

surabilibus, si ad duplum summæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo excessûs erit apotome.

Vous ne sauriez croire combien la science du dixième Livre d'Euclide est défectueuse : je veux dire que cette connoissance n'a pas encore fait de grands progrès et qu'elle est pourtant de grandissime usage. J'y ai découvert beaucoup de nouvelles lumières, mais encore la moindre chose m'arrête, comme le théorème que je viens de vous écrire, qui semble d'abord plus aisé à démontrer qu'il n'est pas.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XII.

FERMAT A MERSENNE.

< SEPTEMBRE OU OCTOBRE 1636. >

(A f^{os} 6-9, B f^{os} 12^{vo}-14^{vo}.)

REVERENDE PATER,

1. Quamvis id agam ut pro OEdipo Davum (1) restituam, et libentissime profitear quæstionem Domini de Sainte-Croix ad meam notitiam (2) non pervenisse, liceat tamen numeros ab ipso exhibi-

(1) Allusion au vers 194 de l'*Andria* de Térence :

Non hercle intellego. — Non? hem. — Davos sum, non OEdipus.

(2) Il est malaisé de déterminer si la question dont il s'agit ici est bien celle dont il est parlé Lettres VI, 7, et X, 2, ainsi que plus loin, XII, 5, ou une autre des cinq questions numériques proposées par S^{te} Croix à Descartes en avril 1638, à savoir :

I. Trouver un trigone qui, plus un trigone tétragone, fasse un tétragone, et de rechef, et que de la somme des côtés des tétragones résulte le premier des trigones et de la multiplication d'elle par son milieu le second. J'ai donné 15 et 120. J'attends que quelqu'un y satisfasse par d'autres nombres ou qu'il montre que la chose est impossible.

II. Trouver un trirectangle dont chacun des côtés soit l'aire d'un trirectangle. J'ai donné 210, 720, 750. J'attends etc.

III. Trouver un barlong ou tétragone plus sa pleure et tel que l'aggrégat du dit tétra-

tos (1) solutione problematis abs te propositi compensare, et questiones aliquot ἀμειβάίας subijcere, quarum enodationem ad nos serius

gone et de son double tétragone fasse un tétragone dont la pleure soit le barlong ou tétragone plus sa pleure. J'ai donné 6. J'attends etc.

IV. (Voir ci-avant, Lettre VI, 7, note.)

V. *On demande aussi un nombre dont les parties aliquotes fassent le double et, pour ce qu'on en a déjà trois qui sont 120, 672 et 523776, il est question de trouver le quatrième.*

Les renseignements tirés de la correspondance de Descartes sont contradictoires; dans une lettre à Mersenne du 22 juin 1638, il dit (éd. Clerselier, II, 88) :

« Je serai bien aise de savoir si les réponses de M. Fermat ont satisfait davantage » M. de Sainte-Croix que les miennes; mais pour moi, je trouve plaisant que, *de quatre* » questions, n'y en ayant qu'une qu'il résout à peine en donnant un nombre qui y satisfait, il ne laisse pas de faire des bravades sur ce sujet, disant qu'il ne se contente pas » de résoudre ces questions à la mode de M. de Sainte-Croix, etc., et en propose une » autre toute semblable et même qui est bien plus aisée. »

Le 30 juin 1638 (éd. Clerselier, III, 62), il écrit d'autre part à Mersenne :

« Je lui ai aussi proposé (à Gillot) la quatrième question de M. de Sainte-Croix qui est » de trouver deux nombres chacun desquels, comme aussi la somme de leur agrégat, ne » soit que de trois tétragones, à cause que vous me mandez que c'est celle qui a semblé » à M. de Fermat la plus difficile. »

On doit remarquer que la question II de Sainte-Croix à Descartes a d'abord été proposée par Fermat à Sainte-Croix qui la résolut (ci-après, Lettre XVIII, 3), que des quatre autres, la question V avait été posée par Mersenne dans l'Épître dédicatoire de ses *Préludes de l'Harmonie universelle* en 1634 (voir Lettre III, 2), avec l'indication du nombre 120. Fermat trouva le nombre 672 (Lettres XII, 4, et XIII, 4). Le troisième nombre 523776, que ne donne pas la méthode de Fermat (IV_B), paraît avoir été trouvé par Sainte-Croix à une date postérieure à l'impression de la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* de Mersenne (1637).

La question III, qui se traduit par l'équation

$$x^2 + 2(x^2)^2 = (x^2 + x)^2,$$

est très aisée à résoudre, et il est improbable que ce soit celle devant laquelle Fermat déclarait n'être pas un Œdipe. Il n'en est pas tout à fait de même pour la question I, dont l'énoncé, passablement obscur, semble devoir s'exprimer par les trois équations

$$\frac{x(x+1)}{2} + p^2 = y^2,$$

$$\frac{(y+z)(y+z+1)}{2} + p^2 = z^2,$$

$$y+z = \frac{x(x+1)}{2},$$

avec les conditions que x, y, z soient entiers et p^2 un entier de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$.

(1) Peut-être comme solution de la question II, proposée par Fermat à Sainte-Croix. Voir note précédente.

proventuram auguramur, quidquid polliceatur acutissimi vir ingenii.

2. Dum igitur difficilioribus numeris tentationem honestamus, ut ipse loquitur, ita proponimus (1) :

1° *Invenire triangulum rectangulum numero, cujus area æquetur quadrato.*

2° *Datâ summâ solidi sub tribus lateribus trianguli rectanguli numero et ipsius hypotenusæ, invenire terminos intra quos area consistit.*

Nec moveat additio solidi et longitudinis; in problematis enim numericis, quantitates omnes sunt homogeneæ, ut omnes sciunt.

3° *Invenire duo quadratoquadratos quorum summa æquetur quadratoquadrato, aut duos cubos quorum summa sit cubus.*

4° *Invenire tres quadratos in proportione arithmetica, ea conditione ut differentia progressionis sit numerus quadratus.*

3. Quatuor problematis duo theoremata (2) adjungimus, quæ, a nobis inventa, a Dom^o. de Sainte-Croix demonstrationem exspectant aut, si frustra speraverimus, a nobis ipsis nanciscentur. Sunt autem pulcherrima :

1° *Omnis numerus æquatur uni, duobus aut tribus triangulis,*

<i>uni, 2, 3 aut 4.....</i>	<i>quadratis,</i>
<i>uni, 2, 3, 4 aut 5.....</i>	<i>pentagonis,</i>
<i>uni, 2, 3, 4, 5 aut 6.....</i>	<i>hexagonis,</i>
<i>uni, 2, 3, 4, 5, 6 aut 7.....</i>	<i>heptagonis,</i>

et eo continuo in infinitum progressu.

Videtur supponere Diophantus secundam partem theorematis, eamque Bachetus experientiâ conatus est confirmare, sed demonstratio-

(1) Des quatre problèmes proposés ici par Fermat, trois sont insolubles. Voir au Tome I les *Observations sur Diophante* : pour (1) et (4), l'*Obs.* XLV; pour (3), l'*Obs.* II.

(2) Pour le premier de ces deux théorèmes, voir Tome I, l'*Observation XVIII sur Diophante*; pour le second, comparer l'*Obs.* XXVII.

nem non attulit. Nos propositionem generalissimam et pulcherrimam primi, nisi fallor, deteximus et pro jure synallagmatis admitti, nescio an jure, postulamus.

2° *Octuplum cujuslibet numeri unitate deminutum componitur ex quatuor quadratis tantum, non solum in integris, quod potuerunt alii vidisse, sed etiam in fractis, quod nos demonstraturos pollicemur.*

Et ex hac propositione mira sane deducimus, quæ, si in promptu fuerint Dom^o. de Sainte-Croix, saltem Bacheti ingenium et operam videntur inutiliter sollicitasse.

4. Priusquam propositionem de cubis a te propositam construamus, ad quæsitum (1) de numero 672 respondeo me unicum illum non credere proposito satisfacientem, sed hic unus post 120 in nostra methodo occurrit.

In hujusmodi autem quæstionibus nihil impedit quominus alius aliâ methodo alios numeros quæstioni satisfaciens nanciscatur : hoc si contigerit Dom^o. de Sainte-Croix, libentissime ab eo accipiemus una cum methodo qua usus est. Sunt enim hujusmodi quæstiones pulcherrimæ et difficillimæ et a nemine, quod sciam, hactenus solutæ; infinitas autem similes peculiari nobis methodo jam construximus.

5. Quod ad quæstionem (2) de numeris 3 et 11 spectat, fatemur difficillimam nobis visam et adhuc, post multa tentamenta, ignorari. Et crediderim, donec contrarium appareat, ejus solutionem sorti potius quam arti deberi; sed malim falli me quam Dom. de Sainte-Croix. Ejus solutionem si dignetur impertiri, viam constructionis rogo adjungat.

6. Tuam de cubis quæstionem ita concepimus :

Datis quotlibet numeris in proportione quavis arithmetica, cujus differentia progressionis et numerus terminorum detur, invenire summam cuborum abs omnibus.

(1) Voir plus haut, page 64, note.

(2) Voir Lettres VI, 7 et X, 2.

7. Primus casus est quum primus terminus est unitas et differentia progressionis etiam unitas.

Exhibeantur numeri in hac progressionem quotlibet :

1.2.3.4.5.6.7.8.9;

quadratum trianguli numerorum æquatur cubis abs omnibus. Ut in hoc exemplo, in quo sunt 9 numeri, triangulus numerorum est 45, cujus quadratus 2025 æquatur summæ cuborum a singulis.

Hæc autem propositio in hoc casu a Bacheto (1) et aliis est demonstrata; sequentes casus nos invenimus.

8. Sit primus terminus unitas et differentia progressionis numerus quivis, ut in hoc exemplo in quo 4 est differentia progressionis :

1.5.9.13.17,

sumo triangulum ultimi numeri differentia progressionis unitate deminuta aucti.

Est autem 210, et ejus quadratum

44100.

Ab eo detraho sequentes numeros :

1° Summam totidem cuborum ab unitate in progressionem naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

Numerus autem, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

180.

2° Detraho triplum summæ totidem quadratorum ab unitate in progressionem naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

1890.

(1) Appendix ad librum de numeris polygonis, II, prop. 24.

3° Detraho triplum summæ totidem numerorum ab unitate in progressionem naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam quadratorum abs numeris progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

$$10170.$$

Summa numerorum auferendorum a numero 44100 est 12240, reliquum 31860 : quod si divides per 4, differentiam progressionis, habebis summam cuborum abs numeris

$$1.5.9.13.17,$$

7965, et uniformi in infinitum methodo.

9. Sed nondum constat qua ratione inveniatur summa numerorum :

$$1.5.9.13.17,$$

neque quomodo summa quadratorum ab ipsis inveniatur : quod tamen ad secundam et tertiam operationem perficiendum est necessarium.

Primum illud præstitit Bachetus (1) in libello *De numeris multangulis* : secundum ita expediatur.

Sumatur summa tot quadratorum ab unitate in progressionem naturali, quot sunt unitates in majore progressionis numero differentia progressionis unitate deminuta aucto.

Hoc autem est facile et ab Archimede (2) in libro *De Spiralibus* traditum.

Ab ea summa :

1° Detrahe summam totidem quadratorum in progressionem naturali

(1) Commentaire de Bachet sur les propositions IV et V *Diophanti Alexandrini de multangulis numeris*.

(2) Archimède, *De lineis spiralibus*, prop. 10, donne effectivement la sommation

$$3 \sum_1^n n^2 = n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

ab unitate incipiente, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

2° Detrahe duplum summæ totidem numerorum ab unitate, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

His ablatis, reliquum, per differentiam progressionis divisum, dabit summam quadratorum ab omnibus.

Ex his duobus casibus reliqui omnes nullo aut minimo negotio elicientur juxta præcepta.

10. Sed hic hæere noluimus, verùm problema totius fortasse Arithmetices pulcherrimum construximus, quo non solum *in quavis progressionem summam quadratorum et cuborum venamur*, sed *omnium omnino potestatum in infinitum methodo generalissima*, quadratoquadratorum, quadratocuborum, cubocuborum, etc.

11. Ut autem innotescat Dom^o. de Sainte-Croix sphingem me aut OEdipum non expectare, en problema in quadratoquadratorum progressu, quod ita potest theorematice enuntiari :

Exponentur quotlibet numeri in progressionem naturali ab unitate; si a quadruplo ultimi, binario aucto < et > in quadratum trianguli numerorum ducto, demas summam quadratorum a singulis, fiet quintuplum quadratoquadratorum a singulis.

Exemplum : Expositis numeris

1.2.3.4,

quadruplum ultimi binario auctum est 18, quod duci debet in 100, quadratum trianguli numerorum : fit

1800.

Ab eo producto deme summam quadratorum a singulis, quæ est

30.

Superest 1770, cujus quinta pars, 354, æquatur quadratoquadratis a singulis.

In qualibet progressionem similiter problema construemus imitando constructionem præcedentem.

Methodum generalem in quibuslibet in infinitum potestatibus trademus, si visum fuerit aut tibi aut Dom^o. de Sainte-Croix.

12. Interim addimus propositionem pulcherrimam a nobis inventam, quæ nobis lucem dedit ad hujusmodi propositiones invenendas (1) :

*In progressionem naturali ultimus numerus
in proxime majorem facit duplum trianguli collateralis,
in triangulum numeri proxime majoris facit triplum pyramidis collateralis,
in pyramidem numeri proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli collateralis,
et eâ in infinitum uniformi methodo.*

(1) Voir Tome I, l'Observation XLVI sur Diophante. — Il est très remarquable que cette proposition capitale, qui donne, de fait, la composition des coefficients du binôme, après avoir été ainsi communiquée en 1636 à Mersenne, à Sainte-Croix et à Roberval (*ci-après* Lettre XV, 3), soit restée assez ignorée pour que dix-huit ans après, Pascal, en la retrouvant sous une autre forme, n'ait eu aucun soupçon de la très grande antériorité de la découverte de Fermat.

On lit dans le *Traité des ordres numériques* (Œuvres de Blaise Pascal, édition de 1779, t. V, pp. 65-66), après la proposition XI :

« Les manières de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple » et bien glorieux pour moi. Cette même proposition que je viens de rouler en plusieurs sortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fermat ; et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à lui, il écrivoit dans sa province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une manière tout à fait étrange, avec un homme si grand et si admirable, et qui, dans toutes les recherches de la plus sublime géométrie, est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouvrages, que nos longues prières ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les géomètres de l'Europe, qui les attendent ! La manière dont il a pris cette même proposition est telle : »

» *En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant mené dans le prochainement plus grand produit le double de son triangle.* »

» *Le même nombre, étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.* »

» *Le même nombre, mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulotriangulaire.* »

» *Et ainsi à l'infini, par une méthode générale et uniforme.* »

» Voilà comment on peut varier les énonciations. »

13. De triangulis rectangulis ⁽¹⁾ propositio non satis perspicue, ut opinor, in tua epistola est concepta : solvetur a me fortasse, si clarius proposueris.

Addictissimus tibi,

FERMAT.

XIII.

FERMAT A ROBERVAL.

LUNDI 22 SEPTEMBRE 1636.

(*Fa.*, p. 136-137.)

MONSIEUR,

1. Je surseoirai avec votre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Méchanique, jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres, ce que j'attends au plus tôt sur la promesse que vous m'en faites ⁽²⁾.

2. Sur le sujet de la méthode ⁽³⁾ de *maximis et minimis*, vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagnet vous a donnée, vous avez vu la mienne que je lui baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux.

Et en ce temps-là je me ressouviens que M. Philon ayant reçu une de vos lettres, dans laquelle vous lui proposiez de *trouver le plus grand cône de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné*, il me l'envoya et j'en donnai la solution à M. Prades pour vous la rendre. Si vous rappelez votre mémoire, vous vous en souviendrez peut-être, et que vous proposiez cette question comme difficile et ne

⁽¹⁾ Aucune autre allusion, dans la Correspondance qui nous reste de Fermat, n'est faite à cette proposition. Peut-être s'agit-il de la question I de Sainte-Croix à Descartes (*voir* plus haut pages 63-64, note), dont l'énoncé énigmatique prêtait facilement à confusion.

⁽²⁾ Dans une réponse perdue à la lettre XI, Roberval annonçait sa lettre suivante, XIV.

⁽³⁾ *Voir* Lettre IX, 8.