XX.

SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

« Rend. Acc. Lincei » ser. 5^a, vol. $XVIII_2$, 1909_2; pp. 295-301.

1. Come ha osservato il sig. PICARD nel suo bell'articolo su: *La mécanique classique et ses approximations successives* (1), la meccanica può distinguersi in *meccanica della ereditarietà* ed in *meccanica della non ereditarietà*. Quest'ultima contempla il caso in cui l'avvenire di un sistema non dipende in un dato istante che dal suo stato attuale o tutto al più dallo stato infinitamente vicino che precede; la prima riguarda invece quei casi in cui ogni azione lascia una eredità nel sistema e lo stato attuale dipende da tutta la storia precedente.

Appartiene alla meccanica della non ereditarietà il problema fondamentale dell'astronomia. Le questioni da lungo tempo studiate di *isteresi*, di *elasticità susseguente* (elastische Nachwirkung), di *trainage*, rientrano nella meccanica della ereditarietà o per dir meglio nella fisica della ereditarietà.

Il signor PAINLEVÉ nell'interessante capitolo dell'opera: *De la méthode dans les Sciences* (2) dedicato alla meccanica, afferma che, sotto un certo aspetto, i problemi di natura ereditaria non sono che apparenti e che una più perfetta conoscenza della costituzione dei corpi potrebbe eliminarli riconducendoli alla forma non ereditaria; ma qualunque sia l'opinione che si possa avere a questo proposito, resta il fatto che la loro considerazione nel momento attuale è necessaria.

Le equazioni che reggono alcuni di questi problemi sono note da lungo tempo. Così citerò quelle della elasticità susseguente nel caso della isotropia che il BOLTZMANN (3) stabiliva partendo da concetti empirici e che con nuove vedute vennero poi ritrovate dal WIECHERT (4).

Però per lo studio generale delle equazioni stesse mancava fino a questi ultimi tempi una analisi che permettesse di trattarle in modo completo.

(1) « Rivista di Scienza », vol. 1°, Bologna 1907.

(2) Paris, Alcan, 1909,

(3) *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. « Wien. Ber. », *70*, S. 275-306, 1874; « Pogg. Ann. Erg. », 2,. Bd. 7, S. 624, 1876; « Wiss. Abh. », I Bd., S. 616; cfr. anche O. E. MEYER, « Pogg. Ann. », *154*, S. 360.

(4) *Gesetze der elastischen Nachwirkung*. « Wied. Ann. », Bd. 50, S. 335.

Accennerò brevemente alla ragione di questo fatto. I problemi della meccanica e della fisica matematica non ereditaria, in virtù della loro natura, vengono a dipendere da equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali; i dati iniziali sono, come è ben noto, le costanti arbitrarie o le funzioni arbitrarie che nascono nella integrazione delle equazioni stesse. Invece per la trattazione dei problemi della fisica matematica ereditaria l'analisi delle equazioni differenziali non è più sufficiente. Siccome lo stato attuale del sistema dipende dalla sua storia anteriore, così, se questa è individuata da tutti i valori che certi parametri hanno assunto durante un intervallo di tempo, è necessario evidentemente considerare delle *quantità che dipendono da tutti i valori di questi parametri considerati come funzioni del tempo*. Si è così condotti a quegli elementi dell'analisi che ho presi in considerazione e studiati in miei precedenti lavori, ed i metodi che è necessario seguire sono quindi i metodi che si applicano agli elementi stessi.

Tutti questi metodi hanno un unico punto di partenza, cioè il concetto fondamentale del calcolo integrale che consiste in quel passaggio al limite con cui dalla somma di un numero finito di termini si è condotti all'integrale. È così che nel mio primo lavoro del 1887 ho ottenuto lo sviluppo in serie analoga a quelle di TAYLOR di una quantità che dipende da tutti i valori di una funzione in un dato intervallo (5). Si parta dalla serie ordinaria di potenze di più variabili e si faccia crescere indefinitamente il numero di queste. Sotto certe condizioni i termini di primo grado dànno luogo al limite ad un integrale semplice, quelli di secondo grado ad un integrale doppio, i termini di terzo ad un integrale triplo, e così via di seguito, e si giunge alle serie di cui sopra è parola.

Tale sviluppo di una quantità che dipende da tutti i valori di una funzione porge facilmente una classificazione analoga a quella delle funzioni dei varî gradi, e ci conduce ad un gran numero di questioni (6), prima fra tutte a quella della risoluzione delle equazioni integrali lineari che appare come la naturale estensione della risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado, cioè come il caso limite della risoluzione di uno di tali sistemi quando il numero delle equazioni e delle incognite cresce indefinitamente. È infatti questo il concetto che fino da principio ho posto a base della risoluzione delle equazioni integrali e che mi ha servito nel caso che ho trattato e di cui poi si sono valsi gli autori che hanno continuato negli studii delle equazioni integrali di mano in mano più complicate (7). Ma per approfondire i problemi della fisica matematica ereditaria la sola considerazione delle equazioni integrali non basta, giacché i problemi si presentano in generale sotto una forma più complessa ed hanno un tipo che non è prettamente quello

(5) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nota I. « Rend. Acc. Lincei », 1887_2, vol. III_2, § 3. [In queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–392].

(6) Cfr. « Comptes Rendus des Seances de l'Académie des Sciences », vol. 142, p. 691, 1er Sem. 1906_1. [In questo vol.: IX, pp. 59–62].

(7) *Sulla inversione degli integrali definiti*, Nota I. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896. [In queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225].

delle equazioni integrali, come non è quello delle equazioni differenziali, sibbene un tipo misto. Per questa ragione ho chiamato le equazioni che così si trovano *equazioni integro–differenziali*, nome che pone in luce questa loro doppia natura, ed ho indicato in una Nota, pubblicata in questi Rendiconti, il principio con cui esse possono trattarsi quando siano di tipo ellittico (8).

Ho osservato nella Nota suddetta che in generale il problema della risoluzione delle equazioni integro–differenziali costituisce un problema essenzialmente distinto dai problemi delle equazioni differenziali e da quelli ordinari delle equazioni integrali, tanto che una nuova analisi è necessaria per la loro trattazione, analisi che risulta dal connubio dei principî che servono alle due classi di questioni. Essa consiste nel considerare una equazione integro–differenziale come il caso limite di un sistema di equazioni a derivate parziali il cui numero cresca indefinitamente.

Però vi sono dei casi in cui i metodi corrispondenti alle equazioni differenziali ed alle equazioni integrali possono, per dir così, staccarsi ossia applicarsi l'uno successivamente all'altro. In questi casi la questione non è più essenzialmente distinta dalle due questioni parziali e non costituisce, come nel caso generale, un problema nuovo dell'analisi.

A mettere in luce questo punto è molto opportuno trattare la questione ereditaria nel caso della elasticità. In questa Nota mi permetto di porre i principî generali riserbandomi di applicarli in un lavoro successivo.

Faccio uso senz'altro della denominazione di *ereditarietà* che è la più opportuna di tutte e tralascio le altre denominazioni. In una Nota precedente (9) in cui ho considerato le relazioni fra le equazioni integro–differeziali e la elettrodinamica ho usato la parola isteresi. Essa può dar luogo a delle ambiguità giacché varii autori l'hanno usata con diverso significato. Io mi riattaccavo al senso generale attribuitole da WARBURG (10) e certamente escludevo dalle mie considerazioni la così detta isteresi elettrotecnica; così, per citare fra gli altri un solo fatto, la magnetizzazione permanente esce dal quadro delle considerazioni che io svolgevo. Io ho inteso (per fissare le cose colla maggior precisione) tanto nella Nota ora citata che nella presente, di riferirmi al caso il più semplice della *ereditarietà* che può denotarsi col nome di *ereditarietà lineare*, in quanto gli elementi che individuano la storia anteriore del sistema si ammette che figurino linearmente nelle formule. Dal punto di vista analitico si ha così il vantaggio di trattare sempre equazioni di tipo lineare a cui è particolarmente dovuta la semplicità della soluzione.

2. Prese come equazioni indefinite fondamentali dell'equilibrio elastico le consuete equazioni

(8) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁ 1909₁, pp. 167–174 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275].

(9) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁, 1909₁, pp. 203–211 [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283].

(10) *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, vol. II, p. 512. Paris 1900.

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho \, \mathrm{X} \\[2ex] \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho \, \mathrm{Y} \\[2ex] \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho \, \mathrm{Z} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = \mathrm{X}_\sigma \\ t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = \mathrm{Y}_\sigma \\ t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz = \mathrm{Z}_\sigma , \end{cases}$$

nelle quali le t_{rs} costituiscono le caratteristiche della tensione, cioè lo *stress*, mentre $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$; X_σ , Y_σ , Z_σ sono rispettivamente le componenti delle forze di massa e delle tensioni superficiali, ed n è la normale interna al contorno, potremo stabilire come relazioni che definiscono le condizioni di ereditarietà in ogni istante t

$$\text{(III)} \qquad t_{is}(t) = \sum_{hk} a_{is/hk} \, \gamma_{hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{hk} \varphi_{is/hk}(t, \tau) \, \gamma_{hk}(\tau) \, d\tau ,$$

ove le γ_{hk} costituiscono le caratteristiche della deformazione, cioè lo *strain*. Le somme che figurano nelle eguaglianze precedenti sono estese a tutte le combinazioni con ripetizione di h e k ($h , k = 1 , 2 , \cdots , 6$). Con t_0 si denota l'istante anteriormente al quale la ereditarietà è trascurabile. In generale ammetteremo che i coefficienti $a_{is/hk}$ siano funzioni delle coordinate x , y , z dei punti del corpo elastico e così pure le $\varphi_{is/hk}$ siano funzioni delle stesse quantità, oltre che delle variabili t , v, messe specialmente in evidenza nelle formule (III), e solo nel caso della omogeneità le ammetteremo indipendenti dalle coordinate stesse.

Allorché si trascurano i termini integrali le equazioni precedenti esprimono la legge di HOOKE generalizzata; i termini integrali costituiscono in prima approssimazione la correzione dovuta alla ereditarietà quando si ammetta che tali condizioni consistano nell'aggiunta di funzioni dipendenti da tutti i valori di τ compresi fra t_0 e t, che inoltre esse siano sviluppabili in serie analoghe a quelle di TAYLOR e finalmente che si possano trascurare nei detti sviluppi tutti i termini non lineari nelle γ_{rs}. Le (III) esprimono le relazioni più generali della *ereditarietà lineare elastica*.

Per tutto ciò che si riferisce alla risoluzione di queste equazioni integrali, al significato dei coefficienti $\varphi_{is/hk}$, al *principio del cappio chiuso* mi riferisco completamente a quanto fu detto nel caso analogo della elettrodinamica nella mia Nota già citata [11].

(11) « Rend. Acc. dei Lincei », serie 5ª, vol. XVIII₁, pp. 203–211, Art. II e III [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283].

Denotando con u, v, w le componenti dello spostamento dei punti del corpo elastico avremo:

$$
\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \,, & \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \,, & \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{23} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \,, & \gamma_{31} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \,, & \gamma_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.
$$

onde le (I) costituiranno delle equazioni *integro-differenziali* per rapporto alle u, v, w.

3. Lo studio di queste equazioni si fa accoppiandole ad altre equazioni pure integro-differenziali che chiameremo *aggiunte*. Esse sono

$$
\text{(I')} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X' \\[2ex] \dfrac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y' \\[2ex] \dfrac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z' \end{array} \right.
$$

$$
\text{(II')} \quad \left\{ \begin{array}{l} t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos nz = X'_\sigma \\ t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz = Y'_\sigma \\ t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz = Z'_\sigma \end{array} \right.
$$

$$
\text{(III')} \quad t'_{is}(t) = \sum_{hk} a_{hk|is} \gamma'_{hk}(t) + \int_{t_0}^{T} \sum_{hk} \varphi_{hk|is}(\tau, t) \gamma'_{hk}(\tau) \, d\tau
$$

$$
\text{(IV')} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \gamma'_{11} = \dfrac{\partial u'}{\partial x} \,, & \gamma'_{22} = \dfrac{\partial v'}{\partial y} \,, & \gamma'_{33} = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \\[2ex] \gamma'_{23} = \dfrac{\partial v'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial y} \,, & \gamma'_{31} = \dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial z} \,, & \gamma'_{12} = \dfrac{\partial u'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial x} \,. \end{array} \right.
$$

La ragione di questo collegamento risiede nella esistenza di un teorema di reciprocità fra le soluzioni dei due sistemi di equazioni integro-differenziali, che è la base di tutto il metodo di integrazione.

Infatti può dimostrarsi facilmente che

$$
\text{(1)} \quad \int_{t_0}^{T} \left\{ \int_S (\rho X u' + \rho Y v' + \rho Z w') \, dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w') \, d\sigma \right\} dt
$$

$$
= \int_{t_0}^{T} \left\{ \int_S (\rho X' u + \rho Y' v + \rho Z' w) \, dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w) \, d\sigma \right\} dt .
$$

Il teorema racchiuso nella formula precedente corrisponde al teorema del BETTI, come la formula (III) della mia Nota sulle equazioni integro-differenziali corrisponde al lemma di GREEN.

4. Un'altra formula fondamentale che può dedursi dalle (I), (II), (III), (IV) è la seguente:

$$(2) \qquad \int_S (\rho X u + \rho Y v + \rho Z w)\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\, d\sigma$$

$$= -\int_S \sum_{is} \sum_{hk} a_{is/hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is/hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, dS.$$

Supposti durante l'intervallo di tempo $(t_0\ T)$ nulle le forze di massa e nullo il trinomio $X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w$, il secondo membro si annullerà. Ora la forma quadratica

$$(3) \qquad \sum_{is} \sum_{hk} a_{is/hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)$$

potrà ricondursi alla forma

$$\sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)$$

passando con una sostituzione ortogonale dalle sei quantità $\gamma_{rl}(t)$ alle $g_{rl}(t)$. Supponiamo che la forma (3) sia definita, allora le e_{rl} saranno tutte dello stesso segno e non nulle. Otterremo quindi una equazione della forma

$$\int_S \sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)\, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \psi_{is/hk}(t, \tau)\, g_{is}(t)\, g_{hk}(\tau)\, dS = 0.$$

Se le $\varphi_{is/hk}$ saranno finite e continue, tali saranno le $\psi_{is/hk}$, onde in questa ipotesi, applicando lo stesso procedimento che ho tenuto nel § 3 della mia Nota sulle equazioni integro–differenziali, potrà dimostrarsi che le $g_{rl}(t)$ e quindi le $\gamma_{is}(t)$ saranno nulle in tutto l'intervallo di tempo $(t_0\ T)$.

Ne segue che, sotto le indicate condizioni, *note le forze di massa e gli spostamenti superficiali* (*oppure le tensioni superficiali*) *durante un certo intervallo di tempo, la deformazione del corpo sarà determinata in tutto l'intervallo stesso.*

Le applicazioni dei risultati precedenti verranno fatte in una prossima Nota.