XIV.

ROBERVAL A FERMAT (1).

SAMEDI 11 OCTOBRE 1636.

(*Va*, p. 138-141.)

MONSIEUR,

1. Je vous envoie la démonstration de la proposition fondamentale de notre Méchanique, ainsi que je vous l'ai promise. En quoi je suivrai l'ordre commun d'expliquer auparavant les définitions et principes desquels nous nous servons.

2. Nous appelons en général une *puissance* cette qualité par le moyen de laquelle quelque chose que ce soit tend ou aspire en un autre lieu que celui où elle est, soit en bas, en haut ou à côté, soit que cette qualité convienne naturellement à la chose ou qu'elle lui soit communiquée d'ailleurs. De laquelle définition il s'ensuit que tout poids est une espèce de puissance, puisque c'est une qualité par le moyen de laquelle les corps aspirent vers les parties inférieures.

Souvent nous appelons aussi du nom de *puissance* la même chose à laquelle la puissance convient (comme un corps pesant est appelé un *poids*), mais avec cette précaution que ce soit à l'égard de la vraie puissance, laquelle, augmentant ou diminuant, sera appelée *plus grande* ou *moindre puissance*, quoique la chose à quoi elle convient demeure toujours la même.

Si une puissance est pendue ou arrêtée à une ligne flexible et sans poids, laquelle ligne soit attachée par un bout à quelque arrêt, en sorte qu'elle soutienne la puissance tirant sans empêchement contre cette ligne, la puissance et la ligne prendront quelque position, en

(1) Réponse à la Lettre XIII. — Le texte de la présente a été, comme celui de la Lettre VIII, restitué d'après le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, latin n° 7226, f° 34 et suiv.

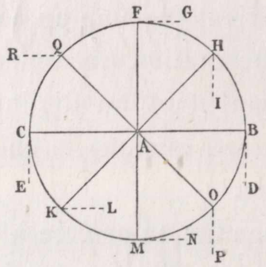
laquelle elles demeureront en repos, et la ligne sera droite par force. Soit icelle ligne appelée le *pendant* ou la *ligne de direction* de la puissance; et le point, par lequel la ligne est attachée à l'arrêt, soit appelé le *point d'appension,* lequel pourra être quelquefois au bras d'un levier ou d'une balance; et lors la ligne droite, menée du centre de l'appui du levier ou de la balance jusques au point d'appension, soit appelée la *distance* ou le *bras* de la puissance, laquelle distance ou bras nous supposons être une ligne ferme considérée de soi sans poids. Davantage, l'angle, compris du bras de la puissance et de la ligne de direction, soit appelé l'*angle de direction* de la puissance.

Premier axiome. — Après ces définitions, nous posons pour principe qu'au levier et à la balance, les puissances égales, tirant par des bras égaux et des angles de direction égaux, tireront également; et, si en cet état elles tirent l'une contre l'autre, elles feront équilibre; que si elles tirent ensemble ou de même part, l'effet sera doublé.

Si, les puissances étant égales et les angles de direction égaux, les bras sont inégaux, la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet.

Comme en cette première figure (*fig.* 39), le centre de la balance

Fig. 39.



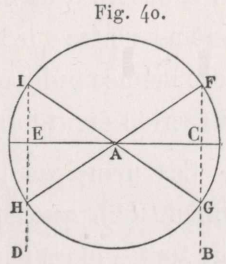
ou du levier étant A, si les bras AB et AC sont égaux et les angles ABD, ACE égaux, les puissances égales D, E tireront également et feront équilibre. De même, le bras AF étant égal à AB, l'angle AFG à l'angle ABD, et la puissance G à la puissance D, ces deux puissances G, D tireront également et, pour ce qu'elles tirent de même part, l'effet sera doublé. Au contraire, la puissance G et la puissance E feront équilibre. Par le même principe, les puissances I, L contrepèseront si, étant égales, les bras AK, AH sont égaux et les angles AHI, AKL aussi égaux. Il en sera de même des puissances P et R, si le tout est disposé de même.

Et en ce cas nous ne mettons point d'autre différence entre les poids et les autres puissances, sinon que les poids tendent et aspirent tous vers le centre des choses pesantes, et les puissances peuvent être entendues aspirer vers toutes les parties de l'univers avec autant, plus ou moins de force que les poids. Ainsi les poids et leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un même point, et les puissances et leurs parties peuvent être entendues tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient parallèles entre elles.

Deuxième axiome. — En second lieu, nous supposons qu'une puissance et sa ligne de direction demeurant toujours en même position et le centre de la balance ou du levier de même, quel que puisse être le bras mené du centre de la balance à la ligne de direction, la puissance, tirant de soi toujours de même sorte, fera toujours même effet.

Comme en cette seconde figure (*fig.* 40), le centre de la balance étant A, la puissance B et sa ligne de direction BF, prolongée tant que

Fig. 40.



de besoin, à laquelle aboutissent les bras AG, AC, AF. En cet état, soit que la ligne BF soit liée au bras AF ou AC [ou AG] ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction AF, nous supposons que cette puissance B fera toujours un même effet sur la balance; et si, tirant par le bras AC, elle fait équilibre avec la puissance D tirant par le bras

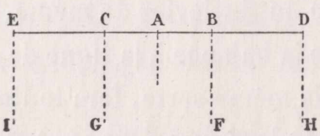
AE, lorsqu'elle tirera par le bras AF ou AG, elle fera encore équilibre avec la puissance D tirant par le bras AE.

Ce principe, quoiqu'il ne soit pas expressément dans les auteurs, il est néanmoins usurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, et l'expérience le confirme constamment.

Troisième axiome. — En troisième lieu, nous posons que, si les bras d'une balance ou d'un levier sont directement posés l'un à l'autre et, qu'étant égaux, ils soutiennent des puissances égales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances pèseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du même centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au même centre.

Comme en la troisième figure (*fig.* 41), la balance étant ED, le centre A, les bras égaux AD, AE soutenant des puissances égales H, I,

Fig. 41.



desquelles les angles de direction ADH, AEI soient droits; nous supposons que ces puissances I, H pèseront de même sur le centre A que si elles étoient plus près du même centre sur les distances égales AB, AC, et encore de même que si ces mêmes puissances étoient ensemble pendues en A, ces angles de direction étant toujours droits.

Première proposition. — Ces principes posés, nous démontrerons facilement, imitant Archimède ([1]), que sur une balance droite, les puissances, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la balance, contrepèseront et feront équilibre, quand les mêmes puissances seront entre elles en proportion réciproque de leurs bras. Ce que nous pensons vous être aussi facile qu'à nous.

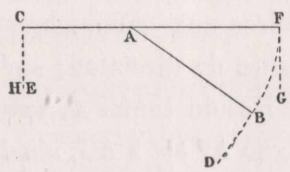
([1]) Archimède, *De planorum æquilibriis*, I, 6 et 7.

En suite de quoi nous démontrerons cette proposition universelle, à laquelle nous butons.

Deuxième proposition. — En toute balance ou levier, si la proportion des puissances est réciproque à celle des lignes perpendiculaires menées du centre ou point de l'appui sur les lignes de direction des puissances, ces puissances, tirant l'une contre l'autre, feront équilibre et, tirant d'une même part, elles feront un pareil effet, c'est-à-dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance.

Soit en la quatrième figure (*fig.* 42) le centre de la balance A, le bras AB plus grand que le bras AC, et soient premièrement les lignes

Fig. 42.



de direction BD, CE perpendiculaires aux bras AB, AC, par lesquelles lignes tirent les puissances D, E, lesquelles seront des poids, si on veut, et qu'il y ait même raison de la puissance D à la puissance E que du bras AC au bras AB, les puissances tirant l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

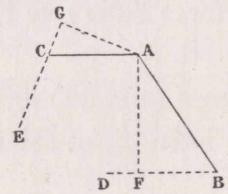
Car, soit prolongé le bras CA jusques en F, en sorte que AF soit égale à AB, et soit considérée CAF comme une balance droite de laquelle le centre soit A. Soient aussi entendues deux puissances G et H, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction soient parallèles à la ligne CE; et que la puissance G soit égale à la puissance D et la puissance H égale à la puissance E, l'une, savoir G, tirant sur le bras AF et l'autre, savoir H, tirant sur le bras AC.

Lors, par la première proposition, les puissances G et H feront équilibre sur la balance CAF; mais, par le premier principe, la puissance D sur le bras AB fait le même effet que la puissance G sur le bras AF :

partant la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance H sur le bras AC et, la puissance H tirant de même sorte sur le bras AC que la puissance E, par le même premier axiome, la puissance D sur le bras AB fera équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Maintenant, en la cinquième figure (*fig.* 43), soit le centre de la balance A, les bras AB, AC, les lignes de direction BD, CE qui ne

Fig. 43.



soient pas perpendiculaires aux mêmes bras, et les puissances D, E tirant par les mêmes lignes de direction; sur lesquelles lignes soient menées des perpendiculaires du centre A, savoir AF sur BD et AG sur EC; et que, comme la ligne AF est à AG, ainsi soit la puissance E à la puissance D, lesquelles puissances tirent l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

Car, soient entendues les lignes AF, AG comme les deux bras d'une balance GAF, sur lesquels tirent les puissances D, E par les lignes de direction FD, GE, ces puissances feront équilibre, par la première partie de cette seconde proposition; mais, par le second axiome, la puissance D sur le bras AF fait le même effet que sur le bras AB, et la puissance E sur le bras AG fait le même effet que sur le bras AC; partant, la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Il y a plusieurs cas suivant les chutes des perpendiculaires, mais il vous sera facile de voir que tous n'ont qu'une même démonstration. Il est aussi facile de démontrer que, si les puissances tirent de même part, elles feront même effet l'une que l'autre, et l'effet des deux ensemble sera double de celui d'une seule.

J'attends votre jugement sur cette démonstration et, si vous l'approuvez, nous communiquerons ensuite des conséquences qui en dépendent.

3. J'ai trouvé la démonstration (1) de la somme des quarrés de deux côtés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée. Mais, puisque vous l'avez aussi trouvée, je ne vous dirai ici que mon principal fondement qui est que, de deux nombres quelconques, la somme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du second et deux fois le produit des deux nombres, n'est pas un nombre quarré, d'autant que, prenant les moindres nombres de leur raison, un nombre simplement pris n'est pas quarré. Si nous avons tous deux un même moyen, ceci suffit; si vous en avez un autre, ce que vous reconnoîtrez par ce discours, vous me ferez faveur de me l'apprendre, et moi je vous écrirai le mien tout au long, si vous le désirez.

4. J'ai aussi trouvé la démonstration (2) de votre conoïde et celle de votre parabole solide et, en conséquence, celles d'une infinité d'autres pareilles, quarréquarrées, quarrésolides etc.

5. J'ai trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple, en la parabole solide, la portion de l'axe, prise entre la tangente et le sommet, est double de la portion du même axe, prise entre le sommet et la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe.

6. J'ai, par le même moyen, quarré la parabole géométriquement, autrement qu'Archimède.

7. Et je me trompe fort si je n'ai rencontré le même moyen que vous, me servant des lignes parallèles à l'axe et des portions de ces lignes prises entre les paraboles et la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes etc. Or, la somme des quarrés est toujours plus que le tiers du cube qui a pour

(1) *Voir* Lettre XI, 7.
(2) *Voir* Lettres IX, 7; XIII, 3 et 6.

côté le côté du plus grand quarré, et la même somme des quarrés, le plus grand étant ôté, est moindre que le tiers du même cube; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré et, le plus grand cube ôté, moins que le quart; etc. Si par ce discours vous reconnoissez que ce n'est pas votre moyen, j'en serai d'autant plus réjoui pour ce que nous en aurons deux, et vous me ferez la faveur de m'envoyer le vôtre, faisant le même de ma part.

8. Pour les tangentes de la conchoïde, je les ai considérées il y a longtemps, comme étant déterminations d'équations quarréquarrées. Sur ce sujet, il y a deux points en la conchoïde par lesquels on ne peut mener des tangentes : je vous prie de les considérer et vous trouverez une admirable propriété d'angles au sommet l'un de l'autre à la section d'une ligne droite et de la conchoïde (1).

9. J'estime vos propositions (2) des nombres et celle du lieu plan fort difficiles; ce que je saurai mieux quand j'aurai eu le loisir de les considérer, comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides, n'étant pas résolu pourtant de m'obstiner après; car j'aimerai mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agréable.

10. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de votre demi-conoïde n'est pas ce point où l'axe est divisé de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11 à 4, pour ce qu'un léger raisonnement et non encore bien considéré m'a semblé me mener à cette raison (3).

11. Une autre fois je vous pourrai mander de nos propositions ainsi que vous le désirez. Pour cette heure, que je n'emploie à écrire ceci qu'un temps dérobé, je vous envoierai seulement celle-ci :

De deux cônes droits égaux et isopérimètres étant données les bases inégales ou les hauteurs inégales, trouver les cônes.

(1) *Voir* Lettre XIII, 3. — Roberval parle ici des points d'inflexion de la conchoïde.
(2) *Voir* Lettres XIII, 4 et 7.
(3) *Voir* ci-après Lettre XV, 5.

Quand je dis *isopérimètres*, j'entends les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez.

Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous-même, et je vous l'aurois envoyée dès maintenant, n'étoit que je crois que vous désirerez avoir le plaisir d'y penser.

Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeurerai etc.

XV.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 4 NOVEMBRE 1636.

(*Va*, p. 146-147; B f° 2vo.)

Monsieur,

1. Me réservant à vous écrire une autre fois les défauts que j'ai trouvés dans votre démonstration (1) et dans votre Livre imprimé (2), que j'espère vous faire avouer par vos propres maximes, je me contenterai de répondre présentement aux autres points de votre Lettre.

2. Et premièrement vous saurez que nous avons concouru au même *medium* sur le sujet de la somme des deux quarrés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée (3).

3. Vous vous êtes servi aussi d'un même *medium* (4) que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini; mais vous supposez une chose [vraie] de laquelle vous n'avez possible

(1) Lettre XIV, **2**. — Fermat annonce les objections contenues dans la Pièce XVI, ci-après.

(2) *Voir* Lettre VII, **4**, note 1.

(3) *Voir* Lettre XIV, **3**.

(4) *Voir* Lettre XIV, **7**.