Szanownemu i Kochanemu Panu Profesorowi Kazimierzowi Twardowskiemu wdzięczny autor.

SKIEGO KOŁA NAUKOWEGO w MOSKWIE.
KCYA MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA.

№ 2. 7/6/1916

Dr. Stanisław Leśniewski.

PODSTAWY OGÓLNEJ TEORYI MNOGOŚCI. I.

(Część. Ingredyens. Mnogość. Klasa. Element. Podmnogość. Niektóre ciekawe rodzaje klas.)

„...łatwiej, bądź cobądź, prawdę wypisać, wyrozmawiać, wydyskutować, niż ją wymilczeć...“

[Tadeusz Kotarbiński, „Metoda konstrukcyjna a rozumowanie osobiste“, „Przegląd filozoficzny“, 1914, str. 182].

MOSKWA.
Druk. A. P. Popławskiego.
1916.

PRACE POLSKIEGO KOŁA NAUKOWEGO w MOSKWIE
SEKCYA MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA.

№ 2.

Dr. Stanisław Leśniewski.

PODSTAWY OGÓLNEJ TEORYI MNOGOŚCI. I.

(Część. Ingredyens. Mnogość. Klasa. Element. Podmnogość. Niektóre ciekawe rodzaje klas.)

„...łatwiej, bądź cobądź, prawdę wypisać, wyrozmawiać, wydyskutować, niż ją wymilczeć...“

[Tadeusz Kotarbiński, „Metoda konstrukcyjna a rozumowanie osobiste“, „Przegląd filozoficzny“, 1914, str. 182].

MOSKWA.
Druk. A. P. Popławskiego.
1916.

Żonie mojej
ofiaruję.

PRZEDMOWA.

Praca niniejsza jest pierwszem ogniwem w dłuższym szeregu prac, które zamierzam wydać w bliższej lub dalszej przyszłości, pragnąc przyczynić się w miarę możności do uzasadnienia matematyki współczesnej. Że uzasadnienie takie nie jest rzeczą zbyteczną, jasne jest dla każdego, kto zna choćby „antynomie“, do których doszła matematyka w ostatnich dziesięcioleciach swego rozwoju.

Układ definicyi i pewników, które ustaliłem w niniejszej pracy, poświęconej najogólniejszym zagadnieniom teoryi mnogości, ma dla mnie w porównaniu z innymi znanymi dotąd układami definicyi i pewników (Zermelo, Russell i t. d.) tę zaletę, iż usuwa „antynomie“ ogólnej teoryi mnogości bez zwężania pierwotnego Cantorowskiego zakresu wyrazu „mnogość“, jak to widać choćby z mego aksyomatu III, z drugiej zaś strony nie prowadzi do twierdzeń, znajdujących się w tak rażącym konflikcie z intuicyami „ogółu“, jak choćby twierdzenie dotychczasowej „nie naiwnej“ teoryi mnogości, nakazujące odróżniać jakiś przedmiot od zbioru, zawierającego ten tylko jeden przedmiot jako element. Wyznaję chętnie, że niektóre twierdzenia moje, jak n. p. tw. XXVII, mogą urazić „intuicye matematyczne“ różnych mniej lub więcej subtelnych myślicieli, kontemplujących wytworność pewnych konstrukcyi teoretycznych niezależnie od tego, czy konstrukcye owe przyczyniają się w jakimkolwiek stopniu do ujęcia naukowego rzeczywistości, czy też służą tylko do usprawiedliwienia panujących w naszej epoce, a odznaczających się dużym stopniem bezwładności, matematycznych przyzwyczajeń. Nie mogę jednak odmówić sobie przyjemności skonstatowania faktu, że starałem się pisać pracę moją tak, by dotyczyła ona nie tylko wszelkiego rodzaju „wolnych tworów“ rozmaitych mniej lub więcej dedekindujących duchów twórczych; wypada stąd, iż bardziej się troszczyłem o to, aby twierdzenia moje, posiadając postać możliwie ścisłą, harmonizowały ze „zdrowym rozsądkiem“ zajmujących się badaniem nie przez nich samych „tworzonej“ rzeczywistości przedstawicieli „esprit laique“, aniżeli o to, aby to, co mówię, zgodne było z temi „intuicyami“ fachowych teoretyków mnogości, które wyszły z zaopatrzonej w aparat „wolnej twórczości“ centryfugi matematycznych umysłów, zdemoralizowanych przez „oderwane od rzeczywistości“ spekulacyjne konstrukcye.

Pragnę tu jeszcze dodać słów parę, jako środek profilaktyczny na ewentualne zarzuty krytyków z obozu „filozoficznego“: oto — system swój traktuję wyraźnie, jako system hipotetyczno-dedukcyjny, z czego wypada, iż stwierdzam właściwie jedynie to, że ze zdań, które nazywam „aksyomatami“ wynikają zdania, które nazywam „twierdzeniami“. „Źródłem“ psychicznem moich aksyomatów są moje „intuicye“, co znaczy poprostu, że w prawdziwość moich aksyomatów wierzę, dlaczego zaś wierzę, powiedzieć nie umiem, nie znam się bowiem na teoryi przyczynowości. „Źródła“ logicznego aksyomaty moje nie posiadają, co znaczy poprostu, że aksyomaty te nie posiadają dowodów w moim systemie, podobnie jak żadne wogóle aksyomaty nie są z natury rzeczy udowadniane w tym systemie, dla którego są aksyomatami. Nie umiem wcale odpowiedzieć na pytanie, jaka jest „wartość objektywna“ moich aksyomatów, ani na żadne inne podobne pytania, które zadają sobie przedstawiciele tak zwanej teoryi poznania, — wyznaję bowiem z boleścią i na swoją wyraźną niekorzyść, że nie potrafiłem dotąd pomimo najszczerszych chęci zrozumieć ani jednego z problematów, które sobie stawia wspomniana właśnie a szanowna „nauka“.

W kwestyach, dotyczących sposobów używania wyrazów, mam do nadmienienia, iż z terminów matematycznych, którymi się posługuję, nie definiuję jedynie wyrazu „część", przypuszczając, że termin ten może nie wzbudzać nieporozumień, — z uwagi na to, iż intuicyjny jego charakter nabiera znacznej przejrzystości w świetle aksyomatów I i II. Terminy „mnogość" i „element", przyjmowane zwykle bez definicyi w teoryi mnogości, są zdefiniowane w niniejszej pracy.

Na zakończenie tych uwag wstępnych składam serdeczne podziękowania tym wszystkim, którzy w ten lub inny sposób przyczynili się do powstania mojej pracy, a przedewszystkiem memu szanownemu profesorowi Wacławowi Sierpińskiemu, który mi nie szczędził swych kompetentnych informacyi i wskazówek, oraz memu przyjacielowi d-rowi Tadeuszowi Kotarbińskiemu, którego liczne, a pełne finezyi logicznej uwagi przyczyniły się bardzo w swoim czasie do wypracowania głównych zrębów bronionej przeze mnie koncepcyi. „Polskiemu Kołu Naukowemu w Moskwie" składam wyrazy prawdziwej wdzięczności za umożliwienie ukazania się mej pracy w druku już obecnie.

St. Leśniewski.

Moskwa, w kwietniu 1916 roku.

§ 1.

Aksyomat I. Jeżeli przedmiot P jest częścią przedmiotu P_1, to przedmiot P_1 nie jest częścią przedmiotu P.

Aksyomat II. Jeżeli przedmiot P jest częścią przedmiotu P_1, a przedmiot P_1 jest częścią przedmiotu P_2, to przedmiot P jest częścią przedmiotu P_2

Twierdzenie I. Żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, że pewien przedmiot X jest częścią samego siebie, to znaczy częścią przedmiotu X. Z przypuszczenia tego wypada — zgodnie z aksyomatem I — , iż przedmiot X nie jest częścią przedmiotu X, co jest sprzeczne z naszym założeniem. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że pewien przedmiot jest częścią samego siebie. Tak więc — żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie, co właśnie należało udowodnić.

§ 2.

Definicya I. Używam wyrażenia „ingredyens przedmiotu P“ dla oznaczenia samego przedmiotu P oraz każdej części tego przedmiotu.[1])

Bespośredniemi wnioskami z tej definicyi są dwa twierdzenia następujące:

Twierdzenie II. Każdy przedmiot jest swoim własnym ingredyensem.

Twierdzenie III. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

§ 3.

Twierdzenie IV. Jeżeli P jest ingredyensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2, to P jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Dowód: Zgodnie z definicyą I — zdanie:

---

1) Projekt zastosowania w tym wypadku wyrazu „ingredyens“ poddał mi p. Lucyan Zarzecki.

(1) „P jest ingredyensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2“

jest prawdą zawsze i tylko wtedy, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań następujących:

(2) „P jest P_1, P_1 jest P_2“,

(3) „P jest P_1, P_1 jest częścią przedmiotu P_2“,

(4) „P jest częścią przedmiotu P_1, P_1 jest P_2“,

(5) „P jest częścią przedmiotu P_1, P_1 jest częścią przedmiotu P_2“.

Jeżeli jest prawdą zdanie 2, to — na podstawie zasady syllogizmu — P jest P_2, a wobec tego — na zasadzie twierdzenia II — P jest ingredyensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 3, to P jest tu tym właśnie przedmiotem P_1, który jest częścią przedmiotu P_2, z czego wypada, że P jest częścią przedmiotu P_2, a więc — zgodnie z twierdzeniem III — P jest ingredyensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 4, to P, będąc częścią przedmiotu P_1, jest przez to samo częścią przedmiotu P_2, albowiem P_1 jest to — zgodnie ze zdaniem 4 — nic innego, jak właśnie P_2; tak więc i w tym wypadku P jest — zgodnie z twierdzeniem III — ingredyensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 5, to — zgodnie z aksyomatem II — P jest częścią przedmiotu P_2, z czego wypada na podstawie twierdzenia III, iż P jest ingredyensem przedmiotu P_2. Widzimy tedy, że, jeżeli jest prawdą którekolwiek ze zdań — 2, 3, 4, 5 —, to P jest ingredyensem przedmiotu P_2; ponieważ jednak zdanie 1 jest prawdą tylko w takim razie, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań — 2, 3, 4, 5 —, więc, jeżeli jest prawdą zdanie 1, to P jest ingredyensem przedmiotu P_2; inaczej: jeżeli P jest ingredyensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2, to P jest ingredyensem przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie V. Jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingredyens I_1 przedmiotu P, że żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P. Wnosimy stąd, że i sam przedmiot I_1 (który zgodnie z twierdzeniem II jest ingredyensem przedmiotu I_1) nie jest ingredyensem przedmiotu P. Otrzymany wniosek, że I_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P, musi być fałszem, określiłem bowiem wyżej przedmiot I_1, jako ingredyens przedmiotu P. Musi więc być również fałszem prowadzące do tego wniosku przypuszczenie nasze, że twierdzenie V jest fałszem. Tak więc — twierdzenie V jest prawdą.

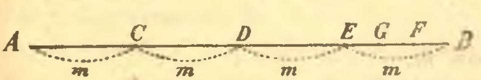
Twierdzenie VI. Jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien in-
gredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego ingredyensu przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest ałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingredyens I_1 przedmiotu P, że żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem żadnego in-
gredyensu przedmiotu P. Wypada stąd dalej, iż żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P (który — zgodnie z twierdzeniem II — jest ingredyensem przedmiotu P). Możemy to sformułować inaczej (wiedząc o tem, że I_1 jest ingredyensem przedmiotu P), a mianowicie: żaden ingredyens pewnego ingredyensu przedmiotu P nie est ingredyensem tego właśnie przedmiotu P. Twierdzenie otrzymane est sprzeczne z twierdzeniem V. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie VI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie VI jest prawdą.

§ 4.

Definicya II. Wyrażenia „mnogość przedmiotów m" używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu P, który czyni zadość następującemu warunkowi: jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego m, które jest ingredyensem przedmiotu P.

[Przykłady: I. Każdy dany naród N jest mnogością ludzi, albowiem, jeżeli I jest ingredyensem narodu N, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego człowieka, który jest ingredyensem narodu N. II. Powierzchnia szachownicy nie jest mnogością białych kwadratów, nie jest tu bowiem zachowany wymagany w definicyi II warunek: oto — żaden czarny kwadrat, będąc ingredyensem szachownicy, nie posiada ani jednego takiego ingredyensu, któryby był ingredyensem jakiegoś białego kwadratu, nie jest więc prawdą, iż, jeżeli I jest ingredyensem szachownicy, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego białego kwadratu, który jest ingredyensem szachownicy. III. Uważajmy odcinek AB rysunku 1 i użyjmy wyrazu „m" dla oznaczenia każdego z odcinków — AC, CD, DE i EB—, będących częściami odcinka AB. Odcinek AF nie jest mnogością przedmiotów m, albowiem odcinek GF, będąc ingredyensem odcinka AF, nie posiada ani jednego takiego ingredyensu, któryby był ingredyensem jakiegoś



Rys. 1.

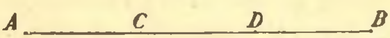
m, będącego ingredyensem odcinka *AF*, nie jest więc prawdą, iż, jeżeli *I* jest ingredyensem odcinka *AF*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*, które jest ingredyensem odcinka *AF*].

Definicya III. Wyrażeń — „mnogość wszystkich przedmiotów *m*" oraz „klasa przedmiotów *m*" — używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu *P*, który czyni zadość dwom następującym warunkom:

1) każde *m* jest ingredyensem przedmiotu *P*,

2) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*.

[Przykłady: I. Ludzkość jest mnogością wszystkich ludzi, czyli klasą ludzi, albowiem: 1) każdy człowiek jest ingredyensem ludzkości, 2) jeżeli *I* jest ingredyensem ludzkości, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego człowieka. II. Odcinek *AC* rysunku 2 nie jest klasą części odcinka *AB*, albowiem nie każda część odcinka *AB* jest ingredyensem odcinka *AC*, nie jest więc zachowany warunek 1 definicyi III. III. Odcinek *AB* rysunku 2 nie jest klasą części odcinka *AC*, albowiem nie jest tu zachowany warunek 2 definicyi III: odcinek *DB*, będący ingredyensem odcinka *AB*, nie posiada ani jednego takiego ingredyensu, któryby był ingredyensem jakiejś części odcinka *AC*, nie jest więc prawdą, że, jeżeli *I* jest ingredyensem odcinka *AB*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnej części odcinka *AC*.]



Rys. 2.

Aksyomat III. Jeżeli pewien przedmiot jest *m*, to pewien przedmiot jest klasą przedmiotów *m*.

Aksyomat IV. Jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, oraz P_1 jest klasą przedmiotów *m*, to *P* jest P_1.

§ 5.

Twierdzenie VII. Jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, to *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

Dowód: Załóżmy, że

(1) *P* jest klasą przedmiotów *m*.

Zgodnie z definicyą III możemy zapisać:

(2) każde *m* jest ingredyensem przedmiotu *P*,

(3) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*.

twierdzenia 3 wnosimy na podstawie twierdzenia 2, że, jeżeli *I* jest ıgredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest inredyensem pewnego *m*, które jest ingredyensem przedmiotu *P*. Wynika ąd — w myśl definicyi II —, że

(4) *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

'ak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Wypada ąd, że, jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, to *P* jest mnogością przedıiotów *m*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie VIII. Każdy przedmiot *P* jest klasą ingredyensów ego właśnie przedmiotu *P*.

Dowód: Na podstawie zasady tożsamości możemy zapisać:

(1) każdy ingredyens przedmiotu *P* jest ingredyensem przedmiotu *P*.

twierdzenia VI wiemy, iż,

(2) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens rzedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego ingredyensu przedmiotu *P*.

twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy zgodnie z definicyą III twierdzeie żądane.

Twierdzenie IX. Jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu ', to *P* jest klasą części przedmiotu *P*.

Dowód: Załóżmy, że

(1) pewien przedmiot jest częścią przedmiotu *P*.

Vypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(2) P_1 jest częścią przedmiotu *P*.

Vobec prawdziwości twierdzenia 1 wnosimy z twierdzenia III, iż

(3) każda część przedmiotu *P* jest ingredyensem przedmiotu *P*.

twierdzeń — 3 i 2 — wynika, że

(4) P_1 jest ingredyensem przedmiotu *P*.

twierdzenia II wiemy, iż

(5) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_1.

twierdzeń — 4 i 5 — wypada, że

(6) pewien ingredyens przedmiotu *P* jest ingredyensem przedmiotu P_1.

twierdzeń — 6 i 2 — wnosimy, iż

(7) pewien ingredyens przedmiotu *P* jest ingredyensem pewnej częci przedmiotu *P*.

Iożemy powiedzieć, że

(8) jeżeli *C* jest częścią przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedıiotu *C* jest ingredyensem pewnej części przedmiotu *P*,

dybyśmy bowiem przypuścili, że jest inaczej, to wypadłoby stąd, że ewna część C_1 przedmiotu *P* jest taką, iż żaden ingredyens przedmiotu C_1 nie jest ingredyensem żadnej części przedmiotu *P*, z czego wynikłoby (zgodnie z twierdzeniem II), że i sam przedmiot C_1 nie jest ingredyensem żadnej części przedmiotu P, stąd zaś otrzymalibyśmy wniosek, sprzeczny z twierdzeniem II, a mianowicie wniosek, iż C_1 nie jest ingredyensem przedmiotu C_1. Zgodnie z definicyą I piszemy:

(9) każdy ingredyens przedmiotu P jest albo przedmiotem P albo częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — 7 i 8 — wnosimy na podstawie twierdzenia 9, iż

(10) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnej części przedmiotu P.

Z twierdzeń — 3 i 10 — wypada zgodnie z definicyą III, że

(11) P jest klasą części przedmiotu P.

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 11. Wypada stąd, że, jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu P, to P jest klasą części przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie X. Każdy dany przedmiot P jest klasą przedmiotów P.

Dowód: Wiedząc z twierdzenia II, iż P jest ingredyensem przedmiotu P, możemy zapisać:

(1) każde P jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzenia V wiadomo, że,

(2) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego P.

Z twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy na podstawie definicyi III twierdzenie żądane.

§ 6.

Definicya IV. Używam wyrażenia „element przedmiotu P" dla oznaczenia jakiegokolwiek przedmiotu P_1 wtedy, jeżeli przy pewnym znaczeniu wyrazu „x" zostają zachowane dwa następujące warunki:

1) P jest klasą przedmiotów x,

2) P_1 jest x.

[Przykłady: I. Odcinek AC na rysunku 2 jest elementem odcinka AB, albowiem, jeżeli wyraz „x" jest użyty w znaczeniu wyrażenia „odcinek, będący AC albo AB", to 1) odcinek AB jest klasą przedmiotów x, 2) odcinek AC jest x. II. Dowolny koń K nie jest elementem klasy myszy, albowiem przy żadnym znaczeniu wyrazu „x" nie jest zarazem prawdą, że klasa myszy jest klasą przedmiotów x, oraz że koń K jest x. (Komentarz: koń K nie jest ani klasą myszy ani też częścią klasy myszy; wypada stąd — zgodnie z definicyą I —, iż koń K nie jest ingredyensem klasy myszy; gdyby jednak przy jakimkolwiek znaczeniu wyrazu „x" były zarazem prawdami zdania — 1) „klasa myszy jest klasą przedmiotów x" oraz 2) „koń K jest x", — to ze zdań tych wynikłoby na zasadzie definicyi III, że koń K jest ingredyensem klasy myszy.)]

§ 7.

Twierdzenie XI. Jeżeli P_1 jest ingredyensem przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

O przedmiocie P możemy — zgodnie z twierdzeniem VIII — powiedzieć, że

(2) P jest klasą ingredyensów przedmiotu P.

Używając wyrazu „x" w znaczeniu wyrażenia „ingredyens przedmiotu P", wnosimy z twierdzeń 2 i 1, że

(3) P jest klasą przedmiotów x,

(4) P_1 jest x.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wypada zgodnie z definicyą IV, iż

(5) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P_1 jest ingredyensem przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XII. Jeżeli P_1 jest elementem przedmiotu P, to P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicyą IV —, iż istnieje takie znaczenie wyrazu „x", że —

(2) P jest klasą przedmiotów x,

(3) P_1 jest x.

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicyi III, że

(4) każde x jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada, iż

(5) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P_1 jest elementem przedmiotu P, to P_1 jest ingredyensem przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XIII. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — III i XI.

Twierdzenie XIV. Każdy przedmiot jest swoim własnym elementem.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P, że

(1) P nie jest elementem przedmiotu P.

Wypada stąd, iż

(2) P nie jest ingredyensem przedmiotu P,

gdyby bowiem P było ingredyensem przedmiotu P, to P byłoby — zgodnie z twierdzeniem XI — elementem przedmiotu P, co byłoby sprzeczne z twierdzeniem 1. Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem II. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XIV jest fałszem. Tak więc twierdzenie XIV jest prawdą.

Twierdzenie XV. Jeżeli P jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2, to P jest elementem przedmiotu P_2

Dowód: załóżmy, że

(1) P jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2.

Wypada stąd — zgodnie z twierdzeniem XII —, że —

(2) P jest ingredyensem przedmiotu P_1,

(3) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 2 i 3 — wnosimy na podstawie twierdzenia IV, że

(4) P jest ingredyensem przedmiotu P_2,

z czego wypada — w myśl twierdzenia XI —, iż

(5) P jest elementem przedmiotu P_2.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2, to P jest elementem przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XVI. Jeżeli P jest klasą przedmiotów m, to każde m jest elementem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P jest klasą przedmiotów m.

Wypada stąd — zgodnie z definicyą III —, iż

(2) każde m jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — XI i 2 — wypada, że

(3) każde m jest elementem przedmiotu P.

Tak więc, — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 3. Wypada stąd, że, jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, to każde *m* jest elementem przedmiotu *P*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XVII. Jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Dowód: załóżmy, że

(1) *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

Wypada stąd — zgodnie z definicyą II —, że, jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*, które jest ingredyensem przedmiotu *P*. Widzimy stąd, że i pewien ingredyens samego przedmiotu *P* jest (zgodnie z twierdzeniem II) ingredyensem pewnego *m*, które jest ingredyensem przedmiotu *P*. Tak więc — pewien ingredyens przedmiotu *P* jest ingredyensem pewnego takiego przedmiotu *X*, iż—

(2) *X* jest *m*,

(3) *X* jest ingredyensem przedmiotu *P*.

Z twierdzenia 3 wnosimy — na podstawie twierdzenia XI —, że

(4) *X* jest elementem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, iż

(5) pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*, co właśnie należało udowodnić.

§ 8.

Twierdzenie XVIII. Jeżeli *P* jest *m*, to *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem *P'*, że wprawdzie

(1) *P'* jest *m*,

ale (2) *P'* nie jest mnogością przedmiotów *m*.

Z twierdzenia II wiemy, iż

(3) *P'* jest ingredyensem przedmiotu *P'*.

Zgodnie z twierdzeniem V —

(4) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P'*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem przedmiotu *P'*.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, iż,

(5) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P', to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P', który jest ingredyensem przedmiotu P'.

Z twierdzeń — 5 i 1 — wypada, że,

(6) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P', to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego m, które jest ingredyensem przedmiotu P'.

Z twierdzenia 6 wynika — w myśl definicyi II, — iż

(7) P' jest mnogością przedmiotów m.

Twierdzenie 7 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XVIII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XVIII jest prawdą.

Twierdzenie XIX. Jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, a każde m jest n, to P jest mnogością przedmiotów n.

Dowód: Załóżmy, że:

(1) P jest mnogością przedmiotów m,

(2) każde m jest n.

Z twierdzenia 1 wnosimy — zgodnie z definicyą II —, że,

(3) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego m, które jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 3 i 2 — wynika, iż

(4) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego n, które jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzenia 4 wnosimy, — zgodnie z definicyą II —, że

(5) P jest mnogością przedmiotów n.

Tak więc —, zakładając twierdzenia 1 i 2, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, a każde m jest n, to P jest mnogością przedmiotów n. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XX. Jeżeli P jest klasą mnogości przedmiotów m, to P jest klasą przedmiotów m.

Dowód: załóżmy, że

(1) P jest klasą mnogości przedmiotów m.

Wypada stąd — zgodnie z definicyą III —, że:

(2) każda mnogość przedmiotów m jest ingredyensem przedmiotu P,

(3) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnej mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia XVIII wnosimy, iż

(4) każde *m* jest mnogością przedmiotów *m*.
Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, że
(5) każde *m* jest ingredyensem przedmiotu *P*.
Możemy się przekonać, iż,
(6) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu *P*, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*,
zapomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie
(*a*) I_1 jest ingredyensem przedmiotu *P*,
ale (*b*) żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem żadnego *m*;
z twierdzeń — 3 i *a* — wnosimy, iż
(*c*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyensem pewnej mnogości przedmiotów *m*,
z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_2, że —
(*d*) I_2 jest mnogością przedmiotów *m*,
(*e*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyense mprzedmiotu I_2,
z twierdzenia *e* wynika, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem; I_3, że —
(*f*) I_3 jest ingredyensem przedmiotu I_1,
(*g*) I_3 jest ingredyensem przedmiotu I_2;
z twierdzenia *d* wnosimy — zgodnie z definicyą II —, że,
(*h*) jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu I_2, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem pewnego *m*;
z twierdzeń — *h* i *g* — wypada, iż
(*i*) pewien ingredyens przedmiotu I_3 jest ingredyensem pewnego *m*
to znaczy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_4, że —
(*k*) I_4 jest ingredyensem przedmiotu I_3,
(*l*) I_4 jest ingredyensem pewnego *m*;
z twierdzeń — *k* i *f* — wnosimy — na podstawie twierdzenia IV —, i
(*m*) I_4 jest ingredyensem przedmiotu I_1;
z twierdzeń — *l* i *m* — wypada, że
(*n*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyensem pewnego *m*
twierdzenie *n* jest sprzeczne z twierdzeniem *b*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzeń — 5 i 6 — wynika zgodnie z definicyą III, iż
(7) *P* jest klasą przedmiotów *m*.
Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 7. Wypada stąd, że, jeżeli *P* jest klasą mnogości przedmiotów *m*, to *P*

jest klasą przedmiotów m, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXI. Jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, to P jest ingredyensem klasy przedmiotów m.

Dowód: załóżmy, iż

(1) P jest mnogością przedmiotów m.

Wypada stąd — zgodnie z aksyomatem III —, że pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, iż

(2) P_1 jest klasą mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia 2 wynika — zgodnie z definicyą III —, że

(3) każda mnogość przedmiotów m jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 3 i 1 — wnosimy, iż

(4) P jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 2 wypada — w myśl twierdzenia XX —, że

(5) P_1 jest klasą przedmiotów m.

Z twierdzeń — 4 i 5 — widzimy, iż

6) P jest ingredyensem klasy przedmiotów m.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1 —, dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że, jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, to P jest ingredyensem klasy przedmiotów m, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXII. Jeżeli P jest klasą przedmiotów m, to P est klasą mnogości przedmiotów m.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że wprawdzie

(1) P_1 jest klasą przedmiotów m,

ale (2) P_1 nie jest klasą mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z definicją III —, że musi być fałszem przynajmniej jedno z twierdzeń następujących:

(a) każda mnogość przedmiotów m jest ingredyensem przedmiotu P_1,

(b) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnej mnogości przedmiotów m.

Rozpatrzmy kolejno możliwość fałszywości któregokolwiek z dwóch twierdzeń, przed chwilą sformułowanych. Rozpatrzmy najprzód zdanie a i przypuśćmy, że zdanie to jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_2, że wprawdzie

(α) P_2 jest mnogością przedmiotów m,

ale (β) P_2 nie jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — XXI i α — wnosimy, iż

(γ) P_2 jest ingredyensem klasy przedmiotów m,

z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że —

(δ) P_3 jest klasą przedmiotów m,

(ε) P_2 jest ingredyensem przedmiotu P_3

Z twierdzeń — δ i ι — wynika na podstawie aksyomatu IV, iż

(η) P_3 jest P_1.

Z twierdzeń — ε i η widzimy, że

(ζ) P_2 jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Twierdzenie ζ jest sprzeczne z twierdzeniem β. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie *a* jest fałszem. Przypuśćmy obecnie, że jest fałszem twierdzenie *b*. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(ϑ) I_1 jest ingredyensem przedmiotu P_1,

ale (ι) żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem żadnej mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia II wiemy, iż

($\varkappa$) I_1 jest ingredyensem przedmiotu I_1.

Z twierdzeń — ι i $\varkappa$ — wnosimy, że

(λ) I_1 nie jest ingredyensem żadnej mnogości przedmiotów m.

Z twierdzeń — ϑ i λ — wynika, iż

(μ) P_1 nie jest mnogością przedmiotów m,

z czego wypada — na podstawie twierdzenia VII —, że

(ν) P_1 nie jest klasą przedmiotów m.

Twierdzenie ν jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie *b* jest fałszem. Tak tedy —

(3) twierdzenie 2 jest fałszem,

albowiem nie jest, jak widzieliśmy, fałszem żadne z twierdzeń — *a* i *b* —, z których przynajmniej jedno musiałoby być fałszem, gdyby twierdzenie 2 było prawdą. Twierdzenie 3 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXII jest prawdą.

Twierdzenie XXIII. Jeżeli jest prawdą, iż, jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P, to P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Dowód: Założmy, iż jest prawdą, że

(1) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzenia II wiemy, że

(2) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_2, że —

(3) P_2 jest ingredyensem przedmiotu P_1,

(4) P_2 jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika, iż

(5) pewien przedmiot jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem ingredyensem przedmiotu P. Jasne jest, iż

(6) każdy przedmiot, który jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem ingredyensem przedmiotu P, jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Możemy się przekonać, że

(7) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego przedmiotu, który jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P,

zapomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, iż twierdzenie 7 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(*a*) I_1 jest ingredyensem przedmiotu P_1,

ale (*b*) żaden ingredyens przedmiotu I_1 nie jest ingredyensem żadnego przedmiotu, który jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P;

z twierdzeń — I i *a* — wypada, że

(*c*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyensem przedmiotu P;

z twierdzenia *c* widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_2, że —

(*d*) I_2 jest ingredyensem przedmiotu I_1,

(*e*) I_2 jest ingredyensem przedmiotu P;

z twierdzeń — *d* i *a* — wnosimy, iż

(*f*) I_2 jest ingredyensem przedmiotu P_1;

z twierdzeń — *f* i *e* — wynika, że

(*g*) I_2 jest przedmiotem, który jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P;

z twierdzenia II wiemy, iż

(*h*) I_2 jest ingredyensem przedmiotu I_2;

z twierdzeń — *d* i *h* — wypada, że

(*i*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyensem przedmiotu I_2;

z twierdzeń — *i* i *g* — wnosimy, iż

(*k*) pewien ingredyens przedmiotu I_1 jest ingredyensem pewnego przedmiotu, który jest ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P_2;

twierdzenie *k* jest sprzeczne z twierdzeniem *b*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 7 jest fałszem; tak więc—twierdzenie 7 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 7 — wypada na zasadzie definicyi III, że

(8) P_1 jest klasą przedmiotów, będących ingredyensami przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P.

Z twierdzeń — VII i 8 — wnosimy, iż

(9) P_1 jest mnogością przedmiotów, będących ingredyensami przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P.

Jasne jest, że

(10) każdy przedmiot, będący ingredyensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P, jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika zgodnie z twierdzeniem XIX, iż

(11) P_1 jest mnogością ingredyensów przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXI i 11 — wypada, że

(12) P_1 jest ingredyensem klasy ingredyensów przedmiotu P, z czego wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że

(13) P_3 jest klasą ingredyensôw przedmiotu P,

(14) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_3.

Z twierdzenia VIII wiemy, iż

(15) P jest klasą ingredyensów przedmiotu P.

Z twierdzeń — 13 i 15 — wynika zgodnie z aksyomatem IV, że

(16) P_3 jest P.

Z twierdzeń — 14 i 16 — wypada, iż

(17) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Tak więc, — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 17. Wypada stąd, że, jeżeli pewien ingredyens każdego ingredyensu przedmiotu P_1 jest ingredyensem przedmiotu P, to i sam przedmiot P_1 jest ingredyensem przedmiotu P. To właśnie należało udowodnić.

§ 9.

Twierdzenie XXIV. Każdy przedmiot P jest klasą elementów tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: Z twierdzenia XII wiemy, iż

(1) każdy element przedmiotu P jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzenia VI wiemy, że

(2) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego ingredyensu przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wnosimy, — zgodnie z twierdzeniem XI, — iż

(3) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego elementu przedmiotu P.

Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicyą III twierdzenie żądane.

Twierdzenie XXV. Każda mnogość jest swoim własnym elementem.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia XIV.

Twierdzenie XXVI. Żaden przedmiot nie jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P, że

(1) P jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — VII i 1 — wynika, iż

(2) P jest mnogością mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — XVII i 2 — wynika, że

(3) pewna mnogość, nie będąca swoim własnym elementem, jest elementem przedmiotu P.

Z twierdzenia 3 widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(4) P_1 jest mnogością, nie będącą swoim własnym elementem,

(5) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie 4 jest sprzeczne z twierdzeniem XXV. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXVI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVI jest prawdą.

Twierdzenie XXVII. Twierdzenie «jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to P jest m» jest fałszem *).

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Wnosimy stąd, iż

(1) twierdzenie «jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to P jest m» jest prawdą.

Z twierdzenia 1 wynika, że

(2) jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to P jest m.

Uważajmy jakieś takie przedmioty — P_1 i P_2, — że

(3) P_1 jest częścią przedmiotu P_2.

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(4) jeżeli P_1 jest elementem mnogości przedmiotów P_2, to P_1 jest P_2.

Z twierdzenia X wiemy, że

*) Każde z twierdzeń — XXVI i XXVII — wskazuje na to, że w rozwijanej w pracy niniejszej teoryi mnogości nie daje się wcale skonstruować t. zw. antynomia Russella.

(5) P_2 jest klasą przedmiotów P_2.
Z twierdzeń — VII i 5 — wnosimy, iż

(6) P_2 jest mnogością przedmiotów P_2.
Z twierdzenia 3 wynika — na podstawie twierdzenia III, X — że

(7) P_1 jest elementem przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — 7 i 6 — wypada, iż

(8) P_1 jest elementem mnogości przedmiotów P_2.
Z twierdzeń — 4 i 8 — wnosimy, że

(9) P_1 jest P_2,
skąd wynika (zgodnie z twierdzeniem I), iż

(10) P_1 nie jest częścią przedmiotu P_2.
Twierdzenie 10 jest sprzeczne z twierdzeniem 3. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVII jest prawdą.

§ 10.

Definicya V. Wyrażenia «podmnogość przedmiotu P» używam dla oznaczenia wszelkiego takiego przedmiotu P_1, który czyni zadość następującemu warunkowi: każdy element przedmiotu P_1 jest elementem przedmiotu P.

[Przykłady: I. Odcinek AC rysunku 2 jest podmnogością odcinka AB, albowiem odcinek AC czyni zadość warunkowi definicyi V: każdy element odcinka AC jest elementem odcinka AB. II. Odcinek AB rysunku 2 nie jest podmnogością odcinka AC, albowiem nie każdy element odcinka AB jest elementem odcinka AC: oto np. sam odcinek AB, który jest — zgodnie z twierdzeniem XIV — elementem odcinka AB, nie jest elementem odcinka AC].

Definicya VI. Wyrażenia «podmnogość właściwa przedmiotu P» używam dla oznaczenia wszelkiej takiej podmnogości P_1 przedmiotu P, która nie jest P.

[Przykłady: I Odcinek AC rysunku 2 jest podmnogością właściwą odcinka AB, albowiem odcinek AC jest taką podmnogością odcinka AB, która nie jest odcinkiem AB. II. Odcinek AB rysunku 3 nie jest podmnogością właściwą odcinka AB, albowiem odcinek AB jest odcinkiem AB, nie jest więc prawdą, iż odcinek AB jest taką podmnogością odcinka AB, która nie jest odcinkiem AB.

§ 11.

Twierdzenie XXVIII. Jeżeli P_1 jest ingredyensem przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, że pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B —, że wprawdzie

(1) A jest ingredyensem przedmiotu B,

ale (2) A nie jest podmnogością przedmiotu B.

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicyi V, iż

(3) pewien element przedmiotu A nie jest elementem przedmiotu B,

z czego widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem C, że wprawdzie

(4) C jest elementem przedmiotu A,

ale (5) C nie jest elementem przedmiotu B.

Z twierdzenia 5 wynika, iż

(6) C nie jest ingredyensem przedmiotu B,

gdyby bowiem C było ingredyensem przedmiotu B, to wypadłoby stąd na zasadzie twierdzenia XI, że C jest elementem przedmiotu B, co jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Z twierdzeń — XII i 4 — widzimy, iż

(7) C jest ingredyensem przedmiotu A.

Z twierdzeń — 7 i 1 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że

(8) C jest ingredyensem przedmiotu B.

Twierdzenie 8 jest sprzeczne z twierdzeniem 6. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, iż twierdzenie XXVIII est fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVIII jest prawdą.

Twierdzenie XXIX. Jeżeli P_1 jest podmnogością przedmiotu P, to P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Wynika stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B —, że wprawdzie

(1) A jest podmnogością przedmiotu B,

ale (2) A nie jest ingredyensem przedmiotu B.

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(3) A nie jest elementem przedmiotu B,

gdyby bowiem A było elementem przedmiotu B, to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XII, że A jest ingredyensem przedmiotu B, co jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Z twierdzenia XIV wiemy, iż

(4) A jest elementem przedmiotu A.
Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, że
(5) pewien element przedmiotu A nie jest elementem przedmiotu B.
Z twierdzenia 5 wynika na zasadzie definicyi V, iż
(6) A nie jest podmnogością przedmiotu B.
Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXIX jest prawdą.

Twierdzenie XXX. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż
(1) P_1 jest częścią przedmiotu P.
Z twierdzeń — III i 1 — wypada, że
(2) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.
Z twierdzeń — XXVIII i 2 — widzimy, iż
(3) P_1 jest podmnogością przedmiotu P.
Z twierdzeń — I i 1 — wnosimy, że
(4) P_1 nie jest P.
Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika zgodnie z definicyą VI, iż
(5) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.
Tak więc, — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXI. Jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P.

Dowód: załóżmy, iż
(1) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.
Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicyi VI, że
(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P,
(3) P_1 nie jest P.
Z twierdzeń — XXIX i 2 — wynika, iż
(4) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.
Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada na zasadzie definicyi I, że
(5) P_1 jest częścią przedmiotu P.
Tak więc, — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wnosimy stąd, iż, jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXII. Żaden przedmiot nie jest podmnogością właściwą samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, że jakiś przedmiot P jest podmnogością właściwą samego siebie, to znaczy, iż jakiś przedmiot P jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to wynikałoby stąd — zgodnie z twierdzeniem XXXI, że P jest częścią przedmiotu P, co jest sprzeczne z twierdzeniem I.

Twierdzenie XXXIII. Każdy przedmiot jest podmnogością samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, iż jakiś przedmiot P nie jest podmnogością samego siebie, to znaczy, że jakiś przedmiot P nie jest podmnogością przedmiotu P, to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XXVIII, iż P nie jest ingredyensem przedmiotu P, co jest sprzeczne z twierdzeniem II.

Twierdzenie XXXIV. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1,

Wnosimy stąd na zasadzie twierdzenia XXXI, iż

(2) P jest częścią przedmiotu P_1,

z czego wynika w myśl aksyomatu I, że

(3) P_1 nie jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXXI i 3 — wypada, iż

(4) P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Widzimy stąd, że, jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXV. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P nie jest podmnogością przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B, — że wprawdzie

(1) A jest podmnogością właściwą przedmiotu B,

ale (2) B jest podmnogością przedmiotu A.

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicyą VI —, iż

(3) A nie jest B.

Z twierdzenia 3 wypada, że

(4) B nie jest A.

Z twierdzeń — 2 i 4 — wnosimy na podstawie definicyi VI, iż

(5) B jest podmnogością właściwą przedmiotu A.

Z twierdzeń — XXXIV i 1 — wynika, że

(6) B nie jest podmnogością właściwą przedmiotu A.

Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXXV jest prawdą.

Twierdzenie XXXVI. Jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością przedmiotu P_2.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P jest podmnogością przedmiotu P_1,

(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XXIX i 1 — wynika, że

(3) P jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wypada, iż

(4) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że

(5) P jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XXVIII i 5 — wynika, iż

(6) P jest podmnogością przedmiotu P_2.

Tak więc —, zakładając twierdzenia — 1 i 2, — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że, jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXVII. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1,

(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na podstawie twierdzenia XXXVI, że

(3) P jest podmnogością przedmiotu P_2.

Możemy powiedzieć, iż

(4) P_2 nie jest P,

gdyby bowiem P_2 było P, to wynikłoby stąd zgodnie z twierdzeniem 2, że P_1 jest podmnogością przedmiotu P, co musi być fałszem, wiadomo bowiem z twierdzeń — XXXV i 1 —, iż P_1 nie jest podmnogością przedmiotu P. Z twierdzenia 4 wypada, że

(5) P nie jest P_2.

Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy na podstawie definicyi VI, iż

(6) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Tak więc —, zakładając twierdzenia — 1 i 2 —, dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXVIII. Jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Dowód: załóżmy, iż —

(1) P jest podmnogością przedmiotu P_1,

(2) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na zasadzie twierdzenia XXXVI, że

(3) P jest podmnogością przedmiotu P_2.

Z twierdzeń—*XXXV* i 2—wynika, iż

(4) P_2 nie jest podmnogością przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 1 i 4 — wypada, że

(5) P nie jest P_2.

Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy w myśl definicyi VI, iż

(6) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Tak więc—, zakładając twierdzenia — 1 i 2 —, dochodzimy do twierdzenia 6. Wynika stąd, że, jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXIX. Jeżeli P_1 jest elementem przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością przedmiotu P.

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń—XXVIII i XII.

Twierdzenie XL. Jeżeli P_1 jest podmnogością przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń—XI i XXIX.

Twierdzenie XLI. Każdy przedmiot P jest klasą podmnogości tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: z twierdzenia XXIX wiemy, iż

(1) każda podmnogość przedmiotu P jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzenia *VI* wiemy, że

(2) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego ingredyensu przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wnosimy—zgodnie z twierdzeniem XXVIII—, iż

(3) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnej podmnogości przedmiotu P.

Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicyą III twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLII. Jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, każde *m* jest *n*, to *P* jest podmnogością klasy przedmiotów *n*.

Dowód: załóżmy, że

(1) *P* jest mnogością przedmiotów *m*, a każde *m* jest *n*.

Z twierdzeń — XIX i 1 — wynika, iż

(2) *P* jest mnogościa przedmiotów *n*.

Z twierdzeń — XXI i 2 — wypada, że

(3) *P* jest ingredyensem klasy przedmiotów *n*.

Z twierdzeń — XXVIII i 3 — wnosimy, iż

(4) *P* jest podmnogością klasy przedmiotów *n*.

Tak więc — ; zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 4. Wypada stąd, że, jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, a każde *m* jest *n*, to *P* jest podmnogością klasy przedmiotów *n*. To właśnie należało udowodnić.

§ 12.

Definicya VII. Używam wyrazu «wszechświat» dla oznaczenia klasy przedmiotów.

Twierdzenie XLIII. Pewien przedmiot jest klasą przedmiotów niesprzecznych.

Dowód: W myśl zasady niesprzeczności możemy powiedzieć, iż każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym. Wypada stąd, że pewien przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym, skąd wynika — zgodnie z aksyomatem III — twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLIV. Klasa przedmiotów niesprzecznych jest wszechświatem.

Dowód: Zgodnie z definicyą III możemy zapisać:

(1) każdy przedmiot niesprzeczny jest ingredyensem klasy przedmiotów niesprzecznych,

(2) jeżeli *I* jest ingredyensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego przedmiotu niesprzecznego.

Zgodnie z zasadą niesprzeczności —

(3) każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym.

Z twierdzeń — 1 i 3 — wypada, iż

(4) każdy przedmiot jest ingredyensem klasy przedmiotów niesprzecznych.

Z twierdzenia 2 widzimy, że

(5) jeżeli *I* jest ingredyensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to

pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego przedmiotu. Z twierdzeń — 4 i 5 — wnosimy na podstawie definicyi III, iż

(6) klasa przedmiotów niesprzecznych jest klasą przedmiotów,

skąd — na zasadzie definicyi VII — otrzymujemy twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLV. Jeżeli P jest wszechświatem, i P_1 jest wszechświatem, to P jest P_1.

Dowód: Załóżmy, że —

(1) P jest wszechświatem,

(2) P_1 jest wszechświatem.

Z twierdzenia 1 otrzymujemy w myśl definicyi *VII*:

(3) P jest klasą przedmiotów.

Z twierdzenia 2 wnosimy zgodnie z definicyą *VII*, iż

(4) P_1 jest klasą przedmiotów.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika na podstawie aksyomatu *IV*, że

(5) P jest P_1.

Tak więc — , zakładając twierdzenia — 1 i 2 — , dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że, jeżeli P jest wszechświatem, i P_1 jest wszechświatem, to P jest P_1, co właśnie należało udowodnić.

§ 13.

Definicya VIII. Wyrażenia «przedmiot zewnętrzny względem przedmiotu P» używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu P_1, który czyni zadość następującemu warunkowi: żaden ingredyens przedmiotu P nie jest ingredyensem przedmiotu P_1.

[Przykłady: I. Odcinek AC rysunku 2 jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka DB, albowiem żaden ingredyens odcinka DB nie jest ingredyensem odcinka AC. II. Odcinek AD rysunku 2 nie jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka CB, albowiem odcinek CD, będący ingredyensem odcinka CB, jest również ingredyensem odcinka AD, nie jest więc prawdą, iż żaden ingredyens odcinka CB nie jest ingredyensem odcinka AD.].

Twierdzenie XLVI. Jeżeli P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1, to P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicyi VIII, iż

(2) żaden ingredyens przedmiotu P nie jest ingredyensem przedmiotu P_1,
z czego wynika, iż
(3) żaden ingredyens przedmiotu P_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P.
Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie definicyi VIII, że
(4) P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, otrzymaliśmy twierdzenie 4. Wypada stąd, że, jeżeli P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P, to P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XLVII. Żaden przedmiot nie jest przedmiotem zewnętrznym względem samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie XLVII jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P, że
(1) P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P.
Z twierdzenia 1 wnosimy (zgodnie z definicyą VIII), iż
(2) żaden ingredyens przedmiotu P nie jest ingredyensem przedmiotu P.
Twierdzenie 2 jest twierdzeniem sprzecznym. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, że twierdzenie XLVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XLVII jest prawdą.

§ 14.

Definicya IX. Wyrażenia «dopełnienie przedmiotu P_1 do przedmiotu P» używam dla oznaczenia dowolnego przedmiotu P_2, jeżeli są zachowane dwa następujące warunki:
(1) P_1 jest podmnogością P,
(2) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

[Przykłady: I. Stanisław Poniatowski jest dopełnieniem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, do klasy królów polskich, albowiem: 1) klasa królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, jest podmnogością klasy królów polskich, 2) Stanisław Poniatowski jest klasą takich elementów klasy królów polskich, które są przedmiotami zewnętrznemi względem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim. II. Odcinek AC rysunku 2 nie jest dopełnieniem odcinka DB do odcinka AB, albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 1 (odcinek DB jest podmnogością odcinka AB), ale nie jest zachowany warunek 2 (odcinek AC nie jest klasą elementów odcinka AB, zewnętrznych względem odcinka DB). III. Zermelo nie jest dopełnieniem klasy matematyków, nie będących Zermelą, do klasy matematyków, nie będących Borelem, albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 2 (Zermelo jest klasą takich elementów klasy matematyków, nie będących Borelem, które są przedmiotami zewnętrznymi względem klasy matematyków, nie będących Zermelą), ale nie jest zachowany warunek 1 (klasa matematyków, nie będących Zermelą, nie jest podmnogością klasy matematyków, nie będących Borelem).

§ 15.

Twierdzenie XLVIII. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_1 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXX i 1 — wnosimy, że

(2) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wynika na podstawie definicyi VI, iż

(3) P_1 jest podmnogością przedmiotu P,

na podstawie zaś twierdzenia XXXV —, że

(4) P nie jest podmnogością przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 4 wypada na zasadzie twierdzenia XXVIII, iż

(5) P nie jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Możemy powiedzieć, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_2, że —

(6) P_2 jest ingredyensen przedmiotu P,

(7) żaden ingredyens przedmiotu P_2 nie jest ingredyensem przedmiotu P_1, —

gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem P_2, czyniącym zadość twierdzeniom — 6 i 7 —, to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że, jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P_1, — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż P jest ingredyensem przedmiotu P_1, co jest sprzeczne z twierdzeniem 5.

Z twierdzenia 7 wnosimy na zasadzie definicyi VIII, iż

(8) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XLVI i 8 — wynika, że

(9) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — XI i 6 — wypada, iż

(10) P_2 jest elementem przedmiotu P.
Z twierdzeń — 10 i 9 — widzimy, że

(11) P_2 jest elementem przedmiotu P, zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 11 wnosimy — w myśl aksyomatu III —, iż

(12) pewien przedmiot P_3 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — 3 i 12 — wynika na podstawie definicyi IX, że

(13) P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.
Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, doszliśmy do twierdzenia 13. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie IL. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie IL jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — P, P_1 i P_2 —, że wprawdzie

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P,
ale (2) P_2 nie jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicyi IX, iż

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 3 wynika na zasadzie definicyi III, że

(4) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_2 to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego takiego elementu przedmiotu P który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 2 wypada — w myśl definicyi VIII —, iż

(5) pewien ingredyens przedmiotu P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2.
Widzimy stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że —

(6) P_3 jest ingredyensem przedmiotu P_1,

(7) P_3 jest ingredyensem przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — 4 i 7 — wnosimy, iż

(8) pewien ingredyens przedmiotu P_3 jest ingredyensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_4, że —

(9) P_4 jest ingredyensem przedmiotu P_3,

(10) P_4 jest ingredyensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 10 wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_5, że —

(11) P_5 jest elementem przedmiotu P,

(12) P_5 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1,

(13) P_4 jest ingredyensem przedmiotu P_5.

Z twierdzenia 12 wnosimy na podstawie definicyi VIII, iż

(14) żaden ingredyens przedmiotu P_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P_5.

Z twierdzeń — 9 i 6 — wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

(15) P_4 jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 14 i 15 — wypada, iż

(16) P_4 nie jest ingredyensem przedmiotu P_5.

Twierdzenie 16 jest sprzeczne z twierdzeniem 13. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie IL jest fałszem. Tak więc—twierdzenie IL jest prawdą.

Twierdzenie L. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest częścią przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy — w myśl definicyi IX —, że —

(2) P_1 jest podmnogością ptzedmiotu P.

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 3 wynika — zgodnie z definicyą III —, iż

(4) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_2, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Wypada stąd, że

(5) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_2, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego elementu przedmiotu P.

Z twierdzenia 5 wnosimy na podstawie twierdzenia XII, iż,

(6) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_2, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego ingredyensu przedmiotu P.

Z twierdzenia 6 wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

(7) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_2, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXIII i 7 — wypada, iż

(8) P_2 jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — IL i 1 — wnosimy, że

(9) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 9 wynika w myśl definicyi VIII, iż

(10) żaden ingredyens przedmiotu P_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Z twierdzenia II wiemy, że

(11) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 10 i 11 — wypada, iż

(12) P_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wnosimy, że

(13) P_1 jest ingredyensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 12 i 13 — wynika, iż

(14) P_2 nie jest P.

Z twierdzeń — 8 i 14 — wypada zgodnie z definicyą I, że

(15) P_2 jest częścią przedmiotu P.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 15. Wnosimy stąd, że, jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest częścią przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie LI. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Wynika stąd na podstawie definicyi IX, że —

(2) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1,

na podstawie zaś twierdzenia L —, że

(3) P_2 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie twierdzenia XXX, iż

(4) P_2 jest podmnogością przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wnosimy w myśl definicyi III, że

(5) każdy element przedmiotu P, zewnętrzny względem przedmiotu P_1, jest ingredyensem przedmiotu P_2.

Możemy się przekonać, iż

(6) każdy element przedmiotu P, zewnętrzny względem przedmiotu P_2, jest ingredyensem przedmiotu P_1, —

zapomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że wprawdzie —

(*a*) P_3 jest elementem przedmiotu P,

(*b*) P_3 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2, ale (*c*) P_3 nie jest ingredyensem przedmiotu P_1;
z twierdzenia *c* wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_4, że —

(*d*) P_4 jest ingredyensem przedmiotu P_3.

(*e*) żaden ingredyens przedmiotu P_4 nie jest ingredyensem przedmiotu P_1;
(gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem P_4, czyniącym zadość twierdzeniom — *d* i *e* —, to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że, jeżeli *I* jest ingredyensem przedmiotu P_3, to pewien ingredyens przedmiotu *I* jest ingredyensem przedmiotu P_1, — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż P_3 jest ingredyensem przedmiotu P_1, co jest sprzeczne z twierdzeniem *c*; z twierdzenia *e* wypada na podstawie definicyi VIII, iż

(*f*) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_4;
z twierdzeń — XLVI i *f* — wnosimy, że

(*g*) P_4 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1;
z twierdzeń — XI i *d* — wynika, iż

(*h*) P_4 jest elementem przedmiotu P_3;
z twierdzeń — *h* i *a* wypada na zasadzie twierdzenia XV, że

(*i*) P_4 jest elementem przedmiotu *P*;
z twierdzeń — *i* i *g* —widzimy, iż

(*k*) P_4 jest elementem przedmiotu *P*, zewnętrznym względem przedmiotu P_1;
z twierdzeń — 5 i *k* — wnosimy, że

(*l*) P_4 jest ingredyensem przedmiotu P_2;
z twierdzenia *b* wynika w myśl definicyi VIII, iż

(*m*) żaden ingredyens przedmiotu P_2 nie jest ingredyensem przedmiotu P_3;
z twierdzeń — *m* i *l* — wypada, że

(*n*) P_4 nie jest ingredyensem przedmiotu P_3;
twierdzenie *n* jest sprzeczne z twierdzeniem *d*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności, przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzenia 1 wypada zgodnie z definicyą IX, że

(7) P_1 jest podmnogością przedmiotu *P*,
zgodnie zaś z twierdzeniem — IL —, że

(8) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — XL i 7 — widzimy, iż

(9) P_1 jest elementem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — XLVI i 8 — wnosimy, że

(10) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika, iż

(11) P_1 jest elementem przedmiotu P, zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzenia V wiemy, że

(12) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 12 i 11 — wypada, iż

(13) jeżeli I jest ingredyensem przedmiotu P_1, to pewien ingredyens przedmiotu I jest ingredyensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 6 i 13 — wnosimy na podstawie definicyi III, że

(14) P_1 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 4 i 14 — wynika na zasadzie definicyi IX, iż

(15) P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu P.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 15. Wypada stąd, że, jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu P. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie LII. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — L i LI.

Twierdzenie LIII. Jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — XLVIII i XXXI.

Twierdzenie LIV. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, oraz P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest P_3.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P,

(2) P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicyi IX, że

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 2 wynika na tejże podstawie, iż

(4) P_3 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

z twierdzeń — 8 i *h* — wnosimy, że

(*i*) I_1 jest ingredyensem przedmiotu P_2;

z twierdzenia II wiemy, iż

(*k*) I_1 jest ingredyensem przedmiotu I_1;

z twierdzeń — *d* i *k* — wynika, że

(*l*) I_1 nie jest ingredyensem przedmiotu P_2;

twierdzenie *l* jest sprzeczne z twierdzeniem *i*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 9 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 9 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 9 — wypada na podstawie definicyi III, że

(10) P jest klasą przedmiotów, będących P_1 albo P_2.

Tak więc —, zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 10. Wynika stąd twierdzenie żądane.