Quand je dis *isopérimètres,* j'entends les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez.

Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous-même, et je vous l'aurois envoyée dès maintenant, n'étoit que je crois que vous désirerez avoir le plaisir d'y penser.

Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeurerai etc.

XV.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 4 NOVEMBRE 1636.

(*Va*, p. 146-147; B f° 2v°.)

MONSIEUR,

1. Me réservant à vous écrire une autre fois les défauts que j'ai trouvés dans votre démonstration [1] et dans votre Livre imprimé [2], que j'espère vous faire avouer par vos propres maximes, je me contenterai de répondre présentement aux autres points de votre Lettre.

2. Et premièrement vous saurez que nous avons concouru au même *medium* sur le sujet de la somme des deux quarrés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée [3].

3. Vous vous êtes servi aussi d'un même *medium* [4] que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini; mais vous supposez une chose [vraie] de laquelle vous n'avez possible

(1) Lettre XIV, **2**. — Fermat annonce les objections contenues dans la Pièce XVI, ci-après.

(2) *Voir* Lettre VII, **4**, note 1.

(3) *Voir* Lettre XIV, **3**.

(4) *Voir* Lettre XIV, **7**.

pas la démonstration précise, qui est que la somme des quarrés est plus grande que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand quarré; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré; la somme des quarréquarrés plus qu'un cinquième du quarrécube; etc.

Or, pour démontrer cela plus généralement, il faut, étant donné un nombre *in progressione naturali,* trouver la somme, non seulement de tous les quarrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait ([1]), mais encore la somme des quarréquarrés, quarrécubes etc., ce que personne que je sache n'a encore trouvé; et pourtant cette connoissance est belle et de grand usage et n'est pas des plus aisées.

J'en suis venu à bout avec beaucoup de peine. En voici un exemple :

Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, et a producto demas summam quadratorum a singulis, fiet summa quadratoquadratorum quintupla.

Il semble que Bachet, dans son Traité *De numeris multangulis* ([2]), n'a pas voulu tâter ces questions après avoir fait celle des quarrés et des cubes; je serai bien aise que vous vous exerciez pour trouver la méthode générale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas, je vous offre tout ce que j'y ai fait, qui est tout ce qu'on peut dire sur cette matière.

Voici cependant une très belle proposition, qui peut-être vous y servira; au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une règle que j'ai trouvée pour donner la somme, non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet et les autres ([3]), mais encore des pyramides, *triangulotriangulorum* etc. à l'infini. Voici la proposition ([4]) :

Ultimum latus in latus proxime majus facit duplum trianguli.

([1]) *Voir* Lettre XII, **10** et **11**.
([2]) *Voir* Lettre XII, **7**, note 1.
([3]) Bachet (*Appendix ad librum de numeris polygonis,* I, prop. 18) donne la sommation, non seulement des triangles, mais en général des polygones de même genre ayant pour côtés les nombres consécutifs à partir de l'unité.
([4]) *Voir* Lettre XII, **12**.

Ultimum latus in triangulum lateris proxime majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoique belles de soi, m'ont servi à trouver la quadrature que je suis bien aise que vous estimiez.

4. Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres (1) que vous trouvez si difficiles; elles le sont en effet : même Tartaglia (2) avoit cru qu'elles n'étoient point trouvables par art. J'en ai envoyé la construction au Père Mersenne; il vous la communiquera si vous la lui demandez.

5. Je vous envoierai aussi une autre fois le centre de gravité (3) de toutes ces nouvelles figures, avec la méthode générale pour le trouver. Vous savez cependant que celui du demi-conoïde divise l'axe en proportion de 11 à 5, non pas de 11 à 4, comme vous aviez cru, et que celui des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallélogramme, qui a pour hauteur l'axe et pour base celle de la figure, à la figure : ou, pour mieux dire, le diamètre de toute parabole est divisé en tel point [de son diamètre] par le centre de gravité, [en sorte] que le segment d'en bas est à celui d'en haut comme la figure au parallélogramme de même base et de même hauteur.

6. Puisque vous avez trouvé la démonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Père Mersenne de vous donner mes nouvelles hélices (4), desquelles les démonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde et des paraboles. Il m'écrit qu'on doute de delà de leur vérité; vous la lui confirmerez, s'il vous

(1) *Voir* Lettre XIV, **9** et Pièces IV_A, IV_B.

(2) Comparer *La seconda parte del General Trattato di numeri et misure di Nicolo Tartaglia* (Venise, 1556), lib. I, cap. IV.

(3) *Voir* Tome I, p. 136. — Cp. Lettre XIV, **10**.

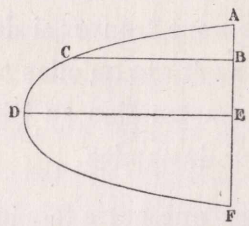
(4) *Voir* Pièces III_A, III_B.

plaît, et désabuserez Monsieur de ... ([1]), qui semble ne les avoir pas crues.

7. Mais il n'en faut pas demeurer là, car, pour suppléer tout ce qui semble manquer dans l'Archimède :

Exponatur parabole ACDF (*fig.* 44), *cujus axis* DE, *basis* AF, CB *parallela* DE *et ideo perpendicularis ipsi* AF. *Circa rectam* DE *fixam figura*

Fig. 44.



ADE *conversa constituit conoides Archimedeum; circa* AE *fixam constituit nostrum conoides.*

Sed, si figura ACB *circa* AB *fixam convertatur, constituitur portio nostri conoidis; si autem circa* CB *fixam fiat conversio, quæritur proportio novi istius conoidis ad conum ejusdem basis et altitudinis.*

Hoc autem etiam perfecimus; imo mirabilius quiddam invenimus, ellipsoides cui si conum æqualem inveneris, dabimus circuli quadrationem. — Sed hæc aliàs.

8. Votre question des cônes ([2]) est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

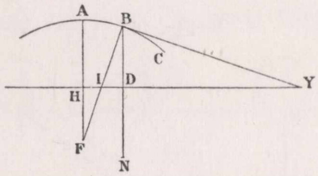
9. Pour les tangentes de la conchoïde ([3]), j'ai peur que vous aurez équivoqué; car voici ma proposition qui n'exclut aucun point, laquelle j'ai copié sans la vérifier sur mon manuscrit; peut-être que c'est moi qui aurai failli, je vous l'écrirai la première fois.

([1]) Beaugrand? *Voir* Lettre XVIII, **4**.
([2]) *Voir* Lettre XIV, **11**.
([3]) *Voir* Lettre XIV, **8**. — Cp. Tome I, p. 161.

Esto conchois ABC (fig. 45), *cujus polus* F, *intervallum* HA, *et in ea datum punctum* B.

Primum asserimus eam in interiora convexam repræsentandam, licet contrarium Pappo et Eutocio visum fuerit (1).

Fig. 45.



Deinde tangentem ita ducimus : Jungatur FIB *et perpendicularis* BD *demittatur; rectangulum* BFI, *unà cum quadrato* BD, *ad rectam* BD *applicentur et faciant latitudinem* DN; *fiat*

ut ID *ad* DN, *ita* BD *ad* DY.

Juncta YB *tanget conchoidem.*

J'attends votre réponse et suis etc.

XVI.

OBJECTA A DOMINO DE FERMAT

ADVERSUS PROPOSITIONEM MECHANICAM DOMINI DE ROBERVAL (2).

< DÉCEMBRE 1636 >

(*Va*, p. 141-142.)

Si vera esset propositio mechanica Domini de Roberval, *in vecte quolibet pondera perpendiculis a centro vectis in lineas directionum demissis*

(1) Pappus, IV, 22 (éd. Hultsch, pp. 242 et 246), Eutocius (Comm. in lib. II de sphæra et cylindro : *Archimède,* éd. Heiberg, vol. III, pp. 117, 119, 120, 122) n'indiquent rien sur le sens de la concavité de la conchoïde : l'observation de Fermat ne porte donc que sur les figures fautives des manuscrits reproduites dans le Pappus de Commandin et dans les anciennes éditions d'Archimède (p. ex., celle de Rivault, Paris, 1615).

(2) Cette Pièce paraît avoir été envoyée à Carcavi, au commencement de décembre 1636 (*voir* Lettre XVII, 1) comme réplique à la Lettre XIV de Roberval.