

Wojciech Nasalski

METODA WIENERA-HOPFA-HILBERTA  
W ANALIZIE SKOKOWYCH NIECIĄGŁOŚCI  
FALOWODÓW OTWARTYCH

6/1985

P.269

WARSZAWA 1985



ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 stycznia 1965 r.

Praca wykonana w ramach  
Problemu Rządowego PR-3.20.1



56943



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,5 Ark.druk. 2

Oddano do drukarni w styczniu 1965 r.

Nr zamówienia 62/85

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

Wojciech Nasalski  
Zakład Teorii Fal  
Elektromagnetycznych

METODA WIENERA-HOPFA-HILBERTA W ANALIZIE  
SKOKOWYCH NIECIĄGŁOŚCI FALOWODÓW OTWARTYCH

1. Wstęp

Problem dyfrakcji modu prowadzonego na złączeniu dwu falowodów otwartych wzbudza od wielu już lat duże zainteresowanie głównie z dwu powodów. Po pierwsze jest to problem choć teoretyczny, to jednak o dużym znaczeniu praktycznym, szczególnie w optyce zintegrowanej, gdzie właściwie każdy element światłowodowy, ze względu na swoje skończone wymiary, posiada poprzeczne nieciągłości falowodowe takie, jak w przypadku złącza dwu światłowodów planarnych czy złącza laser półprzewodnikowy - światłowod. Z drugiej strony jest to zagadnienie o dużym znaczeniu poznawczym, nie jest bowiem dotąd znana metoda jego rozwiązania dająca wyniki w postaci ścisłych wyrażeń analitycznych. Tak więc, choć istnieją już od kilku lat efektywne i, jak się wydaje, dokładne numeryczne metody rozwiązania tego problemu [1,2,3], nadal czynione są próby podejścia analitycznego do tego zagadnienia [4,5]. Niniejsza praca stanowi również pewną propozycję analitycznego postawienia i rozwiązania problemu dyfrakcji na złączeniu modu prowadzonego przez jeden z dwu falowodów tworzących złącze. Zakłada się, że są to wielomodowe falowody planarne jednowarstwowe o jednorodnej i izotropowej warstwie prowadzącej, o różnych grubościach i różnych współczynnikach załamania. Co więcej, przyjmujemy również dowolne wartości impedancji charakterystycznej warstwy co powoduje, że poniższa analiza nie musi się ograniczać wyłącznie do falowodów dielektrycznych. Praca stanowi weryfika-



cję i rozwinięcie metody impedancji powierzchniowych, której podstawy przedstawione zostały uprzednio w pracy [6]. Jak wskazuje nazwa, podejście to bazuje na pewnym, nietypowym impedancyjnym sformułowaniu warunków brzegowych jako konkurencyjnych do warunków ciągłości na powierzchni warstwy prowadzącej. Wykorzystanie spektralnej reprezentacji podłużnej

[7] pozwala przy pomocy wyprowadzonych warunków impedancyjnych sformułować problem w języku klasycznej teorii dyfrakcji, a następnie rozwiązać go przy użyciu techniki Wienera-Hopfa-Hilberta [8]. Weryfikacja metody impedancji powierzchniowych polega z jednej strony na analizie ogólnego przypadku nieciągłości - różne grubości falowodów, z drugiej strony na alternatywnym rozwiązaniu problemu - w tym podejściu na rozwiązaniu dwu alternatywnych problemów Hilberta na dwu różnych konturach  $J_1$  i  $J_2$ . Jednocześnie rozwiązania sprowadzone są do postaci umożliwiającej ocenę jednoznaczności sformułowania problemu. Wyniki końcowe przedstawione są w formie umożliwiającej przyszłe zastosowanie praktyczne, w szczególności dotyczy to dogodnej do obliczeń numerycznych postaci wyrażeń całkowitych

W pracy przyjęto zależność od czasu typu  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega = k/c$ , gdzie wielkości  $k$  i  $c$  opisują liczbę falową i fazową prędkość światła w ośrodku otaczającym warstwę prowadzącą falowodu.

## 2. Reprezentacja pola elektromagnetycznego

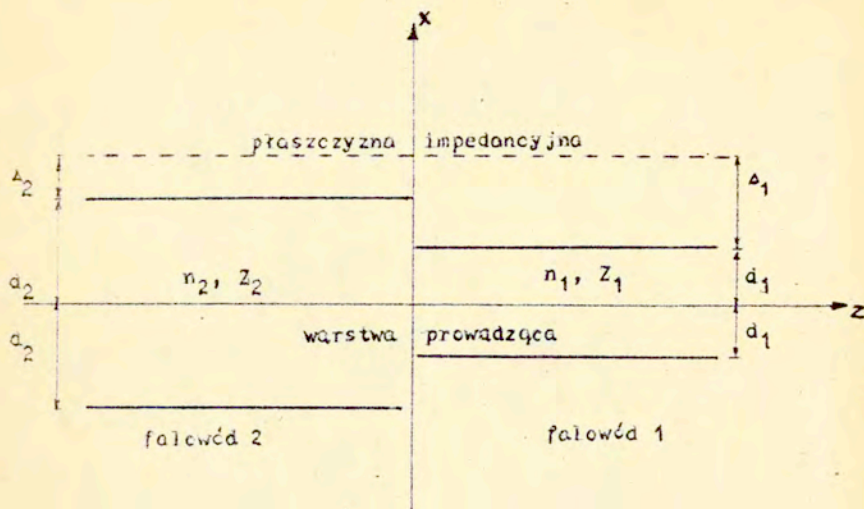
Jak wiadomo, przy rozwiązywaniu danego zagadnienia dyfrakcyjnego można używać różnych, alternatywnych reprezentacji pola elektromagnetycznego, prowadzących do równoważnych rozwiązań. Na przykład w przypadku falowodów otwartych typowymi reprezentacjami są poprzeczna reprezentacja spektralna i podłużna reprezentacja spektralna [7]. Dobór reprezentacji pola podyktowany jest zazwyczaj wymogami narzucanymi stosowaną metodą rozwiązania. Przy numerycznych metodach analizy zagadnienia rozpraszania na złączu dwu falowodów otwartych [1,2] dogodną reprezentacją jest poprzeczna reprezentacja spektralna, inaczej - reprezentacja modowa, przedstawiająca pole w

postaci superpozycji modów prowadzonych i modów promieniowania. Przy stosowaniu analitycznych metod Wienera-Hopfa bardziej odpowiednią jest spektralna reprezentacja podłużna przedstawiająca pole na zewnątrz warstwy prowadzącej falowodu w postaci superpozycji fal płaskich [6]. W przypadku różnych grubości falowodów reprezentacja pola zdeterminowana jest nie tylko przez stosowanie techniki Wienera-Hopfa, ale również koniecznością sformułowania brzegowych warunków impedancyjnych w płaszczyźnie leżącej w ogólności w pewnej odległości  $\Delta_j$  od powierzchni warstwy prowadzącej falowodu<sup>\*</sup> /Rys.1/ - tę wyróżnioną płaszczyznę będziemy dalej nazywać płaszczyzną impedancyjną. Wygodnie jest wtedy przyjąć reprezentację pola będącą granicznym przypadkiem spektralnej reprezentacji podłużnej dla struktury dwuwarstwowej, gdzie współczynnik załamania i impedancja charakterystyczna górnej warstwy o grubości  $\Delta_j$  równe są odpowiednim wartościom dla otaczającej przestrzeni /Rys.1/. Rysunek 1 przedstawia analizowane złącze dwu falowodów otwartych o grubościach odpowiednio  $2d_1, 2d_2$ , względnych /względem zewnętrznego ośrodka/ współczynnikach załamania  $n_1, n_2$  i względnych impedancjach charakterystycznych  $Z_1, Z_2$  warstwy prowadzącej. W płaszczyźnie  $z = 0$  umiejscowiona jest nieciągłość falowodowa wynikająca ze skokowych zmian wartości współczynników załamania, impedancji charakterystycznych i grubości warstw prowadzących.

Zarówno geometria układu jak i pobudzenie nie zależą od składowej y kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y, z$ . Stąd pole elektromagnetyczne, zależnie od pobudzenia, można przedstawić jako sumę składowych typu TM  $/H_x=H_z=E_y=0/$  i TE  $/E_x=E_z=0=H_y/$  [9]. W pracy analizujemy przypadek TM - pole padające typu TM, dla przypadku TE we wszystkich wzorach należy zamiast impedancji charakterystycznej  $Z_j$  podstawić odpowiadającą jej admitancję  $Y_j = Z_j^{-1}$ . Symetria pola względem płaszczyzny  $x = 0$  zależy również w tym przypadku od symetrii pola padającego. Wszędzie, gdzie jest to konieczne, rozróżniamy odpowiednio

<sup>\*</sup> W pracy przyjęto indeksowanie wielkości opisujących falowody 1 i 2 przy pomocy indeksu  $j$ :  $j = 1$  dla falowodu 1 i  $j = 2$  dla falowodu 2





Rys.1. Złącze dwu planarnych falowodów otwartych.

literami p i n przypadek parzysty /pole symetryczne względem płaszczyzny  $x = 0$ / i nieparzysty /pole antysymetryczne <sup>względem</sup> płaszczyzny  $x = 0$ /.

Przyjmijmy następującą postać pola  $H_y = H_y^{(j)}/j$ ,  $j = 1, 2$ :

$$/1/ H_y^{(i)}(x, z) = \int_{\zeta} A_j(\beta) \Psi_y^{(i)}(\beta, x) e^{i\beta z} d\beta$$

przy założonej reprezentacji składowej spektralnej pola typowej dla ośrodka dwuwarstwowego

$$/2/ \Psi_y^{(i)}(\beta, x) = \begin{cases} a_j(\beta) e^{i\Delta_j x} & d_j + \Delta_j \leq |x| \\ a_{\Delta_j}(\beta) e^{i\Delta_j x} + b_{\Delta_j}(\beta) e^{-i\Delta_j x} & d_j \leq |x| < d_j + \Delta_j \\ a_{d_j}(\beta) e^{i\alpha_j x} + b_{d_j}(\beta) e^{-i\alpha_j x} & |x| < d_j \end{cases}$$

gdzie zmienna całkowania  $\beta$  jest stałą propagacji składowej spektralnej pola, tzn. jest składową podłużną wektora propagacji  $\underline{k}$  ośrodka względem kierunku propagacji z. Kontur całkowania  $\zeta$  przebiega oś rzeczywistą płaszczyzny zespolonej  $\beta$

z odpowiednimi, później zdefiniowanymi, ominięciami punktów osobliwych funkcji podcałkowej /Rys.2/.

Pole elektromagnetyczne spełnia w warstwie przewodzącej i poza nią równanie Helmholtza:

$$/3a/ \quad [\nabla^2 + k^2] H_y^{(i)}(x, z) = 0 \quad |x| > d_j$$

$$/3b/ \quad [\nabla^2 + k^2 n_j^2] H_y^{(i)}(x, z) = 0 \quad |x| < d_j$$

warunki ciągłości składowych stycznych  $H_y$  i  $E_z$  na płaszczyźnie impedancyjnej i na powierzchni warstw przewodzących, jak również warunek wypromieniowania, zagwarantowany wyborem linii rozgałęzienia  $\text{Im } \alpha = 0$  i "fizycznego" płatu Riemanna zdefiniowanego przez

$$/4/ \quad \text{Im} [\alpha(\beta)] \geq 0$$

Wielkości  $\alpha$ ,  $\alpha_j$  odpowiadają składowym poprzecznym /w kierunku  $x$ / wektora falowego, odpowiednio dla otaczającego ośrodka  $x > d_j$  i warstwy przewodzącej  $x < d_j$ .

$$/5/ \quad \alpha(\beta) = \sqrt{k^2 - \beta^2}$$

$$/6/ \quad \alpha_j(\beta) = \sqrt{k^2 n_j^2 - \beta^2}$$

Nakładając na reprezentację  $\Psi$  /j/ warunek ciągłości dla  $x = d_j$ ,  $d_j + \Delta_j$ , zaś  $\sqrt{Z_j n_j^{-1}} \partial_x \Psi$  /y/ warunek ciągłości dla  $x = d_j$  otrzymujemy /z dokładnością do czynnika niezależnego od  $x$ /:

$$/7/ \quad \Psi_y^{(j)}(\beta, x) = \begin{cases} \xi_j(\beta, \Delta_j) e^{i\alpha x} & |x| \gg d_j + \Delta_j \\ \xi_j(\beta, x - d_j) e^{i\alpha(d_j + \Delta_j)} & d_j \leq |x| < d_j + \Delta_j \\ \lambda_j(\beta, x) e^{i\alpha(d_j + \Delta_j)} & |x| < d_j \end{cases}$$

gdzie

$$/8/ \quad \lambda_j(\beta, x) = \begin{cases} \cos \alpha_j x, & p \\ \alpha_j^{-1} \sin \alpha_j x, & n \end{cases}$$

$$\lambda_j \equiv \lambda_j(\beta, d_j)$$

$$/9/ \quad \varepsilon_j(\beta, x) = \lambda_j(\beta, d_j) (\cos \alpha x - i k \eta_j \alpha^{-1} \sin \alpha x)$$

$$\varepsilon_j \equiv \varepsilon_j(\beta, \Delta_j)$$

$$/10/ \quad \eta_j = \begin{cases} -i k^{-1} n_j^{-1} \lambda_j \alpha_j \operatorname{tg} \alpha_j d_j, & p \\ i k^{-1} n_j^{-1} \lambda_j \alpha_j \operatorname{ctg} \alpha_j d_j, & n \end{cases}$$

Dla dowolnego  $\beta$  składowa spektralna pola  $\Psi_y^{/j/}$  nie jest w ogólności ciągła na płaszczyźnie impedancyjnej. Warunek ciągłości narzucony dla  $x = d_j + \Delta_j$  na pole całkowite  $E_z$  daje następujący brzegowy warunek całkowy:

$$/11/ \quad \int_C \varepsilon_j \nu_j^{-1} e^{i \alpha \Delta_j} A_j(\beta) (\alpha + k \eta_{\Delta_j}) e^{i \beta z} d\beta = 0$$

gdzie

$$/12/ \quad \nu_j(\beta) = e^{-i \alpha d_j}$$

$$/13/ \quad \eta_{\Delta_j}(\beta) = -i \lambda_j \varepsilon_j^{-1} [\alpha \sin \alpha \Delta_j + i k \eta_j \cos \alpha \Delta_j]$$

Funkcja  $\eta_{\Delta_j}$  opisuje względną impedancję powierzchniową warstwy ograniczonej powierzchniami impedancyjnymi  $x = \pm/d_j + \Delta_j/$ , a równanie /11/ - impedancyjny warunek brzegowy na tej płaszczyźnie. Poprzez równania /8/ - /13/ wiąże on pole w obszarze



powyżej tej płaszczyzny z parametrami geometrycznymi i fizycznymi warstwy prowadzącej i umożliwia sformułowanie zagadnienia dyfrakcyjnego w półprzestrzeni  $x > d_j + \Delta_j$  /lub równoważnie w półprzestrzeni  $x < -d_j - \Delta_j$ /.

Gdy płaszczyzna impedancyjna pokrywa się z powierzchnią warstwy prowadzącej, otrzymujemy typową spektralną reprezentację podłużną pola dla struktury jednowarstwowej [6]

$$/14/ \quad \psi_j^{(i)}(\beta, x) = \begin{cases} \lambda_j(\beta, d_j) e^{i\alpha x} & |x| \geq d_j \\ \chi_j(\beta, x) e^{i\alpha d_j} & |x| < d_j \end{cases}$$

z odpowiednim całkowym warunkiem impedancyjnym

$$/15/ \quad \int_e A_j(\beta) \chi_j^{-1}(\alpha + k_{\eta_j}) e^{i\beta z} d\beta = 0$$

Na mocy tożsamości

$$/16/ \quad \xi_j(\alpha \pm k_{\eta_j}) = \lambda_j(\alpha \pm k_{\eta_j}) e^{\mp i\alpha \Delta_j}$$

równania /11/ i /15/ są identyczne, jednakże opisują one w ogólności różne sytuacje fizyczne, ponieważ amplitudy spektralne  $A_j$  występują w reprezentacji pola /1/ przy różnych składowych spektralnych pola  $\psi_j^{(i)}$  /patrz wzory /7/ i /15//.

W przeciwieństwie do impedancyjnych warunków brzegowych równania rezonansu poprzecznego [6] sformułowane na płaszczyźnie impedancyjnej

$$/17/ \quad \alpha + k_{\eta_j} = 0 \quad \beta = \pm \beta_{m_j}, \quad m_j = 0, 1, 2, \dots$$

i na powierzchni warstwy prowadzącej

$$/18/ \quad \alpha + k_{\eta_j} = 0 \quad \beta = \pm \beta_{m_j}, \quad m_j = 0, 1, 2, \dots$$

dają na mocy tożsamości /16/ identyczne rozwiązania  $\beta = \pm \beta_{m_j}$   $m_j = 0, 1, 2, 3, \dots$  na stałe propagacji modów dyskretnych falowodu 1 /j=1/ i falowodu 2 /j=2/. Rozwiązania równań rezonansu /17/ i /18/ można sklasyfikować ze względu na ich położenie

na jednym z dwu płatów Riemanna płaszczyzny zespolonej  $\beta$  [11]. Górny, fizyczny płat wyznaczony jest zazwyczaj poprzez warunek /4/ i linie rozgałęzienia  $J_1$  i  $J_2$ , biegnące od punktów rozgałęzienia  $\beta = \pm k$  do nieskończoności po konturach spełniających warunek  $\text{Im}/\alpha/ = 0$  /Rys.2/. Na tym płacie rozwiązania równania rezonansu są rzeczywiste i występują wyłącznie na odcinkach  $/k, kn_j/, /-kn_j, -k/$ , gdzie dla każdego rozwiązania  $\beta_{mj}$  istnieje również rozwiązanie  $-\beta_{mj}$  ( $\forall m, k=0$ ). Ze względu na tożsamość

$$/19/ (\alpha + k\eta_j)(\alpha - k\eta_j) = -(\beta - k\delta_j)(\beta + k\delta_j)$$

$$/20/ \delta_j(\beta) = \sqrt{1 - \eta_j^2(\beta)}, \quad \text{Re} [\delta_j(\beta)] > 0$$

równania rezonansu można zapisać w alternatywnej postaci

$$/21/ (\beta - k\delta_j(\beta))(\beta + k\delta_j(\beta)) = 0$$

gdzie pierwszy czynnik daje rozwiązania dodatnie, a drugi - rozwiązania ujemne. Ta ostatnia postać równania rezonansu okaże się szczególnie dogodna przy konstrukcji rozważanego problemu dyfrakcyjnego.

W celu uwzględnienia w polu całkowitym pola padającego /np. modu prowadzonego przez falowód 1, o amplitudzie  $a_1$  i stałej propagacji  $-\beta_{in}$ / uzupełnimy reprezentację /1/ o składnik dyskretny

$$/22/ H_y^{(i)}(x, z) = \int_{\mathcal{C}} A_j(\beta) \Psi_y^{(i)}(\beta, x) e^{i\beta z} d\beta + H_{y_{in}}^{(i)}(x, z)$$

$$/23/ H_{y_{in}}^{(i)}(x, z) = a_j \Psi_y^{(i)}(-\beta_{in}, x) e^{-i\beta_{in} z}$$

Analogiczne do poprzednich, rozważania prowadzą do impedancyjnych warunków brzegowych na powierzchni warstwy prowadzącej



$$/24/ \int_{\mathcal{E}} A_j \chi_j v_j^{-1} (\alpha + k\eta_j) e^{i\beta z} d\beta + a_j \chi_{j,in} v_{j,in}^{-1} (\alpha_{in} + k\eta_{j,in}) e^{-i\beta_{in} z} = 0$$

lub na powierzchni impedancyjnej dla  $\Delta_j \neq 0$

$$/25/ \int_{\mathcal{E}} A_j \delta_j v_j^{-1} (\alpha + k\eta_{\Delta_j}) e^{i(\beta z + \Delta_j)} d\beta + a_j \delta_{j,in} v_{j,in}^{-1} (\alpha_{in} + k\eta_{\Delta_j,in}) e^{-i\beta_{in} z} = 0$$

gdzie wskaźnik in oznacza podstawienie w danej funkcji za  $\beta$  wartości  $-\beta_{in}$ , np.:  $\chi_{j,in} = \chi_j / -\beta_{in}$ ,  $d_j /$ . Istotna jest tutaj możliwość przyjęcia niezerowego pola padającego  $/a_2 \neq 0/$  w obszarze falowodu 2. Choć pole padające, ze względu na przyjętą stałą propagacji charakterystyczną dla falowodu 1, w ogólności nie spełnia samodzielnie w tym obszarze warunków ciągłości dla  $x = d_j$ ,  $d_j + \Delta_j$ , to jednak na mocy /24/, /25/ pole całkowite te warunki spełnia. Nie byłoby to możliwe w przypadku zastosowania modowej /poprzecznej - w przeciwieństwie do podłużnej/ spektralnej reprezentacji pola.

### 3. Sformułowanie problemu dyfrakcyjnego

Rozpatrzmy zagadnienie rozpraszania modu, niekoniecznie podstawowego, prowadzonego przez falowód 1 w kierunku złącza. Impedacyjne warunki brzegowe na zadanej powierzchni impedancyjnej, wraz z warunkiem wypromieniowania i warunkiem na krawędzi pozwalają sformułować w tym przypadku problem dyfrakcyjny w obszarze ponad tą powierzchnią. Ponieważ dysponujemy różnymi reprezentacjami pola z prawej  $/z > 0$ ,  $j = 1/$  i z lewej  $/z < 0$ ,  $j = 2/$  strony nieciągłości falowodowej, powyższe warunki należy uzupełnić relacją wiążącą te reprezentacje w płaszczyźnie złącza. Naturalnym założeniem jest tutaj ciągłość składowych spektralnych pola w półpłaszczyźnie,  $z = 0$ ,  $x > d_j + \Delta_j$  co gwarantuje automatycznie ciągłość pola całkowitego i jego pochodnych w tej półpłaszczyźnie. Przyjmujemy to założenie tylko w obszarze leżącym ponad płaszczyzną impedancyjną, co wystarcza do rozwiązania zagadnienia dyfrakcyjnego przy pomocy



odpowiednio zmodyfikowanej metody Wienera-Hopfa-Hilberta.

Definiujemy pole padające w postaci /23/, gdzie stała propagacji  $-\beta_{in}$  stanowi rozwiązanie równania rezonansu dla falowodu 1

$$/26/ \quad \alpha(-\beta_{in}) + k\eta_1(-\beta_{in}) = 0, \quad \beta_{in} > 0$$

Ciągłość pola padającego w płaszczyźnie złącza dla  $x = d_j + \Delta_j$  daje warunek wiążący amplitudy  $a_1$  i  $a_2$ :

$$/27/ \quad a_1 z_{1in} = a_2 z_{2in}$$

Bez straty ogólności przyjmujemy również, że pole padające ma na powierzchni warstwy prowadzącej falowodu 1 amplitudę jednostkową /pobudzenie jednostkowe/. Stąd, na mocy /7/ otrzymujemy

$$/28/ \quad a_1 = v_{1in} z_{1in}^{-1} e^{-i\alpha_{in}\Delta_1}$$

$$/29/ \quad a_2 = v_{2in} z_{2in}^{-1} e^{-i\alpha_{in}\Delta_2}$$

Pole całkowite przyjmujemy w postaci /22/ sumy pola padającego i pola rozproszonego, gdzie szukanymi wielkościami są amplitudy spektralnego rozkładu  $A_1/\beta$  i  $A_2/\beta$ . Podobnie jak dla pola padającego nakładamy na nie w obszarze  $x > d_j + \Delta_j$  warunek ciągłości składowych spektralnych pola w płaszczyźnie złącza  $z = 0$ .

$$/30/ \quad A_1(\beta) z_1(\beta, \Delta_1) = A_2(\beta) z_2(\beta, \Delta_2)$$

Pole całkowite spełnia dla  $x \gg d_j + \Delta_j$   
i/ równanie Helmholtza: dla  $x > d_j + \Delta_j$ :

$$/31/ \quad [\nabla^2 + k^2] H_y^{(i)}(x, z) = 0$$

ii/ całkowite warunki impedancyjne na płaszczyźnie  $x = d_j + \Delta_j$ :  
dla  $z > 0$

$$/32/ \int_{\mathcal{C}} A_1 \alpha_1 v_1^{-1} e^{i\alpha \Delta_1} (\alpha + k\eta_{\Delta_1}) e^{i\beta z} d\beta = 0$$

dla  $z < 0$

$$/33/ \int_{\mathcal{C}} A_2 \alpha_2 v_2^{-1} e^{i\alpha \Delta_2} (\alpha + k\eta_{\Delta_2}) e^{i\beta z} d\beta + (\alpha_{in} + k\eta_{\Delta_2 in}) e^{-i\beta_{in} z} = 0$$

iii/ warunek wypromieniowania gwarantowany przez położenie konturu całkowania  $\mathcal{C}$  na górnym płacie Riemanna płaszczyzny zespolonej  $\beta$ ,

iiii/ warunek "na krawędzi" dla  $x = d_j + \Delta_j$

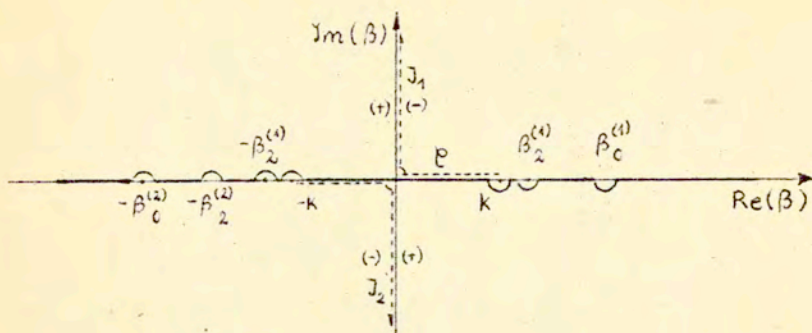
$$/34/ \partial_x H_y^{(i)}(x, x) = O(x^{-1+\mu}), \mu > 0$$

gdy  $z \rightarrow 0^+$  dla  $j = 1$  i  $z \rightarrow 0^-$  dla  $j = 2$ .

Kontur całkowania  $\mathcal{C}$ , przebiega oś rzeczywistą w płaszczyźnie zespolonej  $\beta$  z założonymi zgodnie z Rys.2 omięciami rozwiązań równania rezonansu /21/, tzn.: bieguny odpowiadające dodatnim rozwiązaniom /propagacja modów w dodatnim kierunku osi  $z$ / omija z dołu, bieguny odpowiadające rozwiązaniom ujemnym - z góry. Tak zdeterminowane położenie względem konturu  $\mathcal{C}$  rozwiązań równań rezonansu daje jasną fizyczną interpretację rozwiązania - propagacja modów pobudzonych w kierunku od płaszczyzny pobudzenia  $z = 0$ , z drugiej strony umożliwia rozwiązanie sformułowanego powyżej problemu dyfrakcyjnego. Na mocy tożsamości /16/ brzegowe warunki impedancyjne przyjmują postać:

dla  $z > 0$

$$/35/ \int_{\mathcal{C}} A_1 \alpha_1 v_1^{-1} (\alpha + k\eta_1) e^{i\beta z} d\beta = 0$$



Rys.2. Fizyczny płat Riemanna stałej propagacji  $\beta$  dla problemu dyfrakcji modu prowadzonego przez falowód 1 na złączu dwu falowodów otwartych; przypadek pobudzenia dwu modów parzystych w obu falowodach. Wskazane wyjątkowo bieguny występujące jako punkty osobliwe amplitud  $A_1/\beta$ ,  $A_2/\beta$ . Przypadek bezstraty  $\text{Im} k = 0$ .

$\mathcal{C}$  - kontur całkowania,

$\pm k$  - punkty rozgałęzienia,

$J_1, J_2$  - linie rozgałęzienia  $\text{Im} [ \alpha ] = 0$ ,

$\beta_{in} = -\beta_2^{(1)}$  - stała propagacji modu padającego /parzystego/,

$\beta_0^{(1)}, \beta_2^{(1)}$  - stałe propagacji modów pobudzonych w falow.1,

$\beta_0^{(2)}, \beta_2^{(2)}$  - stałe propagacji modów pobudzonych w falow.2.

dla  $z < 0$

$$\int_{\mathcal{C}} A_1 \lambda_1 v_1^{-1} (x + k \eta_1) e^{i\beta z} d\beta + \lambda_{2,in} z_{2,in}^{-1} e^{-i\alpha_{2,in} \Delta_2} (\alpha_{in} + k \eta_{2,in}) e^{-i\beta_{in} z} = 0$$

Przyjmijmy dla wyrażenia  $A_j \lambda_j v_j^{-1} / \alpha + k \eta_j$  zachowanie algebraiczne w nieskończoności, a dokładniej precyzując przyjmijmy, że wyrażenie to dla  $\beta \rightarrow +\infty$  / $j = 1$ / i dla  $\beta \rightarrow -\infty$  / $j = 2$ / szacowane jest pewną skończoną potęgą zmiennej  $\beta$ . Przyjęcie powyższego szacowania zgodne jest z warunkiem na krawędzi /iiii/ /patrz Dodatek/.



Stąd wynika, że równania algebraiczne, przy założonym położeniu bieguna pola padającego  $\beta = -\beta_{in}$  w obszarze poniżej  $\mathcal{C}$

$$/37/ \quad A_1 \lambda_1 v_1^{-1} (\alpha + k\eta_1) = U$$

$$/38/ \quad A_2 \lambda_2 v_2^{-1} (\alpha + k\eta_2) = L + L_{in}$$

stanowią warunek dostateczny na spełnienie równań całkowych /35/, /36/ przez nieznanne amplitudy  $A_1/\beta$  / ,  $A_2/\beta$  / , gdzie

$$/39/ \quad L_{in} = (\lambda_1 \pi i)^{-1} \lambda_{2,in}^{-1} e^{-i\alpha_{in} A_2} (\alpha_{in} + k\eta_{2,in}) (\beta + \beta_{in})^{-1}$$

a funkcje  $U/\beta$  / i  $L/\beta$  / są holomorficzne odpowiednio powyżej, poniżej konturu  $\mathcal{C}$  . Dowód przez podstawienie /37/, /38/ do /35/, /36/ i zamknięcie konturu  $\mathcal{C}$  w obszarze powyżej  $\mathcal{C}$  dla  $z > 0$  i poniżej  $\mathcal{C}$  dla  $z < 0$  /zamknięcie w nieskończoności/.

Z warunku ciągłości składowych spektralnych pola w płaszczyźnie złącza /30/ otrzymujemy niejednorodne równanie Wienera-Hopfa na szukane funkcje  $U/\beta$  / i  $L/\beta$  /.

$$/40/ \quad \frac{v_1 \lambda_2 (\alpha + k\eta_2)}{v_2 \lambda_1 (\alpha + k\eta_1)} U = L + L_{in}$$

Rozwiązanie tego równania wyznacza poprzez /37/, /38/ i /30/ amplitudy  $A_1$  i  $A_2$  co stanowi rozwiązanie rozważanego problemu dyfrakcyjnego. Zgodnie z metodą W-H-H [8] nie rozwiązujemy równania Wienera-Hopfa bezpośrednio, a w zamian sprawdzamy równanie /40/ do problemu Hilberta /zwanego też często problemem Riemanna [10] / na wybranym konturze i konstruujemy rozwiązanie tego problemu przy pomocy twierdzenia Plemelja-Sochockiego [10]. Wybór konturu dla problemu Hilberta nie jest jednoznaczny, jednakże rozwiązania otrzymane na dwu różnych konturach powinny być równoważne. Daje to możliwość weryfikacji poprawności procedury rozwiązania postawionego problemu.

W następnych rozdziałach sformułujemy dwa alternatywne problemy Hilberta na konturach  $J_1, J_2$ , będącymi liniami roz-

gałęzienia funkcji  $\alpha$  w płaszczyźnie zespolonej /Rys.2/, co implikuje zmianę znaku funkcji  $\alpha / \beta /$  przy ciągłym przejściu zmiennej  $\beta$  przez  $J_j$ . Wybór konturów  $J_j$  daje nam możliwość bezpośredniego, poprzez zmianę konturu całkowania, sprowadzenia otrzymanego rozwiązania do reprezentacji modowej pola, co więcej, są one szczególnie dogodne dla obliczeń numerycznych, ponieważ większość zespolonych wyrażeń, będących składowymi otrzymanego rozwiązania, przyjmuje na nich wartości rzeczywiste lub urojone.

Jawną postać rozwiązania otrzymamy następnie poprzez spełnienie warunku równoważności dwu alternatywnych rozwiązań zgodnych z warunkami ciągłości pola w płaszczyźnie złącza /27/, /30/ i warunkiem na krawędzi /34/.

Należy zaznaczyć, że wyprowadzając równanie Wienera-Hopfa /40/ ustaliliśmy jednoznacznie położenie rozwiązań  $\pm \beta_{mj}$  równania rezonansu względem konturu całkowania  $\tilde{c}$ . Położenie zer funkcji  $\lambda_j, \delta_j$  względem  $\tilde{c}$  jest jak na razie dowolne i zostanie w miarę potrzeb ustalone w toku dalszej procedury konstrukcji rozwiązania.

#### 4. Problem Hilberta na konturze $J_2$

W celu sformułowania problemu Hilberta na konturze  $J_2$ , gdzie za dodatni kierunek przyjmujemy przejście od  $-k$  do  $-i \infty$ , poszukujemy funkcji  $V$  o wartościach różnych od zera, holomorficznnej w całej płaszczyźnie zespolonej  $\beta$  oprócz konturu  $J_2$ , na którym funkcja  $V$  jest nieciągła i również różna od zera. Rolę funkcji  $V$  nie może spełniać występująca w równaniu Wienera-Hopfa /40/ funkcja  $U$ , ponieważ, jak wynika z /40/ jest ona poniżej  $\tilde{c}$  osobliwa w  $\beta = -\beta_{mj}, -\beta_{in}$ , jak również w leżących poniżej  $\tilde{c}$  zerach funkcji  $\delta_2$ . Wprowadźmy dodatkowo nie wiadomą funkcję  $g$ , oraz holomorficzną i różną od zera w płaszczyźnie  $\beta$  oprócz, być może, punktów wyznaczonych przez zera funkcji  $\lambda_j, \delta_j$ . Istotny w dalszych rozważaniach jest fakt istnienia biegunów pierwszego rzędu funkcji  $\varrho_j, \delta_j$  w zerach funkcji  $\lambda_j$ .

Przyjmując



$$/41/ \quad U = \frac{(\beta + k\check{\sigma}_1)qV}{(\beta + k\check{\sigma}_2)(\beta + \beta_{in})}$$

i podstawiając do /40/

$$/42/ \quad L + L_{in} = \frac{v_1 \check{\sigma}_1 \lambda_2 (\beta + k\check{\sigma}_1)(\alpha + k\check{\sigma}_2) qV}{v_2 \check{\sigma}_2 \lambda_1 (\beta + k\check{\sigma}_2)(\alpha + k\check{\sigma}_1)(\beta + \beta_{in})}$$

otrzymujemy nową, dogodną do analizy postać równania Wienera-Hopfa. Wyprowadzmy z równań /41/, /42/ warunki na własności analityczne funkcji  $g$ , zapewniające zgodność własności analitycznych funkcji  $U$ ,  $V$  i  $L$  w tych równaniach. Dodatkowo zera wyrażań  $\alpha + k\check{\sigma}_j$  występujących w /42/ leżą z założenia /Rys.2/ powyżej  $\check{\zeta}$  i stąd nie narzucają warunków na funkcję  $g$ , zera o ujemnej wartości likwidowane są w /42/ przez wyrażenia  $\beta + k\check{\sigma}_j$ . Ponieważ  $L$  jest holomorficzna w  $\beta = -\beta_{in}$  z /42/ otrzymujemy:

$$/43/ \quad L(\beta)(\beta + \beta_{in}) = 0 \quad \text{dla } \beta = -\beta_{in}$$

Uwzględniając istnienie biegunów funkcji  $\check{\sigma}_j$  w zerach funkcji  $\lambda_j$  z /41/ otrzymujemy pierwszy warunek na funkcję  $g$

$$/44a/ \quad g \lambda_2 / \lambda_1 - \text{holomorficzna w obszarze powyżej } \check{\zeta}$$

Ponieważ następnym krokiem procedury rozwiązania jest obliczanie logarytmu z obu stron równania /42/, funkcja  $g$  powinna w /42/ likwidować wszystkie osobliwości pochodzące od zer funkcji

$\check{\sigma}_j / \lambda_j$  i leżące poniżej  $\check{\zeta}$ . Stąd otrzymujemy drugi warunek na funkcję  $g$ :

$$/44b/ \quad g \frac{\check{\sigma}_1 \lambda_2}{\check{\sigma}_2 \lambda_1} - \text{holomorficzna w obszarze poniżej } \check{\zeta}$$

Powyżej  $\check{\zeta}$ , gdzie funkcja  $L$  nie ma ustalonych własności analitycznych, wspomniane osobliwości determinują zachowanie się funkcji  $L$ .

Obliczając następnie logarytm naturalny z obu stron równania /42/ i przechodząc z nimi do granicy z lewej  $/+ /$  i z prawej  $/- /$  strony konturu  $J_2$  otrzymujemy:



$$/45a/ \quad [\ln V(t)]^+ - [\ln V(t)]^- = \ln H(t), \quad t \in J_2$$

gdzie na  $J_2$  przyjęto  $\alpha = \alpha^+ = -\alpha^-$  oraz

$$/46/ \quad H = \frac{v_2^2 (\alpha + k\eta_1)(\alpha - k\eta_2)}{v_1^2 (\alpha + k\eta_2)(\alpha - k\eta_1)}$$

przy ustalonej gałęzi logarytmu równanie /45a/ jest równoważne następującemu problemowi Hilberta na  $J_2$ :

$$/45b/ \quad V(t) = H(t)V^-(t), \quad t \in J_2$$

Rozwiązanie równania /45/ można przedstawić w postaci [10]

$$/47/ \quad V(\beta) = w_m(\beta) \sum_n c_n (\beta + k)^n e^{Q(\beta)}$$

gdzie

$$/48/ \quad Q(\beta) = (2\pi i)^{-1} \int_{J_2} \ln H(t) \frac{dt}{t-\beta}$$

a  $w_m$  jest wielomianem stopnia  $m$ . Występowanie wielomianu  $w_m$  i wyrażen  $\beta + k^n$  gwarantuje, poprzez odpowiedni dobór liczb całkowitych  $m$  i  $n$ , spełnienie warunku na krawędzi /34/ przy jednoczesnym zapewnieniu całkowalności wyrażen podcałkowych /w otoczeniu  $\pm k$ / w reprezentacji pola /22/. Korzystając z wyników dalszych rozważań /patrz Dodatek/ przyjmujemy  $m = 0$ ,  $n=0$ . Stąd funkcja

$$/49/ \quad V(\beta) = c e^{Q(\beta)}$$

stanowi rozwiązanie jednorodnego problemu Hilberta /45/, gdzie stała  $c$  wyznaczona jest jednoznacznie przez warunek /43/

$$/50/ \quad c = \frac{-\lambda_{1in} \beta_{in} (\beta_{in} - k\delta_{2in}) - i \alpha_{in} \Delta_1 - Q(-\beta_{in})}{2\pi i \delta_{1in} \alpha_{in} g_{in}} e$$

Następnie z /41/, /37/, /30/ otrzymujemy wyrażenia na szukane amplitudy  $A_1$  i  $A_2$ :

$$/51/ \quad A_1 = - \frac{v_1 g(\alpha - k\eta_1) V}{\lambda_1 (\beta + k\delta_2)(\beta - k\delta_1)(\beta + \beta_{in})}$$

$$/52/ \quad A_2 = - \frac{\delta_1 v_1 g(\alpha - k\eta_1) V}{\delta_2 \lambda_1 (\beta + k\delta_2)(\beta - k\delta_1)(\beta + \beta_{in})}$$

Występująca we wzorach /50/ - /52/ niewiadoma funkcja  $g$  zostanie wyznaczona w dalszej części pracy.

### 5. Problem Hilberta na konturze $J_1$

Podobnie jak w Rozdziale 4 dla konturu  $J_2$  możemy skonstruować problem Hilberta na konturze  $J_1$ , gdzie szukana teraz nowa, różna od zera funkcja  $L$  jest holomorphyzna w całej płaszczyźnie  $\beta$  oprócz konturu  $J_1$ , na którym doznaje nieciągłości. Wprowadzamy nieznaną funkcję  $\tilde{g}$  i holomorphyzną wszędzie oprócz, być może, zer funkcji  $\lambda_j$  i  $\delta_j$ , a następnie wiążemy funkcje  $L$  i  $L_{in}$  poprzez równanie

$$/53/ \quad L + L_{in} = \frac{(\beta - k\delta_2) \tilde{g} t}{(\beta - k\delta_1)(\beta + \beta_{in})}$$

które po podstawieniu do /40/ daje nową postać równania Wienera-Hopfa

$$/54/ \quad U = \frac{v_2 \delta_2 \lambda_1 (\beta - k\delta_2)(\alpha + k\eta_1) \tilde{g} t}{v_1 \delta_1 \lambda_2 (\beta - k\delta_1)(\alpha + k\eta_2)(\beta + \beta_{in})}$$

Rozumowanie analogiczne do przedstawionego w Rozdziale 4 dla funkcji  $g$  prowadzi do następujących warunków na funkcję  $\tilde{g}$ :

$$/55a/ \quad \tilde{g} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \text{holomorphyzna w obszarze poniżej } \mathcal{C}$$

$$/55b/ \quad \tilde{g} \frac{\delta_2 \lambda_1}{\delta_1 \lambda_2} - \text{holomorphyzna w obszarze powyżej } \mathcal{C}$$

Logarytmując obie strony równania /54/ i przechodząc do granicy lewo i prawostronnej na konturze  $J_1$  otrzymujemy nowy problem Hilberta na  $J_1$ :

$$/56/ \quad [\ln \pm(t)]^+ - [\ln \pm(t)]^- = -\ln H(t), \quad t \in \mathcal{Y}_1$$

którego rozwiązaniem, po uwzględnieniu warunku na krawędzi /patrz Dodatek/ jest funkcja

$$/57/ \quad \pm(\beta) = \tilde{c} e^{\tilde{Q}(\beta)}$$

gdzie

$$/58/ \quad \tilde{Q}(\beta) = - (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} \ln H(t) \frac{dt}{t-\beta}$$

Równanie /53/ narzuca również spełnienie warunku /43/, co w wyniku daje wartość stałej

$$/59/ \quad \tilde{c} = - \frac{\lambda_{2in} \beta_{in} (\beta_{in} - k\check{\alpha}_{2in})}{\pi i \delta_{2in} \tilde{g}_{in} (\alpha_{in} - k\eta_{2in})} e^{-i\alpha_{in} \Delta_2 - \tilde{Q}(-\beta_{in})}$$

Ostatecznie z /53/, /38/, /30/ otrzymujemy

$$/60/ \quad A_2 = - \frac{v_2 \tilde{g} (\alpha - k\eta_2) t}{\lambda_2 (\beta + k\check{\alpha}_2) (\beta - k\check{\alpha}_1) (\beta + \beta_{in})}$$

$$/61/ \quad A_1 = - \frac{\delta_1 v_2 \tilde{g} (\alpha - k\eta_2) t}{\lambda_2 (\beta + k\check{\alpha}_2) (\beta - k\check{\alpha}_1) (\beta + \beta_{in})}$$

Przedstawione wzorami /51/, /60/ amplitudy  $A_1$ ,  $A_2$  dają formalne rozwiązanie rozpatrywanego problemu dyfrakcyjnego gdzie jedynymi niewiadomymi wielkościami pozostają funkcje  $g$  i  $\tilde{g}$ .

Z porównania dwu alternatywnych wyrażeń na  $A_1$  i  $A_2$  /51/, /60/ i /52/, /61/ otrzymujemy dalszy warunek na funkcje  $g$  i  $\tilde{g}$

$$/62/ \quad g v_1 \delta_1 \lambda_1^{-1} (\alpha - k\eta_1) V = \tilde{g} v_2 \delta_2 \lambda_2^{-1} (\alpha - k\eta_2) t$$

co przy uwzględnieniu /49/, /57/ jest równoważne warunkom



$$/63a/ \quad c = \tilde{c}$$

oraz

$$/63b/ \quad g v_1 \delta_1 \lambda_1^{-1} (\alpha - k\eta_1) e^{\alpha} = \tilde{g} \tilde{v}_2 \tilde{\delta}_2 \lambda_2^{-1} (\alpha - k\eta_2) e^{\tilde{\alpha}}$$

Jawną postać  $g$  i  $\tilde{g}$  otrzymamy po dokładniejszym zbadaniu własności funkcji  $Q$  i  $\tilde{Q}$ .

### 6. Współczynniki odbicia i transmisji, straty na złączu

Aby obliczyć amplitudy modów prowadzonych i pole promieniowania na złączu dokonujemy przejścia od dotychczas używanej spektralnej reprezentacji podłużnej do modowej reprezentacji pola. W tym celu zamykamy kontur całkowania  $\tilde{C}$  półokręgiem o nieskończonym promieniu w górnej półpłaszczyźnie  $\text{Im } \beta > 0$  dla falowodu 1 i w dolnej - dla falowodu 2, z odpowiednimi obejściami konturów  $J_1$  i  $J_2$  [7]. Z warunku na krawędzi /patrz Dodatek/ wynika zerowanie się wkładów do całek pochodzących od półokręgów, z twierdzenia o rezydualach otrzymujemy człony dyskretne w reprezentacji poprzecznej, odpowiadające modom prowadzonym o stałych propagacji  $\beta_{mj}$  [11].

Ponieważ wartości wyrażeń  $A_j / \alpha - k\eta_{\Delta j}^{-1}$  nie doznają nieciągłości przy przejściu zmiennej  $\beta$  przez kontur  $J_j$ , tzn. ponieważ zachodzi

$$/64/ \quad [A_j (\alpha - k\eta_{\Delta j})^{-1}]^+ = [A_j (\alpha - k\eta_{\Delta j})^{-1}]^-$$

całki wokół konturów  $J_j$  możemy zamienić na całki po konturach  $J_j$ , co daje wkład do całki wyłącznie od antysymetrycznych - względem zmiany znaku  $\alpha$  - części wyrażeń

$$(\alpha - k\eta_{\Delta j}) \Psi_y^{(j)}(\beta, x) e^{\beta z}$$

Ostatecznie otrzymujemy:  
dla falowodu 1,  $z > 0$

$$\begin{aligned}
 /65/ \quad H_y^{(1)}(x, z) &= \Psi_1(-\beta_{1n}, x) e^{-i\beta_{1n}z} \\
 &+ \sum_{m_1} p_{m_1} \lambda_1^{-1}(\beta_{m_1}) e^{-i\alpha(\beta_{m_1})(d_1 + \Delta_1) + i\beta_{m_1}z} \Psi_y^{(1)}(\beta, x) \\
 &- 2 \int_{\eta_1} A_1 z_1 \lambda_1^{-1}(\alpha - k\eta_1)^{-1} e^{-i\alpha\Delta_1 + i\beta z} \Psi_{1y}^{(m)}(\beta, x) d\beta
 \end{aligned}$$

dla falowodu 2,  $z < 0$

$$\begin{aligned}
 /66/ \quad H_y^{(2)}(x, z) &= \\
 &\sum_{m_2} p_{m_2} \lambda_2^{-1}(-\beta_{m_2}) e^{-i\alpha(-\beta_{m_2})(d_2 + \Delta_2) - i\beta_{m_2}z} \Psi_y^{(2)}(\beta, x) \\
 &+ 2 \int_{\eta_2} A_2 z_2 \lambda_2^{-1}(\alpha - k\eta_2)^{-1} e^{-i\alpha\Delta_2 + i\beta z} \Psi_{2y}^{(m)}(\beta, x) d\beta
 \end{aligned}$$

W reprezentacji modowej dla falowodu 1 występują kolejno:

mod padający o amplitudzie równej 1, pobudzone na złączu mody odbite o amplitudach  $p_{m_1}$  /na powierzchni warstwy prowadzącej/ i stałych propagacji  $\beta_{m_1}$  oraz pole promieniowania w postaci całki z modów promieniowania  $\Psi_{1y}^{(m)}(\beta, x) \exp[i\beta z]$  z amplitudą /gęstością amplitudową/  $Z_1 A_1 \lambda_1^{-1} / \alpha - k \eta_1 /^{-1}$ .

Dla falowodu 2 pole padające zgodnie z oczekiwaniami już nie występuje; pole całkowite równa się sumie pobudzonych na złączu modów prowadzonych o amplitudach  $p_{m_2}$  i stałych propagacji  $-\beta_{m_2}$  i całki z modów promieniowania  $\Psi_{2y}^{(m)}(\beta, x) \exp[i\beta z]$  z amplitudą  $2 A_2 \lambda_2^{-1} / \alpha - k \eta_2 /^{-1}$ .

Z reprezentacji /7/, z uwzględnieniem tożsamości /16/ i własności amplitud  $A_j$  /64/ otrzymujemy

$$/67/ \quad \Psi_{1j}^{(u)}(\beta, x) = \begin{cases} z_j(\beta, x + \Delta_j) & |x| \geq d_j + \Delta_j \\ z_j(\beta, x - d_j) z_j(\beta, d_j + 2\Delta_j) z_j^{-1}(\beta, \Delta_j) & d_j \leq |x| < d_j + \Delta_j \\ z_j(\beta, x) z_j(\beta, d_j + 2\Delta_j) z_j^{-1}(\beta, \Delta_j) & |x| < d_j \end{cases}$$

Obliczając residua funkcji podcałkowej reprezentacji podłużnej /22/ w punktach  $\beta = \beta_{m1}$ ,  $-\beta_{m2}$  z /51/ i /60/ otrzymujemy amplitudowe współczynniki odbicia  $p_{m1}$  i transmisji  $p_{m2}$  na złączu:

$$/68/ \quad p_{m1} = -e^{-\frac{4\pi i q_1(\beta_{m1}) \lambda_1(\beta_{m1}) \alpha_{m1} e^{i\alpha_{m1}\Delta_1 + Q(\beta_{m1})}}{\lambda_2(\beta_{m1}) [L\beta_{m1} + k\delta_2(\beta_{m1})] [1 - k\delta_1'(\beta_{m1})] [L\beta_{m1} + \beta_{in}]}}$$

$$/69/ \quad p_{m2} = -\tilde{e}^{-\frac{4\pi i q_2(-\beta_{m2}) \lambda_2(-\beta_{m2}) \alpha_{m2} e^{i\alpha_{m2}\Delta_2 - Q(\beta_{m2})}}{\lambda_1(-\beta_{m2}) [1 + k\delta_2'(-\beta_{m2})] [L\beta_{m2} + k\delta_1(-\beta_{m2})] [L-\beta_{m2} + \beta_{in}]}}$$

gdzie  $\alpha_{mj} = \alpha(\beta_{mj})$ ,  $\delta_j' = (a/\alpha\beta) \delta_j$

Średnią w czasie wartość strumienia mocy  $P_{mj}$  niesioną przez mod o stałej propagacji  $\beta_{mj}$ , prowadzony przez falowód o umownej szerokości jednostkowej otrzymujemy całkując po przekroju poprzecznym falowodu składową z wektora Poyntinga

$$/70/ \quad P_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\underline{E} \times \underline{H}^*)_z dx$$

Stąd uwzględniając /7/, /18/, /65/, /68/ otrzymujemy dla pobudzonych na złączu modów o stałej propagacji  $\beta_{mj}$

$$/71a/ \quad P_{mj} = |p_{mj}|^2 \frac{\lambda_0 \beta}{2k x_j^2 \alpha} [-i x_j^2 \alpha d_j (c_j - c_j^{-1}) + k^2 (n_j^2 - 1) (1 - i c_j^{-1} \alpha_j d_j)]$$



i dla modu padającego

$$/71b/ \quad P_{in} = P_{m_j}; \quad j = 1, \quad \beta = -\beta_n$$

gdzie  $c_j = \chi_j / n_j$ , a  $\chi_0$  stanowi impedancję charakterystyczną ośrodka na zewnątrz warstw prowadzących.

Z zasady zachowania energii różnica pomiędzy mocą niesioną przez mod padający i sumaryczną mocą niesioną przez mody pobudzone w obu falowodach daje w wyniku straty na złączu równe średniej mocy pola promieniowania  $P_{rad}$ .

$$/72/ \quad P_{rad} = P_{in} - \sum_{j=1}^2 \sum_{m_j} P_{m_j}$$

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że wyprowadzone powyżej zależności są słuszne w przypadku jednoznaczności otrzymanego rozwiązania. W przypadku przeciwnym, gdy pole całkowite składa się np. z sumy tego typu rozwiązań, w wyrażeniach /64-69/ również występują sumy po poszczególnych rozwiązaniach. Zależności energetyczne /71/, /72/, ze względu na występujące kwadraty amplitud, powinny być poddane weryfikacji pod kątem spełnienia przez zbiór rozwiązań własności ortogonalności. W każdym jednak przypadku zależności zawarte w powyższym rozdziale stanowią właściwy punkt wyjścia do weryfikacji numerycznej otrzymanego rozwiązania.

## 7. Własności funkcji $Q$ i $\tilde{Q}$

Z definicji funkcji  $Q$  i  $\tilde{Q}$  /48/ i /58/ wynika, poprzez zmianę zmiennej całkowania  $t$  na  $-t$ , możliwość wyrażenia jednej z nich przez drugą:

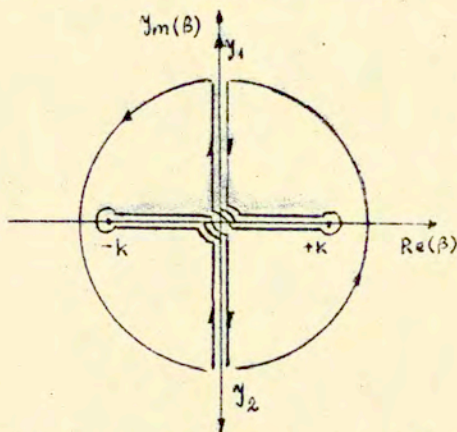
$$/73/ \quad \tilde{Q}(\beta) = -Q(-\beta)$$

Aby oszacować zachowanie tych funkcji w nieskończoności, co jest niezbędne przy wykorzystaniu warunku na krawędzi i konieczne do wyznaczenia ostatecznej postaci funkcji  $V$ ,  $L$ ,  $g$  i

$\tilde{g}$ , należy wyznaczyć jeszcze jedną, niezależną od poprzedniej tożsamość. W tym celu obliczmy całkę Cauchy'ego

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \ln \left[ \frac{\psi_2(\alpha + k\eta_1) \lambda_1 \prod_{m_2} (\beta^2 - \beta_{m_2}^2)}{\psi_1(\alpha + k\eta_2) \lambda_2 \prod_{m_1} (\beta^2 - \beta_{m_1}^2)} \right] \frac{d\beta}{t - \beta}$$

po konturze zamkniętym zdefiniowanym na Rys.3, gdzie  $\beta$



Rys.3. Kontur całkowania w dowodzie tożsamości /74/

leży poza liniami rozgałęzienia  $J_1$  i  $J_2$ . Obejście konturu całkowania dookoła  $J_j$  daje w wyniku całkowania funkcje  $Q$  i  $\bar{Q}$ , wartość całki po dużym okręgu o promieniu  $R$  dąży do zera gdy  $R$  dąży do nieskończoności, ponieważ jednocześnie funkcja podcałkowa zbiega do funkcji nieparzystej względem zmiany znaku zmiennej całkowania. Z ograniczoności funkcji podcałkowej w punktach rozgałęzienia  $\pm k$  wynika zerowanie się wkładów do całki pochodzących od całkowania po konturach wokół otoczeń tych punktów przy dążeniu z promieniami tych otoczeń do zera. Jednocześnie zera funkcji  $\lambda_j(\alpha + k\eta_j)$  kompensowane są przez zera iloczynów  $\prod_{m_j} (\beta^2 - \beta_{m_j}^2)$ . Wobec powyższego, z twierdzenia o rezydualach otrzymujemy:

$$/74/ \quad \frac{v_1 \prod_{m_1} (\beta^2 - \beta_{m_1}^2)}{\lambda_1 (\alpha + k\eta_1)} e^{Q(\beta)} = \frac{v_2 \prod_{m_2} (\beta^2 - \beta_{m_2}^2)}{\lambda_2 (\alpha + k\eta_2)} e^{\tilde{Q}(\beta)}$$

Wykorzystajmy następnie tożsamości /73/, /74/ do oszacowania zachowania się funkcji  $Q$  i  $\tilde{Q}$  w nieskończoności. W tym celu sformułujemy pomocniczy problem brzegowy na konturze  $\mathcal{C}$

$$/75/ \quad \phi^+(t) - \phi^-(t) = \psi(t)$$

gdzie funkcja  $\phi$  jest holomorficzną powyżej i poniżej  $\mathcal{C}$  i nieciągła na  $\mathcal{C}$  o skoku

$$/76/ \quad \psi = \ln \frac{v_2 \lambda_1 (\alpha + k\eta_1) \prod_{m_2} (\beta^2 - \beta_{m_2}^2)}{v_1 \lambda_2 (\alpha + k\eta_2) \prod_{m_1} (\beta^2 - \beta_{m_1}^2)}$$

Z /76/ wnosimy, że funkcja  $\psi$  ma skończoną granicę w nieskończoności na konturze  $\mathcal{C}$  równą  $\ln/1+Z_1/n_1/ - \ln/1+Z_2/n_2/$ . Rozwiązanie problemu brzegowego /75/ wyrażamy przy pomocy tożsamości /74/ poprzez funkcje  $Q$  i  $\tilde{Q}$ :

$$/77/ \quad \phi(\beta) = \begin{cases} Q(\beta), & \Im \beta > 0 \\ \tilde{Q}(\beta), & \Im \beta < 0 \end{cases}$$

Ponieważ, [10]:

$$/78/ \quad \phi^+(\infty) = \frac{1}{2} \psi(\infty)$$

$$/79/ \quad \phi^-(\infty) = -\frac{1}{2} \psi(\infty)$$

z /73/, /77/ otrzymujemy:



$$/80/ \quad e^{\tilde{Q}(\beta)} = \sqrt{\frac{1+c_1}{1+c_2}} \beta^{M_2-M_1} \quad \text{gd}y \quad \beta \longrightarrow \pm \infty$$

$$/81/ \quad e^{\tilde{Q}(\beta)} = \sqrt{\frac{1+c_2}{1+c_1}} \beta^{M_1-M_2} \quad \text{gd}y \quad \beta \longrightarrow \pm \infty$$

gdzie  $M_1, M_2$  oznaczają ilość modów pobudzanych odpowiednio w falowodzie 1, 2.

Warta komentarza jest również kwestia zbieżności całek  $Q$  i  $\tilde{Q}$ . Postać funkcji  $H/t/$ , występująca jako składnik funkcji podcałkowych całek Cauchy'ego /48/, /58/, jest niewygodna w obliczeniach numerycznych, ponieważ wartości tej funkcji w ogólności nie ograniczają się do zakresu wartości głównej logarytmu. Jednakże, korzystając z tożsamości

$$/82/ \quad 2i \operatorname{arctg} x = \ln \frac{1+ix}{1-ix}$$

można funkcję  $\ln H/t/$  sprowadzić do prostszej postaci:

$$/83/ \quad \ln H(t) = h_1(t) - h_2(t)$$

gdzie

$$/84/ \quad h_j(t) = 2 [d_j(\alpha - x_j) - \psi_j]$$

$$/85/ \quad \psi_j = \operatorname{arctg} \begin{cases} \frac{(c_j x_j - \alpha) \sin x_j d_j \cos x_j d_j}{\alpha \cos^2 x_j d_j + c_j x_j \sin^2 x_j d_j}, & p \\ \frac{(\alpha - c_j x_j) \sin x_j d_j \cos x_j d_j}{c_j x_j \cos^2 x_j d_j + \alpha \sin^2 x_j d_j}, & n \end{cases}$$

i argument arcusa tangensa występującego w /85/ nie wykracza już poza zakres jego wartości głównej. Z /83/ - /85/ wynika brak osobliwości w wyrażeniach podcałkowych całek Cauchy'ego  $Q$  i  $\tilde{Q}$ , a oscylacyjny charakter funkcji  $\psi_j$  w nieskończoności zapewnia warunkową zbieżność tych całek na konturach  $J_1, J_2$ .

### 8. Wyznaczenie funkcji $g$ i $\tilde{g}$

W celu wyznaczenia funkcji  $g$  i  $\tilde{g}$  podzielmy stronami równanie /63/ przez tożsamość /74/. W wyniku otrzymamy

$$/86/ \quad g z_1 \frac{\beta^2 - k^2 \delta_1^2}{\prod_{m_1} (\beta^2 - \beta_{m_1}^2)} = \tilde{g} z_2 \frac{\beta^2 - k^2 \delta_2^2}{\prod_{m_2} (\beta^2 - \beta_{m_2}^2)}$$

Z tożsamości /86/, z równań /41/, /42/, /53/, /54/, a w szczególności z warunków analityczności funkcji  $g$  i  $\tilde{g}$  wyznaczamy ich postać

$$/87/ \quad g = \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^l \frac{\beta + k \delta_2}{\beta + k \delta_1} \frac{\prod_{m_1} (\beta + \beta_{m_1})}{\prod_{m_2} (\beta + \beta_{m_2})}$$

$$/88/ \quad \tilde{g} = \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{l-1} \frac{\beta - k \delta_1}{\beta - k \delta_2} \frac{\prod_{m_2} (\beta - \beta_{m_2})}{\prod_{m_1} (\beta - \beta_{m_1})}$$

gdzie dopuszczalne są tylko dwie wartości liczby całkowitej  $l$ ;  $l = 1, 0$ . Dla  $l = 0$  należy przyjąć, dotąd nie sprecyzowane, położenie zer funkcji  $z_2$  powyżej konturu  $\xi$ , a dla  $l = 1$  odpowiednio położenie zer funkcji  $z_1$  poniżej  $\xi$ . Inne wartości  $l$  prowadzą do sprzeczności we własnościach analitycznych funkcji występujących w równaniach /41/, /42/ lub /53/, /54/. Położenie zer funkcji  $z_j$  jest zgodne z warunkami zapewniającymi równoważność w sensie otrzymania tych samych równań Wienera-Hopfa /40// reprezentacji /7/ i bardziej ogólnej



reprezentacji użytej w pracy [6]. Ta ostatnia reprezentacja została wprawdzie przyjęta dla prostszego przypadku jednakowych grubości falowodów, ale bez założonej a priori ciągłości składowych spektralnych pola  $H_y$  na poziomie płaszczyzny impedancyjnej. Z porównania przedstawionych w obu pracach procedur konstrukcji rozwiązania wynika, że sformułowanie problemu Hilberta na jednym tylko konturze, np.  $J_2$  dopuszcza szerszą klasę rozwiązań niż równoległe sformułowanie dwu problemów na dwu różnych konturach. Problem ten wymaga głębszej analizy w kontekście jednoznaczności sformułowania rozważanego problemu dyfrakcyjnego.

Ponieważ istnieją co najmniej dwa rozwiązania na funkcje  $g$  i  $\tilde{g}$ , to również istnieją co najmniej dwa rozwiązania problemu. Tak więc, nie wchodząc w dalsze rozważania na temat możliwości otrzymania innych reprezentacji funkcji  $g$  i  $\tilde{g}$  można stwierdzić, że otrzymane na tym etapie badań rozwiązanie jest niejednoznaczne i, jak się wydaje, wymaga uwzględnienia - dotąd nie wykorzystanego - warunku ciągłości składowych stycznych pola w płaszczyźnie złącza  $z = 0$  dla  $|x| < d_j + \Delta_j$ .

## 9. Wnioski końcowe

Przeprowadzona analiza pracy złącza dwu falowodów otwartych przy pomocy metody impedancji powierzchniowych wskazuje na jej potencjalną przydatność w analizie tego typu problemów falowodowych. Otrzymano mianowicie efektywne rozwiązanie postawionego problemu dyfrakcyjnego, to znaczy wielkości fizyczne o znaczeniu praktycznym takie jak współczynniki odbicia i transmisji na złączu przedstawione są za pomocą wyrażeń złożonych z funkcji elementarnych i całki  $Q$ , która, choć wolno zbieżna, poddaje się obróbce numerycznej. Poza tym metoda jest na tyle ogólna, że można przy jej pomocy analizować nieciągłości wywołane zarówno skokową zmianą /wzdłuż osi  $z$ / współczynnika załamania czy też impedancji charakterystycznej warstwy prowadzącej, jak również skokową zmianą grubości warstwy prowadzącej falowodów jednowarstwowych i jak się wydaje - również wielowarstwowych /patrz reprezentacja pola /7/ i /67//.



Należy podkreślić, że istotnym elementem tej pracy jest otrzymanie rozwiązań Wienera-Hopfa /40/ w postaci analitycznych wyrażeń /51/, /60/, co równoważne jest nie znanej dotychczas /patrz [4,5]/ efektywnej faktoryzacji tego równania.

Jednakże otrzymane rozwiązanie nie jest jednoznaczne i to nie tylko ze względu na dowolność, choć ograniczoną, wyboru funkcji  $g$  /87/, ale również na zależność otrzymanego rozwiązania od położenia - tutaj arbitralnie wybranego dobozem wartości  $\Delta_j$  - płaszczyzny impedancyjnej, co wynika z analizy wyrażenia  $A_j \frac{y}{y}$  /j/ określonego wzorami /51/, /60/ i /7/. Wynika stąd, że przedstawiona metoda wymaga uzupełnienia polegającego na nałożeniu na rozwiązanie warunku ciągłości składowych stycznych pola w płaszczyźnie złącza pomiędzy płaszczyznami impedancyjnymi  $|x| < d_j + \Delta_j$ , który to warunek nie był, przy obecnym sformułowaniu problemu, wykorzystywany. Narzuca to konieczność analizy w otoczeniu złącza pola całkowitego jako superpozycji poszczególnych wyprowadzonych tu rozwiązań "kanonicznych". Taka analiza powinna jednoznacznie określić postać rozwiązania otrzymanego przedstawioną tu metodą lub sprecyzować procedurę syntezy pola całkowitego z tych rozwiązań.

#### Dodatek

##### Warunek na krawędzi

Z warunku na krawędzi /34/ wynika [12] oszacowanie na amplitudy  $A_j$ :

$$/D1/ \quad A_j(\beta) = O(\beta^{-1-\mu}), \quad \mu > 0$$

$$\text{gdy } \beta \rightarrow +\infty \text{ dla } j=1, \quad \beta \rightarrow -\infty \text{ dla } j=2$$

Ponieważ funkcje podcałkowe reprezentacji /22/, /65/ lub /66/ mogą posiadać w infinitezymalnym otoczeniu punktów rozgałęzienia  $z_k$  co najwyżej osobliwości całkowne /lub są regularne/, otrzymujemy dodatkowo:

$$/D2/ \quad A(\beta) = O((\beta + k)^{-1 + \alpha}), \quad \alpha > 0$$

gdy  $\beta \rightarrow \pm k$

Z /51/, /52/, /60/, /61/, /80/, /81/ i z jawnej postaci /87/, /88/ funkcji  $g$  i  $\tilde{g}$  w nieskończoności otrzymujemy następujące oszacowania otrzymanych rozwiązań:

$$/D3/ \quad A_1(\beta) \rightarrow \text{const } \beta^{m+n-2} \quad \text{gdy } \beta \rightarrow +\infty$$

$$/D4/ \quad A_2(\beta) \rightarrow \text{const } \beta^{m+n-2} \quad \text{gdy } \beta \rightarrow -\infty$$

Ze zgodności oszacowań /D3/, /D4/ z warunkiem /D1/ wynika:

$$/D5/ \quad m = n = 0$$

LITERATURA

- [1] T.E. Rozzi, "Rigorous analysis of the step discontinuity in a planar dielectric waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-26, 738/1978/.
- [2] K. Morishita, S. Inagaki, N. Kumagai, "Analysis of discontinuities in dielectric waveguides by means of the least squares boundary residual method", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-27, 310 /1979/.
- [3] S. Ray, R. Mittra, "Numerical analysis of open waveguide discontinuities", Radio Sci., 19, 1289 /1984/.
- [4] A. Ittipiboon, M. Hamid, "Application of the Wiener-Hopf technique to dielectric slab waveguide discontinuities", IEE Proc., 128, Pt.H, 188-196 /1981/.
- [5] K. Uchida, A. Aoki, "Scattering of surface waves on transverse discontinuities in symmetrical three-layer dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-32, 11 /1984/.
- [6] W. Nasalski, "The exact surface impedance approach to problems of diffraction in open waveguides", Prace IPPT, 2, /1984/.
- [7] T. Tamir, A.A. Oliner, "Guided complex waves", Proc. IEE, 110, 310 /1965/.
- [8] R.A. Hurd, "The Wiener-Hopf-Hilbert method for diffraction problems", Can.J.Phys. 54, 775 /1976/.  
R.A. Hurd, S. Przeździecki, "Diffraction by a half-plane with different face impedances - a re-examination", ibid, 59, 1337 /1981/.
- [9] P.C. Clemmow, "The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields", Pergamon Press, Oxford 1966.
- [10] F.D. Gahov, "Krajevnye zadaci", Nauka, Moskwa 1977.
- [11] H. Blok, "Electromagnetic properties of optical waveguides", Lecture Notes 5, Delft 1980.
- [12] M.J. Lighthill, "An introduction to fourier analysis and generalized functions", Cambridge Univ. Press, Cambridge 1959