quatre ans. La construction pourtant convient au problème et au point même de votre proposition, si elle est vraie, ce que j'attends que vous me confirmiez.

Je vous prie aussi me faire savoir votre sentiment sur les autres propositions que je vous ai envoyées et votre réponse sur les autres points de ma dernière Lettre (¹) et me croire toujours etc.

XVIII.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 16 DÉCEMBRE 1636.

(*Va*, p. 148-151.)

MONSIEUR,

1. Je viens de recevoir votre Lettre du 29 novembre (²), pour réponse à laquelle je vous dirai que, de la méthode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarrécubes et quarréquarrés, je ne vois point qu'on en puisse tirer une règle générale pour l'invention de la somme *omnium potestatum in infinitum*, ce qui est requis à la solution de mon problème (³). Car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres, après avoir vu celles dont vous baillez les exemples; mais je demande une méthode générale qui serve *ad omnes potestates*, comme Viète a trouvé celles des sections angulaires (⁴). Vous y songerez, s'il vous plaît, et j'en écrirai cependant l'invention et démonstration que vous verrez lorsqu'il vous plaira.

(¹) Lettre XV.

(²) Cette Lettre, de Roberval à Fermat, est perdue.

(³) *Voir* Lettre XV, **3**.

(⁴) Francisci Vietæ ad angulares sectiones theoremata καθολικώτερα demonstrata per Alexandrum Andersonum. — Pages 287 à 304 de l'édition des Elzevirs.

2. Pour ce qui est des nombres et de leurs parties aliquotes (1), j'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre, de quoi j'ai fait dessein d'écrire un petit Traité. Je crois que vous aurez maintenant vu la construction des deux que j'ai envoyés au Père Mersenne; car il m'écrit qu'il vous les baillera. Toutes ces questions sont très difficiles, comme vous savez, et n'ont été traitées par personne.

3. J'ai été bien aise d'être confirmé par votre lettre en l'opinion que j'avois déjà conçue de M. de < Sainte-Croix >. Il est pourtant vrai qu'il doit avoir grande expérience dans les nombres, car, lui ayant par l'entremise du Père Mersenne proposé une question que personne de ceux à qui je l'avois proposée n'avoit encore pu soudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui satisfont à la question, sans pourtant expliquer sa construction. La question est (2) :

Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ constituant tria latera trianguli rectanguli numero, singulæ nempe areæ singulis lateribus sint æquales.

Je vous avouerai que ce problème me donne beaucoup plus de peine qu'à M. de < Sainte-Croix >. Il est vrai que les nombres que j'ai trouvés sont différents des siens et que peut-être ai-je tenu un chemin plus difficile, comme vous savez que ces questions ont infinies solutions. Peut-être serez-vous de mon avis, si vous essayez de satisfaire à la proposition.

4. Vous verrez aussi mes spirales (3), desquelles la démonstration vous sera connue tout aussitôt (car elle est pareille à celle des nouvelles figures (4) que j'ai quarrées ou auxquelles j'ai trouvé des cônes

(1) *Voir* Lettre XV, **4**. — Les deux nombres envoyés au Père Mersenne sont les *amiables* 17296 et 18416 (*voir* IV_A et IV_B).

(2) *Voir* Observation XXIX sur Diophante (Tome I, p. 321).

(3) *Voir* Lettre XV, **6**.

(4) *Voir* Lettre XIV, **4**.

égaux), et vous m'avouerez que ces propositions n'illustrent pas peu la Géométrie.

Si M. de Beaugrand n'a pas encore trouvé la démonstration de ces questions, vous m'obligerez de lui en faire part.

5. Je lui ai écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures (1) par une méthode particulière, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez vu. Il est vrai que je lui ai envoyé l'analyse seulement et non pas la composition que je vous éclaircirai une autre fois, parce qu'elle a ses difficultés et ne paroît pas d'abord par cette voie.

J'ai trouvé le centre de gravité de la parabole sans présupposer la quadrature, comme a fait Archimède, et ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire.

6. Toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides et *ad superficiem*, que j'ai achevées, et celles encore des parties aliquotes des nombres, dépendent de la méthode (2) dont M. Despagnet ne vous a pu faire voir qu'un seul cas, parce que, depuis que je n'ai eu l'honneur de le voir, je l'ai beaucoup étendue et changée.

7. Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposerai de trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoïde de Nicomède (3).

8. Au reste, je suis bien aise de ce que vous ayez trouvé la démon-

(1) *Voir* Lettre XV, **5**.
(2) *Voir* Lettre XIII, **3**.
(3) *Voir* Lettre XVII, **2**. — La seconde conchoïde de Nicomède (*Pappus*, éd. Hultsch, p. 244, l. 19) paraît correspondre à l'équation en coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{\cos\omega} - b$, en supposant $b < a$. (La troisième et la quatrième répondraient respectivement aux cas : $b = a$; $b > a$). Mais Fermat entend probablement ici la conchoïde du cercle. (*Comparez* Viète, *Supplementum Geometriæ*, édition des Elzevirs, page 240.)

stration, comme vous dites, de ce que, supposé qu'aux paraboles les segmens (1) de l'axe sont entre eux comme les parallélogrammes aux mêmes paraboles, il sera vrai aussi qu'étant tournées sur leurs axes, les centres des solides seront où l'axe est divisé en raison comme les cylindres aux solides (2).

Car, par la voie dont j'ai envoyé un exemple à M. de Beaugrand, et que je mettrai au long une autre fois, j'ai trouvé la démonstration de l'antécédent et, de celle du conséquent, que vous m'envoierez, s'il vous plaît, j'en tirerai la proportion des solides paraboliques à leurs cônes, qu'il seroit malaisé de trouver autrement (3). Car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent *post quadrata alternatim*, comme quarréquarrés, cubocubes etc., de quoi vous baillez l'exemple au premier; mais *in parabolis cubicis, quadratocubicis et sic alternis in infinitum, methodus qua usi sumus non dat proportionem conoideôn ad conos; ex nostra autem methodo, in omnibus omnino conoidibus invenimus centrum gravitatis : ergo, ex tua propositione, dabitur proportio eorum ad conos.*

Je l'attends donc avec impatience, puisqu'elle doit servir à cet usage; si ce n'est que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques, quadratocubiques, etc. à leurs cônes, ce que votre Lettre semble marquer, auquel cas je vous supplie m'envoyer lesdites proportions.

Ce n'est pas que je doute de la vérité de votre proposition; mais permettez-moi de vous dire que je me suis défié que vous en eussiez trouvé la démonstration et que j'ai cru seulement que vous en avez fait l'expérience aux conoïdes paraboliques des quarréquarrés, cubo-

(1) C'est-à-dire que le centre de gravité de l'aire $2\int_0^x y\,dx$ de la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m+1$ à m.

(2) C'est-à-dire que le centre de gravité du solide $\pi\int_0^x y^2\,dx$ engendré par la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m+2$ à m.

(3) D'après ce passage, Fermat n'aurait alors possédé la quadrature $\int x^{\frac{2}{m}}\,dx$ que dans le cas où m est pair.

cubes etc. *alternis*. Mais la connoissance que j'ai de votre savoir fait que j'espère que vous me détromperez.

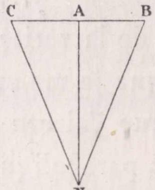
9. Pour ce qui est de la proportion (1) du solide qui se fait sur un diamètre de la parabole parallèle à l'axe, ma construction est différente de la vôtre : il seroit inutile de l'ajouter, puisqu'elles concluent toutes deux.

10. Je me trouve obligé d'ajouter un mot touchant votre proposition méchanique (2), parce que le Père Mersenne m'écrit qu'enfin j'ai acquiescé à votre opinion, ce que pourtant je ne saurois faire par les raisons que vous allez voir, et vous puis assurer que jamais je ne fus mieux confirmé en la proposition de mon second levier (3) que je le suis maintenant, car, pour celle du premier, il la faut établir par de nouveaux principes, puisque vous avez nié ceux que j'estimois si clairs.

Si votre principe, duquel je vous ai déjà écrit par ma dernière Lettre (4), est vrai, il s'ensuit manifestement qu'un même corps approchant du centre de la terre changera son poids.

In secunda figura (fig. 49) *sit vectis* CAB, *cujus medium* A *cum centro terræ* N *per rectam* AN, *ad vectem perpendicularem, jungatur. In*

Fig. 49.



punctis C *et* B *pondera* C *et* B *æqualia constituantur et similia, quæ ad centrum per rectas* CN, BN *annuant.*

(1) Proportion au cylindre ou au cône de même base et même hauteur, c'est-à-dire cubature.

(2) *Voir* Pièce XVI.

(3) *Voir* Pièce V, 2 et 5.

(4) *Voir* Lettre XVII, 1.

Si rectæ NC, NB *essent ad vectem perpendiculares, potentia in* A, *æqualis duobus ponderibus* B *et* C, *ex tuo principio detineret vectem. Sed, quum angulos* NCA, NBA *acutos efficiant, aut eadem aut minor aut major potentia requiretur in* A *ad æquilibrium.*

Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in præcedenti ad te epistola usi sumus : quod si fatearis, statim vectem nostrum demonstrabimus.

Si major aut minor potentia æquilibrium constituit, ergo, in primo casu, quò minuentur magis anguli rectarum CN, BN *cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in secundo casu, minor. Supra punctum* A *idem vectis, in eadem directionis linea, similiter ponatur, ut in figura; minuentur* (¹) *anguli linearum* CN, BN, *ut patet : variabit igitur potentia æquilibrii in* A *constituta, ideoque pondus ex gravibus* B *et* C *compositum, pro diversa a terræ centro distantia, erit etiam diversum.*

Primam partem dilemmatis quominus fatearis, impedit tua propositio : quippe, hoc dato, corrueret. Fatearis igitur necesse est, aut potentiam in A *variare pro diversitate angulorum, aut eamdem semper esse in omni angulorum acutorum positione, sed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.*

Utrum libet concesseris, manifestissimâ demonstratione detegitur paralogismus, quem tuæ demonstrationi irrepsisse nec veritas quam quærimus patitur dissimulare, nec tu ipse poteris fortasse diffiteri.

11. *In prima figura* (fig. 50), *quæ est quarta tuæ propositionis* (²), *his verbis ita construis.*

« Soit le centre de la balance A etc. (*voir* page 79, ligne 10 à page 80, ligne 4).... équilibré avec la puissance E sur le bras AC. »

Hîc vertitur cardo tuæ demonstrationis.

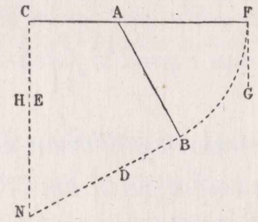
Et primo, si dixeris in omni angulorum acutorum positione eamdem

(¹) Le texte semble corrompu, mais ne peut être rétabli sûrement, la figure originale faisant défaut. Si la droite CB est tracée au-dessus du point A (*supra*), les angles C et B augmentent (*augebuntur*) au lieu de diminuer. Avec *minuentur*, il faudrait *infra*, qui est la leçon la plus probable au lieu de *supra*, à moins que la figure ne fût retournée.

(²) *Comparez* en effet la *fig.* 42, qui est la quatrième de la Lettre XIV.

semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem; fatearis igitur necesse est, variare potentiam prout anguli variant.

Fig. 50.



His positis, esto, si placet, in exposita figura centrum terræ N *in quod rectæ* CE, BD *dirigantur, et sint in punctis* E *et* D *pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio.*

Imo huc tantum abs te tenditur ut, per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus παραλλήλως *moventes, inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente : aliter quippe, quum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorsus essent.*

In punctis H *et* G *construis potentias ponderibus* E *et* D *æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus* παραλλήλως *moveant. Potentiam deinde* H *potentiæ* E *æqualiter movere, concludis per primum tuorum axiomatum, quia nempe trahet* H *potentia per punctum* C *et rectam* HC *perpendicularem vecti; trahet etiam pondus* E *per eamdem rectam vecti perpendicularem : quum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam et eumdem angulum moveant et circa eamdem a vectis centro distantiam, pondus* E *et imaginaria* H *potentia æqualiter trahunt.*

Id, verisimile quum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E *sit sphæricum, verbi gratia; omnes omnino ipsius partes ad centrum* N *tendunt per rectas in eodem* N *centro concurrentes et vectem* AC, *si continuentur, ad angulos acutos secantes : ergo potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, intelligentur vectem ad angulos acutos suis motibus secantes. Contra, quum partes omnes potentiæ* H παραλλήλως *moveant, intelligentur potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, ad angulos rectos vectem suis motibus secantes.*

Quum igitur partes omnes potentiæ H *simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis* E *simul sumptis* (*tota enim potentia* H *toti ponderi* E *æquatur*), *patet, ex jam traditis, potentiarum* H, E *in punctis* H *et* E *inæqualem esse motum; quod igitur de potentia* H *concludit demonstratio, perperam ad pondus* E *porrigit.*

12. S'il me restoit du temps ou du papier, j'ajouterois, suivant votre desir, la démonstration des cônes isopérimètres [1]. Ce sera une autre fois, me réservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Méchaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer après une proposition, si je ne la croyois véritable, et que je la quitterai un moment après que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettres XIV, **11** et XV, **8**.