Nouvelle généralisation des problèmes relatifs aux opérations du type elliptique

par

Georges Giraud

Introduction

On sait que les équations intégrales de Fredholm sont très précieuses pour étudier les équations linéaires aux dérivées partielles, du second ordre, du type elliptique. Ces équations intégrales ont permis de traiter les problèmes du type de Dirichlet, du type de Neumann et du type de Mr Picard, dans des cas de plus en plus étendus[1]. Le présent travail généralise de nouveau ces problèmes.

On suppose ici que certaines données: fonctions qui figurent dans l'équation aux dérivées partielles ou dans la condition à la frontière, peuvent n'être pas continues aux points de certaines variétés, de différents nombres de dimensions[2]. Au voisinage de ces variétés, on suppose que les valeurs absolues de ces fonctions données sont inférieures aux produits de certaines constantes par

---

[1]) Nous aurons à citer particulièrement les publications suivantes, que nous faisons précéder de lettres qui les désigneront: (*g*) ***Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*** (Bull. sciences math., 2me série, **56**, 1932, 1re partie, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352 et errata p. 384); (*h*) ***Problèmes de valeurs à la frontière, relatifs à certaines données discontinues*** (Bull. Société math. France, **61**, 1933, p. 1 à 54); (*k*) ***Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, etc.*** (Ann. Société polonaise de math., **12**, 1933, p. 35 à 54). D'autres généralisations ont été abordées par d'autres méthodes; voir Jules Schauder, ***Sur les équations linéaires du type elliptique à coefficients continus*** (Comptes rendus Acad. sciences Paris, **199**, 1934, p. 1366 à 1368).

[2]) Dans les articles *h* et *k*, les discontinuités devaient appartenir à des variétés à $m-1$ dimensions, m étant le nombre des variables de l'équation.

des sommes de puissances négatives des distances du point variable à ces variétés; les exposants de ces puissances doivent remplir des conditions qui seront indiquées; on suppose que certaines autres fonctions données remplissent des conditions de Lipschitz, avec des exposants quelconques[3]). Les énoncés des problèmes doivent être adaptés à ces nouvelles hypothèses: ce sera l'objet d'une partie du chapitre II. Les équations intégrales qui s'introduisent, satisfont aux théorèmes fondamentaux de Fredholm, d'après des propositions établies au chapitre I. Les problèmes visés sont traités dans le chapitre II: leur discussion est entièrement semblable à celle des cas antérieurement considérés. Le résultat est utilisé pour établir l'existence de solutions fondamentales, bien déterminées, de certaines équations du type elliptique, comprenant l'équation de Laplace à m variables[4]). Enfin, au chapitre III, on étudie des problèmes relatifs à certaines équations du type elliptique, prises dans l'espace euclidien illimité; on verra que les théorèmes fondamentaux de Fredholm sont valables pour les équations intégrales à champ infini qui s'introduisent alors, et cela entraîne les conséquences qu'on avait déjà rencontrées dans un champ borné. Ces résultats sont appliqués à une équation célèbre, rencontrée par Mr Schrödinger; sans former les fonctions propres, on retrouve un résultat bien connu, relatif aux valeurs propres.

Les résultats de ce travail s'étendent à un autre type de problèmes, dont, pour abréger, il ne sera pas question ici[5]). On peut aussi les étendre à de plus générales limitations et conditions de continuité, imposées aux fonctions données, mais les énoncés deviennent sensiblement plus longs[6]).

---

[3]) Dans les publications g, h et k, ces conditions portent le nom de Hölder. Mais R. Lipschitz a employé ces conditions dès l'année 1864, même pour des exposants < 1 (*De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrarium... disquisitio*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **63**, p. 296 à 308).

[4]) La méthode générale, employée dans les publications g, h et k, ne se réduit pas à la méthode classique, quand il s'agit de l'équation de Laplace.

[5]) Un cas particulier de cette généralisation est énoncé dans un ouvrage de Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens: *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (78 pages, Paris, 1935). 2me partie, chapitre IV, § 6.

[6]) *Comptes rendus*, t. **199**, 1934, p. 1001—1003 (le dernier paragraphe

CHAPITRE I

Sur certaines équations intégrales de Fredholm

1. Définitions et lemmes. Si, dans l'espace à m dimensions ($m \geqslant 1$), E est un ensemble borné, *nous nommons plus grande dimension de E la borne supérieure de la distance entre deux points qui varient sur E.* L'expression *borne supérieure* d'un ensemble de nombres désigne ici le plus petit nombre qui n'est inférieur à aucun nombre de l'ensemble; tout nombre supérieur à tout nombre de l'ensemble est une *limite supérieure*[7]). On définit de façon analogue la *borne inférieure* et les *limites inférieures.*

Supposons que E soit mesurable, et soit $2R$ sa plus grande dimension. Soient encore h un paramètre positif, et α une constante $\leqslant m$. On peut affirmer que *l'intégrale*

$$I = \int\limits_E^{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 + h^2)^{\frac{\alpha - m}{2}} \, dV,$$

où dV est la mesure d'un élément de E, *est inférieure à QR^α pour $0 < \alpha \leqslant m$, à $Q \log\left(1 + \frac{R}{h}\right)$ pour $\alpha = 0$, à Qh^α pour $\alpha < 0$, Q désignant dans les trois cas une fonction de m et de α seuls* (indépendante de R et de h). *Pour $\alpha < 0$, le résultat subsiste même si E n'est pas borné.* Cette proposition, énoncée un peu différemment, a été démontrée dans un travail antérieur (h, chap. I, § 1). De plus, *si α est $\leqslant 0$, on a une limite inférieure de I en remplaçant Q par une autre fonction positive de m, de α, de la distance de O à la frontière de E et de la borne supérieure de h, en supposant que E contient O.* La démonstration est toute pareille à celle du premier fait.

2. Lemme. Soit $r = \sqrt{x_{m-p+1}^2 + \ldots + x_m^2}$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$. *Soit E un ensemble mesurable variable, dont la plus grande dimension*

---

doit être considéré comme nul); t. **200**, 1935, p. 1651—1653, vers la fin (un résultat plus perfectionné résulte d'énoncés précis relatifs aux données discontinues, qui seront prochainement annoncés).

[7]) Edouard Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, tome I, 3me édition (667 pages, Paris, 1917), n° 3, p. 4.

reste inférieure à la constante $2R$. Enfin soit k un nombre positif donné $\leqslant p$. Alors l'intégrale

$$I = \int_E^{(m)} r^{k-p}\, dV$$

reste bornée quand E varie, et elle tend uniformément vers zéro avec la mesure η de E.

Soit en effet l une constante positive. Dans la région où r est $\geqslant l$, on a une intégrale $\leqslant \eta\, l^{k-p}$ (égalité seulement pour $\eta = 0$). Dans la région où r est $< l$, intégrons d'abord relativement à $x_1, \ldots, x_{m-p}$; nous avons un résultat

$$< \frac{\pi^{\frac{m-p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-p+2}{2}\right)} (2R)^{m-p}\, r^{k-p};$$

en intégrant par rapport aux variables restantes, cela fait moins que

$$\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}(2R)^{m-p}\, l^k}{\Gamma\left(\frac{m-p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) k}.$$

Ainsi il y a une constante Q telle qu'on ait

$$I < \eta\, l^{k-p} + Q\, R^{m-p}\, l^k \quad \text{quel que soit } l > 0.$$

Mais η est borné en fonction de R; donc I reste inférieur à une fonction de m, de p, de k et de R, conformément à l'énoncé. Pour montrer maintenant que I tend uniformément vers zéro avec η, il suffit de prendre l de façon qu'on ait

$$k\, Q\, R^{m-p}\, l^p = (p-k)\, \eta\,;$$

la limitation précédemment trouvée atteint son minimum

$$\frac{p}{k} \left(\frac{kQ}{p-k} R^{m-p}\right)^{\frac{p-k}{p}} \eta^{\frac{k}{p}},$$

et cela achève notre démonstration.

3. Lemme. *Si E est une hypersphère dont le centre C et le rayon R sont variables, on a*

$$\int_E^{(m)} r^{k-p}\, dV < Q\, R^{m+k-p}$$

où Q ne dépend que de m, de k et de p (r a la même signification qu'au § 2).

Tout d'abord, l'intégrale est évidemment inférieure à

$$\frac{\pi^{\frac{m-p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-p+2}{2}\right)} R^{m-p} \int^{(p)} r^{k-p}\, d(x_{m-p+1}, \ldots, x_m).$$

Mais r oscille dans un intervalle d'amplitude $\leqslant 2R$; on augmentera le résultat en faisant varier r de zéro à $2R$, ce qui donne la limite supérieure

$$\frac{2^{k+1} \pi^{\frac{m}{2}} R^{m+k-p}}{\Gamma\left(\frac{m-p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) k},$$

et la démonstration est terminée.

4. Lemme. *Soit X un point quelconque* (non nécessairement $\subset E$), *et soient h et k des constantes telles qu'on ait $0 < h \leqslant m$, $0 < k \leqslant p$, $h+k > p$. L'intégrale*

$$I(X) = \int_E^{(m)} L^{h-m}(X, A)\, r^{k-p}(A)\, dV_A \quad (L = \text{distance}),$$

où r est défini comme au § 2, reste bornée quand X et E varient de façon que la plus grande dimension de E reste $< 2R$, et elle tend uniformément vers zéro avec la mesure η de E.

Soit $s = \int_E^{(m)} r^{k-p}\, dV$; il suffit de prouver que I est borné en fonction de s et tend vers zéro avec s (§ 2). Soit l une constante > 0. Dans la région $L(X, A) \geqslant l$, on a une intégrale $\leqslant s l^{h-m}$. Dans la région $L(X, A) < l \leqslant r$, on a une intégrale $< Q_1 l^{h+k-p}$, où Q_1 est fonction de m et de h.

Passons à la région où l'on a à la fois $L(X, A) < l$ et $r < l$. Si elle existe, la grandeur $\delta = r(X)$ est évidemment $\leqslant L(X, A) + r(A) < 2l$. Posons

$$\varrho = \sqrt{(x_{m-p+1} - a_{m-p+1})^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2}.$$

En intégrant d'abord par rapport aux $m-p$ premières coordonnées, nous trouvons (§ 1):

pour $h < p$, une intégrale $\quad < Q_2 \int^{(p)} \varrho^{h-p}\, r^{k-p}\, d(a_{m-p+1},\ldots,a_m);$

pour $h = p$, une intégrale $\quad < Q_2 \int^{(p)} r^{k-p} \log\left(1 + \frac{l}{\varrho}\right) d(a_{m-p+1},\ldots,a_m);$

pour $h > p$, une intégrale $\quad < Q_2\, l^{h-p} \int^{(p)} r^{k-p}\, d(a_{m-p+1},\ldots,a_m);$

dans les trois cas, Q_2 ne dépend que de m, de p et de h. Pour $h < p$, on partage la région en trois autres: la première est $2\varrho < \delta$; la deuxième est $2r < \delta$; la troisième est la région restante, où r/ϱ est certainement compris entre 3 et 1/3; on trouve un résultat total $< Q_3\, l^{h+k-p}$, où Q_3 ne dépend que de m, de p, de k et de h. Pour $h = p$, même décomposition; en tenant compte des inégalités $\varrho < l$ et $\delta \leqslant 2l$, les deux premières régions donnent un résultat $< Q_4\, \delta^k \log \frac{3l}{\delta} < Q_3\, l^k$, où Q_3 et Q_4 dépendent toujours des mêmes lettres, et la région restante donne un résultat semblable. Enfin pour $h > p$, le résultat est encore $< Q_3\, l^{h+k-p}$, avec toujours la même signification pour Q_3.

Ainsi l'on a, quel que soit l,

$$I(X) < s\, l^{h-m} + Q_5\, l^{h+k-p} \quad (Q_5 = Q_1 + Q_3).$$

Donc $I(X)$ est borné. Si maintenant η, et par suite s, tendent vers *zéro*, nous remarquons que le second membre est minimum quand on a $(h + k - p)\, Q_5\, l^{m+k-p} = (m - h)\, s$; on trouve ainsi

$$I(X) < Q_6\, s^{\frac{h+k-p}{m+k-p}}$$

où Q_6 ne dépend que de m, de p, de k et de h. La proposition est démontrée.

5. Corollaire. *Si en particulier E est une hypersphère de rayon R, on a*

$$I(X) < Q\, R^{h+k-p},$$

où Q ne dépend que de m, de p, de k et de h.

Cela résulte des paragraphes 3 et 4.

6. Lemme. *Soit maintenant h une constante donnée $< m$* (non nécessairement positive); *p et r étant définis comme au* § 2, *soit k une constante telle qu'on ait $0 < k \leqslant p$, $h+k \leqslant p$. Considérons l'intégrale*

$$\int\limits_{l<L(X,A)<R}^{(m)} L^{h-m}(X,A)\, r^{k-p}(A)\, dV_A,$$

où l et R sont des constantes positives. Je dis que, pour $h+k=p$, cette intégrale est inférieure à $Q \log \frac{2R}{l}$, et que, pour $h+k<p$, elle est inférieure à $Q\, l^{h+k-p}$, Q ne dépendant que de m, de p, de k et de h.

La partie d'intégrale qui vient de la région $r \geqslant L(X,A)$ a évidemment une limitation du type de l'énoncé. Passons donc à la région $r < L(X,A)$. Soient X_1 et A_1 les projections de X et de A sur $r=0$. Dans la région $r \leqslant l$, $L(X_1,A_1) \leqslant l$, nous remarquons que, d'après les inégalités $L(X,A) > l$ et $h<m$, on a une intégrale $< l^{h-m} \int^{(m)} r^{k-p}\, dV < Q_1\, l^{h-p} \int^{(p)} r^{k-p}\, d(a_{m-p+1},\dots,a_m)$, où Q_1 et toutes les autres lettres Q affectées d'indices, dépendent seulement de m, de p, de k et de h; ce dernier résultat est inférieur à $Q_2\, l^{h+k-p}$, d'après un raisonnement du § 3. Dans la région $r \leqslant l$, $L(X_1,A_1) > l$, l'intégrale est au plus égale à

$$\int^{(m)} L^{h-m}(X_1,A_1)\, r^{k-p}(A)\, dV_A < Q_3 l^{h-p} \int^{(p)} r^{k-p} d(a_{m-p+1},\dots,a_m) < Q_4 l^{h+k-p}.$$

Définissons maintenant ϱ comme au § 4, et considérons la région $r>l$, $\varrho \leqslant \frac{l}{2}$; on a évidemment $L(X_1,A_1) > \frac{l\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne la même limitation. Enfin dans la région $r>l$, $\varrho > \frac{l}{2}$, on a une intégrale inférieure à $Q_5 \int^{(p)} \varrho^{h-p}\, r^{k-p}\, d(a_{m-p+1},\dots,a_m)$; nous distinguons la région $\varrho > r$ de la région $r > \varrho$, et chacune donne une limitation de la forme indiquée dans l'énoncé. La démonstration se termine ainsi, moyennant la remarque que $\log \frac{2R}{l}$ est supérieur à $\log 2 > 0$.

Remarque. Si $h+k$ est $<p$, le résultat subsiste quand on intègre dans la région non bornée $L(X,A) > l$.

7. Corollaire. *Supposons qu'on ait $h>0$, $k>0$ et $h+k<p$. Je dis qu'on a*

$$\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} L^{h-m}(X,A)\,r^{k-p}(A)\,dV_A < Q\,r^{h+k-p}(X),$$

où Q ne dépend que de m, de p, de h et de k.

En effet la partie d'intégrale qui correspond à la région $2L(X,A)>r(X)$ a une limitation de la forme indiquée (§ 6). Dans la région $2L(X,A)<r(X)$, on a $2r(A)>r(X)$, et par suite l'intégrale est inférieure à

$$2^{p-k}\,r^{k-p}(X)\int^{(m)} L^{h-m}(X,A)\,dV_A,$$

ce qui admet encore la limitation indiquée.

8. Théorème. *Soit E un ensemble donné, borné et mesurable. Nous définissons r comme au § 2. Soient encore α, β et γ des constantes telles qu'on ait*

$$0<\alpha\leqslant m,\quad 0<\beta\leqslant m,\quad 0<\gamma\leqslant p,\quad \alpha+\gamma>p,\quad \beta+\gamma>p.$$

Soient $G(X,A)$ et $H(\Xi,A)$ deux fonctions mesurables données, admettant les limitations

$$|G(X,A)|<Q_1 L^{\alpha-m}(X,A),\qquad |H(\Xi,A)|<Q_2 L^{\beta-m}(\Xi,A);$$

ces fonctions sont définies pour un certain ensemble de points X et Ξ, quel que soit A dans E. Je dis que la fonction

$$K(X,\Xi)=\int\limits_{E}^{(m)} G(X,A)\,H(\Xi,A)\,r^{\gamma-p}(A)\,dV_A$$

admet les limitations

$$\begin{aligned}
&Q\,Q_1Q_2\,R^{\alpha+\beta+\gamma-m-p} && \text{pour } \alpha+\beta+\gamma>m+p,\\
&Q\,Q_1Q_2\log\frac{3R}{L(X,\Xi)} && \text{pour } \alpha+\beta+\gamma=m+p,\\
&Q\,Q_1Q_2\,L^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(X,\Xi) && \text{pour } \alpha+\beta+\gamma<m+p;
\end{aligned}$$

$2R$ désigne la plus grande dimension de E, et Q ne dépend que de m, de p, de α, de β et de γ. Si E est un ensemble parfait, et si G et H sont fonctions continues des deux points tant que ceux-ci sont distincts, K est continu par rapport aux deux points tant que ceux-ci sont distincts; cette continuité subsiste même

quand les points sont confondus, dans le cas où $\alpha+\beta+\gamma$ *est* $>m+p$.

Pour le cas où $\alpha+\beta+\gamma$ est $>m+p$, il nous suffit de renvoyer au travail cité (h, chap. I § 2).

Pour le cas où $\alpha+\beta+\gamma$ est $\leqslant m+p$, nous avons seulement à établir la limitation, car la propriété de continuité est évidente. Dans la région $2L(X,A)<L(X,\Xi)$, on a $H(X,\Xi)<2^{m-\beta}Q_2L^{\beta-m}(X,\Xi)$, et le § 5 donne pour cette région la limitation de l'énoncé. Même résultat pour la région $2L(\Xi,A)<L(X,\Xi)$. Dans le reste de E, on a $3L(\Xi,A)\geqslant L(X,A)$, et le § 6 achève la démonstration.

Remarque. Si $\alpha+\beta+\gamma$ est $<m+p$, la limitation ne contient pas R. On vérifie effectivement que, si E est remplacé par tout l'espace, l'intégrale existe encore et admet la limitation énoncée.

9. Généralisation et application aux équations intégrales. Considérons des variétés closes M_n $(n=1,2,\ldots,m)$, qui ne sont pas nécessairement d'un seul tenant. On suppose que pour chaque valeur de $n<m$, M_n peut être recouvert par un nombre fini de régions, telles que chaque point de M_n soit intérieur à au moins une de ces régions, et telles que, dans chaque région, les coordonnées d'un point variable puissent s'exprimer en fonctions de $m-n$ paramètres variables dans un champ borné; les dérivées des coordonnées par rapport aux paramètres doivent exister et être continues, et les jacobiens d'ordre $m-n$ ne doivent s'annuler simultanément nulle part. On suppose que M_m est un ensemble fini de points. Aucune autre hypothèse n'est faite sur les M_n: ces variétés peuvent donc contenir des singularités, et avoir des points communs les unes avec les autres. Soit $r_n(A)$ la distance d'un point A à M_n $(1\leqslant n\leqslant m)$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ des constantes qui remplissent les conditions

$$0<\alpha\leqslant m,\quad 0<\beta\leqslant m,\quad 0<\gamma_n\leqslant n,\quad \alpha+\gamma_n>n,\quad \beta+\gamma_n>n\quad (1\leqslant n\leqslant m);$$

soit δ le plus petit des nombres positifs $\alpha+\beta+\gamma_n-n$. Soient $G(X,\Xi)$ et $H(X,\Xi)$ deux fonctions, définies pour un certain ensemble de points X, quel que soit Ξ dans un ensemble E borné et mesurable; on suppose que ces fonctions sont mesurables par rapport à Ξ, et qu'elles admettent les limitations

$$|G(X,\Xi)|<Q_1L^{\alpha-m}(X,\Xi),\quad |H(X,\Xi)|<Q_2L^{\beta-m}(X,\Xi)\,\Sigma_n r_n^{\gamma_n-n}(\Xi).$$

Alors la fonction

$$K(X,\Xi)=\int\limits_{E}^{(m)} G(X,A)\,H(\Xi,A)\,dV_A$$

admet la limitation

$$|K(X,\Xi)|<\begin{cases} QQ_1Q_2 & \text{pour } \delta>m,\\ QQ_1Q_2\log\dfrac{3R}{L(X,\Xi)} & \text{pour } \delta=m,\\ QQ_1Q_2L^{\delta-m}(X,\Xi) & \text{pour } \delta<m,\end{cases}$$

Q dépendant de la plus grande dimension $2R$ de E, ainsi que de m, de α, de β et des γ_n. Cela résulte sans difficulté des paragraphes précédents (h, chap. I, § 4). Si en outre $G(X,\Xi)$ et $H(X,\Xi)$ sont continus quand, Ξ n'appartenant pas à $\Sigma_n M_n$, X est distinct de Ξ, $K(X,\Xi)$ est continu quand X et Ξ sont distincts; si δ est $>m$, K est continu même quand X et Ξ sont confondus.

Comme dans le travail cité (h, chap. I, §§ 5 à 7), ces résultats permettent de démontrer que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm sont applicables à certaines équations intégrales, et à certains systèmes de telles équations.

10. Théorème. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné dont la plus grande dimension est $2R$. Soit $G(X,A)$ une fonction mesurable par rapport à A, valant $O[L^{\alpha-m}(X,A)]$ $(0<\alpha\leqslant m)$. En désignant par $l(X,Y;A)$ la distance de A au segment de droite XY, on suppose qu'on a, quels que soient X, Y et A,*

$$|G(X,A)-G(Y,A)|<Q_1 l^{\alpha-h-m}(X,Y;A)L^h(X,Y)\quad(0<h\leqslant 1;\ h\leqslant\alpha).$$

En définissant p et r comme au § 2, soit $\varrho(A)$ une fonction mesurable dont la valeur absolue est $<Q_2 r^{k-p}(A)$, la constante k étant telle qu'on ait $0<k\leqslant p$, $\alpha+k>p$. *Considérons la fonction*

$$u(X)=\int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} G(X,A)\,\varrho(A)\,dV_A.$$

Je dis qu'on a, quels que soient X et Y,

$$|u(X)-u(Y)|<\begin{cases} QQ_1Q_2L^{\alpha+k-p}(X,Y) & \text{pour } \alpha+k<h+p,\\ QQ_1Q_2L^h(X,Y)\log\dfrac{3R}{L(X,Y)} & \text{»}\quad \alpha+k=h+p,\\ QQ_1Q_2R^{\alpha+k-h-p}L^h(X,Y) & \text{»}\quad \alpha+k>h+p,\end{cases}$$

où Q dépend seulement de m, de p, de α, de k et de h.

Les parts de $u(X)$ et de $u(Y)$ qui proviennent de la région $L(X,A) < 2L(X,Y)$, valent $O[L^{\alpha+k-p}(X,Y)]$ (§ 5)[8]. Dans le domaine restant, on a $2l(X,Y;A) < L(X,A)$; la contribution de ce domaine à $u(X)-u(Y)$ admet alors la limitation de l'énoncé, d'après le § 6 et le § 5. Le théorème en résulte aussitôt.

11. Conséquence. Si $r(A)$, au lieu d'avoir la signification du § 2, représente la distance du point A à la variété M_p du § 9, on peut répéter sans changement l'énoncé du théorème.

12. Théorème. *Définissons r comme au § 2, avec $p \geqslant 2$. Je dis qu'on a, pour $0 < h < p-1$ et $x_m > 0$,*

$$\int_{a_m=0}^{(m-1)} L^{1-m}(X,A)\, r^{h+1-p}(A)\, d\,S_A < Q\, r^{h+1-p}(X)\left[\log\frac{r(X)}{x_m}+1\right],$$

où Q est indépendant de X.

Intégrons d'abord par rapport à $a_1,\dots,a_{m-p}$; nous trouvons (§ 1) que l'intégrale est inférieure au produit d'une constante par

$$\int^{(p-1)} \varrho^{1-p}(A)\, r^{h+1-p}(A)\, d(a_{m-p+1},\dots,a_m), \quad \text{avec } \varrho(A) = \sqrt{\Sigma_{\alpha>m-p}(x_\alpha-a_\alpha)^2}.$$

Dans la région $2\varrho(A) < r(X)$, on a $2r(A) > r(X)$, et par suite (§ 1) cette région donne une intégrale limitée comme dans l'énoncé. La région $2r(A) < r(X)$ donne de même $O(r^{h+1-p})$. Enfin, dans la région restante, on a à intégrer $O(r^{h+2-2p})$, ce qui donne encore $O(r^{h+1-p})$. Le théorème est démontré.

Cette proposition sera utilisée dans le prochain chapitre (II, § 11).

CHAPITRE II

Equations du type elliptique, considérées dans un domaine borné ou sur une variété close

1. Définitions. Considérons des variétés $\mathfrak{M}_n$ qui satisfont aux conditions imposées aux variétés M_n du chapitre précédent (§ 9); nous supposons en outre que les dérivées des coordonnées d'un

---

[8]) O est le symbole de Landau: $z = O(y)$ signifie que $\dfrac{z}{y}$ est borné; $z = o(y)$ signifie que z/y tend vers zéro.

point de $\mathfrak{M}_1$ (et non des autres $\mathfrak{M}_n$), par rapport aux paramètres, remplissent des conditions de Lipschitz[9]). Soit

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha\, b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c u$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha};\ a_{1,1} > 0)$$

une opération du type elliptique, définie dans une certaine région ou dans tout l'espace. On suppose que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent une condition de Lipschitz, qu'ils sont bornés et que la borne inférieure de leur déterminant D est positive. On suppose que les b_α sont continus hors de $\mathfrak{M}_1$, et qu'ils sont bornés hors d'une région bornée qui contient $\mathfrak{M}_1$; dans cette région, on suppose qu'on a $b_\alpha = O(r_1^{h-1})$ $(0 < h \leqslant 1$; r_n désigne toujours la distance d'un point à $\mathfrak{M}_n$, quel que soit n). On suppose que c est continu hors de $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, et qu'il est borné hors d'une région bornée qui contient $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$; dans cette région on suppose qu'on a

$$c = O(r_1^{h-1} + r_2^{h-2}).$$

Soit enfin f une fonction continue hors de $\Sigma_n \mathfrak{M}_n$, et bornée hors d'une région bornée qui contient $\Sigma_n \mathfrak{M}_n$; dans cette région, on suppose qu'on a $f = O(\Sigma_n r_n^{h-n})$. *On dit que, dans un certain domaine* $\mathfrak{D}$[10]), *la fonction* $u(X)$ *est solution régulière de l'équation*

(1) $$\mathcal{F}u = f,$$

si les conditions suivantes sont remplies: 1⁰ *le quotient de* u *par* $-\log r_2 + \Sigma_{n \geqslant 3} r_n^{2-n}$ *tend vers zéro quand* u *tend vers un point de l'ensemble* $\Sigma_{n \geqslant 2} \mathfrak{M}_n$, *et cela uniformément dans tout ensemble fermé intérieur à* $\mathfrak{D}$; 2⁰ u *et ses dérivées sont continus en tout point de* $\mathfrak{D} - \Sigma_{n \geqslant 2} \mathfrak{M}_n$; 3⁰ *l'équation* (1), *prise au sens généralisé*[11]), *est satisfaite en tout point de* $\mathfrak{D} - \Sigma_{n \geqslant 1} \mathfrak{M}_n$.

Si l'ensemble $\Sigma_{n \geqslant 2} \mathfrak{M}_n$ est vide, la première condition disparaît. On a vu (*h*, II, § 16) qu'on peut ne pas exiger l'existence de toutes les dérivées aux points de $\mathfrak{M}_1 - \Sigma_{n \geqslant 2} \mathfrak{M}_n$; cette existence est alors un résultat démontré dans l'article cité.

---

[9]) Dans tout ce travail, ce nom désigne, sauf restriction explicite, toute condition d'ordre $\leqslant 1$. Voir l'introduction.

[10]) Dans tout ce travail, on entend par *domaine* un ensemble *ouvert et connexe*.

[11]) *g*, chap. I.

Dans ce chapitre, nous considérons l'opération $\mathcal{F}$ dans un domaine borné $\mathcal{D}$ dont la frontière $\mathcal{S}$ remplit les conditions imposées à $\mathcal{M}_1$, y compris les conditions de Lipschitz relatives aux dérivées des coordonnées; en outre nous supposons que $\mathcal{S}$ n'a pas de point singulier.

On entend par *problème du premier type*, ou par *problème de Dirichlet*, toute question du type suivant:

Soit φ une fonction donnée sur $\mathcal{S}$, continue hors de $\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$, et valant $O(\Sigma_{n\geq 3} r_n^{h+2-n})$. Soient $\varrho(X)$ la distance de X à $\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$, et $2R$ la plus grande dimension de $\mathcal{D}$. On demande les fonctions u d'un point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, qui admettent une limitation du type

$$|u| < \eta(\varrho)[\log(3R) - \log r_2 + \Sigma_{n\geq 3} r_n^{2-n}], \tag{2}$$

$\eta(\varrho)$ étant infiniment petit avec ϱ, et qui en outre sont continues en tout point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$, sont solutions régulières de (1) *dans $\mathcal{D}$, et se réduisent à φ sur $\mathcal{S}-\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$* (la fonction η n'est pas donnée).

Les valeurs prises par u, par f et par φ aux points de l'ensemble $\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$, ne jouent aucun rôle dans cette question. Nous ne considérerons pas comme distinctes des solutions qui ne diffèrent que sur $\Sigma_{n\geq 2}\mathcal{M}_n$.

2. Solutions fondamentales. Soit $A_{\alpha,\beta}D$ le mineur algébrique de $a_{\alpha,\beta}$ dans D. On dit que $G(X,\Xi)$ est une solution *fondamentale* (ou *élémentaire*) de l'équation $\mathcal{F}_X G=0$ dans un certain domaine, si G est solution régulière dans le domaine qui reste après le retranchement du point Ξ, et si, quand X tend vers Ξ, $G(X,\Xi)$ est un infiniment grand équivalent à

$$\frac{-1}{4\pi\sqrt{D}}\log \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta) \quad \text{pour } m=2,$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}\sqrt{D}}[\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)]^{\frac{2-m}{2}} \quad \text{pour } m\geqslant 3.$$

Si l'opération $\mathcal{F}$ remplit dans tout l'espace les conditions du § 1, et si, $\mathcal{M}_2$ n'existant pas, c est partout $\leqslant 0$ et est inférieur à une constante <0 hors d'une certaine région bornée, on a démontré (h, III) qu'il existe, pour l'espace entier, une et une seule solution fondamentale G, qui tend vers zéro quand X s'éloigne indéfiniment; la démonstration est faite pour le cas où les $\mathfrak{M}_n$ d'indice $n \geqslant 3$ n'existent pas, mais G garde évidemment ses propriétés si, sans changer $\mathcal{F}$, on ajoute des variétés $\mathfrak{M}_n$ [12]). Cette fonction G se nomme ***solution fondamentale principale***. Elle existe même dans des cas plus étendus; dans le cas ici spécifié, elle est partout positive. Nous aurons à nous servir de ces propriétés, qui seront généralisées plus loin (§ 17 et chap. III, § 1).

3. Théorème. *Supposons que, outre les hypothèses du* § 1, *c soit $\leqslant 0$ dans tout le domaine borné $\mathfrak{D}$. Le problème homogène de Dirichlet* (c'est-à-dire le problème correspondant à des fonctions f et φ identiquement nulles) *n'admet que la solution zéro.*

Puisque c est $\leqslant 0$, nous pouvons trouver une fonction $\chi \leqslant 0$, remplissant les mêmes hypothèses que c, et telle que $c - \chi$ soit continu et $\leqslant 0$ dans $\mathfrak{D} + \mathcal{S}$ (on pourrait prendre $\chi = c$). Prolongeons les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ hors de $\mathfrak{D}$ de façon qu'elles remplissent dans tout l'espace les conditions énoncées au § 1; ce prolongement est possible [13]). Prolongeons aussi les fonctions b_α et $c - \chi$ hors de $\mathfrak{D}$, de façon que l'opération $\mathcal{F}u - \chi u$ remplisse les conditions où nous sommes assurés de l'existence d'une solution fondamentale positive (§ 2); en ajoutant au besoin $\mathcal{S}$ à la variété $\mathfrak{M}_1$, le but est atteint quand on prend, par exemple, $b_\alpha = 0$ et $c - \chi = -1$ hors de $\mathfrak{D}$. Nous posons $\chi = 0$ hors de $\mathfrak{D}$, de sorte que c et χ sont définis dans tout l'espace. Soit G la solution fondamentale principale de l'équation $\mathcal{F}G - \chi G = 0$.

Soit $d\,S^{(p)}$ l'élément de $\mathfrak{M}_p$. Nous considérons la fonction

$$w(X) = \Sigma_{p \geqslant 2} \overset{(m-p)}{\int_{\mathfrak{M}_p}} G(X, A)\, d\,S_A^{(p)},$$

où les intégrales sont étendues même aux parties des $\mathfrak{M}_p$ qui n'appartiendraient pas à $\mathfrak{D} + \mathcal{S}$; pour $p = m$, l'intégrale signifie une somme étendue aux points A dont l'ensemble est $\mathfrak{M}_m$. La

---

[12]) La démonstration s'appuie sur l'article cité g. On notera que, au chap. II, § 8 de ce dernier article, on doit, dans la formation de H et là seulement, remplacer k par une constante; on pourrait sans inconvénient prendre H égal à H^*.

[13]) Ann. scient. Ec. norm. sup., 3me série, t. 49, 1932, p. 1 à 104 et 245 à 309; spécialement chap. IX, § 1.

fonction w est partout positive, et il existe des constantes positives a et b, telles qu'on ait dans $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$

$$a[\log(3R) - \log r_2 + \Sigma_{p\geq 3} r_p^{2-p}] < w < b[\log(3R) - \log r_2 + \Sigma_{p\geq 3} r_p^{2-p}].$$

Soit λ une constante > 0, et soit u une solution de notre problème homogène. Il est évident que la fonction $u + \lambda w$ est positive sur $\mathfrak{S} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$ et au voisinage de $\Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$, et que, dans $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$, elle est solution régulière de l'équation

$$\mathfrak{F}(u + \lambda w) = \lambda \chi w,$$

dont le second membre est $\leqslant 0$. Donc $u + \lambda w$ n'atteint de minimum $\leqslant 0$ en aucun point de $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$ (*h*, II, § 14 et § 15), et par suite cette fonction est > 0 partout. De même $u - \lambda w$ est < 0. Comme cela a lieu pour toute constante $\lambda > 0$, u est identiquement nul dans $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$, ce qu'il fallait démontrer[14]).

4. Corollaire. *Si, outre les hypothèses du* § 1, *c est* $\leqslant 0$ *dans* $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, *le problème de Dirichlet relatif à l'équation* (1) *et à une fonction* φ *identiquement nulle, admet une solution et une seule* (moyennant la convention du § 1). *Il est possible de définir cette solution de façon qu'elle reste continue même sur* $\mathfrak{M}_2 - \Sigma_{p\geq 3}\mathfrak{M}_p$; *si la constante h du* § 1 *est* < 1, *cette solution vaut* $O(\Sigma_{p\geq 3} r_p^{h+2-p})$.

D'abord il n'y a pas deux solutions distinctes (§ 3). Soit maintenant $F^*(X, \Xi)$ la fonction de Green relative au problème de Dirichlet, pour l'opération $\mathfrak{F}v - \chi v$ du paragraphe précédent, dans le domaine $\mathfrak{D}$; cette fonction existe (*h*, III, § 9), et elle est inférieure à $QL^{2-m}(X, \Xi)$ pour $m \geqslant 3$, et à $Q[\log(3R) - \log L(X, \Xi)]$ pour $m = 2$, Q étant une constante. Considérons l'équation

$$(3)\quad u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)\chi(A)u(A)\,dV_A = -\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)f(A)\,dV_A.$$

Son noyau est de ceux auxquels la théorie de Fredholm s'applique, car le noyau itéré de rang n est le produit de $\chi(A)$ par une fonction valant $O[L^{2+nh-h-m}(X, A)]$ quand l'exposant de L est négatif, et par une fonction continue quand cet exposant est positif

---

[14]) Ce mode de raisonnement a été employé par Mr Stanislas Zaremba, *Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet* (Bull. international Acad. sciences Cracovie, 5 avril 1909, p. 561 à 563).

(I, § 9). Pour prouver que les intégrations où doit figurer le second membre de (3), portent sur des fonctions sommables, il suffit de remplacer toutes les fonctions intégrées par leurs valeurs absolues, et de changer l'ordre des intégrations, en appliquant encore le paragraphe 9 du chapitre I. On trouve ainsi que toute solution de (3) vaut $O(\Sigma_{p\geqslant 3} r_p^{h+2-p})\,(h<1)$, et est continue aux points de $\mathfrak{D}-\Sigma_{p\geqslant 3}\mathfrak{M}_p$; les dérivées sont continues aux points de $\mathfrak{D}-\Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p$. Il suffit d'appliquer aux deux membres de (3) l'opération $\mathfrak{F}v-\chi v$ pour démontrer que l'équation (1) est satisfaite en tout point de $\mathfrak{D}-\Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p$. Enfin u s'annule sur $\mathfrak{S}-\Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p$: la chose est évidente pour ceux de ces points qui n'appartiennent point à $\mathfrak{M}_1$; pour les autres, cela résulte de la continuité (I, § 9). L'équation homogène qui correspond à (3) n'a donc que la solution zéro, ce qui permet d'achever notre démonstration.

On remarque que si les fonctions données $b_\alpha(\alpha=1,2,\dots,m)$, c et f sont continues dans un domaine $\mathfrak{D}_1\subset\mathfrak{D}$, u peut être défini de façon à être continu en tout point de $\mathfrak{D}_1$, et l'équation (1) est alors satisfaite dans tout ce domaine, même si les variétés $\mathfrak{M}_p$ y pénètrent.

5. Corollaire. *Si la fonction φ, donnée sur $\mathfrak{S}$, est nulle, le problème de Dirichlet relatif à l'équation* (1) *peut toujours se ramener à une équation de Fredholm, et cette solution se comporte au voisinage de $\Sigma_p\mathfrak{M}_p$ comme il est dit au paragraphe précédent.*

Soit χ une fonction remplissant les hypothèses qui sont énoncées pour c au paragraphe 1: nous choisissons χ de façon que $c-\chi$ soit continu et $\leqslant 0$ dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$.

En nommant encore F^* la fonction de Green relative au problème de Dirichlet pour l'opération $\mathfrak{F}u-\chi u$, nous remarquons que l'équation (1) s'écrit aussi

$$\mathfrak{F}u-\chi u=f-\chi u.$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas où les $\mathfrak{M}_p$ d'indice $p\geqslant 3$ n'existent pas. Soit k un nombre positif $<h$. Nous allons prouver qu'on a $f-\chi u=O(r_1^{k-1}+r_2^{k-2})$; en effet on a $u=o[\log(3R)-\log r_2]$ et $\chi=O(r_1^{h-1}+r_2^{h-2})$; en distinguant la région où l'on a $r_1\geqslant r_2$ de celle où l'on a $r_1<r_2$, on aboutit à la limitation annoncée. Donc (§ 4) notre problème équivaut alors à l'équation (3); les propriétés relatives à l'allure de u au voisinage de $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ se démontrent comme au paragraphe précédent.

Si en particulier le problème homogène, relatif au cas où aucune variété $\mathcal{M}_p$ d'indice $p \geqslant 3$ n'existe, n'a que la solution zéro, ce qui précède nous permet de construire une fonction de Green relative à ce problème; cette fonction, que nous nommerons $F(X, \Xi)$ et qui est nécessairement unique, s'obtient par une des relations suivantes:

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)\chi(A)F(A, \Xi)\,dV_A = F(X, \Xi) - F^*(X, \Xi), \tag{4}$$

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A)\chi(A)F^*(A, \Xi)\,dV_A = F(X, \Xi) - F^*(X, \Xi); \tag{4 bis}$$

en effet chacune de ces relations, regardée comme équation de Fredholm en F, admet une et une seule solution, et cette solution possède les propriétés caractéristiques d'une fonction de Green. Si F est connu, et si χ est une fonction quelconque, satisfaisant aux mêmes hypothèses que c, et telle que le problème homogène de Dirichlet, relatif à l'opération $\mathcal{F}u - \chi u$, n'ait que la solution zéro, cette opération admet une fonction de Green F^*, qui est la solution unique d'une quelconque des relations (4) ou (4 bis); car si l'on écrit les relations des types (4) et (4 bis) qui existent d'une part entre F et la fonction F_0 de Green relative à $\mathcal{F}u - cu$, d'autre part entre F^* et F_0, l'élimination de F_0 conduit aux relations (4) et (4 bis). Réciproquement, si l'équation (4) en F^* admet une solution, toute solution est une fonction de Green pour $\mathcal{F}u - \chi u$, et $\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A) f(A)\,dV_A$ est une solution du problème de Dirichlet relatif à l'équation $\mathcal{F}u - \chi u = f$ et à des valeurs nulles sur $\mathcal{S}$; or nous savons déjà que si ce problème admet une solution pour toute fonction continue f, il n'en admet qu'une; donc le problème homogène de Dirichlet relatif à $\mathcal{F}u - \chi u$ n'admet que la solution zéro.

Si la fonction F de Green, relative à $\mathcal{F}$, existe, et si χ varie en remplissant la condition fixe $|\chi| < Q(r_1^{h-1} + r_2^{h-2})$, la fonction F^* existe en particulier quand χ est nul hors d'un assez petit voisinage de $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$, car la série des noyaux itérés de $F(X, A)\chi(A)$ est convergente (I, § 4). Que $\mathcal{F}$ admette ou non une fonction de

Green, on peut donc trouver une fonction χ continue dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, identique à c hors d'un certain voisinage de $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$, et telle que l'opération $\mathcal{F}u-\chi u$ admette une fonction de Green. Alors $f-\chi u$ admet une limitation de la sorte exigée pour f, même s'il existe des $\mathcal{M}_p$ d'indice $p\geqslant 3$. On obtient donc u par l'équation (3), ce qui permet de terminer notre démonstration.

Les identités (4) et (4 bis) permettent enfin de vérifier que, *quelle que soit la fonction χ, telle seulement que l'opération $\mathcal{F}u-\chi u$ admette une fonction de Green F^*, notre problème équivaut toujours à l'équation* (3).

Ces résultats permettent d'étendre au cas actuel la définition et les propriétés du *problème adjoint* à un problème donné de Dirichlet (g, V, § 8).

Quand il n'y a pas de fonction de Green au sens propre du mot, on peut toujours, à la suite de M^r David Hilbert, introduire des fonctions de Green au sens élargi [15]).

6. Définitions (problèmes de Neumann). Soit ψ une fonction d'un point de $\mathcal{S}$. Soient Y un point de $\mathcal{S}$, y_α ses coordonnées, $\bar{\omega}_\alpha$ les cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{S}$ en Y, dirigée dans le sens sortant de $\mathcal{D}$ $(\alpha=1,2,\ldots,m)$. Soit Y_t un point qui a des coordonnées de la forme

$$(5)\qquad y_\alpha-t\,\Sigma_\beta\, a_{\alpha,\beta}(Y)\,\bar{\omega}_\beta(Y)+O(t^{1+h})\qquad (t>0, h \text{ constant } >0)\,^{16)}.$$

Y_t appartient à $\mathcal{D}$ dès que le paramètre positif t est assez petit. Etant donné une fonction u d'un point de $\mathcal{S}$, nous posons

$$(6)\qquad \Theta u(Y)=\lim_{t\to 0}\frac{u(Y)-u(Y_t)}{t}+\psi(Y)\,u(Y),$$

pourvu que la limite existe et soit indépendante des termes $O(t^{1+h})$[17]).

Supposons que la fonction donnée ψ est continue en tout point de $\mathcal{S}-\mathcal{M}_2$, et vaut $O(r_2^{h-1})$ $(0<h\leqslant 1)$. Soit φ une autre fonction

---

[15]) Leon Lichtenstein, *Vorlesungen über die Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen* (X+164 pages, Berlin, 1931), spécialement II, § 3, p. 71 et 72.

[16]) On peut même remplacer les termes $O(t^{1+h})$ par $o\left(\frac{t}{\log t}\right)$.

[17]) Définition donnée dans l'article k, spécialement chap. I, § 5.

donnée d'un point de $\mathcal{S}$, continue en tout point de $\mathcal{S} - \Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$ et valant $O(\Sigma_{p\geq 2} r_p^{h+1-p})$. La question suivante est le type général des *problèmes de Neumann* (ou *problèmes du deuxième type*), ici considérés:

Trouver les fonctions u d'un point de $\mathfrak{D}+\mathcal{S}$, qui remplissent les conditions suivantes: 1⁰ u doit être dans le domaine $\mathfrak{D}$ une solution régulière de l'équation (1); *2⁰ u doit être continu en tout point de $\mathfrak{D}+\mathcal{S}-\Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$ et doit admettre une limitation du type* (2); *3⁰ u doit satisfaire en tout point de $\mathcal{S}-\Sigma_{p\geq 2}\mathfrak{M}_p$ à la condition*

$$\Theta u = \varphi. \tag{7}$$

Comme au paragraphe 1 et pour la même raison, nous ne considérons pas comme distinctes les solutions qui ne diffèrent que sur $\Sigma_p \mathfrak{M}_p$.

7. Lemme. *On peut trouver sur $\mathcal{S}$ une variété $\mathfrak{N}_p$ à $m-p$ dimensions* $(2 \leqslant p \leqslant m-1)$, *remplissant les mêmes conditions que $\mathfrak{M}_p$, et contenant tout l'ensemble $\mathcal{S}\mathfrak{M}_p$* (commun à $\mathfrak{M}_p$ et à $\mathcal{S}$).

D'après nos hypothèses et d'après la théorie des fonctions implicites, chaque point de $\mathcal{S}$ est intérieur à une région où une coordonnée cartésienne est fonction continue et continûment dérivable des $m-1$ autres (les dérivées remplissent même des conditions de Lipschitz).

Soit X un point de $\mathcal{S}\mathfrak{M}_p$. Nous ne diminuons pas la généralité en admettant que, dans un certain voisinage de X, $\mathcal{S}$ est défini par une équation

$$x_m = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$

où φ est continu et continûment dérivable. Dans un certain voisinage de X, $\mathfrak{M}_p$ est défini par les expressions des x_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ en fonctions continues et continûment dérivables de $m-p$ paramètres, et les jacobiens d'ordre $m-p$ ne s'annulent nulle part ensemble[18]). Alors $x_m - \varphi\,(x_1, \ldots, x_{m-1})$ est aussi fonction continue et continûment dérivable des mêmes paramètres, dans un voisinage peut-être plus restreint. De plus les jacobiens d'ordre $m-p$

[18]) Si X est un point singulier de $\mathfrak{M}_p$, l'ensemble des points assez voisins de X sur $\mathfrak{M}_p$ s'obtient à l'aide d'un nombre fini de représentations comme celle du texte. On raisonne séparément pour chacune de ces représentations.

des m fonctions $x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m - \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1})$ ne s'annulent simultanément nulle part. On peut donc définir un certain voisinage de X sur $\mathfrak{M}_p$ par les expressions de p de ces fonctions à l'aide des $m-p$ autres, qui joueront ainsi le rôle de nouveaux paramètres; ces expressions sont continues et continûment dérivables. Distinguons alors deux cas. Si $x_m - \varphi$ n'est pas un des nouveaux paramètres, remplaçons son expression par *zéro*: nous avons ainsi une variété à $m-p$ dimensions, située sur $\mathfrak{S}$, et qui contient tous les points assez voisins de X sur $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$; cette variété n'est pas close, mais nous pouvons, en négligeant au besoin un voisinage donné de sa frontière, la prolonger en variété close, appartenant à $\mathfrak{S}$, et remplissant toutes les conditions imposées à $\mathfrak{M}_p$. Si $x_m - \varphi$ est un des nouveaux paramètres, remplaçons-le encore par *zéro*: nous obtenons une variété à $m-p-1$ dimensions, située sur $\mathfrak{S}$, et qui contient tous les points assez voisins de X sur $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$; en négligeant au besoin un voisinage donné de sa frontière, nous la prolongeons aussi en variété close à $m-p$ dimensions, située sur $\mathfrak{S}$ et remplissant les hypothèses énoncées pour $\mathfrak{M}_p$. Ainsi tout point X de $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$ appartient à une variété close, du type de l'énoncé du lemme, et qui contient tous les points assez voisins de X sur $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$. Mais l'ensemble $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$ est fermé; d'après un théorème bien connu[19]), on peut donc trouver un ensemble *fini* de telles variétés closes à $m-p$ dimensions, qui contient tout $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_p$. Cet ensemble fini constitue la variété $\mathfrak{N}_p$ dont il fallait démontrer l'existence.

8. **Théorème.** *Outre les hypothèses des paragraphes* 1 *et* 6, *supposons que la fonction c soit* $\leqslant 0$ *dans tout* $\mathfrak{D}$, *et que la fonction* ψ *soit* $\geqslant 0$ *sur tout* $\mathfrak{S}$. *Supposons encore que c et ψ ne sont pas simultanément presque partout nuls. Enfin supposons que les fonctions données f et φ sont partout nulles* (problème homogène). *Alors l'inconnue u de notre problème de Neumann est identiquement nulle dans* $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{p \geqslant 2} \mathfrak{M}_p$.

Soit χ une fonction $\leqslant 0$ d'un point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, remplissant les mêmes hypothèses que c, et telle que $c - \chi$ soit continu et $\leqslant 0$

---

[19]) Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (2me édition, XVI + 342 pages, Paris 1928), spécialement chap. VII, section II. C. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classses de Baire* (VIII + 154 pages, Paris 1916), spécialement chap. I, § 15. Voir aussi *g*, chap. I, § 11, note de bas de page.

dans tout $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. Soit ω une fonction $\geqslant 0$ d'un point de $\mathcal{S}$, remplissant les mêmes hypothèses que ψ, et telle que $\psi-\omega$ soit continu et $\geqslant 0$ sur tout $\mathcal{S}$. Nous faisons en sorte que $c-\chi$ et $\psi-\omega$ ne soient pas simultanément identiquement nuls. Alors il existe une fonction de Green, $F(X, \Xi)$, relative aux opérations $\mathcal{F}v-\chi v$ et $\Theta v-\omega v$, pour lesquelles $\mathfrak{M}_2$ n'intervient pas (*h*, III, § 7). Considérons alors la fonction

$$w(X)=\Sigma_{p\geqslant 2}\int\limits_{\mathfrak{M}_p+\mathfrak{N}_p}^{(m-p)} F(X, A)\, dS_A^{(p)},$$

où l'on ne prend que la partie de $\mathfrak{M}_p$ qui appartient à $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, car F n'est pas défini ailleurs; les points multiples de l'ensemble $\mathfrak{M}_p+\mathfrak{N}_p$ sont comptés autant de fois qu'il y a d'unités dans leur ordre de multiplicité. D'après la façon d'obtenir F, qui a été indiquée dans un travail antérieur (*k*, II, § 1, et note finale de l'article), les fonctions

$$\frac{F(X, \Xi)}{\log(3R)-\log L(X, \Xi)}\quad (m=2) \quad\text{ou}\quad F(X, \Xi)L^{m-2}(X, \Xi)\quad (m>2)$$

sont bornées, et leurs bornes inférieures sont positives[20]). Donc il existe des constantes positives a et b telles qu'on ait partout

$$a[\log(3R)-\log r_2+\Sigma_{p\geqslant 3} r_p^{2-p}]<w<b[\log(3R)-\log r_2+\Sigma_{p\geqslant 3} r_p^{2-p}],$$

pourvu toutefois que $r_p(X)$ désigne maintenant la distance de X à $\mathfrak{M}_p+\mathfrak{N}_p$ $(p\geqslant 2)$.

Si λ est >0, la fonction $u+\lambda w$ est solution régulière de l'équation

$$\mathcal{F}(u+\lambda w)=\lambda\chi w \quad\text{dans}\quad \mathcal{D}-\Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p,$$

et elle satisfait à la condition

$$\Theta(u+\lambda w)=\lambda\omega w \quad\text{sur}\quad \mathcal{S}-\Sigma_p\mathfrak{N}_p;$$

les signes des seconds membres empêchent $u+\lambda w$ d'atteindre un minimum $\leqslant 0$ en un point de $\mathcal{D}+\mathcal{S}-\Sigma_{p\geqslant 2}(\mathfrak{M}_p+\mathfrak{N}_p)$ (*h*, II, §§ 14 et 15, et IV, § 3); comme cette fonction est certainement positive dans un certain voisinage de $\Sigma_{p\geqslant 2}(\mathfrak{M}_p+\mathfrak{N}_p)$, elle est

---

[20]) Le calcul développé dans l'article ***Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application*** (Ann. scient. Ec. norm. sup., 3^{me} série. t. 51, 1934, p. 251 à 372), spécialement chap. IV, § 6, s'applique en particulier ici, et il peut mener aux limitations indiquées, indépendamment de l'article *k*.

positive en tout point de $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p$. De même $u - \lambda w$ est négatif dans le même ensemble. Donc u est nul dans cet ensemble, et aussi, à cause de la continuité, dans l'ensemble $\mathfrak{S} - \Sigma_{p\geqslant 2}\mathfrak{M}_p$. La démonstration est terminée.

9. Corollaire. *Si, outre les hypothèses des paragraphes* 1 *et* 6, *les fonctions* c *et* $-\psi$ *sont* $\leqslant 0$, *sans être simultanément presque partout nulles, le problème de Neumann a une et une seule solution, quels que soient* f *et* φ. *Il est possible de définir cette solution de façon qu'elle soit continue même aux points de* $\mathfrak{M}_2 - \Sigma_{p\geqslant 3}\mathfrak{M}_p$, *et, si la constante* h *des paragraphes* 1 *et* 6 *est* < 1, *cette solution vaut* $O(\Sigma_{p\geqslant 3} r_p^{h+2-p})$.

D'abord il n'y a pas deux solutions distinctes (§ 8). Soit maintenant $F^*(X, \Xi)$ la fonction de Green relative aux opérations $\mathfrak{F}u - \chi u$ et $\Theta u - \omega u$ du paragraphe précédent. L'équation en u

$$u(X) - \int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)\chi(A)u(A)\,dV_A + \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B)\omega(B)u(B)\,dS_B = \tag{8}$$

$$= -\int\limits_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)f(A)\,dV_A + \int\limits_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B)\varphi(B)\,dS_B$$

est une équation de Fredholm, à cause de la limitation de F^* [21]). On vérifie que toute solution de (8) est continue même aux points de $\mathfrak{M}_2 - \Sigma_{p\geqslant 3}\mathfrak{M}_p$, et qu'elle admet la limitation de l'énoncé; pour limiter les intégrales où figure φ, on peut en effet recourir encore au chapitre I: un partage de $\mathfrak{S}$ en domaines assez petits, un changement de variables, une décomposition de la fonction intégrée permettent de se ramener à des intégrales étendues à une région bornée de la variété $a_m = 0$, la fonction qui remplace φ valant $O(r^{k+1-p})$, où $r(A)$ est soit la distance de A à la variété

$$a_{m-p+1} = \dots = a_{m-1} = 0, \quad a_m = f_1(a_1, \dots, a_{m-1}),$$

où les dérivées de f_1 existent et sont continues, soit la distance de A à la variété

$$a_{m-p} = \dots = a_{m-1} = 0;$$

[21]) Journal de math., 9me série, t. 11, 1932, p. 389 à 416, spécialement chap. I. Voir aussi h, I, §§ 5 à 7.

dans le premier cas, on remarquera que, puisque A appartient à la variété $a_m = 0$, $r(A)$ est au moins égal à la distance de A à la variété $a_{m-p+1} = \dots = a_m = 0$; les raisonnements du chapitre I s'appliquent aussitôt, avec l'une quelconque des deux significations de r. Enfin toute solution de (8) est une solution de notre problème de Neumann. L'équation homogène correspondante n'a donc que la solution *zéro* (§ 8), et notre énoncé en résulte.

10. Corollaire. *Dans les hypothèses générales des paragraphes* 1 *et* 6, *le problème de Neumann peut toujours se ramener à une équation de Fredholm, et cette solution se comporte au voisinage de $\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ comme il est dit au paragraphe précédent.*

Soit en effet χ une fonction remplissant les mêmes hypothèses que c, et telle que $c - \chi$ soit continu et $\leqslant 0$ dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$; soit d'autre part ω une fonction remplissant les mêmes hypothèses que ψ, et telle que $\psi - \omega$ soit continu et $\geqslant 0$ sur $\mathfrak{S}$; le choix est fait de façon que $c - \chi$ et $\psi - \omega$ ne soient pas simultanément identiquement nuls. Soit F^* la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{F}u - \chi u$ et $\Theta u - \omega u$. On peut écrire

$$\mathcal{F}u - \chi u = f - \chi u \quad \text{et} \quad \Theta u - \omega u = \varphi - \omega u;$$

en raisonnant comme au paragraphe 5, on en conclura que le problème équivaut à l'équation de Fredholm (8). On en tire les conclusions énoncées.

Quand le problème admet une solution et une seule, il existe une fonction F de Green pour les opérations $\mathcal{F}$ et Θ. Supposons que les opérations $\mathcal{F}u - \chi u$ et $\Theta u - \omega u$ admettent aussi une fonction de Green, F^*; on a alors les identités

$$(9) \quad \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X,A)\chi(A)F^*(A,\Xi)\,dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X,B)\omega(B)F^*(B,\Xi)\,dS_B =$$

$$= \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X,A)\chi(A)F(A,\Xi)\,dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X,B)\,\omega(B)\,F(B,\Xi)\,dS_B =$$

$$= F(X,\Xi) - F^*(X,\Xi),$$

qui permettent de calculer une des fonctions F et F^* quand on connaît l'autre: l'inconnue est en effet la *solution unique* d'une équation de Fredholm.

Ces résultats permettent d'étendre au cas actuel la définition et les propriétés du ***problème adjoint*** à un problème de Neumann (g, IV, § 11). En particulier la formule de réciprocité (g, IV, § 9) subsiste.

S'il n'y a pas de fonction de Green au sens propre, on peut toujours définir une fonction de Green au sens élargi, relative aux opérations $\mathcal{F}$ et Θ.

11. Allure des dérivées au voisinage de $\Sigma_p \mathfrak{M}_p$. On vérifie tout de suite que les dérivées de toute fonction u qui satisfait à un des problèmes de Dirichlet du paragraphe 5, ont une limitation $O(\Sigma_{p\geqslant 2} r_p^{h+1-p})$, pourvu toutefois que la constante h du paragraphe 1 soit <1. Ces dérivées sont continues en tout point de $\mathfrak{D} - \Sigma_{p\geqslant 2} \mathfrak{M}_p$.

S'il s'agit d'un problème de Neumann, soit $r'_1(X)$ la distance de X à $\mathcal{S}$, et soit $r'_p(X)$ $(p\geqslant 2)$ la distance de X à $\mathfrak{N}_p$ (§ 7). On démontre alors (I, § 12) que les dérivées de u ont une limitation

$$O\left[\log\frac{3R}{r'_1} + \Sigma_{p\geqslant 2} r'^{\,h+1-p}_p\left(\log\frac{r'_p}{r'_1}+1\right) + \Sigma_{p\geqslant 2} r_p^{h+1-p}\right] \qquad (h<1).$$

Mais si a et b sont deux variables positives, et si q est une constante telle qu'on ait $0<q<2$, on a

$$2\,a^{2-q}\,b^q \leqslant \sqrt{(2-q)^{2-q}\,q^q}\,(a^2+b^2);$$

si nous choisissons un nombre positif $k<h$, ce résultat nous permet d'affirmer que les dérivées de u, dans un problème de Neumann, ont une limitation

$$O(r'^{\,k-1}_1 + \Sigma_{p\geqslant 2} r'^{\,k+1-p}_p + \Sigma_{p\geqslant 2} r_p^{h+1-p}) \qquad (0<k<h).$$

En désignant maintenant par $r_p(X)$ la distance de X à $\mathfrak{M}_p + \mathfrak{N}_p$, cette limitation peut être remplacée par $O(r'^{\,k-1}_1 + \Sigma_{p\geqslant 2} r_p^{k+1-p})$; du reste, d'après le calcul qui précède, le terme en r'_1 pourrait être remplacé par une puissance du logarithme.

12. Solutions fondamentales positives. Soit $\mathcal{F}$ une opération du type elliptique, qui satisfait aux hypothèses du paragraphe 1 dans un domaine borné $\mathfrak{D}$. Je dis que, ***si la mesure d'un domaine D contenu dans $\mathfrak{D}$ est assez petite, l'opération $\mathcal{F}$ admet une solution fondamentale partout positive dans D.***

Prolongeons en effet dans tout l'espace l'opération $\mathcal{F}u-(c+1)u$, de façon qu'elle remplisse dans tout l'espace les hypothèses du paragraphe 1, le coefficient de u étant partout égal à -1. Soit $G^*(X, \Xi)$ la solution fondamentale principale de cette opération, solution qui est partout positive (§ 2). A l'aide des propositions du chapitre I, on reproduira sur cette fonction les raisonnements d'un travail antérieur (*h*, II, § 7); l'énoncé en résultera.

13. Extrema atteints dans le domaine de régularité. Nous pouvons maintenant reproduire les démonstrations des propositions suivantes, déjà démontrées dans le cas où les $\mathfrak{M}_p$ d'indice $p > 1$ n'existent pas; E désigne un ensemble fermé intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, et u est une solution régulière de l'équation (1) dans $\mathfrak{D}$:

Si l'on a $c=0$ et $f \geqslant 0$ en tout point de $\mathfrak{D}$, et si u possède dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ une borne supérieure M, la borne supérieure de u dans $E-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ ne peut être égale à M que si u est constant dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ (ce qui entraîne $f=0$).

Si l'on a $c \leqslant 0$ et $f \geqslant 0$ en tout point de $\mathfrak{D}$, et si u possède dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ une borne supérieure $M>0$, la borne supérieure de u dans $E-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ ne peut être égale à M que si u est constant dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ (ce qui entraîne $c=f=0$).

Si f est $\geqslant 0$ en tout point de $\mathfrak{D}$, et si u possède dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ une borne supérieure nulle, la borne supérieure de u dans $E-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ ne peut être nulle que si u est identiquement nul dans $\mathfrak{D}-\Sigma_p \mathfrak{M}_p$ (ce qui entraîne $f=0$).

Nous n'énonçons pas ici deux lemmes qui interviennent dans les démonstrations (*h*, II, §§ 11 et 12), et dont le second sera généralisé plus loin (III, § 2).

14. Problèmes homogènes qui admettent une solution constante. Pour qu'un problème homogène de Neumann admette une solution constante non nulle, il faut et il suffit que c et ψ soient nuls en tout point où ils sont continus. Comme les valeurs prises aux autres points n'interviennent pas, il n'y a à traiter que le cas où c et ψ sont identiquement nuls. Or, d'après le paragraphe 10, les solutions d'un tel problème sont les mêmes que si l'ensemble $\Sigma_{p\geqslant 2} \mathfrak{M}_p$ était vide: *ces solutions sont donc toutes constantes.*

15. Conditions de compatibilité. Quand le problème homogène qui correspond à un problème donné, du premier ou du second type, admet des solutions non identiquement nulles, le problème donné doit remplir des conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité, sans quoi la fonction u cherchée n'existe pas. Ces conditions se trouvent comme dans les cas antérieurement traités (g, V, § 8; h, III, § 7); elles sont en nombre égal à celui des solutions linéairement indépendantes, admises par le problème homogène. En particulier, si le problème homogène admet une solution constante non nulle, il y a une et une seule condition de compatibilité (§ 14).

16. Problèmes relatifs à une variété close. Il n'y a aucune difficulté à étendre ces considérations aux problèmes relatifs à une variété close. Cette variété doit être conforme aux hypothèses mentionnées dans un article antérieur (k, I, § 1). L'équation $\mathcal{F}u = f$ remplira, dans chaque région représentable sur une région bornée d'un espace euclidien, les hypothèses du paragraphe 1. Si le problème n'est pas du type de Mr Picard, c'est-à-dire s'il n'est pas relatif à la totalité de la variété, la frontière du domaine devra remplir les mêmes conditions que dans l'article cité (k, I, § 5), et les conditions à la frontière devront être conformes aux hypothèses du paragraphe 1 ou du paragraphe 6. On peut aussi considérer des problèmes mixtes, où une partie de la frontière porte des données du premier type, le reste portant des données du second type; en se reportant à l'article cité (k, II, § 2 à § 4), on aura des cas où l'on saura traiter ces problèmes.

17. Application. Supposons que les hypothèses du paragraphe 1 soient remplies par l'opération $\mathcal{F}$ dans l'espace entier. En outre cette opération remplit, par hypothèse, les conditions que nous allons expliquer.

Soient X' et Y' les transformés de deux points X et Y par une inversion dont le pôle est O et dont la puissance est $R^2 (R > 0)$, c'est-à-dire qu'on a

$$x_\alpha = \frac{R^2 x_\alpha}{x_1^2 + \dots + x_m^2} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m).$$

Nous supposons que, quand X et Y varient, on a toujours

$$|a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(Y)| < Q L^h(X', Y') \qquad (0 < h \leqslant 1),$$

où Q est une constante; outre cette condition, nous maintenons la condition de Lipschitz d'exposant h, supposée au paragraphe 1.

De plus nous supposons qu'on a, pour tout point X assez éloigné de O,

$$|b_\alpha(X)| < Q L^{-1-h}(O, X), \quad |c(X)| < Q L^{-2-h}(O, X).$$

Donnons-nous encore une fonction f, qui doit satisfaire aux mêmes hypothèses que c. Nous nous proposons de *chercher une fonction u, qui soit dans tout l'espace une solution régulière de l'équation* (1) (§ 1); *si m est $\geqslant 3$, nous exigeons en outre que $u(X)$ tende vers zéro quand X s'éloigne indéfiniment; pour $m=2$, nous exigeons que $u(X)$ soit borné.*

Nous allons voir que ce problème se ramène au type de Mr Picard (k, I, § 4), relatif à une hypersphère, dans l'espace à $m+1$ dimensions.

Nous remarquons que les $a_{\alpha,\beta}(X)$ ont des limites $a_{\alpha,\beta}(\infty)$ quand X s'éloigne indéfiniment, et la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(\infty) z_\alpha z_\beta$ est définie et positive. Un changement linéaire de variables nous ramène au cas où l'on a

$$(\beta-\alpha)\, a_{\alpha,\beta}(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad a_{\alpha,\alpha}(\infty) = 1 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m).$$

Posons alors

$$P(X) = 1 + \Sigma_\alpha x_\alpha^2, \qquad P(X)\, x_\alpha^* = x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$
$$P(X)\, x_{m+1}^* = 1 \quad , \qquad r(X) = \sqrt{x_{m+1}^*}.$$

Le point qui a pour coordonnées $(x_1^*, \ldots, x_{m+1}^*)$ dans l'espace à $m+1$ dimensions, parcourt l'hypersphère

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} + \ldots + x_{m+1}^{*2} = x_{m+1}^*,$$

quand X parcourt l'espace euclidien à m dimensions. Les coordonnées $x_1^*, \ldots, x_m^*$ conviennent comme paramètres pour tout domaine qui ne contient pas de point de la variété $2\, x_{m+1}^* = 1$. Considérons $\mathcal{F}$ comme une opération portant sur une fonction d'un point de l'hypersphère. En prenant comme variables $x_1^*, \ldots, x_m^*$, et en nommant $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α et c' $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$ les fonctions qui définissent $\mathcal{F}$ dans ce système de variables, nous trouvons qu'on a, quand r tend vers zéro,

$$a'_{\alpha,\beta} = O(r^{4+h}) \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \quad a'_{\alpha,\alpha} = r^4 + O(r^{4+h}),$$
$$b'_\alpha = (4 - 2m)\, x_\alpha^* r^2 + O(r^{3+h}), \quad c' = c = O(r^{2+h}).$$

Introduisons maintenant l'opération $\mathcal{F}_1 v = r^{-m-2}\mathcal{F}(r^{m-2}v)$; nous désignons par $a''_{\alpha,\beta}$, b''_α et c'' les fonctions qui la définissent, dans le système des variables $x_1^*,\dots,x_m^*$. Nous trouvons

$$a''_{\alpha,\beta} = r^{-4}a'_{\alpha,\beta}, \quad \text{d'ou} \quad a''_{\alpha,\beta} = O(r^h) \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \quad a''_{\alpha,\alpha} = 1 + O(r^h);$$
$$b''_\alpha = O(r^{h-1}), \quad c'' = O(r^{h-2}).$$

De plus il est évident que l'opération $\mathcal{F}_1$ remplit toutes les hypothèses résumées dans le paragraphe précédent, tant que le point $(x_1^*,\dots,x_{m+1}^*)$ reste dans une région fermée qui ne contient pas l'origine. Mais on a

$$a''_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,\beta} - 2\,\Sigma_\gamma\, x_\gamma^* \frac{a_{\alpha,\gamma}x_\beta^* + a_{\beta,\gamma}x_\alpha^*}{r^2} + 4\,\Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta}\frac{x_\alpha^*\, x_\beta^*\, x_\gamma^*\, x_\delta^*}{r^4};$$

on démontre à l'aide de cette expression que, dans la région $2r < 1$ de notre hypersphère, les $a''_{\alpha,\beta}$ remplissent une condition de Lipschitz avec l'exposant h. Par conséquent l'opération $\mathcal{F}_1$ satisfait sur toute l'hypersphère aux conditions résumées dans le paragraphe précédent.

A toute solution u de notre problème correspond une fonction $v = r^{2-m}u$, qui satisfait à l'équation

$$\mathcal{F}_1 v = r^{-m-2}f,$$

dont elle est *solution régulière* sur toute l'hypersphère, sauf peut-être au point où r est nul. Mais on a

$$r^{-m-2}f = O(r^{h-m});$$

et les limitations imposées à u entraînent que *v est solution régulière* même pour $r=0$, donc *sur toute l'hypersphère*. Il est évident que, réciproquement, à toute solution v régulière sur toute l'hypersphère correspond une solution u de notre problème.

Nous nous sommes ainsi ramenés à un problème de Mr Picard. Indiquons maintenant des cas où il y a certainement une solution unique: cela arrive si le problème homogène n'a que la solution zéro. *Ajoutons à nos hypothèses que c est partout* $\leqslant 0$. *Dans le cas où m est* $\geqslant 3$, notre fonction u, solution de l'équation homogène, est nulle à l'infini; elle atteint donc un maximum $\geqslant 0$ ou un minimum $\leqslant 0$ en un point situé à distance finie dans l'espace euclidien; elle est donc constante (§ 13), et par conséquent nulle; ainsi *le problème homogène n'admet* alors *que la solution zéro. Si m est égal à 2,* u est identique à v, et l'on a, pour toute fonction u, $\mathcal{F}_1 u = r^{-4}\mathcal{F}u$; si u est une solution régulière du problème homogène, il atteint donc, en un point de l'hypersphère, un maximum $\geqslant 0$ ou un minimum $\leqslant 0$; u est donc constant (§ 13); ***si c diffère de zéro en un point non situé sur $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$,*** u est donc nul, et ***le problème homogène n'admet que la solution zéro***; ***si au contraire c est presque partout nul, la solution générale du problème homogène est une constante arbitraire.***

Quand le problème homogène n'admet que la solution zéro, nous pouvons affirmer qu'il existe une et une seule solution fondamentale $G(X, \Xi)$, qui, quand X va à l'infini, jouisse de la propriété: de s'annuler pour $m \geqslant 3$, et de tendre vers une limite finie, fonction de Ξ, pour $m = 2$. En effet choisissons l'élément d'arc de l'hypersphère comme invariant fondamental; soit $H(X, \Xi)$ la fonction de Green relative à l'hypersphère entière, exprimée à l'aide des coordonnées des points de l'espace euclidien à m dimensions (k, I, § 3). La fonction $r^{m-2}(X)\,H(X, \Xi)$ est une solution de l'équation $\mathcal{F} = 0$, et elle est régulière en tout point X autre que Ξ. On lui confèrera, en ce point Ξ, la singularité qui caractérise les solutions fondamentales, en tenant compte de ce que, dans l'espace euclidien, c'est l'élément d'arc de cet espace qui est pris comme invariant fondamental; on trouve ainsi que ***la fonction***

$$G(H, \Xi) = r^{m-2}(X)\, r^{m-2}(\Xi)\, H(X, \Xi)$$

est la solution fondamentale annoncée, et il ne peut en exister une qui soit distincte de celle-ci. Si c est partout $\leqslant 0$, cette fonction est positive quand X et Ξ sont à distance finie; si en outre m est égal à 2, $G(\infty, \Xi)$ et $G(X, \infty)$ sont positifs.

Si m est égal à 2, nous avons, dans l'espace à trois dimensions, la sphère $x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} = x_3^*$. Supposons que c soit identiquement nul, et considérons le problème homogène adjoint au problème auquel nous ramenons le problème donné; soit w une solution, non identiquement nulle, de ce problème homogène adjoint. Cette solution peut s'obtenir de la façon suivante: soit $G^*(X, \Xi)$ la fonction de Green, relative à l'opération $\mathcal{F}_1 v - v$ et à la sphère entière; G^* existe et est continu et positif, quand X et Ξ sont distincts; w est une solution de l'équation homogène de Fredholm

$$w(\Xi) - \int^{(2)} w(A)\, G^*(A, \Xi)\, d\,S_A = 0, \tag{10}$$

où l'intégrale est étendue à toute la sphère. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème donné soit compatible, est qu'on ait

$$\int^{(2)} f w \, d S = 0. \tag{11}$$

Mais le problème donné est certainement incompatible quand f est partout positif, car v ne pourrait atteindre nulle part sa borne supérieure (§ 13), ce qui est absurde. Donc la condition (11) n'est jamais remplie quand f est partout > 0. Donc la fonction continue w ne change pas de signe. Donc, d'après (10), ***la fonction continue w ne s'annule en aucun point de la sphère.*** Nous posons alors la condition nouvelle

$$\int^{(2)} w \, d S = 1, \tag{12}$$

qui, d'après cela, achève de déterminer w. Il existe une fonction $H(X, \Xi)$ qui est solution régulière de l'équation

$$\mathcal{F}_1 H(X, \Xi) = w(\Xi) \tag{13}$$

dans le domaine restant quand on retranche de la sphère le point Ξ, et qui possède, quand X tend vers Ξ, la même singularité que les solutions fondamentales; en effet la recherche de H revient à la recherche d'une fonction $K(X, \Xi) = H(X, \Xi) - G^*(X, \Xi)$, qui soit une solution, régulière sur toute la sphère, de l'équation $\mathcal{F}_1 K(X, \Xi) = = w(\Xi) - G^*(X, \Xi)$; nous avons à voir si l'on a $\int^{(2)} w(A)[w(\Xi) - - G^*(A, \Xi)] \, dS_A = 0$; cela est évidemment vrai, d'après (10) et (12). Donc H existe, et est déterminé à une constante près; nous achevons de le déterminer en posant la condition

$$\int^{(2)} w(A) H(A, \Xi) \, dS_A = 0; \tag{14}$$

H est alors une *fonction de Green au sens élargi*. La fonction

$$G(X, \Xi) = H(X, \Xi) - \frac{w(\Xi)}{w(\infty)} H(X, \infty)$$

est alors une solution fondamentale de l'opération $\mathcal{F}$, valable dans le plan euclidien entier; mais cette solution a deux singularités logarithmiques: l'une en Ξ, l'autre à l'infini. Le cas étudié ici se présente notamment pour l'équation de Laplace dans le plan.

CHAPITRE III

Equations du type elliptique dans l'espace illimité

1. Solutions fondamentales principales. Nous supposons que les hypothèses du paragraphe 1 du chapitre précédent sont remplies dans tout l'espace (euclidien ou représentable sur un espace euclidien, dont nous choisissons les coordonnées comme paramètres). Ajoutons l'hypothèse que, hors d'une certaine région bornée, c reste inférieur à une constante négative. Nous dirons qu'une solution fondamentale $G(X, \Xi)$ est *principale*, si elle tend vers zéro quand, Ξ restant fixe, X s'éloigne indéfiniment.

Soit χ une fonction, nulle hors d'une certaine région bornée, et telle que $c-\chi$ soit partout continu et $\leqslant 0$. Alors la variété $\mathfrak{M}_2$ n'intervient pas pour la détermination de la solution fondamentale principale $G^*(X, \Xi)$ de l'opération $\mathcal{F}u - \chi u$, et par suite celle-ci existe et est unique (h, III, § 2). Considérons alors les deux équations intégrales

$$(1)\qquad G(X, \Xi) - G^*(X, \Xi) = \int^{(m)} G^*(X, A)\chi(A) G(A, \Xi)\, dV_A,$$

$$(2)\qquad G(X, \Xi) - G^*(X, \Xi) = \int^{(m)} G(X, A)\chi(A) G^*(A, \Xi)\, dV_A;$$

elles sont satisfaites par la fonction G cherchée, si celle-ci existe, et chacune de ces équations n'a pas d'autre solution que cette fonction G; cela se démontre comme dans le cas antérieurement traité (h, III, § 2). Pour $m > 2$, on peut trouver des constantes positives Q et a telles qu'on ait

$$(3)\qquad |G(X, \Xi)| < QL^{2-m}(X, \Xi)\exp[-aL(X, \Xi)];$$

pour $m = 2$, on a

$$(3\text{ bis})\qquad |G(X, \Xi)| < \begin{cases} -Q\log L(X, \Xi) & \text{pour}\quad 2L \leqslant 1 \\ Q\exp[-aL(X, \Xi)] & \text{pour}\quad 2L \geqslant 1 \end{cases}$$

On remarque que les intégrales sont en réalité étendues à un champ borné, hors duquel χ est nul. On en conclut que la théorie de Fredholm s'applique aux équations ci-dessus. Donc G existe toutes les fois que l'équation homogène n'admet que la solution *zéro*. Or toute solution u de l'équation

$$u(X) - \int^{(m)} G^*(X, A)\chi(A)u(A)\,dV_A = 0$$

s'annule à l'infini et est solution régulière de l'équation $\mathcal{F}u = 0$; si donc c est partout $\leqslant 0$, u est identiquement nul; la fonction G existe donc dans ce cas.

Quand l'opération $\mathcal{G}$, adjointe à $\mathcal{F}$, existe et satisfait aux hypothèses du paragraphe 1 du chapitre précédent, les identités (1) et (2) permettent d'étendre au cas actuel la propriété de G, d'être une solution fondamentale pour $\mathcal{G}$ quand on échange les rôles des deux points (h, III, § 6).

2. Théorème. *Si les hypothèses du paragraphe* 1 *du chapitre précédent sont remplies dans tout l'espace, on peut trouver une fonction positive w et des fonctions φ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, telles que le changement de variables*

$$y_\alpha = \varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

soit biunivoque dans tout l'espace, et que l'opération $\mathcal{F}_1 v = \mathcal{F}(wv)$, exprimée à l'aide des variables y_α, remplisse les hypothèses du chapitre II, § 1, *mais ait ses coefficients partout continus. Si en outre c est inférieur à une constante négative hors d'une région bornée, on peut faire en sorte que $\mathcal{F}_1$ jouisse de la même propriété.*

Même démonstration que dans les travaux antérieurs (g, II, § 17; h, III, § 5). On trouve qu'on peut même s'arranger pour que les coefficients de v et de ses dérivées remplissent des conditions de Lipschitz dans toute région bornée.

3. Sur certaines équations intégrales à champ non borné. Soit $K(X, \Xi)$ une fonction, mesurable par rapport à chacun des deux points et par rapport à leur ensemble[22]), et telle qu'on ait partout

$$|K(X, \Xi)| < Q_1 L^{\alpha - m}(X, \Xi) \exp[-aL(X, \Xi)],$$

---

[22]) Il s'agit de la mesure au sens de Mr Lebesgue. Dans le cas où le champ et le noyau sont bornés, ces hypothèses sur la mensurabilité suffisent pour qu'on puisse représenter la solution par les séries de Fredholm; voir Charles de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'en-*

où a, Q_1 et α sont des constantes positives, avec $0 < \alpha < m$. Soit d'autre part $\chi(X)$ une fonction mesurable qui, dans une région bornée, contenant une variété close M_p (I, § 9), admet une limitation

$$|\chi(X)| < Q_2 r^{\gamma-p}(X) \qquad (0 < \gamma < p,\ \alpha+\gamma > p),$$

où $r(X)$ est la distance entre X et M_p, et Q_2 est une constante; hors de cette région, on suppose que χ est borné, et tend vers zéro quand le point s'éloigne indéfiniment. Soit enfin f une fonction mesurable, que nous supposons d'abord bornée dans tout l'espace. Nous considérons l'équation intégrale

$$(4) \qquad \varrho(X) - \lambda \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K(X, A)\chi(A)\varrho(A)\,dV_A = f(X),$$

où λ est un paramètre, et où l'inconnue ϱ doit être bornée et mesurable. Nous démontrerons que ***les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm sont valables pour cette équation***[23]).

Soit M une limite supérieure de $\left|\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K(X, A)\,dV_A\right|$, quand X varie; il suffit de prendre

$$M = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} Q_1 \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-at}\,dt = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \Gamma(\alpha) Q_1 a^{-\alpha}.$$

Soit R un nombre positif assez grand pour que, dans toute la région $L(O, X) > R$, on ait

$$2M\Lambda|\chi(X)| < 1,$$

où Λ est un nombre positif donné. Nous formons les fonctions

$$K^{(1)} = K, \quad K^{(n)}(X, \Xi) = \int\limits_{L(O,A)>R}^{(m)} K^{(n-1)}(X, A)\chi(A)K(A, \Xi)\,dV_A \quad (n \geqslant 2).$$

---

semble, classes de Baire (VIII + 154 pages, Paris 1916), spécialement chap. III, § 3. Nous ne considérons ici que des fonctions dont toutes les valeurs sont finies.

[23]) Cette conclusion ne subsisterait pas si l'on supposait seulement que la fonction mesurable χ est bornée; voir Emile Picard, ***Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*** (VI + 214 pages, Paris 1927), spécialement 8[me] leçon, 2; voir aussi *g*, II, § 5.

Or l'équation (4) entraîne

$$\varrho(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}\Phi_1(X,A;\lambda)\chi(A)\varrho(A)\,dV_A=$$

$$=f(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}K_1(X,A;\lambda)\chi(A)f(A)\,dV_A,$$

et le nouveau second membre est borné et mesurable. En appliquant la même transformation qu'au chapitre II, § 17, nous obtenons une équation intégrale relative à une variété close, constituée par une hypersphère; si l'on mesure à la façon euclidienne les éléments de ce champ, le noyau est $\Phi_1(X,A;\lambda)\chi(A)P^m(A)$, et il est borné quand $L(O,A)$ est assez grand; on en déduit (I, § 9) que tout noyau itéré de rang assez grand est le produit de $\chi(A)$ par une fonction bornée de X, de A et de λ ($|\lambda|<\Lambda$). Sauf peut-être pour des valeurs isolées de λ, nous trouvons que l'équation (4) ne peut avoir d'autre solution que

$$\varrho(X)=f(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}N_1(X,A;\lambda)\chi(A)f(A)\,dV_A,$$

où la limitation de N_1 se déduit de celle de K_1 en y remplaçant Q_3 par une fonction de λ. Cette fonction N_1 est méromorphe par rapport à λ dans le champ $|\lambda|<\Lambda$, pourvu que X et A soient distincts, et ses pôles ont des positions indépendantes de X et de A.

Si maintenant nous posons, dans (4),

$$\varrho(X)=\sigma(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}K_1(X,A;\lambda)\chi(A)\sigma(A)\,dV_A,$$

nous trouvons qu'à toute solution de l'équation

$$\sigma(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}\Phi_2(X,A;\lambda)\chi(A)\sigma(A)\,dV_A=f(X)$$

correspond une fonction ϱ qui est solution de (4). Or cette équation se traite comme celle où figure Φ_1, et elle conduit à une expression

$$\varrho(X)=f(X)+\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}N_2(X,A;\lambda)\chi(A)f(A)\,dV_A,$$

D'après un travail antérieur (g, II, § 4), les $K^{(n)}$ sont bornés dès que $n\alpha$ est $>m$. Je dis que, à partir du rang où il en est ainsi, la série

$$K_1(X,\Xi;\lambda)=K(X,\Xi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^n K^{(n+1)}(X,\Xi)$$

converge absolument et uniformément, pourvu qu'on ait $|\lambda|<\Lambda$; en effet d'après le choix de R, les termes sont inférieurs en valeurs absolues à ceux d'une progression géométrique à termes constants, dont la raison est *un demi*. Cela entraîne (g, II, § 4)

$$|K_1(X,\Xi;\lambda)|<Q_3 L^{\alpha-m}(X,\Xi)\exp[-bL(X,\Xi)],$$

Q_3 et b étant des constantes positives ($0<b<a$). Les identités

$$(5)\qquad K_1(X,\Xi;\lambda)-K(X,\Xi)-\lambda\int\limits_{L(O,A)>R}^{(m)}K_1(X,A;\lambda)\chi(A)K(A,\Xi)dV_A=0,$$

$$(6)\qquad K_1(X,\Xi;\lambda)-K(X,\Xi)-\lambda\int\limits_{L(O,A)>R}^{(m)}K(X,A)\chi(A)K_1(A,\Xi;\lambda)dV_A=0$$

sont alors évidentes ($|\lambda|<\Lambda$). Considérons les fonctions

$$\Phi_1(X,\Xi;\lambda)=K_1(X,\Xi;\lambda)-K(X,\Xi)-\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}K_1(X,A;\lambda)\chi(A)K(A,\Xi)dV_A,$$

$$\Phi_2(X,\Xi;\lambda)=K_1(X,\Xi;\lambda)-K(X,\Xi)-\lambda\int\limits_{\text{espace}}^{(m)}K(X,A)\chi(A)K_1(A,\Xi;\lambda)dV_A.$$

On a, d'après (5) et (6),

$$\Phi_1(X,\Xi;\lambda)=-\lambda\int\limits_{L(O,A)<R}^{(m)}K_1(X,A;\lambda)\chi(A)K(A,\Xi)dV_A,$$

$$\Phi_2(X,\Xi;\lambda)=\quad\lambda\int\limits_{L(O,A)<R}^{(m)}K(X,A)\chi(A)K_1(A,\Xi;\lambda)dV_A.$$

Par conséquent (I, § 8) si $L(O,X)$ et $L(O,\Xi)$ sont $\leqslant 2R$, Φ_1 et Φ_2 valent $O[L^{2\alpha+\gamma-p-m}(X,\Xi)]$ quand $2\alpha+\gamma$ est $<p+m$, et sont bornés quand $2\alpha+\gamma$ est $>p+m$. Si $L(O,X)$ ou $L(O,\Xi)$ sont $>2R$, on trouve que Φ_1 et Φ_2 valent $O\{\exp[-bL(O,X)-bL(O,\Xi)]\}$.

qui, sauf peut-être pour des valeurs isolées de λ, est solution de (4). Ce qui a été dit pour N_1, est valable pour N_2.

Nous avons

$$N_1(X, \Xi; \lambda) = \Psi_1(X, \Xi; \lambda) + K_1(X, \Xi; \lambda) + \\ + \lambda \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} \Psi_1(X, A; \lambda)\, \chi(A)\, K_1(A, \Xi; \lambda)\, dV_A,$$

où la fonction Ψ_1, dont la formation résulte de ce qui précède, satisfait à l'identité

$$\Psi_1(X, \Xi; \lambda) + \Phi_1(X, \Xi; \lambda) + \lambda \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} \Psi_1(X, A; \lambda)\, \chi(A)\, \Phi_1(A, \Xi; \lambda)\, dV_A = 0.$$

On déduit de tout cela l'identité

$$N_1(X, \Xi; \lambda) - K(X, \Xi) = \lambda \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda)\, \chi(A)\, K(A, \Xi)\, dV_A.$$

Des calculs analogues conduisent à l'identité

$$N_2(X, \Xi; \lambda) - K(X, \Xi) = \lambda \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K(X, A)\, \chi(A)\, N_2(A, \Xi; \lambda)\, dV_A.$$

On en conclut la nouvelle identité

$$(\lambda - \mu) \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda)\chi(A) N_2(A, \Xi; \mu)\, dV_A = N_1(X, \Xi; \lambda) - N_2(X, \Xi; \mu),$$

qui ne peut cesser d'être valable que pour des valeurs isolées de λ et de μ, et qui a lieu même si N_1 et N_2 ne correspondent pas à une même valeur de Λ. En y faisant $\lambda = \mu$, nous trouvons

$$N_1(X, \Xi; \lambda) = N_2(X, \Xi; \lambda).$$

Nous avons donc une fonction $N(X, \Xi; \lambda) = N_1 = N_2$, méromorphe par rapport à λ dans tout le plan complexe, et qui satisfait à l'identité

$$(7)\quad (\lambda - \mu) \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\chi(A) N(A, \Xi; \mu)\, dV_A = N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu).$$

D'autre part on trouve, on se reportant à la relation entre N_1 et K,

$$N(X, \Xi; 0) = K(X, \Xi), \tag{8}$$

et les propriétés (7) et (8) déterminent entièrement N.

Les identités (7) et (8) se prêtent aux mêmes raisonnements que dans les cas classiques [24]), et l'on en conclut en particulier les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm:

I. *Si λ n'est pas un pôle de N, l'équation* (4) *et l'équation*

$$\sigma(\Xi) - \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} K(A, \Xi)\, \chi(A)\, \sigma(A)\, dV_A = g(\Xi), \tag{9}$$

admettent chacune une et une seule solution

$$\varrho(X) = f(X) + \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\, \chi(A)\, f(A)\, dV_A, \tag{10}$$

$$\sigma(\Xi) = g(\Xi) + \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} N(A, \Xi; \lambda)\, \chi(A)\, g(A)\, dV_A. \tag{11}$$

II. *Si λ est un pôle de N, les équations homogènes qui correspondent à* (4) *et à* (9) *ont chacune des solutions non identiquement nulles; pour chaque équation, ces solutions proviennent d'un nombre fini p de solutions linéairement indépendantes; ce nombre p est le même pour chacune des deux équations.*

III. *Pour que l'équation* (4) *soit compatible quand λ est un pôle de N, il faut et il suffit que, pour toute solution σ de l'équation homogène correspondant à* (9), *on ait*

$$\int_{\text{espace}}^{(m)} f \sigma \chi\, dV = 0 \qquad (p \text{ conditions}). \tag{12}$$

Il faut remarquer que, d'après la façon dont on les obtient, les fonctions σ sont telles que, quand $L(O, X)$ augmente indéfiniment, *la plus grande limite de* $\dfrac{\log|\sigma(X)|}{L(O, X)}$ *est négative*. L'intégrale qui figure au premier membre de (12) existe donc pour les fonctions f considérées. Les pôles de N peuvent se nommer

---

[24]) Edouard Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, tome III, 2me édition (667 pages, Paris 1915), spécialement chap. XXXI, section II.

valeurs fondamentales; les solutions non partout nulles de l'équation homogène sont les *fonctions fondamentales*. On définira le *noyau principal* et les *fonctions principales* de la même façon que Mr Edouard Goursat. Quand X s'éloigne indéfiniment, les fonctions principales jouissent de la propriété qui a déjà été énoncée pour les fonctions fondamentales.

Les résultats subsistent quand toutes les intégrales rencontrées convergent absolument. Cela arrive en particulier quand la fonction mesurable f est telle que $L^{\alpha-m}(X, A)\, r^{\gamma-p}(A) f(A)$ soit sommable dans tout domaine borné, et telle en outre que $|f(X)|$ soit inférieur à une puissance de $L(O, X)$, dès que cette distance est assez grande; dans ces hypothèses, ϱ n'est plus nécessairement borné.

Si, dans l'équation homogène qui correspond à (9), on introduit une nouvelle inconnue τ par les relations concordantes

$$\tau = \chi\,\sigma, \quad \sigma(\Xi) = \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} K(A, \Xi)\, \tau(A)\, dV_A,$$

on parvient à l'équation

$$\tau(\Xi) - \lambda\,\chi(\Xi) \int_{\text{espace}}^{(m)} K(A, \Xi)\, \tau(A)\, dV_A = 0,$$

ordinairement nommée l'associée homogène de (4). On peut dire que (9) *est associé à* (4) *relativement à* $\chi\, dV$.

4. Développement de N suivant les puissances croissantes de λ. Le noyau $N(X, \Xi; \lambda)$, dont le produit par $\chi(\Xi)$ est *le noyau résolvant* de $K(X, \Xi)\,\chi(\Xi)$, est holomorphe par rapport à λ pour $\lambda = 0$. Posons maintenant

$$K^{(n)}(X, \Xi) = \int_{\text{espace}}^{(m)} K^{(n-1)}(X, A)\, \chi(A)\, K(A, \Xi)\, dV_A \quad (n \geqq 2),$$

définition différente de celle du paragraphe précédent. Je dis qu'*on a, quand* $|\lambda|$ *est assez petit*,

$$N(X, \Xi; \lambda) = K(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n K^{(n+1)}(X, \Xi). \tag{13}$$

Cette proposition revient à démontrer que, à partir d'un certain rang n, la série au second membre de (13) converge absolument et uniformément dès que $|\lambda|$ est assez petit. Or ceci se vérifie à l'aide des résultats du chapitre I, joints aux raisonnements du paragraphe précédent.

5. Généralisation d'un théorème de Schmidt. Supposons que le noyau K soit symétrique, et qu'il soit continu quand les deux points sont distincts; supposons en outre que χ soit continu et $\geqslant 0$ en dehors de M_p; supposons enfin que $\chi(X) K(X, \Xi) \chi(\Xi)$ ne soit pas identiquement nul dans son ensemble de continuité. Alors *toute valeur fondamentale est réelle et est un pôle simple de N, et il existe au moins une valeur fondamentale.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle du cas classique. Si ϱ est une fonction fondamentale relative à l'équation (4) et à la valeur fondamentale λ, $\chi\varrho$ est une fonction fondamentale relative à l'équation (9) et à la même valeur fondamentale; il est évident que $\chi\varrho$ n'est pas identiquement nul, sans quoi ϱ serait partout nul, d'après l'équation homogène. Soient $\bar{\lambda}$ et $\bar{\varrho}$ les conjugués complexes de λ et de ϱ; $\chi\bar{\varrho}$ est une fonction fondamentale relative à l'équation (9) et à la valeur fondamentale $\bar{\lambda}$; or l'intégrale $\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} \chi\varrho\bar{\varrho}\, dV$ est certainement > 0, et non nulle; donc les valeurs fondamentales λ et $\bar{\lambda}$ sont confondues, car, pour des valeurs fondamentales différentes, on a les mêmes relations d'orthogonalité que dans le cas classique; donc *λ est réel, et nous voyons du même coup que c'est un pôle simple de N.* Considérons maintenant l'intégrale

$$\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} u(X)\chi(X) \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; \lambda)\chi(A) u(A)\, dV_A\, dV_X$$

où u est une fonction donnée, continue et telle qu'on ait

$$\overline{\lim_{L(O,X)\to\infty}} \frac{\log|u(X)|}{L(O, X)} < 0. \qquad (\overline{\lim} = \text{plus grande limite}).$$

Cette intégrale est une fonction méromorphe de λ, n'admettant comme pôles que des valeurs fondamentales. Or nous allons voir qu'il y a effectivement un pôle, pour certaines fonctions u. Si nous représentons notre intégrale par $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} P_n$, on a

$$P_n = \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} u(X)\chi(X) \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K^{(n)}(X,A)\chi(A)u(A)\,dV_A\,dV_X,$$

où les $K^{(n)}$ sont définis comme au paragraphe précédent. On en déduit, comme dans le cas classique, l'inégalité

$$P_{2n}^2 \leqslant P_{2n-2}P_{2n+2} \quad (n \geqslant 1, \text{ en posant } P_0 = \int^{(m)} \chi u^2\, dV),$$

et tous les P_{2n} sont positifs ou nuls; le rapport de l'un d'eux au précédent est donc une fonction croissante de n, et la série a un rayon de convergence fini, sauf si P_2 est nul. Mais on a aussi

$$P_2 = \int\limits_{\text{espace}}^{(m)} \chi(X)\left[\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K(X,A)\chi(A)u(A)\,dV_A\right]^2 dV_X.$$

Il faut donc que la fonction $\chi(X)\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} K(X,A)\chi(A)u(A)\,dV_A$ soit identiquement nulle dans son domaine de continuité, pour que P_2 soit nul. Il y a certainement des fonctions u pour lesquelles cela n'arrive pas, et notre proposition en résulte.

6. Application aux opérations du type elliptique. Soit $\mathcal{F}$ une opération du type elliptique, conforme aux hypothèses du paragraphe 1, et douée d'une solution fondamentale principale $G(X,\Xi)$. Soit d'autre part $\chi(X)$ une fonction, continue hors des variétés closes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, admettant une limitation $O(r_1^{h-1}+r_2^{h-2})$ $(0<h\leqslant 1)$ dans un domaine borné qui contient $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$, et tendant vers zéro quand X s'éloigne indéfiniment. Soit enfin $f(X)$ une fonction qui, dans un domaine borné contenant $\Sigma_p\,\mathfrak{M}_p$, remplit les conditions du chapitre II, § 1, et qui, dans le reste de l'espace, est continue et inférieure en valeur absolue à une certaine puissance de $L(O,X)$. Il est évident qu'on peut reprendre les raisonnements du paragraphe 3 pour l'équation

$$\varrho(X) - \lambda\chi(X)\int\limits_{\text{espace}}^{(m)} G(X,A)\varrho(A)\,dV_A = f(X), \tag{14}$$

quoique χ soit non borné au voisinage de deux variétés closes, qui n'ont pas le même nombre de dimensions. Ainsi les théorèmes de Fredholm sont valables.

Considérons maintenant l'équation

$$\mathcal{F}u + \lambda \chi u = f, \tag{15}$$

et proposons-nous d'en trouver les solutions régulières dans tout l'espace, et telles que, quand X s'éloigne indéfiniment, $\overline{\lim} \frac{\log|u(X)|}{\log L(O,X)}$ ne soit pas $+\infty$. Si nous posons

$$\varrho = f - \lambda \chi u, \tag{16}$$

il résulte des raisonnements rappelés au paragraphe 1 qu'on a

$$u(X) = -\int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\, \varrho(A)\, dV_A, \tag{17}$$

ce qui entraîne l'équation (14). Réciproquement, si ϱ est une solution de l'équation (14), soumise aux conditions déjà vues, la fonction u définie par (17) est une solution de notre problème.

En particulier, si $f = 0$, la fonction u est identiquement nulle, à moins que λ ne soit un pôle du noyau résolvant; ces pôles se nommeront ici les *valeurs propres*, relatives à notre équation (15), pour l'espace entier. Les choses se passent comme pour les problèmes de Mr Picard (II, § 16); par analogie, G peut être nommé *fonction de Green pour l'espace entier.*

Si l'opération $\mathcal{F}$ est identique à son adjointe, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + c\,u,$$

la fonction G est symétrique. Si en outre χ est de signe constant, il y a au moins une valeur propre; il y en a même une infinité, car $G(X, \Xi)$ n'est pas une somme de produits de fonctions de X par des fonctions de Ξ, et ces valeurs sont toutes réelles.

Un cas particulier est à mentionner spécialement. Plaçons-nous dans l'espace euclidien (x, y, z) à trois dimensions. Soit Δ le laplacien, et soit r la distance entre le point variable et l'origine. Considérons l'équation

$$\Delta u - u + \lambda \frac{u}{r} = 0.$$

Nos raisonnements s'appliquent, et nous en concluons l'existence d'une infinité de valeurs propres, toutes réelles. Ces valeurs sont toutes positives, car u s'annule à l'infini, et, si λ est négatif,

u ne peut atteindre ni maximum positif ni minimum négatif (II, § 13). Or si nous posons

$$\xi = \lambda x, \quad \eta = \lambda y, \quad \zeta = \lambda z, \quad \varrho = \lambda r,$$

notre équation devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{u}{\varrho} - \frac{u}{\lambda^2} = 0.$$

Ainsi il existe une infinité de valeurs positives de μ pour lesquelles l'équation

$$\Delta u + \frac{u}{r} - \mu u = 0$$

admet des solutions non identiquement nulles, nulles à l'infini; ces valeurs ont $\mu = 0$ comme unique valeur d'accumulation. Il s'agit là d'une célèbre équation de M^r^ Schrödinger. Il était peut-être intéressant de parvenir à ce résultat sans calculer les fonctions propres.

Bonny-sur-Loire, le 30 octobre 1935.

Addendum

Dans ce travail, les problèmes du type de Dirichlet ne sont pas traités dans les hypothèses générales du Chapitre II, § 1. Une méthode qui permet non seulement de combler cette lacune, mais encore d'aborder certains cas nouveaux, est indiquée dans une Note: *Existence de certaines dérivées des fonctions de Green; conséquences pour les problèmes du type de Dirichlet* (Comptes-rendus, **202**, 1936, p. 380 à 382). D'autres résultats sont sommairement annoncés dans la Note: *Problèmes des types de Dirichlet et de Neumann dans certains cas où les données sont discontinues* (Comptes-rendus, **201**, 1935, p. 925 à 928).