriver que quelquefois, suivant la diversité des proportions de *B* et de *D*, la ligne courbe sera convexe et d'autres fois concave; quelquefois encore que la tangente sera parallèle au diamètre BC; quelquefois enfin que le concours avec le diamètre se fera de l'autre côté, ce qui se détermine aisément par la méthode même, lorsqu'on nous donne la proportion des deux lignes données BA et BC, comme il est très aisé de voir et de faire comprendre. Lorsque je parle de la proportion des deux lignes données, j'entends leurs valeurs, *en nombres ou sourds ou rationaux;* car autrement on sait assez que, deux lignes étant données, leur proportion est aussi donnée.

4. Il paraît donc que ou je me suis mal expliqué ou que M. Descartes a mal compris mon Écrit latin ([1]); s'il veut que ce soit le premier, je ne le lui contesterai guère. Il s'est aussi trompé en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode *de maximis et minimis* à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD (*fig.* 69), menée,

Fig. 69.



du point A donné, sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. M. de Roberval ([2]) lui a déjà fait voir la raison de son mécompte, duquel il a voulu tirer cette conséquence, que la méthode *de maximis et minimis* étoit fautive et avoit besoin d'être corrigée, en quoi il s'est aussi bien trompé qu'au reste.

5. Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de maximis et minimis* peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

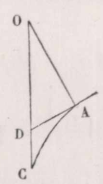
([1]) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* Tome I, page 133.
([2]) *Lettres de Descartes,* éd. Clerselier, III, 58.

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe, < ce > dont la démonstration est aisée.

Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.

Que si la ligne CA (*fig.* 70) est convexe en dehors, soit la tan-

Fig. 70.

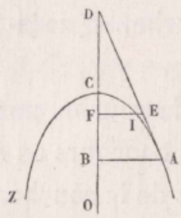


gente DA sur laquelle soit tirée la perpendiculaire AO. Il paroît par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente.

6. Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit par exemple la parabole donnée CIA (fig. 67) *sur laquelle le point* A *soit donné. Je veux chercher le point* O, *en sorte que* OA *soit la plus courte de toutes celles qui du point* O *peuvent être menées à la parabole.*

Fig. 67.



BC, comme ci-devant, s'appellera D, et BA s'appellera B, le côté droit de la figure, Z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit A. Donc le quarré OA en notes sera $Aq. + Bq$.

Prenons maintenant, au lieu de la ligne A ou OB, OF ou $A + E$. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

$$Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc en notes, par adéquation, les quarrés OI et OA.

Nous aurons d'un côté

$$Aq. + Bq.,$$

et de l'autre

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E.$$

Otons les choses communes; la comparaison restera entre

$$Eq. + A \text{ in } E \text{ bis}$$

d'un côté, et

$$Z \text{ in } E$$

de l'autre; car $Bq.$ est égal, par la propriété de la parabole, à Z in D.

Divisons le tout par E, et du reste ôtons le même E :

$$A \text{ bis sera égal à } Z,$$

et partant A ou OB sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

7. C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son quarré sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie; la raison est prise des asymmétries qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur $D - E$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'ôte pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle (¹) page 342, — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,

$$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \propto x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x,$$

il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer.

8. Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés.

Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours $D - E$, et FE, $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, je ne vois rien qui

(¹) *Géométrie de Descartes,* éd. Hermann. Paris, 1886, page 33, au bas. — Dans la figure, A est le sommet d'une courbe, AM l'abscisse, MC l'ordonnée courante; Fermat note d'ailleurs exactement les coordonnées comme l'avait fait Descartes.

empêche qu'on ne puisse le comparer, en prenant, si vous voulez, $D - E$ pour y et $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.

9. On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir : à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira. Je desire seulement qu'il sache que nos questions *de maximis et minimis* et *de tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner.

S'il desire voir l'application (1) que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides, je la lui ferai voir et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de *trouver le centre de gravité du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole* CBA *est tournée sur son appliquée* BA, *et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cônes de même base et de même hauteur* (2).

(1) *Centrum parabolici conoidis,* Tome I, p. 136.
(2) *Voir* Lettres IX, **7**; XIII, **6**; XV, **5**.