Lehrbuch
der
Geometrie,
besonders
als Hülfsmittel zum Unterrichte
an höheren Bildungsanstalten,

abgefaßt
von Förstemann

Wilhelm August Förstemann,
Doctor der Philosophie und Professor am Gymnasium zu Danzig.

Zweiter Theil,
welcher die Anwendung der Algebra zur Auflösung geometrischer Aufgaben, die Trigonometrie, Polygonometrie und Cyclometrie enthält.

Mit sechs Figurentafeln.

Danzig,
im Verlage bei S. Anhuth.
1829.

Vorwort.

Bei Bearbeitung dieses zweiten Theils hat der Verf. den im Vorworte zum ersten Theile angegebenen Plan des Werkes im Wesentlichen unverändert im Auge behalten. Er bemühete sich, das Buch so einzurichten, daß ein Gymnasiallehrer sich desselben als Leitfadens für seine Vorträge bedienen, aus ihm aber auch Stoff zu Uebungen der Schüler an mannichfaltigen Aufgaben entnehmen könne, und daß die Schüler in demselben das Mittel fänden, sich durch häusliches Studium mit dem in den Lehrstunden Vorgetragenen immer vertrauter zu machen, ja, wenn nur Kraft und Lust nicht fehlen, — und gewiß werden unter einer Menge von Schülern sich wohl immer mehre finden, welche nicht bloß Kraft besitzen, sondern sie auch mit Lust auf das ernste, aber so sehr lohnende Studium der Mathematik wenden, — ihre Kenntnisse noch über die Grenzen des Vorgetragenen auszudehnen. Es ist daher Einiges aufgenommen, was wohl kaum zum Vortrage in den Lehrstunden geeignet seyn möchte. So z. B. die in den §§. 478 bis 494. enthaltenen polygonometrischen Untersuchungen, welche der Verf. nicht auslassen, und auch nicht gar zu dürftig behandeln wollte, weil sie in ziemlichem Grade selbst Practikern wichtig sind, und weil es wenig Bücher giebt, welche darüber etwas Genügendes enthalten.

Was die Art des Vortrags betrifft, so schien es nöthig, denselben, namentlich in der Begründung der Trigonometrie, nicht so kurz und gedrängt zu halten, wie in den ersten Kapiteln des ersten Theils. Denn die erst in den obern Klassen abzuhandelnden Gegenstände erlauben nicht eine so häufige Repetition in den Unterrichtsstunden, wie die Elemente, welche in den mittleren Klassen getrieben werden, und es scheint von Wichtigkeit, daß es dem Schüler möglich gemacht werde, zu Hause nicht bloß sich einige Resultate der Untersuchung wieder vorzuführen, sondern auch sich wieder in den Gang der Untersuchung selbst hinein zu denken, das eigentliche Wesen der ihm neuen Lehren immer besser zu begreifen, und sich auch hiedurch zu kräftigen, um diese neuen Lehren als ein Mittel zu eignen Untersuchungen und eignen Auflösungen von Aufgaben gebrauchen zu können.

Die dritte Abtheilung der Epipedometrie, oder die erste in gegenwärtigem Bande, ist hauptsächlich zu einer Vorbereitung auf die folgende Abtheilung, die Trigonometrie, bestimmt. Es ist aber keinesweges des Verf. Meinung, daß sie vollständig durchgenommen werden müsse, ehe man zu der Trigonometrie schreite. Besonders möchte auch der Lehrer fehlen, welcher sich zu lange bei den Erörterungen über das + und — aufhielte, die sich bei den Aufgaben von §. 356 bis §. 362. finden. Dieselben sind nämlich schwerlich von der Art, daß sie gleich zum erstenmale dem Anfänger durchgängig zur völligen Deutlichkeit gebracht werden können. Der Verf. empfiehlt übrigens dieselben der Beachtung und Prüfung derjenigen, die sich für Betrachtungen dieser Art interessiren, welche weder die Arithmetik für sich, noch die Geometrie für sich, sondern gewissermaßen die Brücke zwischen diesen beiden Theilen der reinen Mathematik betreffen. Er hätte dieselbe leicht noch weiter ausdehnen, vielleicht auch noch fester begründen können. Es schien ihm aber hinreichend, den Schüler schon hier einigermaßen auf die Nothwendigkeit der Berücksichtigung des + und — aufmerksam zu machen, ehe er in die Trigonometrie eingeführt werde. Er benutzt übrigens diese Gelegenheit, um seine Meinung auszusprechen, daß die Anwendung des + und — in der algebraischen Behandlung der Geometrie nur bei der Methode der Coordinaten, welche man auch wohl analytische Geometrie nennt, einfach, klar und von den Schwierigkeiten befreit erscheint, von denen sie außerdem behaftet ist. In dem Kapitel der Uebungsaufgaben, welche diese Abtheilung begleiten, hat sich der Verf. genöthigt gesehen, sich sehr zu beschränken; sonst hätte er gern noch Einiges hinzugefügt, z. B. die Ableitung einer Gleichung zwischen den sechs geraden Linien, welche vier Punkte einer Ebene verbinden, nebst Anwendungen derselben.

Die Anordnung der Grundlehren der Trigonometrie wird man sehr vom Herkömmlichen abweichend, und vielleicht hie und da etwas umständlich finden. Es sollten dieselben aber hier nicht als fertige Wissenschaft, etwa bloß zur Uebersicht, aufgestellt werden, sondern vielmehr so, wie sie im Geiste des Schülers zweckmäßig hervorgerufen werden können. Der Schüler fragt aber z. B. sehr bald, wozu denn die Begriffe der Sinus, Cosinus u. s. w. dienen; deshalb ist schon in den §§. 393 bis 397. die Anwendung der goniometrischen Functionen auf das rechtwinklige Dreieck gezeigt, was außerdem unnöthig gewesen wäre, da dieselbe später ausführlicher gelehrt werden kann. Es würde den Verf. freuen, wenn diese Anordnung der Trigonometrie im Ganzen den Beifall erfahrener Lehrer gewinnen sollte.

Bei den Erklärungen der goniometrischen Functionen ist die alte Herleitungsweise, aus Linien, die am Kreise construirt sind, zu Grunde gelegt. Außer dem in der Anm. von §. 392. angegebenem Vorzuge, daß sie oft mit Nutzen gebraucht werden könne, um Sätze anschaulich zu machen, hat sie auch den, daß man bei ihrer Anwendung leicht erkennt, wie auch Winkeln, welche nicht zwischen den Grenzen 0^0 und 90^0 enthalten sind, Functionen zukommen, und endlich zeigt sie sich auch nothwendig bei Aufstellung der Begriffe der Sinus u. s. w. in der höheren Analysis, wo sie als Functionen der veränderlichen Zahlen erscheinen, welche einen veränderlichen Bogen ausdrücken, wenn der Radius $= 1$ gesetzt ist. Dieses scheinen deutsche Schriftsteller wohl nicht genug bedacht zu haben, wenn sie nur die Herleitung der Begriffe dieser Functionen aus den Verhältnissen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks für die wahrhaft wissenschaftliche halten.

Es schien zweckmäßig, in der Behandlung der Trigonometrie und überhaupt in diesem ganzen Werke, nicht analytische Kenntnisse, welche die gewöhnlichen Elemente der Buchstabenrechnung überschreiten, also namentlich nicht Kenntnisse von der Reihenentwicklung voraus zu setzen. Daher wird man nichts von den allgemeinsten Erklärungen der goniometrischen Functionen, welche sich auf Betrachtung des Ausdrucks $e^{x\sqrt{-1}}$ stützen, nichts von der Berechnung derselben mittelst unendlicher Reihen finden. Dieses und Aehnliches gehört wohl, wenigstens beim Gymnasialunterrichte, nur in den Vortrag über die Elemente der Analysis, besonders in die Lehre von den Reihen.

Die dem Verf. eigenthümliche Begründung des + und — der Secanten und Cosecanten, bei welcher diese Functionen, so gut wie die übrigen, ihre Scalen erhalten, ist schon in der kleinen Schrift über den Gegensatz der positiven und negativen Größen vorgetragen. Noch hat sich Niemand über dieselbe öffentlich und schriftlich, beifällig oder mißfällig, ausgesprochen. Doch ist der Verf. unverändert der Meinung, daß, wenn man überhaupt das + und — der Functionen durch Construction ableiten oder verdeutlichen will, seine Methode in Bezug auf die Secanten und Cosecanten die einzige zweckmäßige und der Wissenschaft angemessene ist. Man wird zugestehen, daß es zweckmäßig sey, für jede Function bei dieser Untersuchung des + und — eine Scale zu haben, wenn man zugiebt, was bei §. 362. ausgesprochen ist, daß sich an den Werthen einer gesuchten geraden Linie ein deutsames + und — zu finden pflegt, wenn man für diese Linie eine unbegrenzte Gerade von gegebener Richtung hat, in welcher sie liegen muß, ein undeutsames, wenn dies nicht der Fall ist. Indem der Verf. wünscht, daß diejenigen, welche sein Buch öffentlich beurtheilen werden, ihr Urtheil über jene Construction der Secanten und Cosecanten aussprechen möchten, erlaubt er sich zugleich auf die §§. 427, 436, 437 zu verweisen, welche einiges Eigenthümliche enthalten.

Das letzte Kapitel der vierten Abtheilung hat wieder den Zweck, die Schüler, wenigstens die fähigeren, durch mannichfache Uebung mit dem so überaus wichtigen goniometrischen Calcul vertrauter zu machen. Der Verf. strebte dabei nach möglichster Einfachheit der Ableitungen, indem er dafür hält, daß weitläufige, aller Eleganz entbehrende Ableitungen schlechter sind, als gar keine; vielleicht ist ihm dies Streben wenigstens an einigen Stellen gelungen. Uebrigens wählte er für dieses Kapitel vorzüglich solche Gegenstände, die ihm ein besondres Interesse zu gewähren, oder besonders lehrreich zu seyn schienen. Vieles, was er auch nicht ungern aufgenommen hätte, mußte er weglassen, um diesen Band nicht über die Gebühr zu vergrößern.

In der Cyclometrie machte der Umstand, daß der Satz, die gerade Linie sey die kürzeste zwischen zwei gegebenen Punkten, nicht als Axiom angenommen werden sollte, viele Weitläufigkeiten nöthig. In den Betrachtungen über Curven, welche diesem Satze und dem §. 533. vorangehen mußten, wird man manches vom Herkommen abweichende finden. So ist an die Stelle des Begriffs von Curven, die nach einer Seite hin convex sind, welche man als solche erklärt, die von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden können, der Begriff der Curven ohne Wendungspunkte getreten, weil jener Begriff sich bei dem Satze von §. 533. II. unzulänglich zeigte. Durch die Ableitungen von §. 537 und 538. ist vielleicht eine Lücke im gewöhnlichen Vortrage zweckmäßig ergänzt worden. Die Quadratur des Kreises, welche von Sätzen ausgehet, die zuerst James Gregory, für Kegelschnitte überhaupt, bewiesen hat, ist, besonders durch die §§. 547 bis 549. zu großer Einfachheit der Rechnung gebracht worden. In Bezug auf die Berechnung der Lunulen ist im §. 556. der gewöhnliche mangelhafte Vortrag berichtigt worden. In dem Kapitel, welches Maxima und Minima überschrieben ist, liegt außer den bekannten Geometrie-Lehrbüchern von Th. Simpson und Legendre ein ganz neues von Didiez (Cours complèt de Géométrie, 1re Partie géom. plane, section élémentaire, Paris 1828.) zu Grunde. Die §§. 559 bis 572. aber hält der Verf. für sein Eigenthum.

Die in den zwei Anhängen behandelten Gegenstände werden der Beachtung der Leser, und auch derjenigen empfohlen, welche das Buch recensiren möchten. Letztere werden zugleich gebeten, sich doch darüber zu erklären, ob das Buch nicht auch Lehrern der Mathematik zu empfehlen sey, selbst für den Fall, daß sie dasselbe nicht eigentlich ihrem Unterrichte zu Grunde legen, oder ihren Schülern in die Hände geben wollen.

Danzig, im September 1829.

Der Verfasser.

Uebersicht des Inhaltes.

Epipedometrie.

Dritte Abtheilung.

Vierte Abtheilung.

Fünfte Abtheilung.

Anhänge.

Epipedometrie.

Dritte Abtheilung.

I. Auflösung geometrischer Aufgaben durch Algebra.

§. 348. Geometrische Aufgaben haben meistens den Zweck, aus gegebenen bestimmenden Stücken eines Constructs entweder das ganze Construct oder nur einige der übrigen Stücke zu finden. Die Auflösung solcher Aufgaben kann auf zweierlei Weise geschehen, entweder durch geometrische Construction, oder durch algebraische Rechnung. Bei der Auflösung durch Construction wird gewöhnlich aus den bestimmenden Stücken das ganze Construct hervorgebracht, so daß in diesem alle abhängige Stücke des Constructs auf einmal vor die Augen gelegt sind; bei der algebraischen Behandlung berechnet man meistens nur eins oder einige der abhängigen Stücke aus den bestimmenden. Beispiele der Auflösung durch Construction finden sich in Menge im ersten Theile dieses Werkes; die Auflösung durch Algebra soll den Hauptgegenstand der gegenwärtigen Abtheilung bilden.

Die algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben kann nicht als etwas rein Algebraisches betrachtet werden, denn sie kann der früher vorgetragenen geometrischen Lehren nicht entbehren; sie muß vielmehr vermittelst derselben die Gleichungen bilden, durch deren Auflösung in jeder Aufgabe die gesuchten Stücke sich ergeben müssen. Als geometrische Hülfssätze dieser Art werden besonders häufig Sätze von Flächenräumen, vor allem der Pythagorische Lehrsatz, und Sätze der Aehnlichkeitslehre angewandt werden. Es wird aber, bei dieser unvermeidlichen Vermischung der Geometrie mit Arithmetik, doch im Allgemeinen unser Bestreben seyn, in die Schlußreihen nur wenig Geometrisches aufzunehmen, und, nachdem die zu Grunde zu legenden Gleichungen aus geometrischen Sätzen hergeleitet sind, die weitre Behandlung, so weit es angehet, bloß durch algebraische Schlüsse zu führen.

Damit aber die algebraische Behandlung der geometrischen Aufgaben auf bloße Operationen an Zahlen, auf Rechnungen zurückgeführt werde, muß man allenthalben die Größen durch Zahlen ausgedrückt denken. Gleichungen, wie $AB = m$ (oder z. B. $= 7$), $CD = n$ (oder $= 5$), die in einer und derselben Aufgabe vorkommen, sagen dann: „Die Geraden AB, CD werden durch die Zahlen m (oder 7) und n (oder 5) in Bezug auf eine und dieselbe Einheit ausgedrückt.“ Die Gleichung $\triangle ABC = p$ spricht aus: „Das Dreieck ABC wird durch die Zahl p ausgedrückt, in Bezug auf dasjenige Quadrat, als Flächeneinheit, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist“ (S. §. 212.).

Nach Ableitung der Auflösungsformeln für eine Aufgabe wird es übrigens oft noch ziemlich nothwendig seyn, dieselben näher zu betrachten, um zu finden, in wie fern sie wirklich das Bezweckte und Gesuchte darstellen. Dies wird besonders bei den aus quadratischen Gleichungen entstehenden doppelten Werthen einer Unbekannten der Fall seyn, so wie auch bei negativen Werthen. Alles dieses aber wird sich, wie manches Andre, erst an Beispielen gehörig deutlich machen lassen, weshalb alle weiteren allgemeinen Bemerkungen hier unterdrückt werden sollen.

Was die Anwendung der Idee des Gegensatzes der geraden Linien und der Winkel und die Anwendung der negativen Zahlen auf diese Größenarten betrifft, so sehe man, zum besseren Verständnisse des Folgenden, deshalb den sechsten Anhang des ersten Theiles nach.

§. 349. Aufgabe. Von einem Dreiecke sind die Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ gegeben; man soll die Abschnitte der Seiten berechnen, welche auf ihnen durch die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises gebildet werden.

Auflösung. In Fig. 1. seyen M, N, P die Berührungspunkte, so ist (§. 132) $PA = AM$, $MB = BN$, $NC = CP$. Man setze nun $AM = x$, $BN = y$, $CP = z$, so finden sich die Ansatzgleichungen

$$(1) \quad y + z = a,$$
$$(2) \quad z + x = b,$$
$$(3) \quad x + y = c.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen kann besonders einfach so geschehen: Man addire alle Gl., so ist

$$(S) \quad 2x + 2y + 2z = a + b + c.$$

Hievon ziehe man die Gl. (1), verdoppelt, nämlich

$$2y + 2z = 2a$$

ab, so bleibt $\quad 2x = -a + b + c;$

also ist $\quad x = \frac{-a + b + c}{2}.$

Auf ähnliche Art findet sich

$$y = \frac{a - b + c}{2}, \quad z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Durch Probe erkennt man die Richtigkeit der gefundenen Formeln, nämlich

$$y + z = \frac{a - b + c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{2a}{2} = a, \text{ u. s. w.}$$

Wollte man zur Abkürzung den Umfang des Dreiecks, $a + b + c$, durch $2s$, also mit s den halben Umfang bezeichnen (vergl. §. 277), so wäre nach (S)

$$x + y + z = s,$$

und daher

$$x = s - a,$$
$$y = s - b,$$
$$z = s - c.$$

§. 350. Aufgabe. Um ein Dreieck ABC (Fig. 2) ist ein Kreis mit dem Centrum M beschrieben, die Radien MA, MB, MC sind gezogen, und die Winkel des Dreiecks BAC oder A u. s. w. sind gegeben, so daß $A + B + C = 2$ R; man soll die Theile dieser Winkel berechnen, in welche sie durch die Radien getheilt werden.

Auflösung. Wegen der gleichschenkligen Dreiecke hat man drei Paare gleicher Winkel, welche die gesuchten sechs Winkel bilden. Man setze W. CBM = MCB = x, W. ACM = MAC = y, W. BAM = MBA = z, so hat man die drei Gleichungen

$$(1) \quad y + z = A,$$
$$(2) \quad z + x = B,$$
$$(3) \quad x + y = C.$$

Also $x = \frac{-A + B + C}{2}$, $y = \frac{A - B + C}{2}$, $z = \frac{A + B - C}{2}$

Oder auch $x = \frac{A + B + C}{2} - A$ u. s. w.

Nun ist $\frac{A+B+C}{2} = \mathfrak{R}$, folglich $x = \mathfrak{R} - A$, eben so $y = \mathfrak{R} - B$, $z = \mathfrak{R} - C$, d. h. x ist das Complement von A, u. s. w. Man kann dies auch leicht aus geometrischen Gründen, mittelst des Satzes vom Peripheriewinkel, ableiten.

Bemerkung wegen des Positiven und Negativen. Aus den Gl. $x = \mathfrak{R} - A$ u. s. w. siehet man leicht, daß für ein stumpfwinkliges Dreieck einer der gesuchten Winkel einen negativen Werth erhalten muß. Ist z. B. in Fig. 2. b der W. C $> \mathfrak{R}$, (etwa $= 110°$), so bekommt man für z einen negativen Werth ($-20°$), dessen Nothwendigkeit geometrisch durch die Lage der Linien MA, MB begründet ist, welche sich hier von der in Fig. 2 a. unterscheidet. Wollte man den Gebrauch der Vorstellung des Gegensatzes der Winkel nicht gestatten, so würde man für diesen Fall des stumpfen W. C. die Aufgabe besonders auflösen müssen. Dabei würde man die unbekannten Zahlen für die Winkel durchgängig positiv denken, könnte sie etwa durch x', y', z' bezeichnen, würde so die Ansatzgleichungen finden

$$(1) \quad y' - z' = A.$$
$$(2) \quad x' - z' = B,$$
$$(3) \quad x' + y' = C,$$

und hieraus erhalten

$$x' = \frac{-A+B+C}{2}$$
$$y' = \frac{A-B+C}{2}$$
$$z' = \frac{-A-B+C}{2} \text{ oder } = -\frac{A+B-C}{2}.$$

Hier stimmen die Werthe von x', y' mit den obigen für x, y überein; der von z' aber ist das Gegentheil dessen von z, und daher positiv, wenn der von z negativ ist.

Man siehet, daß hier die Idee des Gegensatzes der Winkel sehr vortheilhaft ist, in so fern sie die Allgemeinheit der obigen Auflösung begründet. Aehnliche Vortheile werden sich noch ungemein häufig bei der Anwendung des Gegensatzes der Geraden und der Winkel ergeben.

Bei der sehr verwandten Aufgabe von §. 349. kann nichts Negatives für die gesuchten Linien aus den gefundenen Formeln erscheinen, weil nach §. 62. dabei keine der Zahlen a, b, c größer seyn darf, als die Summe der beiden andern, und daher jeder der Ausdrücke $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$ positiv ist. (Man müßte denn eine der Zahlen a, b, c oder mehre derselben als in sich negativ annehmen, wozu aber kein Grund vorhanden ist.)

Anm. Die Aufgabe des §. 349. betrifft bloß Linien, die des gegenwärtigen nur Winkel. Im Nächsten werden die Aufgaben wieder bloß Linien betreffen. Die Auflösung von Aufgaben, in denen sich Linien und Winkel, theils als gegebene theils als gesuchte Größen, mischen, kann erst in der folgenden vierten Abtheilung gelehrt werden. Doch können im Nächsten rechte Winkel vorkommen, auch Bedingungen, daß gewisse Winkel halbirt werden, u. dgl.

§. 351. 1) Aufgabe. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ABC, worin $\angle C = 90°$, ist gegeben die Kathete $BC = a$ und die Summe der beiden andern Seiten $AB + AC = s$; man soll daraus diese beiden andern Seiten berechnen.

Erste Auflösung. Wird die Hypotenuse x genannt, so ist die unbekannte Kathete $AC = s - x$, also, vermöge des Pythagorischen Lehrsatzes, der hier den Hauptgrund der Auflösung geben muß,

$$a^2 + (s-x)^2 = x^2$$

oder $\quad a^2 + s^2 - 2sx + x^2 = x^2,$

daher $\quad 2sx = a^2 + s^2,$

und $AB = x = \frac{s^2 + a^2}{2s}$.

Nun ist $AC = s - x = s - \frac{s^2 + a^2}{2s} = \frac{2s^2}{2s} - \frac{s^2 + a^2}{2s}$,

oder $AC = \frac{s^2 - a^2}{2s}$.

Bei der Probe ist $AC^2 = \left(\frac{s^2 - a^2}{2s}\right)^2 = \frac{s^4 - 2a^2s^2 + a^4}{4s^2}$

$BC^2 = a^2 = \frac{4a^2s^2}{4s^2}$

also $AC^2 + BC^2 = \frac{s^4 + 2a^2s^2 + a^4}{4s^2}$.

Aber es ist auch $AB^2 = \left(\frac{s^2 + a^2}{2s}\right)^2 = \frac{s^4 + 2a^2s^2 + a^4}{4s^2}$,

folglich $AC^2 + BC^2 = AB^2$, wie es seyn muß.

Zweite Auflösung. Man setze $AB = x$ und $AC = y$, so hat man

$$(1) \quad x + y = s,$$

$$(2) \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Da $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$, so folgt leicht

$$(3) \quad x - y = \frac{a^2}{s}.$$

Jetzt kennt man in (1) und (3) die Summe und die Differenz der Unbekannten, und findet daraus

$$x = \frac{s}{2} + \frac{a^2}{2s} = \frac{s^2 + a^2}{2s},$$

$$y = \frac{s}{2} - \frac{a^2}{2s} = \frac{s^2 - a^2}{2s}.$$

2) Aufgabe. Es ist gegeben die Kathete $BC = a$, und die Differenz der beiden andern Seiten, $AB - AC = d$; man soll diese Seiten berechnen.

Auflösung. Es genüge hier die der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe entsprechende Methode. Wenn $AB = x$, $AC = y$, so hat man

$$(1) \quad x - y = d,$$
$$(2) \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Daraus findet man $x + y = \frac{a^2}{d}$,

folglich $x = \frac{a^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{a^2 + d^2}{2d}$,

$$y = \frac{a^2}{2d} - \frac{d}{2} = \frac{a^2 - d^2}{2d}.$$

Bemerkung wegen + und —. Sollen alle Seiten durch positive Zahlen ausgedrückt werden, so muß in **1.** seyn s |ı a, in **2.** aber d ı| a (§. 62). Nimmt man, hiemit im Widerspruche, s ı| a, oder d |ı a, jedoch s wie d positiv, so erscheint für die Kathete y ein negativer Werth, bei welchem jedoch die aus dem Pythagorischen Satze entsprungene Gl. (2) eben so gut Statt findet, wie bei der entgegengesetzten positiven Zahl, weil $(-a)^2 = a^2$.

Anm. Ungeachtet in beiden Aufgaben die Gl. (2) die Unbekannten in der zweiten Potenz enthielt, so kam man in den Auflösungen doch jedesmal auf Gleichungen des ersten Grades zurück, woher die Werthe der Unbekannten Ausdrücke ohne Wurzeln, also rational wurden. Dieses giebt ein Mittel, Verbindungen von drei rationalen Zahlen, ja von drei ganzen Zahlen zu finden, welche als Ausdrücke von Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden können.

Wir brauchen bloß die Aufgabe in 1. hiezu anzuwenden, da die andre Aufgabe auf ganz ähnliche Resultate führen würde. Man setze $s = 2$, $a = 1$, so bekommt man $x = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$, $y = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$, so daß die Seiten sind $AB = \frac{5}{4}$, $AC = \frac{3}{4}$, $BC = 1$. Man verstehe unter m irgend eine Zahl, so müssen die Werthe $\frac{5}{4}m$, $\frac{3}{4}m$, $1\,m$, als Seiten eines Dreiecks angenommen, ein Dreieck geben, das dem ABC ähnlich, also rechtwinklig ist. Für $m = 4$ bekommt man die Zahlen 5, 3, 4 als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, und wirklich ist $3^2 + 4^2 = 5^2$. (§. 202. II. 1.)

Da die Formeln

$$\frac{s^2 + a^2}{2s},\quad \frac{s^2 - a^2}{2s},\quad a$$

die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks geben, so müssen auch ganz allgemein die Formeln

$$\frac{s^2 + a^2}{2s} \cdot m,\quad \frac{s^2 - a^2}{2s} \cdot m,\quad a.\ m.$$

dasselbe thun. Man setze $m = 2s$, so sind

$$s^2 + a^2,\quad s^2 - a^2,\quad 2as$$

Werthe, welche immer drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks geben.

Für $s = 2$, $a = 1$ bekommt man hieraus, wie oben, die Zahlen 5, 3, 4. Für $s = 5$, $a = 2$ bekommt man 29, 21, 20 u. dgl.

Die hiemit verwandte bloß arithmetische Aufgabe, drei ganze Zahlen, x, y, z zu finden, so daß $x^2 = y^2 + z^2$, gehört zur sogenannten unbestimmten Analytik; man siehet, daß sie gelöset wird, wenn

$$x = p^2 + q^2,\quad y = p^2 - q^2,\quad z = 2pq$$

gesetzt wird, unter p und q beliebige ganze Zahlen verstanden.

§. 352. 1) Aufgabe. Aus der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $= h$ und der Summe der Katheten $= s$ diese Katheten zu berechnen.

Die Auflösung mag auf verschiedene Weise durchgeführt werden.

I. Nur eine der Katheten soll durch einen Buchstaben, x, bezeichnet werden. Die andre ist dann $= s - x$, folglich nach dem Pythagorischen Satze:

$$x^2 + (s - x)^2 = h^2,$$

woher entstehet $2x^2 - 2sx + s^2 = h^2$,

oder $$x^2 - sx = \frac{h^2 - s^2}{2}.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt

$$x = \frac{s \pm \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}. \text{*)}$$

*) Es wird nicht unnütz seyn, hier aus der Algebra die Formeln zur Auflösung einer unreinen quadratischen Gleichung aufzustellen.

Daraus entstehet für die andre Kathete der Werth

$$s - x = \frac{s \mp \sqrt{2h^2 - s^2}}{2}.$$

Die Ableitung dieses Werthes zeigt unmittelbar, daß, wenn für die erste Kathete der Werth mit $+$ vor der $\sqrt{\ }$ genommen wird, die andre den Werth mit $-$ erhalten muß, und umgekehrt diese den Werth mit $+$, wenn man bei jener $-$ genommen hat.

II. Jede der Katheten soll mit einem Buchstaben bezeichnet werden, die eine mit x, die andre mit y. Man gelangt zu den Ansatzgleichungen

$$(1) \qquad x + y = s,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = h^2.$$

Nun kann man auf verschiedene Weise verfahren. Z. B.

A. Eliminirt man ganz auf gewöhnliche Weise eine Unbekannte, etwa y, indem man ihren Werth aus (1), nämlich $y = s - x$ in (2) substituirt, so hat man eine Auflösung, die im Wesentlichen mit der in I zusammenfällt.

B. Da man in (1) die Summe der Unbekannten kennt, so suche man die Differenz $x - y$; denn aus dieser und

---

I. Für eine quadratische Gleichung von der Form

$$x^2 + px = q,$$

wo also x^2 den Coefficienten 1 hat, ist die Formel zur Auflösung

$$(1) \quad x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q},$$

oder auch $$(2) \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

II. Für eine quadratische Gleichung von der allgemeinern Form

$$ax^2 + bx = c$$

ist die Auflösungsformel

$$(3) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

oder $$(4) \quad x = \frac{1}{a}.\left(-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}b)^2 + ac}\right).$$

der Summe werden sich dann die Unbekannten leicht finden lassen. Am bequemsten ist es dazu, die Differenz mit einem Buchstaben, er sey u, zu bezeichnen. Dann folgen aus $x+y = s$ und $x-y = u$ für x und y die Ausdrücke

$$x = \frac{s+u}{2}, \qquad y = \frac{s-u}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (2), so bekommt man eine Gleichung, die bloß noch u als Unbekannte enthält, nämlich

$$\frac{s^2+2su+u^2}{4} + \frac{s^2-2su+u^2}{4} = h^2,$$

vereinfacht $\quad \dfrac{s^2+u^2}{2} = h^2,$

woher $\quad u^2 = 2h^2 - s^2,$

und $\quad u = \pm\sqrt{2h^2-s^2},$

folglich $\quad x = \dfrac{s+u}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot(s \pm \sqrt{2h^2-s^2}),$

$$y = \frac{s-u}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot(s \mp \sqrt{2h^2-s^2}).$$

C. Man findet aber auch die Differenz $x-y$, ohne sie mit einem besondern Buchstaben zu bezeichnen, folgendermaßen:

Man quadrire (1) und ziehe von der entstandnen Gleichung die (2) ab, so kommt $2xy = s^2 - h^2$.
Dies von (2) abgezogen, bleibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2h^2 - s^2,$$

Hieraus ist durch Wurzelausziehung

$$x - y = \pm\sqrt{2h^2-s^2},$$

und nun folgen hieraus und aus (1) dieselben Werthe wie vorhin.

Bemerkung 1. Ein Verfahren wie unter B. kann bei vielen ähnlichen Aufgaben angewandt werden, und verdient, vorzüglich empfohlen zu werden. Man kann dabei die Sache so betrachten, als sey zu den zwei Gleichungen noch eine dritte mit einer dritten Unbekannten hinzugefügt, nämlich $x - y = u$, durch welche Hinzufügung die Elimination und Auflösung erleichtert wird.

Bemerkung 2. Die Auflösungsformel für x unterscheidet sich von der für y nur in den Vorzeichen vor der Wurzel, und schon aus der Auflösung in I. erhellt, daß man eigentlich zwei Antworten auf die in der Aufgabe enthaltene Frage bekommt, nämlich

entweder (a) $x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{2h^2 - s^2})$, $y = \frac{1}{2}(s - \sqrt{2h^2 - s^2})$,
oder (b) $x = \frac{1}{2}(s - \sqrt{2h^2 - s^2})$, $y = \frac{1}{2}(s + \sqrt{2h^2 - s^2})$.

Da übrigens die zweite Antwort dieselben Zahlen als Katheten giebt, wie die erste, so kann man sich mit einer dieser Antworten begnügen. Z. B. für $s = 41$, $h = 29$ ist es hinreichend, zu bestimmen $x = 21$, $y = 20$, mit Weglassung von $x = 20$ und $y = 21$.

Alles dieses hat seinen Grund in Folgendem: Die Gl. (1) und (2) enthalten x und y so, daß durch deren Vertauschung die Aufgabe sich nicht ändert, indem $y + x = s$ und $y^2 + x^2 = h^2$ mit den Gl. (1) und (2) identisch sind. Man drückt dieses aus: „x und y sind symmetrisch in (1) und (2) enthalten," oder: „diese Gleichungen sind symmetrisch für x und y." Jene Vertauschung muß daher auch an den Auflösungsformeln erlaubt seyn, so daß, wenn

$$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{2h^2 - s^2}), \quad y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{2h^2 - s^2}),$$

auch muß seyn können

$$y = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{2h^2 - s^2}), \quad x = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{2h^2 - s^2}).$$

Man erkennt den Einfluß dieser Symmetrie der Ansatzgl. (1) und (2) für x und y besonders deutlich, wenn man zuerst y, dann x aus ihnen eliminirt. So findet man zuerst für x die Gleichung

$$x^2 - sx = \frac{h^2 - s^2}{2},$$

welche sich auch in I. ergab. Für y erhält man

$$y^2 - sy = \frac{h^2 - s^2}{2},$$

eine Gl., die von der für x sich bloß darin unterscheidet, daß statt x stehet y. Es müssen also auch die Endwerthe für x zugleich die für y darstellen, und die Auflösung der Gl. für x kann als zugleich y bestimmend angesehen werden. Man darf schreiben

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2} \cdot (s \pm \sqrt{2h^2 - s^2})$$

muß aber noch die Bedingung hinzufügen, daß, wenn bei x das + vor der $\sqrt{}$ genommen ist, bei y das — gelten muß, und umgekehrt; eine Bedingung, die man daraus als nothwendig erkennt, daß nur so $x + y = s$ wird.

Auch später wird bei manchen andern Aufgaben etwas Aehnliches Statt finden, und wohl zu beachten seyn.

2) Aufgabe. Aus der Hypotenuse h und der Differenz der Katheten = d diese zu berechnen.

Auflösung. Wir wollen von den verschiedenen Methoden nur diejenige durchführen, welche der bei der vorigen Aufgabe unter II. B. angewandten analog ist. Zu den Ansatzgleichungen

$$(1) \quad x - y = d,$$

$$(2) \quad x^2 + y^2 = h^2,$$

fügen wir hinzu

$$(3) \quad x + y = z,$$

und suchen, durch Elimination von x und y, die Unbekannte z zu bestimmen. Aus (1) und (3) ist

$$(4) \quad x = \frac{z + d}{2}, \qquad (5) \quad y = \frac{z - d}{2}.$$

Die Substitution dieser Werthe in (2) giebt bei Vereinfachung

$$z^2 = 2h^2 - d^2,$$

woher $$z = \pm\sqrt{2h^2 - d^2}.$$

Hieraus entstehen nun zwei Antworten auf die vorgelegte Frage, nämlich

(a) Setzt man $z = +\sqrt{2h^2 - d^2}$ in (4) und (5), so kommt

$$x = \tfrac{1}{2}.(\sqrt{2h^2 - d^2} + d),\quad y = \tfrac{1}{2}.(\sqrt{2h^2 - d^2} - d).$$

(b) Setzt man $z = -\sqrt{2h^2 - d^2}$, so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2h^2 - d^2} + d),\quad y = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{2h^2 - d^2} - d).$$

Anm. 1. Das in (a) und (b) Gefundne ist wesentlicher von einander verschieden, als das bei der ersten Aufgabe in den zwei Antworten unter (a) und (b) Enthaltene. Dies rührt daher, daß hier x und y nur in (2), nicht auch in (1) symmetrisch enthalten sind.

Dieser Umstand hat auch die Wirkung, daß bei gewöhnlicher Elimination von y und x aus (1) und (2) sich die Gleichungen finden

$$x^2 - dx = \frac{h^2 - d^2}{2},$$

$$y^2 + dy = \frac{h^2 - d^2}{2},$$

Gleichungen, welche, wegen der Glieder $- dx$ und $+ dy$, sich nicht bloß in der Benennung der Unbekannten unterscheiden. Dies zur Vergleichung mit dem über die erste Aufgabe in Bem. 2. Gesagten.

Anm. 2. Sind h und d positive Zahlen, wie, bei der Anwendung, in der Regel wohl der Fall seyn würde; so führt (b) immer auf negative Zahlen, so daß entweder x und y, oder nur y negativ ist. In (a) aber ist dann x immer, y nur zuweilen positiv; negativ ist nämlich

y, wenn $\sqrt{2h^2 - d^2} < d$,
oder also, wenn $2h^2 - d^2 < d^2$,
oder $2h^2 < 2d^2$,
oder $h < d$ (oder h ı| d).

Dieses hängt vom Satze §. 62. 2. ab, wonach die Differenz zweier Seiten kleiner seyn muß, als die dritte Seite des Dreiecks. Dieser Satz muß sich auch auf die Zahlen erstrecken, welche die Seiten aus.

drücken, jedoch nur, wenn sie alle positiv sind. Daher muß die Annahme, $h > d$, welche jenem Satze widerspricht, auf Negatives führen.

Anm. 3. Ist in Aufg. 1. $s^2 < 2h^2$, so wird $2h^2 - s^2$ negativ, $\sqrt{2h^2 - s^2}$ also imaginär, x und y erhalten keine reelle Werthe. Statt dieser Bedingung für das Imaginärseyn darf man auch setzen $s < h\sqrt{2}$. Ist $s = h\sqrt{2}$ (oder $= - h\sqrt{2}$), so bekommt man $\sqrt{2h^2 - s^2} = o$, folglich $x = \frac{s}{2}$ und auch $y = \frac{s}{2}$, das Dreieck hat gleiche Katheten, ist ein gleichschenkliges. Für $s > h\sqrt{2}$ bekommt man sowohl x als y reell, aber einander ungleich. Man kann hieraus schließen, bei einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke sey die Summe der Katheten größer, als bei einem nicht gleichschenkligen, welches dieselbe Hypotenuse hat.

Aehnliche Betrachtungen können bei Aufg. 2. angestellt werden. Hier darf nicht $d < h\sqrt{2}$ seyn, wenn x und y reell seyn sollen. Für $d = h\sqrt{2}$ bekommt man, aus (a), $x = \frac{d}{2} = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $y = -\frac{d}{2} = - h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; die eine Kathete ist also negativ, jedoch der andern an Quantität gleich, und so hat man auch hier ein gleichschenkliges Dreieck. Will man auch negative Werthe von d, und in 1. von s gestatten, so muß, wenn x und y reell seyn sollen, hier d, wie s in 1., zwischen den Grenzen $h\sqrt{2}$ und $- h\sqrt{2}$ liegen.

Anm. 4. Die Construction obiger Aufgaben kommt nach §. 184 (welcher hier nothwendig erst nachzusehen ist,) auf das Bilden eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel, nach der Methode von §. 84. oder §. 155. 3 zurück.

Bei Anwendung der Methode von §. 84 auf die erste Aufgabe ist zuerst ein Winkel $BER = \frac{1}{2}$ R zu zeichnen (Fig. 3), dessen Schenkel $BE = s$ zu machen, dann aus B als Centrum mit einem Radius $= h$ ein Kreis zu beschreiben. Schneidet dieser den Schenkel ER in A, so ist $\angle EAC = \frac{1}{2}$ R zu machen, dann wird ABC das gesuchte Dreieck seyn. Es gehen im Allgemeinen zwei Dreiecke hervor, $A'BC'$ und $A''BC''$; diese werden aber congruent seyn, nämlich $A'BC' \cong BA''C''$, (denn $\angle BA''C'' = BA''A' - C''A''E = BA'A'' - BEA' = A'BC'$, die übrigen gleichen Stücke finden sich leicht), so daß man in gewisser Art nur ein auflösendes Dreieck hat. Dieses entspricht dem oben in der Bemerkung 2. Gesagten. Statt der zwei Schnittpunkte A′ und A″ erhält man nur einen Berührungspunkt a, und daraus ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aBc, wenn BE = Ba $\sqrt{2}$ oder also wenn s = h$\sqrt{2}$. Ist s größer als h $\sqrt{2}$, so hat der aus B beschriebene Kreis mit ER gar keinen Punkt gemein; das Dreieck wird imaginär. Dies entspricht dem in Anm. 2 Gesagten.

Ganz Aehnliches findet sich bei Anwendung der Methode von §. 155. 3. Hier kann man so verfahren. Man mache (Fig. 4) AB=h. Aus dem Mittelp. M dieser Linie als Centrum construire man einen Halbkreis ANB, als denjenigen Bogen, welcher einen rechten W. als Peripheriewinkel faßt; aus dem P. N, in welchem dieser Halbkreis durch ein aus M auf AB errichtetes Loth geschnitten wird, als Centrum, beschreibe man einen zweiten Kreisbogen über AB, der einen Peripheriewinkel = $\frac{1}{2}$ R fassen wird. Hierauf beschreibe man aus B mit einem Radius = s einen Kreis, dieser schneide den zuletzt construirten Kreisbogen in E. Dann ziehe man BE, welche Gerade den Halbkreis in C schneide, so ist, wenn man noch AC ziehet, △ ABC das verlangte. Hiebei werden ebenfalls im Allgemeinen zwei Schnittpunkte E und daraus zwei congruente Dreiecke, nämlich ABC′ ≅ BAC″ erscheinen; im Falle, daß s = dem Durchmesser des zweiten Kreisbogens, oder also = h$\sqrt{2}$, wird sich nur ein Berührungspunkt e und daraus ein gleichsch.-rechtw. Dr. ABc, oder ABN, finden; endlich, wenn s |ı h$\sqrt{2}$, wird kein Schnittpunkt E erscheinen, und das Dreieck ABC imaginär seyn; — Alles dem über die algebraische Auflösung Gesagten entsprechend.

Auch bei allen andern Aufgaben ähnlicher Art entsprechen die Bedingungen der Unmöglichkeit der Construction genau den Bedingungen des Imaginärseyns der Unbekannten bei der algebraischen Auflösung.

Die in der algebraischen Aufl. der ersten Aufgabe gefundnen Werthe von x und y können auch aus der ersten Constructions-Auflösung in Fig. 3 bequem abgeleitet werden. Dabei ist zu Grunde zu legen, daß $\sqrt{2}$ der Verhältnißexponent der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zur Kathete ist. (S. §. 222. I. Beisp. 4). In Fig. 3 ist nun BE = s die Hypot. des gleichsch.-rechtw. Dr. BaE. Daher die Kathete Ea = aB = $\frac{s}{\sqrt{2}}$, und aB^2 = $\frac{s^2}{2}$. Nun ist BA′ = BA″ = a, also, durch den Pythag. Satz

$$Aa' = aA'' = \sqrt{a^2 - \frac{s^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\,a^2 - s^2}{2}},$$

daher $EA'' = Ea + aA'' = \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2a^2 - s^2}{2}}$,

$EA' = Ea - A'a = \frac{s}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{2a^2 - s^2}{2}}$,

Endlich $A''C'' = \frac{EA''}{\sqrt{2}} = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{2a^2 - s^2}}{2}$,

$A'C' = \frac{EA'}{\sqrt{2}} = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{2a^2 - s^2}}{2}$.

So stimmt $A''C''$ mit dem obigen Werthe von x, $A'C'$ mit dem von y überein.

Anm. 5. Man vergleiche mit den Constructionen unsrer Aufg. 1. in Fig. 3 und 4 noch folgende Construction, durch welche die Aufg. 1. aus §. 351. gelöset wird (§. 162. 1.). Man zeichne (Fig. 5) die gegebene Kathete $AB = a$, lege an sie den rechten Winkel BAR, schneide auf dessen Schenkel die Linie $AD = s$ ab, ziehe BD, bilde dann ein gleichschenkliges Dr. BDC, entweder indem man $\angle DBC = ADB$ macht, oder indem man durch den Mittelpunkt von BD ein Loth errichtet, welches AR in C schneidet. Dann ist ABC das verlangte Dreieck. Hier findet sich bei jeder Methode der P. C durch das Schneiden zweier Geraden. — In den Constructionen unsrer ersten Aufgabe des gegenwärtigen §. dagegen, wurde, in Fig. 3, der P. A durch das Schneiden einer Geraden und eines Kreises, in Fig. 4 der P. C durch das Schneiden zweier Kreise gefunden, weshalb dort zwei Punkte A, hier zwei Punkte C, und jedesmal zwei auflösende Dreiecke ABC hervorgingen, die sich jedoch congruent fanden.

Diesen Eigenheiten der Constructionen der Aufgaben entspricht in den algebraischen Auflösungen der Umstand, daß im §. 351. 1. eine Gl. des ersten Grades, im gegenwärtigen §. aber eine Gl. des zweiten Grades sich für x gefunden hat, und daß eine Gl. des ersten Grades nur einen Auflösungswerth, eine quadratische aber zwei Auflösungswerthe giebt. — Gleiches wird man im Folgenden allenthalben bemerken.

§. 353. Aufgabe. Aus der Hypotenuse = a und dem Flächeninhalte = F eines rechtwinkligen Dreiecks seine Katheten zu berechnen.

Auflösung. Die Ansatzgleichungen sind

$$(1)\quad x^2 + y^2 = a^2$$
$$(2)\quad xy = 2F.$$

Wir wollen diese Gl. auf zwei verschiedene Arten behandeln.

I. Erste Art. Setzt man aus (2) den Werth für y, nämlich $\frac{2F}{x}$, in (1) so erhält man nach einigen Umwandlungen

$$x^4 - a^2 x^2 = -4F^2.$$

Die Aufl. dieser biquadratischen Gl. kann durch Substitution einer Hülfsunbekannten, etwa q, statt x^2 auf die Aufl. einer reinen und einer unreinen quadratischen Gl. zurückgeführt werden. Diese sind

$$q^2 - a^2 q = -4F^2$$

und $$x^2 = q.$$

Daraus entstehet $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}.(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16F^2})}$.

Für y würde, bei ähnlicher Behandlung der Gleichungen, weil x und y in ihnen symmetrisch enthalten sind, eben dieselbe Formel gefunden werden.

Das zweimal vorkommende Doppelvorzeichen $\pm$ betreffend ist zu bemerken: Angenommen, was am natürlichsten anzunehmen ist, es sey F eine positive Zahl, so soll xy in (2) positiv seyn, folglich müssen x und y Zahlen von einstimmiger nicht von entgegengesetzter Art seyn; dies entscheidet über das Zusammengehören der äußeren Vorzeichen. In Bezug auf das innere Vorzeichen $\pm$ benutze man eine der beiden Ansatzgleichungen, am bequemsten (1), um durch Substitution des Werthes von x in dieselbe das zugehörige y zu bestimmen.

Aus (1) ist $y^2 = a^2 - x^2$,

aber $$x^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16F^2}}{2},$$

folglich $$y^2 = a^2 - \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16F^2}}{2} = \frac{a^2 \mp \sqrt{a^4 - 16F^2}}{2},$$

wo vom $\pm$ in x^2 und vom $\mp$ in y^2 entweder die obern oder die untern Vorzeichen zusammengehören. Man hat also 4 Verbindungen von Auflösungsgleichungen:

$$(a)\quad x = \sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 + \sqrt{a^4 - 16F^2})},$$
$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 - \sqrt{a^4 - 16F^2})}.$$
$$(b)\quad x = \sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^4 - \sqrt{a^4 - 16F^2})},$$
$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 + \sqrt{a^4 - 16F^2})}.$$
$$(c)\quad x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 + \sqrt{a^4 - 16F^2})},$$
$$y = -\sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 - \sqrt{a^4 - 16F^2})}.$$
$$(d)\quad x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 - \sqrt{a^4 - 16F^2})},$$
$$y = -\sqrt{\tfrac{1}{2}.(a^2 + \sqrt{a^4 - 16F^2})}.$$

Da übrigens die Werthe in (c) und (d) mit denen in (a) und (b) der Quantität nach übereinstimmen, nur negativ sind, und da man selten einen Grund haben wird, die negativen Werthe noch anzugeben, wenn man die positiven genannt hat, so kann man sich meistens mit den Antworten (a) und (b) begnügen. Aber selbst von diesen ist die eine (a) ziemlich hinreichend, indem die Werthe in (b) mit denen in (a) übereinstimmen, nur daß der, welcher dort x heißt, hier y, der, welcher dort y heißt, hier x genannt ist, — ein Umstand, welcher darin seinen Grund hat, daß x und y in (1) und (2) symmetrisch enthalten sind.

II. Zweite Art. Man verdoppele Gl. (2), addire sie dann zu (1), ziehe sie aber auch von (1) ab, so findet man

2*

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + 4F,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4F,$$

daher

$$(S)\quad x + y = \pm\sqrt{a^2 - 4F},$$
$$(D)\quad x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4F}.$$

Nimmt man in (S) und auch in (D) vor der $\sqrt{\ }$ das Zeichen $+$, so kommt

$$(a)\quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F}.$$

Aus anderer Annahme der Zeichen in (S) und (D) folgt

$$(b)\quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F};$$
$$(c)\quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F},$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F};$$
$$(d)\quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F},$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F}.$$

Auch von diesen vier Formelverbindungen kann eine einzige, z. B. die in (a), als hinreichende Antwort auf die Frage der Aufgabe betrachtet werden.

Es muß aber auffallen, daß diese Auflösungsformeln nicht mit denen in I. übereinstimmen; jedoch läßt sich zeigen, daß diese Verschiedenheit nur die äußere Form, nicht den Werth betrifft. Eine jede der eben gefundnen Formeln kann man in die entsprechende aus I. verwandeln. Z. B.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4F}$$

giebt durch Quadriren

$$x^2 = \frac{a^2 + 4F}{4} + \frac{a^2 - 4F}{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4F).(a^2 - 4F)}$$
$$= \tfrac{1}{2}.\left(a^2 + \sqrt{a^4 - 16F^2}\right),$$

daher durch Wurzelausziehung den in I. (a) gefundnen Werth.

Umgekehrt wird eine der Formeln aus I in die entsprechende von II verwandelt, indem man die allgemein richtige Formel

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

anwendet. (S. Meier Hirsch, Sammlung von Beispielen aus der Buchstabenrechnung und Algebra S. 51).

Zahlenbeispiel. $a=17$, $F=60$ giebt, sowohl aus I. (a) als aus II. (a), $x=15$, $y=8$.

§. 354. Aufgabe. Aus dem Inhalte $=F$ und dem Umfange $=U$ eines rechtwinkligen Dreiecks seine Seiten zu berechnen.

Erste Auflösung. Man setze eine Kathete $=x$, so ist die andre Kathete $=\frac{2F}{x}$, die Hypotenuse also, wegen des gegebenen Umfangs, $=U-x-\frac{2F}{x}$, folglich aus dem Pythag. Satze

$$\left(U-x-\frac{2F}{x}\right)^2 = x^2+\frac{4F^2}{x^2},$$

daher $$2Ux^2-(U^2+4F).x = -4FU,$$

und $$x = \frac{1}{4U}.(U^2+4F\pm\sqrt{(U^2+4F)^2-32FU^2}),$$

wofür man auch schreiben kann

$$x = \frac{1}{4U}.(U^2+4F\pm\sqrt{(U^2-4F)^2-16FU^2}).$$

Dieser Werth von x giebt vermöge des Doppelvorzeichens $\pm$ zugleich auch die andre Kathete.

Zweite Auflösung. Man bezeichne die beiden Katheten durch x, y, die Hypotenuse durch z, so kann man folgende Ansatzgleichungen bilden:

$$(1)\qquad x+y = U-z,$$
$$(2)\qquad xy = 2F,$$
$$(3)\qquad x^2+y^2 = z^2.$$

Aus (2) u. (3) ist $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = z^2+4F$,
aus (1) aber $(x+y)^2 = U^2-2Uz+z^2$,
folglich $z^2+4F = U^2-2Uz+z^2$,
oder $2Uz = U^2-4F$,
so hat man für die Hypotenuse eine Gl. des ersten Grades, aus welcher

$$z = \frac{U^2-4F}{2U}.$$

Ist z berechnet, so findet man

$$x+y = U-z, \qquad x-y = \sqrt{z^2-4F},$$

und hieraus die Katheten x und y selbst.

Anm. Die Vergleichung der beiden Auflösungen zeigt, wie zweckmäßig es zuweilen seyn kann, mehre Unbekannte durch besondre Buchstaben zu bezeichnen, so viel Gleichungen zu entwickeln, wie Unbekannte vorhanden sind, und dann die einfachste Eliminationsart zu wählen. Man vergl. mit obiger Aufl. auch die Newtons in: Arithmetica universalis, Quaest. geom., Probl. 3.

§. 355. Aufgabe. Der Umfang eines rechtwinkl. Dreiecks = U und das aus dem rechten Winkel zur Hypotenuse gefällte Loth = f sind gegeben; man soll die Seiten berechnen.

Auflösung. Die Seiten wie in §. 354. zweite Aufl. bezeichnet, hat man

$$(1) \quad x+y = U-z,$$
$$(2) \quad xy = fz \quad (\text{§. } 256.\ \text{II. } 3)$$
$$(3) \quad x^2+y^2 = z^2.$$

Indem man x und y auf dieselbe Weise wie im vorigen §. eliminirt, erhält man für z eine Gl. des ersten Grades, aus der sich findet

$$z = \frac{U^2}{2.(U+f)}.$$

Die Bestimmung von x und y ist sodann leicht.

Anm. Die für x und y gefundne Gl. enthält die Proportion

$$2.(U+f) : U = U : z,$$

d. h. der Umfang eines rechtwinkl. Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und der doppelten Summe des Umfangs und des Lothes. — Vergl. Newton in Arithmetica univ., Quaest. geom., Probl 4.

§. 356. Aufgabe. Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$; man soll berechnen 1) die durch ein aus C auf AB gefälltes Loth CD in AB hervorgebrachten Abschnitte AD und DB, 2) das Loth CD, 3) den Flächeninhalt F. (Fig. 6.)

Auflösung. 1) Man setze $AD = x$, $DB = y$. Es seyen A u. B spitze Winkel, so liegt D innerhalb AB (Fig. 6. a), und man hat $x + y = AD + DB = AB = c$, wenn c, x und y positive Werthe haben. Diese Gl. $x + y = c$ hat aber ihre Richtigkeit, selbst wenn D in der Verlängerung von AB liegt, es sey über B (Fig. 6. b) oder über A (Fig. 6. c) hinaus, sobald man nur im ersten Falle y und im zweiten x als negative Zahl denkt. (Vergl. Th. I. S. 229.) Dies läßt im voraus erwarten, daß auch die Formeln, welche am Ende der Auflösung für x und y herauskommen werden, bei ihrer Anwendung auf Zahlenbeispiele durch + und — die Lage des Punktes D genau bestimmen werden. (Vergl. §. 223).

Nach dem Pythag. Satze hat man ganz allgemein, für negative wie für positive Zahlen

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = b^2 - x^2,$$

und $$CD^2 = BC^2 - DB^2 = a^2 - y^2,$$

woher $$x^2 - y^2 = b^2 - a^2.$$

So hat man also die aufzulösenden Gl.

$$(1) \qquad x + y = c$$

$$(2) \qquad x^2 - y^2 = b^2 - a^2.$$

Mittelst Division von (2) durch (1) findet sich

$$(3) \qquad x - y = \frac{b^2 - a^2}{c} = \frac{(b + a).(b - a)}{c}.$$

Also ist
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{c}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \\ y = \frac{c}{2} - \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \end{array}\right\} (I, A).$$

Diese Formeln stimmen ganz mit den in §. 223 für f und g gefundenen überein, sollen aber hier noch einigen Umwandlungen unterworfen werden, welche sich hauptsächlich auf folgende bekannte Gleichungen der Buchstabenrechnung gründen,

$$p^2 - q^2 = (p+q) \cdot (p-q)$$
$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$$
$$p^2 - 2pq + q^2 = (p-q)^2.$$

Man findet, indem man auf doppelte Weise umwandelt, erstens

$$x = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2c} - b = \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} - b,$$

oder
$$x = \frac{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}{2c} - b \qquad (I, B);$$

zweitens

$$x = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c} = \frac{b^2-2bc+c^2-a^2}{2c} + b = \frac{(b-c)^2-a^2}{2c} + b$$
$$= b - \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} = b - \frac{(a+(b-c)) \cdot (a-(b-c))}{2c},$$

oder
$$x = b - \frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{2c} \qquad (I, C).$$

Anm. Aus Gl. (3) ergiebt sich auch
$$c : b+a = b-a : x-y.$$
Dies ist der in §. 262 geometrisch bewiesene Satz.

Die Werthe von y, welche denen von x in (I, B) und (I, C) analog sind, bekommt man, wenn man in diesen a mit b umtauscht.

2) Um nun das Loth CD zu bestimmen benutze man die Gl. $CD^2 = b^2 - x^2 = (b+x) \cdot (b-x)$, indem man die Summe $b+x$ aus (I, B), und die Differenz $b-x$ aus (I, C) ableitet. Man erhält

$$b + x = \frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c)}{2c},$$

$$b - x = \frac{(a-b+c).(a+b-c)}{2c},$$

mithin $CD^2 = \frac{1}{4c^2}.(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)$

und $CD = \frac{1}{2c}.\sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$
(II, A)

Hätte man in $CD^2 = b^2 - x^2$ statt x seinen Werth aus (I, A) gesetzt, so hätte man gefunden

$$CD^2 = b^2 - \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + c^4}{4c^2},$$

und hieraus endlich

$$CD = \frac{1}{2c}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} \quad \text{(II,B)}$$

Anm. Das in (II, B) unter dem Wurzelzeichen stehende sechstheilige Polynom ist dem Producte der vier dreitheiligen Factoren in (II, A) gleich, wie sich bei Ausführung der Multiplication findet. Die Formel (II, A) ist aber für die Rechnung bequemer, und selbst zur Anwendung der Logarithmen geeignet. Eine dritte Formel für CD wird sogleich unter 3. aufgestellt werden.

3) Endlich findet man den Werth des Inhaltes F durch die Gleichung $F = \frac{1}{2}c.CD$. Setzt man in dieselbe den Werth von CD aus (II, A) oder aus (II, B) so hat man

$$F = \tfrac{1}{4}.\sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)} \quad \text{(III,A)}$$

$$F = \tfrac{1}{4}.\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} \quad \text{(III,B).}$$

Nach (III, A) ist, wegen $4^2 = 2.2.2.2$,

$$F^2 = \frac{a+b+c}{2}.\frac{-a+b+c}{2}.\frac{a-b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2};$$

bezeichnet man nun den halben Umfang des Dreiecks, d. h. $\frac{a+b+c}{2}$, durch s, so ist $\frac{-a+b+c}{2} = s - a$, u. s. w., daher

$$F = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)} \quad \text{(III, C)}$$

In dieser Gestalt stimmt die Formel mit der in §. 279 mehr aus geometrischen Gründen abgeleiteten überein.

Noch findet man jetzt, unter Anwendung des Zeichens s, für die Höhe leicht den Ausdruck

$$CD = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)} \qquad (II, C)$$

Anm. Zur Uebung können die Zahlenexempel aus §. 223. III nach den gefundnen Formeln durchgerechnet werden.

Wenn $c^2 = a^2 + b^2$, also das Dreieck bei C rechtwinklig, so findet man $x = AD = \frac{b^2}{c}$, $y = DB = \frac{a^2}{c}$, dann, weil $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ in $4a^2b^2$ übergehet, (es ist nämlich $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, also auch $(a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 = 0$), $CD = \frac{ab}{c}$, $F = \frac{1}{2}ab$, welches mit bekannten Eigenschaften des rechtwinkl. Dreiecks übereinstimmt.

§. 357. Es sind jetzt noch einige Betrachtungen über die Formeln des vorigen §., vorzüglich in Bezug auf das + und —, und auf das Reelle und Imaginäre anzustellen, durch welche eine genauere Einsicht in das Verhältniß geometrischer Aufgaben zu ihrer algebraischen Behandlung befördert werden soll.

I. Wenn durch den Gegensatz des + und — der Zahlen für gewisse Linien Lagenverhältnisse derselben ausgedrückt werden, so kann man sagen, das + und — dieser Zahlen sey **deutsam**. Wenn dieses deutsame + und — an Zahlen für gegebene Linien Statt findet, so muß man, bei Anwendung allgemeiner Auflösungen auf specielle Fälle durch Betrachtung der Lagenverhältnisse ermitteln, durch welche Zahl, ob eine positive oder negative, jede solche gegebene Linie ausgedrückt werden müsse; hat aber eben dieses deutsame + und — bei gesuchten und durch die Auflösung gefundnen Größen Statt, so erkennt man umgekehrt aus dem Positiv- oder Negativ-Seyn der Zahlen die Lagenverhältnisse der durch dieselben ausgedrückten Linien. In allen diesen Fällen bestimmen also die Zahlen nicht bloße Quantitäten, sondern zugleich etwas bloß Qualitatives.

Kann dagegen für gewisse Linien das Positive und Negative nicht Anwendung finden, um Lagenverhältnisse zu bestimmen, so daß im Gegentheil die Vorzeichen für gewisse Linien ganz beliebig sind, so kann gesagt werden, das + und — dieser Zahlen sey undeutsam. Findet dieses undeutsame + und — an Zahlen für gegebene Größen Statt, so kann man diesen Zahlen ganz beliebige Vorzeichen geben, wird sie aber am liebsten als positiv ansehen, wenn man nicht irgend woher einen Grund hat, sie als negativ zu betrachten. Hier, so wie in dem Falle, wo das undeutsame + und — an Zahlen für gesuchte Linien Statt findet, sind die Zahlen als bloße Quantitätsbestimmungen anzusehen.

Durch genauere Betrachtung unsrer Aufgaben von §. 356. muß dieses Alles verdeutlicht werden.

Unter den gegebenen Größen a, b, c ist für a und b das + und — undeutsam. Denn was a betrifft, so stehet die durch diese Zahl ausgedrückte Gerade BC mit keiner der übrigen Linien der Figur in solcher Beziehung, daß von Einstimmigkeit oder Gegensatz der Lage bei ihnen die Rede seyn könnte; außer BC wird ja in der Aufgabe keine begrenzte Gerade weiter betrachtet, welche ebenfalls ein Theil der unbegrenzten Geraden wäre, von der BC ein Theil ist. Gleiches gilt von der AD ausdrückenden Zahl b. Auch zeigen die Formeln, daß es gleichgültig ist, ob man z. B. BC durch eine positive oder negative Zahl ausdrückt; am besten erkennt man dies an den Formeln (I, A) (II, B) (III, B); diese alle enthalten a und b nur in Potenzen von geraden Exponenten; bei solchen Potenzen ist aber in der That das + und — an der Grundzahl ohne Einfluß, indem $(-a)^{2m} = a^{2m}$.

Die Zahlen c, x, y dagegen sollen die Linien AB, AD, DB ausdrücken, welche alle in derselben unbegrenzten Geraden liegen; bei ihnen kann also das + und — deutsam seyn. Es ist dabei in unsre Wahl gestellt, ob wir c positiv oder negativ denken wollen, denn das + und — bezeichnet hier nur etwas Relatives, und nur an der Uebereinstimmung oder Entgegensetzung der Vorzeichen von 1) c und x und 2) c und y müßte man die Gleichheit oder Entgegensetzung der Richtung 1) von AB und AD, 2) von AB und DB erkennen. Daß die Formeln für x und y wirklich dieses erfüllen, hat in Hinsicht der algebraischen Behandlung seinen Grund hauptsächlich darin, daß die Gl. (1) $x+y=c$ unter der Annahme gebildet ist, c solle AB, x solle AD, y solle DB ausdrücken, und daß, bei gehöriger Anwendung des + und —, die Gleichung $AD+DB=AB$ wirklich gültig ist, D liege in der unbegrenzten Geraden AB, wie es wolle (s. Th. I. S. 229). Wollte man c durch eine negative Zahl ausdrücken, so würden in dem Falle, wo D zwischen A und B liegt, auch für x und y negative Zahlen kommen, vermöge des c in den Nennern der Formeln, und auch dadurch sich die Uebereinstimmung der Richtungen von AD und DB mit der Richtung von AB kund thun.

Es hat sich in dieser letzten Betrachtung die Gl. (2) $x^2-y^2=b^2-a^2$ ohne allen Einfluß gezeigt. Dies rührt daher, daß sie nur Potenzen gerader Exponenten enthält, weshalb für sie das + und — an x, y, b und a gleichgültig ist, während in (1) $x+y=c$ das + und — von x, y, c nicht gleichgültig ist. So kann das Nicht-gleichgültig-seyn des + und — für gewisse Zahlen in Gleichungen, wodurch eine Aufgabe gelöset wird, zusammenhängen mit der Deutsamkeit des + und — in Bezug auf die durch jene Zahlen ausgedrückten Linien in der Aufgabe überhaupt. Man achte hiebei darauf, daß Gl. (2) durch Anwendung des Pythagorischen Satzes auf die Dreiecke ADB und BDC entstanden ist, und daß in der Gleichung des Pythag. Satzes selbst das + und — der Zahlen für die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gleichgültig ist, da die Gl. nur die zweiten Potenzen dieser Zahlen enthält. (Aehnliches wurde schon §. 351. 2 bemerkt).

Die Formeln für CD und F geben, wenn man das in ihnen enthaltene Wurzelzeichen im weitesten Sinne nimmt, wo es nämlich erlaubt, nicht bloß den positiven, sondern auch den negativen Werth der Wurzel aufzuführen (und wo es, nach Cauchy, passend durch $\sqrt{\ }$ bezeichnet wird), eigentlich zwei Zahlen, eine positive und eine negative, die aber an Quantität gleich sind. Es hat aber hier das + und — keine Deutsamkeit, wenn man nicht noch etwas zu den Bedingungen der Aufgabe hinzudenken will. Denkt man aber hinzu, es sey für die Basis AB eine unveränderliche Lage in der Ebene gegeben, so werden durch die Richtung von AB zwei Hälften der Ebene bestimmt; dann kann das Dreieck ABC in der einen und in der andern Hälfte construirt werden, und CD bekommt in diesen Dreiecken entgegengesetzte Richtungen, welche man durch die positive und negative Zahl, die sich aus den Formeln (II) finden, dargestellt denken kann. Auch die Werthe von F können in den beiden Dreiecken als entgegengesetzt angesehen werden, namentlich, in so fern sie durch die Formel $F = \frac{1}{2} . c . CD$ von der Qualität der Höhe CD abhängig sind. Es ist aber offenbar diese Deutsamkeit des + und — an CD und F von etwas geringerem Gewichte, als bei x und y, und man kann sich bei der Berechnung von CD und F begnügen, nur die positiven Zahlenwerthe, als Bestimmungen der bloßen Quantität, anzugeben.

II. Es ist zu bemerken, daß die in I. näher betrachtete Anwendung des + und — auf c, x, y nur dann nöthig wird, wenn man in einer Auflösung die verschiedenen Fälle, welche in den Lagenverhältnissen der Linien AB, AD, DB unter einander Statt finden können, zusammenfassen will. Wollte man auf diese Allgemeinheit verzichten, und nur positive Zahlen als Ausdrücke der Linien gestatten, so müßte man dreierlei Fälle unterscheiden. Nämlich:

a) D liegt zwischen A und B. (Fig. 6. a)

Hier ist $AD + DB = AB$,

wenn alle drei Linien durch positive Zahlen ausgedrückt werden, und daher $x + y = c$

übereinstimmend mit (1) in §. 356. Hier bleibt überhaupt die Auflösung des vorigen §. ungeändert.

b) D liegt in der Verlängerung von AB über B hinaus. (Fig. 6. b)

Hier ist $AD - BD = AB$,

wenn diese Linien alle durch positive Zahlen ausgedrückt werden sollen, und man müßte setzen

(1) $x - y = c$ (statt $x + y = c$)

(2) $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$.

Man würde finden $x + y = \frac{b^2 - a^2}{c}$,

woher $x = \frac{1}{2}.\left(\frac{b^2 - a^2}{c} + c\right) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$, wie §. 356,

und $y = \frac{1}{2}.\left(\frac{b^2 - a^2}{c} - c\right) = \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2c}$,

dieser Werth von y ist das Entgegengesetzte von dem in §. 356 (I, A), und muß es seyn, weil der in (I, A) eine negative Zahl für y geben würde.

c) D iegt in der Verlängerung von AB über A hinaus. (Fig. 6. c).

Sollen hier alle Linien durch positive Zahlen ausgedrückt werden, so hat man zu setzen

$$DB - DA = AB$$

und daher die Gleichungen zu lösen

$$(1) \quad y - x = c \quad (\text{statt } x + y = c).$$

$$(2) \quad x^2 - y^2 - b^2 = a^2 \ (\text{oder } y^2 - x^2 = a^2 - b^2).$$

Daher fände sich $\quad y + x = \frac{a^2-b^2}{c},$

$$x = \tfrac{1}{2}.\left(\frac{a^2-b^2}{c} - c\right) = \frac{a^2-b^2-c^2}{2c},$$

$$y = \tfrac{1}{2}.\left(\frac{a^2-b^2}{c} + c\right) = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}.$$

Hier ist der Ausdruck für y übereinstimmend mit dem in (I, A), aber der Ausdruck für x ist das Gegentheil des dortigen, wie zu erwarten war, da der in (I, A) in unserm Falle eine negative Zahl geben würde, und hier x positiv erscheinen sollte.

Der Vortheil, welchen die für alle Fälle der Lagenverhältnisse geltende Allgemeinheit der Formeln gewährt, leuchtet deutlich ein, so daß die Wichtigkeit der Anwendung des + und — keinem Zweifel unterliegen kann. (Man vergl. §. 350, wo schon Aehnliches bemerkt ist).

III. Zuweilen könnten für a, b, c Werthe gegeben werden, welche der Bedingung für die Möglichkeit eines Dreiecks aus drei Seiten, daß nämlich die größte derselben kleiner als die Summe der beiden andern seyn muß, nicht genügten. In einem solchen Falle möchte man zu Folge früherer Beispiele (§. 352. Anm. 3) erwarten, die Unbekannten müßten imaginäre Werthe erhalten, um dadurch die Unmöglichkeit des Constructs anzuzeigen. Hierin zeigen sich aber unsre gegenwärtigen Aufgaben ganz eigenthümlich. Die erste nämlich, in welcher die Abschnitte AD und DB gesucht werden, kann, weil die Formeln kein Wurzelzeichen enthalten, den Unbekannten nie imaginäre Werthe geben; selbst wenn a, b, c der oben erwähnten Bedingung der Möglichkeit des Dreiecks widersprechen, findet man für AD und DB reelle Werthe, und nur bei der Berechnung von CD und F kommen imaginäre Werthe zum Vorschein, welche die Unmöglichkeit des Dreiecks anzeigen. Es ist nicht überflüssig, dies durch genauere Betrachtungen nachzuweisen.

Da die Formeln (II, B) und (III, B) die Zahlen a, b, c nur mit geraden Potenzexponenten enthalten, so daß die Beschaffenheit von a, b, c in Hinsicht auf + und — bei denselben gleichgültig ist, so reicht es hin, den Fall zu betrachten, wo diese Zahlen durchgängig positiv sind. Die weitere Untersuchung mag nun die Formeln (II, A) (III, A) zu Grunde legen. In diesen kommt es nur darauf an, ob das unter dem Wurzelzeichen stehende Product von vier Factoren

$$(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)$$

positiv ist, oder negativ; im ersten Falle werden CD und F reell, im zweiten imaginär. Ob aber jenes Product positiv oder negativ ist, das hängt davon ab, ob unter seinen Factoren eine gerade Menge (vielleicht auch keiner) oder ob eine ungerade Menge negativ ist. Es sey nun, während, wie oben bemerkt, a, b, c immer positiv sind,

1) c größer als $a+b$, so wird der Factor $a+b-c$ negativ, die übrigen Factoren alle positiv; daher werden CD und F imaginär. Es ist aber in diesem Falle wirklich kein Dreieck aus a, b, c möglich. Z. B. $a=3$, $b=8$, $c=13$ giebt zwar $x=4\frac{5}{13}$ und $y=8\frac{8}{13}$, also reell, dagegen $CD=\frac{24}{13}.\sqrt{-3}$, $F=12.\sqrt{-3}$, Beides imaginär.

2) $c=a+b$. Hier wird $a+b-c=0$, daher CD wie $F=0$; z. B. $a=3$, $b=8$, $c=11$ giebt

$x = 8 = b$, $y = 3 = a$, $CD = 0$, $F = 0$. Es fällt hier C mit D zusammen, ABC ist kein eigentliches Dreieck, sondern C liegt in gerader Linie mit A und B, zwischen diesen Punkten.

3) c kleiner als $a + b$. Hier hat man drei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist c zwar kleiner als $a + b$, aber doch größer als die Differenz $a - b$ oder $b - a$, so sind alle vier Factoren positiv, wie sich leicht finden läßt, folglich CD und F reell. In diesem Falle ist auch wirklich ein Dreieck aus a, b, c möglich.

b) Ist c kleiner als $a + b$, aber dabei dem Unterschiede $a - b$ oder $b - a$ gleich, so wird ein Factor $= 0$. Ist z. B. $b > a$, also $a - b$ negativ, so wird $a - b + c = 0$. Es kommt also $CD = 0$, $F = 0$. Dabei findet sich etwas Aehnliches wie im Falle 2; nämlich C fällt mit D zusammen, statt des Dr. ABC hat man drei Punkte in gerader Linie, es liegt aber C in der Verlängerung von AB.

c) Ist c selbst kleiner als der Unterschied $a - b$ oder $b - a$, so wird von den vier Factoren nur einer negativ. Z. B. für $b > a$ wird nur $a - b + c$ negativ. Daher entstehen für CD und F imaginäre Werthe, und wirklich ist nach §. 62. 2. hier kein Dreieck möglich.

In dem einzigen Falle 3. a, wo c zwischen den Grenzen $a + b$ und $a - b$ oder $b - a$ liegt, erscheinen also für CD und F reelle Werthe, die nicht $= 0$ sind. Die Fälle 2. und 3. b machen den Uebergang aus dem Reellen zum Imaginären.

Das Auffallende der Erscheinung, daß x und y reell ausfallen können, wenn gleich aus a, b, c kein Dreieck möglich ist, kann man durch folgende Betrachtung hinwegräumen. Die Ansatzgleichungen $x + y = c$ und $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$

gehören eigentlich zu der allgemeinern kein Dreieck voraussez-zenden Aufgabe: Zwei Zahlen oder Linien zu suchen, deren Summe und deren Quadrat-Differenz gegeben ist. Diese Aufgabe kann aber nie zu etwas Imaginärem führen, und es kommt in ihr nicht sowohl auf b und a, als vielmehr nur auf $b^2 - a^2$ an. Die obige Aufgabe, welche sich auf ein Dreieck beziehet, ist nur eine besondre Anwendung dieser allgemeinern Aufgabe, und kann recht wohl, in Bezug auf die Bildung des Dreiecks, eine aus der Beschaffenheit der Zahlen a, b, c entspringende Unmöglichkeit in sich schließen, von der jene allgemeinere Aufgabe keine Spur enthält. Es läßt sich selbst, in einem solchen Falle, durch eine Umänderung der Zahlen a und b, bei welcher nur b^2 und a^2 um gleich viel zu- oder abnehmen müssen, so daß $b^2 - a^2$ sich nicht ändert, eine andre Aufgabe mit diesen neuen Werthen von b und a, aber dem ursprünglichen Werthe von c bilden, in welcher das Dreieck möglich wird, x und y aber dieselben Werthe erhalten, wie da, wo das Dreieck unmöglich war. — Endlich ist zu bemerken, daß die Auflösung unsrer Aufgabe, die Abschnitte AD, DB zu berechnen, zugleich als Auflösung der Aufgabe angesehen werden kann, wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise $= c$ und die Radien derselben $= a$ und b gegeben sind, die Lage des radicalen Centrums der beiden Kreise zu berechnen. (S. §. 305.) Dabei entspricht der Fall des möglichen Dreiecks dem Falle, wo die Kreise sich schneiden, wo also die radicale Axe durch die beiden Schnittpunkte hindurch gehet; der Fall aber, wo das Dreieck unmöglich wird, entspricht dem Falle, wo die Kreise sich nicht schneiden, wo jedoch durch diesen Umstand die Existenz der radicalen Axe nicht aufgehoben wird.

§. 358. Aufgabe. Gegeben die beiden Abschnitte $AD = f$, $DB = g$, welche auf der Basis eines Dreiecks durch das Loth CD gebildet werden, nebst der Summe der andern Seiten, $AC + BC = k$; man soll 1) diese Seiten einzeln, 2) das Loth CD, 3) den Inhalt des Dreiecks berechnen. (Fig. 6).

Auflösung. Diese ist der Aufl. der Aufgaben in §. 356. äußerst ähnlich, und kann deshalb etwas kurz gefaßt werden. In der Bildung der Ansatzgleichungen möge aber die geringe Abweichung Statt finden, daß wir sogleich vier Gleichungen für alle vier Unbekannte aufstellen.

Vorher ist noch zu bemerken, daß, wenn in dem Falle, wo D zwischen A und B liegt, f und g positiv seyn sollen, in dem andern Falle, wo D in der Verlängerung über A hinaus liegt, f negativ, endlich in dem Falle, wo D in der Verlängerung über B hinaus liegt, g negativ seyn müsse. Durch Feststellung dieser Bestimmungen wird es möglich, in einer einzigen Auflösung diese verschiedenen in Fig. 6. a, b, c dargestellten Fälle zusammenzufassen.

Es sey $AC = x$, $BC = y$, $CD = z$, $\triangle ABC = F$, so bilden sich die Ansatzgleichungen

$$(1) \quad x + y = k,$$
$$(2) \quad x^2 - f^2 = z^2,$$
$$(3) \quad y^2 - g^2 = z^2,$$
$$(4) \quad F = \tfrac{1}{2}.(f + g).z.$$

Aus (2) und (3) entwickelt sich

$$x^2 - y^2 = f^2 - g^2.$$

Hieraus und aus (1) entstehet

$$x - y = \frac{f^2 - g^2}{k}.$$

Dies wieder mit (1) verbunden giebt

$$x = \frac{k^2 + f^2 - g^2}{2k}, \qquad y = \frac{k^2 - f^2 + g^2}{2k}. \qquad (I, A.)$$

Man kann diese Formeln etwas umwandeln. Für x findet man (die ähnlichen Formeln für y mögen wegbleiben):

$$x = \frac{(k + f + g).(k + f - g)}{2k} - f, \qquad (I, B.)$$

oder $$x = f - \frac{(g + k - f).(g - k + f)}{2k}. \qquad (I, C.)$$

Nun kann z aus (2) oder (3) bestimmt werden. Aus (2) ist $z^2 = (x + f).(x - f)$. In $x + f$ setze man statt x den Werth aus (I, B) in $x - f$ den aus (I, C), so findet sich

$$z^2 = -\frac{1}{4k^2}.(f + g + k).(-f + g + k).(f - g + k).(f + g - k).$$

$$z = \frac{1}{2k}.\sqrt{-(f + g + k).(-f + g + k).(f - g + k).(f + g - k)} \qquad (II, A).$$

Man findet aber auch leicht

$$z = \frac{1}{2k}.\sqrt{f^4 + g^4 + k^4 - 2f^2g^2 - 2f^2k^2 - 2g^2k^2} \qquad (II, B).$$

Ferner ergiebt sich aus (4)

$$F = \frac{f+g}{4k}.\sqrt{-(f + g + k).(-f + g + k).(f - g + k).(f + g - k)} \qquad (III, A).$$

$$\text{u. } F = \frac{f+g}{4k}.\sqrt{f^4 + g^4 + k^4 - 2f^2g^2 - 2f^2k^2 - 2g^2k^2} \qquad (III, B).$$

oder endlich, wenn man $\frac{f+g+k}{2}$ durch s bezeichnet,

$$F = \frac{f+g}{k}.\sqrt{-s.(s-f).s-g.(s-k)} \qquad (III, C).$$

$$z = \frac{2}{k}.\sqrt{-s.(s-f).(s-g).(s-k)} \qquad (II, C).$$

Bemerkung. Selbst in den Auflösungsformeln bemerkt man die größte Verwandtschaft zwischen der gegenwärtigen Aufgabe und der in §. 356. Es würden sich über die eben aufgelösete ganz ähnliche Betrachtungen in Bezug auf das + und — und auf das Imaginäre anstellen lassen, wie in §. 357 über die frühere Aufgabe angestellt sind. Dabei würde an die Stelle der Deutsamkeit des + und —, welche dort an den gesuchten Größen x und y Statt fand, hier die an den gegebenen Größen f und g treten. Es drückten ja aber auch dort x und y ebenfalls die Abschnitte AD und DB aus, wie hier f und g. Was aber die Bedingungen des Imaginärseyns betrifft, so offenbart sich bei Betrachtung der Formeln (II) und (III) zwischen der frühern und der jetzigen Aufgabe ein gewisser Gegensatz. Derselbe entspringt daraus, daß, wie z. B. (III, A) in §. 356 für a, b, c gebildet ist, so auch (III, A) im gegenwärtigen §. für f, g, k gebildet ist, mit der Ausnahme, daß hier noch das Entgegensetzungszeichen — unterhalb der $\sqrt{}$ dem Producte der vier Factoren vorhergehet. Die Nothwendigkeit dieses Gegensatzes erhellt aber auch, mit Rücksicht auf §. 62, daraus, daß hier $f+g$ nur eine Seite, k aber eine Summe zweier Seiten darstellt, während in §. 356 $a+b$ die Summe zweier Seiten, c aber nur eine Seite ist. Bei näherer Untersuchung, die man auf positive Zahlen f, g, k einschränken kann, findet man wirklich:

1) Ist $k > f+g$, so wird nur der Factor $f+g-k$ negativ, daher das Product der vier Factoren negativ; wegen des ihm vorgesetzten — ist aber die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll, positiv, folglich bekommt man CD und F reell, während in §. 357. III. 1 für $c > a+b$ sich CD und F imaginär fanden.

2) Ist $k = f+g$, so kommt $CD = 0$, $F = 0$.

3) Ist $k < f+g$, so kommt es noch auf verschiedene Fälle an.

a) Ist dabei k größer als $f-g$ oder $g-f$, so wird jeder der vier Factoren positiv; wegen des voranstehenden — also CD und F imaginär.

b) Ist $k=f-g$ oder $=g-f$, so findet sich $CD=0$, $F=0$.

c) Ist endlich k kleiner als $f-g$ oder $g-f$, so wird nur einer der vier Factoren negativ, CD und F werden reell. Es findet sich aber hier zugleich nach den Formeln (I) für eine der Unbekannten x und y, d. h. für eine der Seiten AC, BC, ein negativer Werth. Ohne dieses würde man mit dem Satze §. 62 in Widerspruch gerathen, nach welchem k d. h. $AC+BC$ in einem reellen Dreiecke größer als AB, oder $f+g$, seyn muß. Z. B. $f=3$, $g=8$, $k=4$ giebt $x=-4\frac{7}{8}$, $y=8\frac{7}{8}$, $z=\frac{3}{8}\sqrt{105}$, $F=\frac{33}{16}\sqrt{105}$.

Die merkwürdige Verwandtschaft der jetzigen Aufgabe mit der von §. 356 wird noch von einer andern Seite dadurch in ein größeres Licht gesetzt, daß sich beide einer allgemeineren Aufgabe unterordnen lassen, die sogleich gelöset werden soll.

§. 359. Aufgabe. Eine unbegrenzte Gerade KL (Fig. 7) schneide eine andre AB, oder deren Verlängerung lothrecht in M; zu den Punkten K, L seyen die Linien AK, BK, AL, BL gezogen, gegeben sey $AK=p$, $BK=q$ und $AL+BL=m$; man soll $AL=x$, $BL=y$ berechnen.

Auflösung. Man bemerke zuvor, daß zuweilen gewisse für ein Construct gegebene Größen oder Bedingungen gewisse andre im Constructe enthaltene Größen bestimmen, obgleich sie dasselbe selbst keineswegs völlig bestimmen. So wird z. B. durch zwei Winkel eines Dreiecks nicht das Dreieck selbst, jedoch sein dritter Winkel bestimmt; so bestimmen eine Seite eines Dreiecks und die zugehörige Höhe zwar den Inhalt des Dreiecks, aber nicht die übrigen Bestandtheile desselben. Ein Aehnliches findet man bei der obigen Aufgabe. Die gegebenen Größen AK, BK, AL + BL und die Bedingung, daß sich AB und KL lothrecht schneiden sollen, genügen noch nicht zur Bestimmung des ganzen Constructs; man könnte, um diese Bestimmung zu vervollständigen, noch eine Bedingung hinzufügen; z. B. man könnte für AB eine beliebige Länge annehmen, nur nicht größer als die Summe und nicht kleiner als die Differenz von AK und BK, (§. 62), dann aus AK, BK und AB ein Dreieck construiren, und KM lothrecht ziehen, so würde ein Punkt L in dem Lothe KM zu suchen seyn, für welchen $AL + BL = m$; im Allgemeinen würde dieser Punkt wohl gefunden werden können, und erst so das Construct völlig bestimmt seyn.

Auch die folgende algebraische Behandlung der Aufgabe wird zeigen daß die gegebenen Größen nicht zur Bestimmung des ganzen Constructs genügen, aber sie wird zugleich zeigen, daß sie dessen ungeachtet zur Bestimmung der Länge von AL und BL hinreichen.

Man setze $AL = x$, $BL = y$, $MK = z$, $ML = u$, $AM = v$, $MB = w$, so bilden sich die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (1) & x + y = m \\ (2) & p^2 - z^2 = v^2 \\ (3) & q^2 - z^2 = w^2 \\ (4) & x^2 - u^2 = v^2 \\ (5) & y^2 - u^2 = w^2. \end{array}$$

Mehr als diese fünf Gleichungen kann man aus den Bedingungen der Aufgabe nicht herleiten; aber sie enthalten sechs Unbekannte, und sind also nicht hinreichend, alle diese zu bestimmen. Dies zeigt, daß jene gegebenen Bedingungen nicht zur Bestimmung des ganzen Constructs genügen. Aber dennoch reichen sie hin, um die beiden Hauptunbekannten x und y zu bestimmen.

Um die übrigen Unbekannten z, u, v, w zu eliminiren addire man nämlich (3) und (4), dann (2) und (5), so entstehen die Gleichungen

$$x^2 + q^2 - z^2 - u^2 = v^2 + w^2$$
$$y^2 + p^2 - z^2 - u^2 = v^2 + w^2;$$

dann findet sich aus diesen Gl. durch Subtraction

$$x^2 + q^2 - y^2 - p^2 = 0,$$

oder

$$x^2 - y^2 = p^2 - q^2.$$

Dann ist

$$x - y = \frac{p^2 - q^2}{m},$$

$$x = \frac{m}{2} + \frac{p^2 - q^2}{2m} = \frac{m^2 + p^2 - q^2}{2m},$$

$$y = \frac{m}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2m} = \frac{m^2 - p^2 + q^2}{2m}.$$

Man bemerke die Aehnlichkeit dieser Auflösungsformeln mit denen in §. 356 und §. 358.

Was hier heißt	m, p, q, x, y,
das heißt im §. 356	c, b, a, x, y,
und im §. 358	k, f, g, x, y.

Die Unbekannten z, u, v, w, welche aus unsern Gleichungen nicht bestimmt werden können, würden bestimmbar werden, wenn noch eine sechste Gl. hinzugethan würde; sie würden aber dann, nach der verschiedenen Beschaffenheit dieser Gleichung und aller gegebenen Größen, bald reell, bald imaginär ausfallen, während x, y immer reell bleiben würden. In den Aufgaben von §. 356 und §. 358 ist nun wirklich jedesmal noch eine sechste Gleichung vorhanden. Im §. 356 nämlich entspricht D dem L, nur soll D in AB liegen, weshalb $ML = u = 0$ seyn muß; im §. 358 aber entspricht D dem K, und soll in AB liegen, also muß MK $= z = 0$ seyn. So ist also in §. 356 die Gl. $u = 0$, im §. 358 aber die Gl. $z = 0$ die sechste Gleichung, durch deren Hinzukommen das ganze Construct bestimmt und die Aufgabe vereinfacht wird. Im §. 356 giebt nämlich das Hinzukommen von $u = 0$ die Gleichungen (4) $x^2 = v^2$, (5) $y^2 = w^2$, also

(1) $x + y = m$, oder $x + y = c$

(2) $p^2 - z^2 = v^2$, oder $b^2 - z^2 = x^2$

(3) $q^2 - z^2 = w^2$, oder $a^2 - z^2 = y^2$.

Aus (2) und (3) folgt nun

$$x^2 - y^2 = b^2 - a^2.$$

So kommt man auf die Gleichungen zurück

$$x + y = c$$
$$x^2 - y^2 = b^2 - a^2,$$

welche auch in §. 356 zu Grunde gelegt wurden. Auf ähnliche Weise wird man durch die sechste Gl. $z = 0$ zu den Gleichungen

$x + y = m$ oder $x + y = k$

$x^2 - y^2 = p^2 - q^2$ oder $x^2 - y^2 = f^2 - g^2$

geführt, welche in §. 358 zu Grunde liegen.

So haben sich also wirklich die Aufgaben der §§. 356 und 358 der gegenwärtigen Aufgabe untergeordnet gezeigt.

§. 360. Aufgabe. Man soll eine Gerade MA (Fig. 8) durch einen Punkt N so in zwei Theile theilen, daß sich die ganze Linie zu dem einen Theile MN verhalte, wie dieser Theil zum andern Theile.

Auflösung. Nach der Fordrung der Aufgabe soll seyn

(I) $MA : MN = MN : NA$,

und es ist (II) $NA = MA - MN$.

Man setze $MA = a$, $MN = x$, so ist $NA = a - x$.

Also (III) $a : x = x : a - x$.

Es ist hiebei erforderlich, x als eine Zahl von demselben Vorzeichen wie die Zahl a zu denken; denn auch die dadurch angedeuteten Linien MA und MN sind ja in der Figur, wo N zwischen M und A liegen muß, von gleicher Richtung, und auch nur so kann, wenn a die ganze Linie, x einen ihrer Theile bezeichnet, a—x den andern Theil andeuten. Ist also, was am natürlichsten anzunehmen ist, a eine positive Zahl, so muß auch x eine positive und dabei kleinere Zahl seyn. Nach dieser Bemerkung wird man nach vollendeter Aufl. nur einen mit a einstimmigen Werth von x als den wahren ansehen können.

Die Proportion (III) giebt

$$x^2 + ax = a^2,$$

woher $x = \frac{1}{2}.(-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}) = \frac{1}{2}.(-1 \pm \sqrt{5}).a.$

Der Werth $\frac{1}{2}.(-1-\sqrt{5}).a$ ist mit a von entgegengesetztem Vorzeichen, nur der andre

$$x = \frac{1}{2}.(-1+\sqrt{5}).a = 0{,}618034\ldots \times a$$

ist also der richtige, MN ausdrückende Werth. Er kann auch leicht durch die Probe gerechtfertigt werden.

Man lese jetzt die §§. 287 und 288 nach, so wird man finden, daß auf diese Weise die sogenannte Sectio divina der Linie MA durch Rechnung ausgeführt, oder aus MA, als Radius eines Kreises, die Seite des regelmäßigen Zehnecks oder die Chorde eines Bogens von 36° in diesem Kreise bestimmt ist. Das Verhältniß dieser Chorde zum Radius wird also durch die Zahl $\frac{1}{2}.(-1+\sqrt{5})$ oder 0,618034... ausgedrückt. Man kann selbst aus der für x gefundnen Formel die Richtigkeit der Construction darthun, durch welche in §. 288 eben jene Aufgabe gelöset ist. Diese Formel wird nämlich leicht in diese Gestalt gebracht

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Bildet man nun, wie es in §. 288 und Fig. 83 geschehen ist, ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete $= a$ und der andern $= \frac{a}{2}$, so ist die Hypotenuse nichts anderes als $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, und ziehet man hievon $\frac{a}{2}$ ab, so bekommt man richtig als Rest unsern Werth von x.

Nun ist noch die Frage, ob und wie der zweite für x in der Auflösung der quadratischen Gl. gefundne Werth eine geometrische Deutung zulasse. Man findet

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} . a = -\tfrac{1}{2} . (1 + \sqrt{5}) . a = -1{,}618304 \ldots \times a.$$

Dies giebt eine Linie, deren Richtung der Richtung von MA entgegengesetzt ist, so daß dadurch ein Punkt N′ (Fig. 8) in der Verlängerung von MA über M hinaus bestimmt wird. Für diesen Punkt würden auch die obigen Gl. (I) u. (II), nur N′ statt N gesetzt, also

$$\text{(I)} \quad MA : MN' = MN' : N'A$$
$$\text{(II)} \quad N'A = MA - MN'$$

selbst in Hinsicht des + und — völlige Richtigkeit haben; denn 1) in (I) sind hier die beiden Glieder des ersten Verhältnisses von entgegengesetzter Art, eben so auch die Glieder des letzten Verhältnisses; und 2) die Gl. (II) hat auch hier ihre Richtigkeit; es ist nämlich $N'A = N'M + MA = MA + N'M = MA - MN'$ (Siehe Th. I. S. 231.)

Unsre Auflösung umfaßt also mehr, als bei der Aufgabe, so wie sie oben ausgedrückt ist, gedacht wurde. Die Aufgabe wurde nur für einen Punkt in der Linie MA ausgesprochen, der diese Linie theilen sollte. Die Auflösung giebt aber, außer dem Punkte, nach welchem eigentlich gefragt wurde, einen zweiten in der Verlängerung der Geraden, von welchem sich nicht wohl sagen läßt, daß die Linie durch ihn getheilt werde. Um beide Werthe von x und beide Punkte N und N' als die Aufgabe gleich richtig lösend ansehen zu können, würde man dieselbe nur so auszusprechen haben: In einer unbegrenzten Geraden sind zwei Punkte (M u. A) gegeben, man soll in eben derselben einen dritten bestimmen, so daß die Entfernung des zweiten gegebenen Punktes vom ersten sich zur Entfernung des gesuchten P. vom ersten verhalte, wie eben diese Entfernung zu der Entfernung des zweiten P. vom gesuchten.

§. 361. Aufgabe. Gegeben ist der Radius eines Kreises (Fig. 9) $KC = CL = r$, die Entfernung eines Punktes F vom Centrum $FC = d$, die Länge einer Geraden $= m$, wobei d, r und m als positive Zahlen gedacht werden sollen; man soll die Lage einer Geraden FBA, die in dem Kreise eine Sehne $BA = m$ hervorbringt, dadurch bestimmen, daß man FA und FB berechne. (Vgl. §. **171. 1.**, wo diese Aufgabe zur Construction vorgelegt ist.)

Auflösung.

Erster Fall. F liegt außerhalb des Kreises (Fig. 9. a), so daß also $d > r$.

Hier soll seyn

$$(I) \qquad FA - FB = m,$$

wo es aber nothwendig ist, FA und FB beide positiv zu denken, damit, wie angenommen, m positiv sey; und nach §. 260

$$(II) \qquad FA \,.\, FB = FK \,.\, FL,$$

worin $FK = d - r$, $FL = d + r$, also $FK \,.\, FL = d^2 - r^2$, was hier einen positiven Werth hat.

Man setze jetzt $FA = x$, $FB = y$, so hat man

aus (I) die Gl. $\qquad (1) \quad x - y = m,$

aus (II) die Gl. $\qquad (2) \quad xy = d^2 - r^2,$

wo x und y positive Zahlen bedeuten müssen.

Man bestimmt hieraus

$$x + y = \pm \sqrt{m^2 + 4(d^2 - r^2)}.$$

Da aber x und y, und also auch x + y positiv seyn muß, so darf man nur setzen

$$x + y = + \sqrt{m^2 + (4d^2 - r^2)}.$$

Nun bestimmt sich

$$x = \tfrac{1}{2} . (m + \sqrt{m^2 + 4(d^2 - r^2)})$$

oder $x = \tfrac{1}{2} m + \sqrt{\tfrac{1}{4} m^2 + d^2 - r^2}$,

was ohne Zweifel positiv ist,

und $y = - \tfrac{1}{2} m + \sqrt{\tfrac{1}{4} m^2 + d^2 - r^2}$;

hier wird wegen $d \mid r$ der Ausdruck unter $\sqrt{\ }$ größer als $\tfrac{1}{4} m^2$, daher die Wurzel selbst größer als $\tfrac{1}{2}$ m, und folglich auch y wirklich positiv seyn.

Der Werth von x bestimmt sowohl FA′ als FA″, der von FB sowohl FB′ als FB″.

Bemerkung 1. Die Gl. (1) u. (2) würden auch in Hinsicht des + und — richtig seyn, wenn man sich x u. y beide negativ, x aber als Werth der kleinern Geraden FB y als den der größeren FA dächte. Denn dann wäre auch $x - y = m$ positiv, wie es angenommen ist, und xy wäre positiv, wie $d^2 - r^2$, dem es gleich seyn soll. Daher kann man schließen, der vernachlässigte negative Werth der Summe x + y, nämlich

$$x + y = - \sqrt{m^2 + 4(d^2 - r^2)},$$

welcher giebt

$$x = \tfrac{1}{2} m - \sqrt{\tfrac{1}{4} m^2 + d^2 - r^2}$$

$$y = - \tfrac{1}{2} m - \sqrt{\tfrac{1}{4} m^2 + d^2 - r^2},$$

bestimme durch dieses negative x den Werth von FB, durch dies negative y den von FA. Dies bestätigt sich wirklich dadurch, daß dies x das Gegentheil des oben gefundenen $y = FB$, und dies y das Gegentheil des oben gefundnen $x = FA$ ist.

Daß von den beiden Werthen

$$\tfrac{1}{2}m + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$$

$$\tfrac{1}{2}m - \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2},$$

welche bei vollständiger Auflösung für x sich finden, der zweite nicht den in der Ansatzgleichung positiv gedachten Werth von y darstellt, ist eine Folge davon, daß die Gl. $x - y = m$ nicht symmetrisch für x und y ist.*) (Vgl. §. 352. Anm. 1.)

Zweiter Fall. F liege innerhalb des Kreises, so daß $d < r$. (Fig. 9. b.)

Hier könnte man die Gleichungen zu Grunde legen

$$FA + BF = m$$

$$FA \,.\, BF = KF \,.\, FL,$$

*) Carnot löset in seiner Géométrie de Position (Uebersetzung von Schumacher Th. I. S. 8.) die obige Aufgabe für den außerhalb des Kreises liegenden P. F. ein wenig anders auf; besonders in so fern er nicht d und r; sondern FK und FL als gegeben annimmt. Den Umstand, daß für x zwei Werthe, ein positiver und ein negativer, herauskommen, daß aber der negative eine Linie zu bestimmen scheint, welche dieselbe Richtung hat, wie die durch den positiven Werth bestimmte Linie, benutzt er, die gewöhnliche Meinung zu widerlegen, negative Wurzeln gäben immer Linien in einer Richtung, welche der durch die positiven Wurzeln bezeichneten entgegengesetzt sey. Die gegenwärtige Behandlung dieser Aufgabe, und zugleich der Aufgabe des folgenden §., wird wohl das Eigenthümliche, welches diese Aufgabe in dieser Hinsicht allerdings hat, genügend erklären. Der Verf. hat auch schon in seiner Schrift über den Gegensatz der positiven und negativen Größen (1817) über eben diese Aufgabe in dieser Hinsicht Betrachtungen angestellt.

wo Alles als positiv gedacht werden könnte, aber KF nicht $= d - r$ sondern $= r - d$ wäre. Hieraus würden die Ansatzgleichungen entstehen

$$x + y = m$$
$$xy = r^2 - d^2.$$

Es gelten jedoch auch hier die Ansatzgl. vom ersten Falle, wenn man nur in (I) und (II) die Linie FB als durch eine negative Zahl ausgedrückt denkt, und folglich in (1) und (2) y als negativ betrachtet. Daher gelten auch hier die Auflösungsformeln des ersten Falles, aber für y muß man einen negativen Werth erhalten. Dies bestätigt sich auch dadurch, daß hier, wo $d < r$,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2} < \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2} \quad \text{oder} \quad < \tfrac{1}{2}m,$$

also $-\tfrac{1}{2}m + \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$ negativ ist.

Bemerkung 2. Wollte man den Mittelpunkt von AB mit P bezeichnen, und $FP = x$ setzen, so hätte man $FA = x + \tfrac{1}{2}m$, $FB = x - \tfrac{1}{2}m$, daher

$$(x + \tfrac{1}{2}m) \cdot (x - \tfrac{1}{2}m) = d^2 - r^2,$$

folglich
$$x^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2,$$

also
$$FP = x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}.$$

Hier wäre das $+$ und $-$ als undeutsam, und der Werth von x als bloße Quantitätsbestimmung anzusehen; daher könnte man mit dem Vorzeichen $+$ sich begnügen, und bekäme daraus für FA und FB dieselben positiven Werthe wie oben.

Man könnte aber diesen Werth von FP durch doppelte Anwendung des Pythagorischen Satzes so ableiten: Im Dr. ACP oder BCP ist $PA = BP = \tfrac{1}{2}m$, $CA = CB = r$, daher $CP^2 = r^2 - \frac{1}{4}m^2$. Im Dr. FCP ist $FP^2 = FC^2 - CP^2 = d^2 - (r^2 - \frac{1}{4}m^2) = \frac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2$, wie oben.

Bemerkung 3. Wenn $m > 2r$ genommen wird, so fallen nach den Formeln die Werthe von FA und FB reell aus, während doch die Aufgabe durch Construction unauflösbar ist, da es keine Sehne geben kann, die größer als der Durchmesser ist. Man erkennt aber in diesem Falle die Unmöglichkeit der Construction am Werthe von CP, $= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}m^2}$, welcher imaginär wird, oder auch so: Wegen $\frac{1}{2}m > r$ wird hier $\frac{1}{4}m^2 > r^2$, daher $\frac{1}{4}m^2 - r^2$ positiv, folglich ist $x = \frac{1}{2}m + \sqrt{\frac{1}{4}m + d^2 - r^2}$ größer als $\frac{1}{2}m + d$, und also um so mehr größer als $r + d$, d. i. x ist größer als die Linie FL. Nach §. 139. 4. und §. 140. 4. ist aber für jeden Punkt A im Umfange des Kreises die Gerade FA oder x kleiner als FL; so zeigt sich das der Möglichkeit Widerstreitende in der Annahme eines m, welches größer ist als 2r.

Man siehet auch leicht, daß die Ansatzgleichungen

$$x - y = m$$
$$xy = d^2 - r^2$$

angesehen werden können als die allgemeinere Aufgabe lösend: Die Seiten eines Rechtecks zu bestimmen, so daß die Differenz dieser Seiten einer gegebenen Geraden und der Inhalt des Rechtecks einem gegebenen Flächenraume gleich sey. Diese Aufgabe ist aber offenbar für jedes noch so große m auflösbar, und hängt nicht von d und r sondern nur von $d^2 - r^2$ ab. Unsre obige Aufgabe aber setzt den Kreis und den P. F, in einer bestimmten Entfernung von C, als gegeben voraus, und hat eben durch diese Bedingungen jene allgemeinere Aufgabe so specialisirt, daß es nicht befremden kann, wenn in ihr Bedingungen der Auflösbarkeit hervortreten, welche der allgemeineren Aufgabe fremd sind. (Vergl. §. 357. III.)

§. 362. Aufgabe. In einem Kreise (Fig. 10), dessen Radius $=r$, ist gegeben eine Sehne $AB=m$; außerdem ist eine Gerade d gegeben; r, m, d werden positiv gedacht; man soll in der Sehne oder ihrer Verlängerung einen Punkt F, dessen Entfernung von C der Geraden d gleich ist, dadurch bestimmen, daß man AF und BF berechnet.

Auflösung.

Es ist $\quad AF - BF = AB$

und nach §. 260 $\quad FA.FB = FK.FL$

oder $\quad AF.BF = FK.FL$,

wo $FK = d-r$, $FL = d+r$. Setzt man nun $AF=x$, $BF = y$, so hat man

$$(1) \qquad x - y = m$$

$$(2) \qquad xy = d^2 - r^2.$$

Diese zwei Gleichungen stimmen ganz mit denen bei der Aufgabe des vorigen §. überein, mit welcher Aufgabe die gegenwärtige überhaupt höchst verwandt ist. Auch ist zu bemerken, daß alle hier aufgestellten Gl. gleich gut für den Fall passen, wo $d > r$, und F außerhalb des Kreises liegen muß, und für den, wo $d < r$, und F innerhalb liegen muß.

Die Auflösung der Gl. giebt

$$AF = x = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2},$$

$$BF = y = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2},$$

und zwar muß hier das Wurzelvorzeichen bei y mit dem bei x übereinstimmend gedacht werden, so daß sich zwei Werthe von x und zwei zugehörige des y bestimmen. Man kann folgende Fälle unterscheiden:

1) Ist $d > r$, so bekommt x einen positiven und einen negativen Werth eben so y (Fig. 10. a).

2) Ist $d = r$, so fällt F' in B, F'' in A.

3) Ist $d < r$, jedoch $> \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}m^2}$, so bekommt x zwei positive, y zwei negative Werthe (Fig. 10. b).

4) Ist $d = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}m^2}$, so fallen F' und F'' beide in den Mittelpunkt von AB, denn $\sqrt{\frac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$ ist hier $= 0$.

5) Ist $d < \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}m^2}$, so wird x und y imaginär, es giebt keinen auflösenden Punkt F.

Wollte man nicht AF sondern PF als x suchen, so wäre der Ansatz

$$(x + \tfrac{1}{2}m) \cdot (x - \tfrac{1}{2}m) = (d + r) \cdot (d - r)$$

und daher $\quad PF = x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$.

Hier wäre das $+$ und $-$ deutsam, und würde zur Bestimmung der beiden möglichen Lagen des Punktes F dienen.

Bemerkung. Es mag hier das Verhältniß dieser Aufgabe zu der höchst ähnlichen Aufgabe des vorigen §. etwas näher betrachtet werden.

Der Unterschied beider Aufgaben bestehet in Hinsicht der geometrischen Bedingungen darin, daß dort der Punkt F als gegeben, A, B als gesucht aufgestellt sind, hier aber A, B als gegeben, F als gesucht; daß dort für FA oder FB keine bestimmte Richtung gegeben war, hier aber für AF und BF eine gegebene unbegrenzte Gerade vorhanden ist, in der sie liegen müssen, und nur nach zwei bestimmten einander entgegengesetzten Richtungen liegen können.

In Hinsicht der algebraischen Auflösung findet sich der Unterschied, daß dort das $+$ und $-$ an dem Doppelwerthe

$$FP = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$$

undeutsam, hier aber an dem ganz damit übereinstimmenden Werthe von PF deutsam war; daß dort von den zwei Werthen, die für FA gefunden wurden, nur der eine den der Ableitung der Ansatzgleichungen zu Grunde gelegten Annahmen entsprach, daß aber hier beide für AF gefundne Werthe als richtige Auflösungen zu betrachten waren.

So pflegt sich überhaupt an den Werthen einer gesuchten geraden Linie ein deutsames + und — zu finden, wenn für diese Linie eine unbegrenzte Gerade gegeben ist, in der sie liegen soll, ein undeutsames dagegen, wenn dies nicht der Fall ist.

Man kann sich die Sache auch so denken. Im §. 361 kann, wenn FP berechnet werden soll, schon in der zu beantwortenden Frage nur von der Größe dieser Linie, nicht von der Richtung derselben die Rede seyn; im §. 362 dagegen kann allerdings nicht bloß nach der Größe von PF, sondern auch nach der Richtung dieser Geraden gefragt werden, indem hier eine unbegrenzte Gerade vorhanden ist, in der PF liegen soll. Es ist daher auch ganz nothwendig, daß die Antwort in §. 361 durch die Formel

$$FP = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$$

mit einem undeutsamen + und —, dagegen in §. 362 durch die Formel

$$PF = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + d^2 - r^2}$$

mit deutsamem + und — gegeben wird.

Schon die aus dem Pythagorischen Satze entspringenden Formeln geben Anlaß zu gleichen Bemerkungen. Ist (Fig. 11) eine unbegrenzte Gerade RS gegeben, auf derselben ein Loth $AB = k$, und es ist verlangt, in RS einen P. C zu bestimmen, für welchen die Hypotenuse $BC = h$, so ist in der Formel $AC = \pm \sqrt{h^2 - k^2}$ das + und — deutsam, denn die Frage kann sich hier auch auf die Richtung der AC in RS beziehen, und die zwei entgegengesetzten Werthe von

AC bestimmen zwei entgegengesetzt liegende Punkte C′ u. C″. In andern Fällen dagegen, wo keine solche unbegrenzte Gerade da ist, in welcher die zu berechnenden Katheten liegen sollen, ist das + und — jener Formel undeutsam.

II. Uebungsaufgaben.

§. 363. Aufgaben über Flächenräume.

1) Zwei Parallelogramme stimmen in den Winkeln und dem Inhalte überein; vom ersten sind beide Seiten gegeben, a und b; eine Seite des andern ist = f. Man soll die zweite Seite des andern Prllgrs. berechnen. (S. §. 205. 2 u. §. 198.)

2) In der Seite AB eines Dr. ABC ist ein P. F dadurch bestimmt, daß AF = p, FB = q, auch ist gegeben AC = b; BC = a; man soll durch Rechnung die Lage eines P. G im Umfange des Dr. bestimmen, so daß FG das Dreieck halbire.

S. §. 200. II. u. §. 211. 2. Ist p |ı q, so muß G in AC liegen; wenn aber p ı| q, in BC. Im ersten Falle ist $AG = \frac{b.(p+q)}{2p}$, im zweiten $BG = \frac{a.(p+q)}{2q}$.

3) Der Inhalt einer Figur verhält sich zum Inhalte einer andern ähnlichen Figur wie m zu n; die erste enthält Linien, welche = a, b. u. s. w. sind; man soll die homologen Linien α, β... der andern Figur berechnen.

S. §. 247. u. §. 263. 2. Man findet

$$\alpha = a.\sqrt{\frac{n}{m}}, \qquad \beta = b.\sqrt{\frac{n}{m}} \text{ u. s. w.}$$

4) Das Dreieck ABC soll durch eine Gerade FG, welche mit AB parallel ist, in zwei Theile CFG und ABGF getheilt werden, die sich wie m zu n verhalten. Wie groß ist CF?

S. §. 243. u. §. 315. 1. Es kommt, wenn F in CA liegt,

$$CF = CA . \sqrt{\frac{m}{m+n}}.$$

5) Es sind zwei homologe Seiten zweier ähnlichen Figuren gegeben, a in der ersten Figur, a' in der zweiten; man soll die homologe Seite x einer ähnlichen Figur berechnen, deren Inhalt der Summe oder der Differenz der gegebenen Figuren gleich sey.

S. §. 264. Für den Fall der Summe kommt $x = \sqrt{a^2 + a'^2}$; für den Fall der Differenz, wenn a > a', kommt $x = \sqrt{a^2 - a'^2}$.

§. 364. Wie in §. 361. ist in Fig. 9. gegeben KC = CL = r, FC = d; man soll FA und FB so bestimmen, daß FA : FB = n.

Es ist $FA = \sqrt{n . (d^2 - r^2)}$, $FB = \sqrt{\frac{d^2 - r^2}{n}}$.

§. 365. 1) Von einem Dreiecke ABC sind die Seiten AC = b, BC = a nebst dem Verhältnisse der durch das Loth CD auf AB gebildeten Abschnitte, nämlich AD : DB = n, gegeben; wie groß sind diese Abschnitte? (S. §. 329. 1.)

2) Es sind gegeben die Abschnitte AD = f, DB = g, nebst dem Verhältnisse der Seiten AC : BC = n; wie groß sind diese Seiten?

§. 366. Vom Dreiecke ist gegeben die Basis AB = a, die Höhe CD = h; es soll in demselben ein Rechteck FGHI eingeschrieben seyn, so daß F und G in AB, H in BC, I in AC liegen; endlich soll seyn FG : FI = n; wie groß sind die Seiten des Rechtecks? (S. §. 324. 2.)

§. 367. Man soll die Seiten eines Rechtecks berechnen, wenn der Inhalt desselben einem Quadrate gleich ist, dessen Seite = a, und noch außerdem gegeben ist, entweder

1) der Verhältnißexponent der Seiten, $= n$.
oder 2) der Umfang $= p$. (§. 314. 1.)

Die eine Seite ist $= \frac{1}{4}p \cdot \left\{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{p}\right)^2}\right\}$,

die andre $= \frac{1}{4}p \cdot \left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4a}{p}\right)^2}\right\}$.

oder 3) die Differenz seiner zwei Seiten, $= d$.

Die eine Seite ist $= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{d^2 + 4a^2} + d)$,

die andre $= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{d^2 + 4a^2} - d)$.

§. 368. Man soll die Seiten eines Rechtecks berechnen, wenn gegeben ist sein Inhalt und der Durchmesser des umschriebenen Kreises. (S. §. 317. u. §. 353.)

§. 369. Man soll die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen, wenn das vom rechten Winkel zur Hypotenuse gefällte Loth $= f$ gegeben ist, nebst

1) der Summe der Katheten, $= s$,
oder 2) der Differenz der Katheten $= d$.

Man findet für die erste Aufgabe, wenn man die Katheten mit x und y, die Hypotenuse mit z bezeichnet.

$$z = -f \pm \sqrt{f^2 + s^2}$$

dann $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \cdot (s \pm \sqrt{s^2 - 4fz})$.

Es können hier manche Betrachtungen in Bezug auf das $+$ und $-$ und auf das Imaginäre angestellt werden. Zahlenbeispiel: $f = 12$, $s = 35$.

§. 370. Man bezeichne für ein rechtwinkliges Dreieck mit S die Summe der Hypotenuse und des auf dieselbe aus dem rechten Winkel-gefällten Lothes, mit D die Differenz derselben Linien; ferner bedeute s die Summe, d die Differenz der Katheten. Dann können folgende Aufgaben gelöset werden:

Man soll die Seiten und das Loth im rechtwinkligen Dreiecke berechnen, wenn gegeben ist,

1) S und s,
oder 2) D und d,
oder 3) S und d,
oder 4) D und s.

In der Aufg. 1. findet man für das Loth den Werth $\sqrt{S^2 - s^2}$, und hieraus bestimmen sich dann die übrigen Linien.

In Aufg. 3. entstehet für die Hypotenuse z die Gl.

$$3z^2 - 2Sz = d^2.$$

§. 371. Von einem Dreiecke ist der Inhalt, = F gegeben, nebst

1) den zwei Seiten a, b,
oder 2) einer Seite = c, und der Summe der beiden andern Seiten = s,
oder 3) einer Seite = c, und der Differenz der beiden andern Seiten = d,

man soll die unbekannten Seiten berechnen.

Man kann die Auflösung jedesmal auf die Formeln aus §. 356. stützen:

$$F = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

oder $$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c)}.$$

§. 372. Man soll die zwei unbekannten Seiten eines Dreiecks berechnen, wenn gegeben ist die Seite AB = c, das zugehörige Loth CD = h, und entweder

1) die Summe der unbekannten Seiten = s,
oder 2) die Differenz derselben = d.

Man kann die Aufl. erhalten, indem man durch doppelten Ausdruck des Inhaltes, aus Basis und Höhe nämlich, und auch aus den drei Seiten nach der letzten im vorigen §. angeführten Formel, eine Gleichung ableitet. Man erhält in Aufg. 1. für die Differenz der unbekannten Seiten den Ausdruck

$$c \cdot \sqrt{1 - \frac{4h^2}{s^2 - c^2}}.$$

Man kann aber auch die auf AB durch das Loth gebildeten Abschnitte als unbekannte Größen mit Buchstaben bezeichnen, ohne Anwendung des Inhaltes vier Gleichungen ableiten, und dann, in der ersten Aufgabe, die Differenz der unbekannten Seiten und die der beiden Abschnitte, als Hülfsunbekannte, mit Buchstaben bezeichnen, endlich durch geschickte Elimination diese Differenzen zu bestimmen suchen. In der zweiten Aufgabe tritt an die Stelle der Differenz der unbekannten Seiten deren Summe.

§. 373. Der Inhalt eines Dreiecks soll $= F$ seyn, und seine Seiten sollen sich verhalten wie die Zahlen m, n, p; wie groß sind die Seiten?

Setzt man

$$A = \sqrt{(m+n+p).(-m+n+p).(m-n+p).(m+n-p)}$$

und $$B = 2 . \sqrt{\frac{F}{A}},$$

so ist die eine Seite $= mB$, die andre $= nB$, die dritte $= pB$.

§. 374. Die drei Lothe, die von den Ecken eines Dreiecks zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen sind, sind $= f$, g, h; wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

Es sey $s = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)$, so ist der Inhalt

$$F = \frac{1}{4.\sqrt{s.\left(s-\frac{1}{f}\right).\left(s-\frac{1}{g}\right).\left(s-\frac{1}{h}\right)}},$$

dann sind die Seiten $= \frac{2F}{f}, \quad \frac{2F}{g}, \quad \frac{2F}{h}$.

§. 375. Gegeben ist der Durchmesser eines Kreises $AB = d$, und ein Stück desselben $AC = a$; aus C ist ein Loth CR auf dem Durchmesser errichtet; man soll die Gerade AF berechnen, für welche das von CR und der Kreisperipherie begrenzte FE einer gegebenen Geraden m gleich sey. (S. §. 283, §. 337 und Fig. 75. a. zum 1sten Th.)

Diese Aufgabe ist der von §. 361. sehr verwandt und erlaubt ähnliche Betrachtungen.

§. 376. Vom Dreiecke ABC ist die Basis $AB = c$, die Höhe $CD = h$, gegeben; in demselben wird ein Rechteck FGHI so construirt gedacht, daß die Punkte F, G in der Basis AB, die Punkte H, I aber der erste in BC, der andre in AC liegen, und daß dieses Rechteck einem gegebenen Quadrate Q gleich sey. Man soll durch Rechnung die Lage des Punktes L des Lothes CD bestimmen, in welchem Punkte dies Loth von HI geschnitten wird. (S. §. 331 und Fig. 102 zu Th. I.)

Man sucht am besten die Entfernung des Punktes L vom Mittelpunkte der CD. Nennt man dieselbe x, so findet sich

$$x = \pm \frac{h}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4Q}{ch}}$$

oder, wenn $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks, der $= \frac{ch}{2}$ ist, bezeichnet

$$x = \pm \frac{h}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2Q}{\triangle}}.$$

Das + und — ist hier deutsam. Durch die beiden Werthe von x werden zwei Rechtecke FGHI und F′G′H′I′ bestimmt, welche beide die aufgestellten Bedingungen erfüllen.

Es darf Q nicht positiv und zugleich größer als $\frac{1}{2}\triangle$ seyn, wenn x reell seyn soll (vorausgesetzt, daß $\triangle$ positiv). Für $Q = \frac{1}{2}\triangle$ wird $x = 0$, die beiden auflösenden Rechtecke gehen in ein einziges über, welches zugleich das größte ist, das im Dreiecke construirt werden kann.

Q kann aber auch in sich negativ genommen werden; x ist dann immer ($\triangle$ als positiv gedacht) reell, und man findet zwei Rechtecke, die nicht eigentlich im Dreiecke construirt sind, sondern welche die Punkte H und I in den Verlängerungen von BC und AC haben. (S. Förstemann, über den Gegensatz positiver u. negativer Größen S. 109 u. folg.)

Es ist noch zu beachten, daß die gegebene Basis und Höhe, verbunden mit Q, zur Bestimmung von x genügen, obgleich durch sie das Dreieck ABC selbst noch nicht bestimmt ist.

§. 377. Die Summe der Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks werde durch S, die Differenz derselben Linien durch D, die Summe der Hypotenuse und der zweiten Kathete durch s, die Differenz derselben Linien durch d bezeichnet; dann kann verlangt werden, die drei Seiten zu berechnen, wenn gegeben ist entweder

1) S und s,
oder 2) D und d,
oder 3) S und d.

Faßt man S und D in die Bezeichnung A, s und d aber in a zusammen, so findet sich jedesmal für die Hypotenuse die Formel

$$A + a \pm \sqrt{2Aa};$$

hieraus lassen sich sodann die Werthe der Katheten bestimmen, und noch einige Betrachtungen wegen der Doppelvorzeichen anstellen, welche durch Zahlenbeispiele erläutert werden.

§. 378. Die drei Seiten AB, BC, CA, welche mit c, a, b wie gewöhnlich bezeichnet werden sollen, seyen in den Punkten F, D, E halbirt (Fig. 12), so daß die drei Geraden AD, BE, CF sich in dem Schwerpunkte G des Dreiecks schneiden (§. 267). Diese drei Geraden AD, BE, CF seyen nach der Ordnung = d, e, f. Dann können unter andern folgende Aufgaben gelöset werden:

1) Es sind die drei Seiten a, b, c gegeben; man soll die Geraden d, e, f berechnen.

2) Es sind die Seiten a, b, nebst der Geraden f gegeben; man soll c und den Inhalt F des Dreiecks berechnen.

3) Es sind die drei Geraden d, e, f gegeben; man soll die Seiten und den Inhalt F berechnen.

Man fälle ein Loth CK auf AB, so kann man durch Anwendung der Formel (I, A) aus §. 356. für den Abschnitt AK zwei Ausdrücke ableiten, welche gleich seyn müssen. Daraus wird sich dann finden

$$f = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2};$$

Eben so

$$d = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$e = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Diese Formeln lösen die Aufg. 1. Zur Aufl. von 2. findet man zunächst
$$c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4f^2}.$$
Die verlangte Formel für F erhält man bequem durch eine Hülfsconstruction. Man verlängre CF, bis FL = CF, dann ist △CBL dem ABC am Inhalte gleich. Der Inhalt von CBL kann aber aus seinen Seiten BC = a, BL = CA = b, CL = 2f bestimmt werden, und so erscheint
$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2f)(a+b-2f)(a-b+2f)(-a+b+2f)}.$$
Für Aufg. 3. findet sich zuvörderst
$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2e^2 + 2f^2 - d^2} \text{ u. s. w.}$$
Um die Formel für den Inhalt des △ABC abzuleiten betrachte man △BGI, wenn BI parallel mit AD. Es ist in demselben (§. 267) $BI = AG = \frac{2}{3}d$, $BG = \frac{2}{3}e$, $GI = CG = \frac{2}{3}f$. Daraus läßt sich △BGI und aus demselben △ABC oder F finden, weil ABC = 3. BGI. Man bekommt auf diesem Wege
$$F = \tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{(d+e+f).(d+e-f).(d-e+f).(-d+e+f)}.$$
Weniger einfach ist die Ableitung dieser Formel in: Lehmus Geometrie, zweite Aufl., Th. I. S. 298.

Anm. Durch Betrachtung des Dr. BGI lassen sich noch einige Sätze finden, die sich aber auch aus den gefundnen Formeln ergeben. Nämlich: Man nenne der Kürze wegen die Linien AD, BC, CF die Mittellinien des Dr. ABC, dieses Dreieck aber das erste. Construirt man dann ein zweites Dr. aus den Mittellinien des ersten, als Seiten, (die durch §. 62. bedingte Möglichkeit dieses zweiten Dr. erhellt aus der Möglichkeit des Dr. BGI, das ihm ähnlich ist), dann wieder ein drittes Dr. aus den Mittellinien des zweiten, und so immer weiter, so gilt:

(1) Es sind ähnlich: das 1ste, 3te, 5te Dr. u. s. w. Die Seiten des ersten verhalten sich zu den homologen des dritten wie 4 : 3; eben so die des dritten zu denen des fünften u. s. w.

(2) Aehnliches gilt für das 2te, 4te, 6te u. s. w.

(3) Der Inhalt des ersten Dr. verhält sich zum Inhalte des zweiten wie 4 : 3; eben so der Inhalt des zweiten zu dem des dritten u. s. w.

§. 379. 1) Von einem Prllgr. ABCD sind die zwei Seiten AB = a, BC = b und die Diagonale AC = p gegeben; man soll die andre Diagonale BD = q berechnen.

Diese Aufg. stehet mit der von §. 378. 1. in Verbindung. Man erhält, als eine Gl., welche den arithmetischen Zusammenhang zwischen a, b, p, q ausdrückt,

$$p^2 + q^2 = 2 . (a^2 + b^2)$$

folglich

$$p = \sqrt{2 . (a^2 + b^2) - p^2}.$$

2) Von einem Prllgr. sind die Diagonalen p, q nebst einer Seite a gegeben; man soll die zweite Seite b und den Inhalt des Prllgrs berechnen.

3) Von einem Prllgr. sind die Diagonalen und der Inhalt F gegeben; man soll die Seiten berechnen.

§. 380. Im Dr. ABC ist C mit einem P. M der Basis oder auch der Verlängerung der Basis verbunden (Fig. 13); es ist gegeben $AC = b$, $BC = a$, $AM = f$, $MB = g$, also $AB = f + g$. Man soll hieraus $CM = k$ berechnen.

Fällt man CN und bestimmt den Abschnitt AN nach §. 356. (1, A) auf doppelte Weise, etwa aus Dr. ABC und AMC, so bekommt man eine Gleichung, welche in

$$(f + g) . (k^2 + fg) = a^2 f + b^2 g$$

übergehet, und daher

$$k = \sqrt{\frac{a^2 f + b^2 g}{f + g} - fg}.$$

Bemerkungen. Man findet hieraus die Aufl. der Aufg. §. 378. 1, wenn man statt f, g, k nach der Reihe setzt $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}c$, f.

Ist $a = b$, also das Dreieck gleichschenklig, so kommt

$$k = \sqrt{a^2 - fg}.$$

Die oben gefundne Gl. kann verwandelt werden in

$$a^2 f + b^2 g - k^2 . (f + g) - fg . (f + g) = 0.$$

Setzt man hier statt a, b, k, f, g und f + g die dadurch ausgedrückten Linien, so entstehet

$$CB^2 . AM + CA^2 . MB - CM^2 . AB - AM . MB . AB = 0,$$

oder, weil $AB = - BA$,

$$CB^2 . AM + CA^2 . MB + CM^2 . BA + AM . MB . BA = 0.$$

Diese Gl. drückt den Zusammenhang zwischen den Entfernungen dreier

Punkte einer Geraden unter einander, und den drei Entfernungen derselben Punkte von irgend einem vierten Punkte aus.

§. 381. 1) Von einem Trapeze sind die vier Seiten gegeben, nämlich $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, wobei AB und CD die parallelen Seiten seyn sollen; man soll daraus die Diagonalen $AC = p$, $BD = q$ berechnen.

Bei der Aufgabe, aus den gegebenen Seiten des Trapez zu construiren (§. 169), muß man sich einer Hülfslinie bedienen, die z. B. aus C parallel mit DA gezogen ist. Dieselbe Hülfslinie dient zur algebraischen Auflösung. Man führt dadurch gegenwärtige Aufgabe auf die des vorigen §. zurück, und findet die Gleichungen

$$(p^2 - ac) . (a - c) = ad^2 - cb^2,$$
$$(q^2 - ac) . (a - c) = ab^2 - cd^2,$$

woraus sich p und q bestimmen lassen.

2) Man soll aus denselben gegebenen Größen den Inhalt des Trapezes berechnen.

Bezeichnet man das Product

$$(a+b-c+d) . (-a+b+c+d) . (a-b-c+d) . (a+b-c-d)$$

mit P, so ist

$$\text{der Inhalt} = \frac{a+c}{4(a-c)} . \sqrt{P}.$$

3) Von einem Trapeze sind gegeben die zwei parallelen Seiten a und c, nebst den Diagonalen p und q; man soll daraus die Seiten b und d berechnen.

Auf einem Wege, der dem bei 1. eingeschlagenen ähnlich ist, oder auch, indem man aus den beiden in 1. gefundnen Gl. nach der Reihe d und b eliminirt, findet man

$$(b^2 + ac) . (a + c) = aq^2 + cp^2$$
$$(d^2 + ac) . (a + c) = ap^2 + cq^2,$$

woraus man b und d berechnen kann.

4) Aus denselben gegebenen Größen den Inhalt des Trapezes zu bestimmen.

Man bezeichne das Product

$$(a+p+c+q . (-a+p-c+q) . (a-p+c+q) . (a+p+c-p)$$

mit P; so ist der Inhalt $= \frac{1}{4}\sqrt{P}$.

Bemerkungen. Um die Richtigkeit der gefundenen Formeln zu prüfen, kann man sie auf specielle Fälle anwenden. Setzt man $c = 0$, so gehet das Trapez in ein Dreieck über, dessen Seiten $= a, b, d$, dann wird $p = d$, $q = b$, und die obigen Formeln geben Richtiges. Durch die Annahme $a = c$ wird man mittelst der Gl. in 1. auf $b = d$ geführt, das Trapez wird ein Parallelogramm; die Gl. in 3. führt auf §. 379. 1. zurück; die Gl. in 1. sowohl, wie die in 2, geben zu erkennen, daß ein Prllgr. durch seine Seiten allein noch nicht bestimmt ist, was sich auch unmittelbar aus geometrischen Gründen einsehen läßt.

Durch Addition der in 1. oder der in 3. gefundenen Gl. läßt sich ableiten

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

eine Gl., welche einen Zusammenhang zwischen allen 6 Linien des Trapezes ausspricht.

§. 382. Einige Eigenschaften des Vierecks.

1) Die Seiten und Diagonalen eines Vierecks mögen seyn $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = p$, $BD = q$, endlich eine Gerade KL, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet, $= f$ (Fig. 14), so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4f^2 \qquad (1).$$

Den Beweis zu führen, ziehe man AL und CL, und wende auf die Dreiecke ABD, BCD, ACL die in §. 378. für die 1ste Aufg. gefundne Gl. an, so bekommt man drei Gl., aus denen (1) gefolgert werden kann.

2) Man verbinde auch die Mittelpunkte der einander gegenüber liegenden Seiten des Vierecks durch Gerade $MN = g$, $PQ = h$, so finden sich, aus ähnlichen Gründen, die Gl.

$$a^2 + p^2 + c^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 4g^2 \qquad (2)$$

$$b^2 + p^2 + d^2 + q^2 = a^2 + c^2 + 4h^2 \qquad (3).$$

3) Aus den Gl. (1) (2) (3) folgt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + p^2 + q^2 = 4.(f^2 + g^2 + h^2). \quad (4)$$

Anm. Soll das Viereck ein Prllgr. seyn, so hat man $a = c = g$, $b = d = h$, $f = 0$, und jede der Gl. (1) bis (4) führt auf die Gl. $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ aus §. 379. 1. zurück.

§. 383. Von einem Vierecke im Kreise mögen die vier Seiten und zwei Diagonalen heißen a, b, c, d, p, q (wie §. 382.) Sind von diesen sechs Linien vier gegeben, so kann man daraus die zwei unbekannten berechnen. Hieraus entstehen folgende Aufgaben:

1) Man sucht die Diagonalen aus den Seiten.

2) Man sucht zwei einander gegenüberliegende Seiten aus den übrigen Linien.

3) Man sucht zwei sich berührende Seiten.

4) Man sucht eine Seite und eine Diagonale.

Es sind hier immer die sich nach §. 274. III. (Ptolemäischer Satz) und IV. ergebenden Gleichungen zu Grunde zu legen

$$ac + bd = pq,$$

$$p : q = (ad + bc) : (ab + cd),$$

welche letztre Gl. auch in der Form geschrieben werden kann

$$abp + cdp = adq + bcq.$$

In den ersten beiden Aufgaben kommt man auf reine, in den beiden letzten auf unreine quadratische Gleichungen.

Zu Zahlenbeispielen können die 6 Zahlen angewandt werden: $a = 60$, $b = 16$, $c = 25$, $d = 33$, $p = 52$, $q = 39$, welche wirklich in Verbindung mit einander bei einem Vierecke im Kreise Statt haben können.

§. 384. 1) Von einem um einen Kreis beschriebenen Vierecke ABCD sind die vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ gegeben; man soll die Stücke berechnen, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte getheilt werden.

2) Von einem Vierecke, um welches ein Kreis beschrieben gedacht wird, sind die vier Winkel A, B, C, D (wobei $A+B+C+D = 4R$) gegeben; man soll die Theile dieser Winkel berechnen, in welche sie durch die Radien, die zu den Eckpunkten gezogen sind, getheilt werden.

Die erste dieser Aufgaben ist innig mit der in §. 349, die zweite mit der von §. 350. verwandt. Das Ergebniß, welches sich beim Versuche, diese Aufgaben zu lösen, findet, ist aber sehr eigenthümlich. Dies mag nur an der zweiten Aufg. nachgewiesen werden.

Bezeichnet man hier die unbekannten Winkel wie in Fig. 15, so bilden sich die Ansatzgleichungen

$$(1) \qquad x + y = A,$$
$$(2) \qquad y + z = B,$$
$$(3) \qquad z + u = C,$$
$$(4) \qquad u + x = D.$$

Jeder Versuch, etwa die Unbekannte x, durch Elimination der andern, zu bestimmen, führt zu einer Gleichung, welche x nicht enthält, nämlich zu $A + B = C + D$.

Diese Gl. wird auch durch Addition von (1) u. (3) dann von (2) und (4) als nothwendig erkannt, und zeigt eine Bedingung an, welche Statt finden muß, wenn die vier Gleichungen nichts Ungereimtes aussagen sollen. Findet diese Bedingung Statt, so kann man an der Stelle von (4) schreiben

$$u + x = A + C - B;$$

dann ist aber diese Gl. von den drei andern abhängig; sie wird gefunden, wenn man von der Summe der (1) und (3) die (2) abziehet; so hat man eigentlich nur drei Gl. für vier Unbekannte, die Aufgabe ist eine unbestimmte.

Diese eigenthümliche Erscheinung wird durch §. 143. aufgeklärt. Nach diesem muß bei jedem Vierecke im Kreise seyn $A+C = B+D$; findet dies aber bei einem Vierecke Statt, so kann auch jedesmal ein Kreis um dasselbe beschrieben werden. Sind nun die vier Winkel gegeben, so daß $A+C = B+D = 2R$, so kann man beliebig viele Vierecke mit diesen Winkeln bilden, welche alle Vierecke im Kreise sind, bei denen aber die Theile x, y, z, u der Winkel sehr verschieden ausfallen können.

§. 385. Von einem Dreiecke ist die in F halbirte Basis $AB = c$ gegeben, so daß $AF = FB = \frac{1}{2}c$; ferner ist die Gerade $CF = f$ und die Summe der Quadrate der außer der Basis vorhandnen Seiten, $AC^2 + BC^2 = s$, gegeben; man soll diese Seiten berechnen.

Es werde (Fig. 12) das Loth CK gefällt, $AC = x$, $BC = y$, $FK = z$ gesetzt, so hat man

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = s$$

und nach §. 221. oder auch §. 356. (I, A.)

$$(2) \qquad x^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + f^2 + cz$$

$$(3) \qquad y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + f^2 - cz.$$

Man kann nun suchen, x zu bestimmen. Um zunächst z zu eliminiren addire man (2) und (3). So entstehet $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2f^2$. Will man nun aus dieser Gl. und (1) durch Subtraction y eliminiren, so fällt nicht bloß y, sondern zugleich x heraus, und man findet

$$s = \tfrac{1}{2}c^2 + 2f^2.$$

Diese Gl. enthält keine Unbekannte mehr; aus ihr, und so auch aus den Ansatzgleichungen überhaupt, können die gesuchten Größen gar nicht bestimmt werden; sie drückt im Gegentheil eine Bedingung aus, der die gegebenen Größen unterworfen seyn müssen, wenn ein Dreieck möglich seyn soll, das dieselben enthält. Findet diese Bedingung Statt, so hat man eigentlich nur zwei Gleichungen, indem dann zwei der drei Ansatzgleichungen schon die dritte nach sich ziehen; hat also auch nur eine unbestimmte Aufgabe, da zwei Gleichungen nicht zur Bestimmung von drei Unbekannten genügen. Zu einer bestimmten kann die Aufgabe dann nur durch Hinzufügung noch einer in einer Gleichung ausgesprochenen Bedingung erhoben werden. Findet aber die Gl. $s = \frac{1}{2}c^2 + 2f^2$ nicht Statt, so ist die Aufgabe ungereimt und ganz unauflösbar.

Auch aus der für §. 378. 1. gefundnen Formel $f = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ könnte man die Aufl. herzuleiten versuchen, indem man statt a und b setzte x und y. Aber auch hieraus würde die Gl. $s = \frac{1}{2}c^2 + 2f^2$ entstehen.

Das Ergebniß der versuchten Auflösung hat große Aehnlichkeit mit dem im vorigen §. gefundnen, und hängt mit folgenden den Kreis betreffenden Sätzen zusammen: 1) Ist (Fig. 16) ein Kreis mit dem Centrum F und dem Radius FC vorhanden, und in einem Durchmesser desselben sind die Punkte A und B so genommen, daß $AF = FB$, so ist die Summe $AC^2 + BC^2$ eine constante, nämlich $AC'^2 + BC'^2 = AC''^2 + BC''^2$ u. s. w. $= 2.(AF^2 + CF^2)$. 2) Sind in einer Geraden die Punkte A, F, B gegeben, und zwar so, daß $AF = FB$; ist ferner $AC^2 + BC^2$ gegeben, so ist FC constant, nämlich $FC^2 =$

$\frac{1}{2} . (AC^2 + BC^2) - AF^2$, und ein Kreis ist der geometrische Ort für den Punkt C.

§. 386. 1) Für ein Dreieck sind die Radien r', r'', r''' der drei außen-eingeschriebenen Kreise gegeben; man soll den Inhalt F des Dreiecks, seine Seiten a, b, c, und den Radius des eingeschriebenen Kreises, nämlich r, berechnen.

Wenn s den halben Umfang bezeichnet, so ist nach §. 279

$$F = (s-a) . r' = (s-b) . r'' = (s-c) . r''',$$

oder $2F = (-a+b+c) . r' = (a-b+c) . r'' = (a+b-c) . r'''$,

also (1) $$-a+b+c = \frac{2F}{r'}$$

(2) $$a-b+c = \frac{2F}{r''}$$

(3) $$a+b-c = \frac{2F}{r'''} .$$

Daher durch Addition

(4) $$a+b+c = \frac{2F}{r'\,r''\,r'''} . (r''\,r''' + r'\,r''' + r'\,r'') .$$

Durch Multiplication dieser vier Gleichungen und Anwendung der Gl.

$$(a+b+c) . (-a+b+c) . (a-b+c) . (a+b-c) = 16\,F^2$$

findet sich zuletzt, wenn man setzt, es sey

$$\frac{1}{\sqrt{r''\,r''' + r'\,r''' + r'\,r''}} = W,$$

für den Inhalt die Gleichung

$$F = r'\,r''\,r''' . W \qquad [I]$$

Indem man jedes Paar der Gl. (1) (2) (3) addirt, und in die entstehenden Gl. statt F seinen eben gefundnen Werth setzt, bekommt man

$$\left.\begin{aligned} a &= r' . (r'' + r''') . W \\ b &= r'' . (r' + r''') . W \\ c &= r''' . (r' + r'') . W \end{aligned}\right\} \qquad [II]$$

Nach §. 279. ist $r = \frac{2F}{a+b+c}$. Man setze hier statt $a+b+c$ den Werth aus (4), so kommt

$$r = \frac{r'\,r''\,r'''}{r''\,r''' + r'\,r''' + r'\,r''} \qquad [III].$$

Diese Gleichung giebt

$$r'\,r''\,r''' = r\,r''\,r''' + r\,r'\,r''' + r\,r'\,r'' \qquad [IV]$$

welches man als die Hauptgleichung für den Zusammenhang der vier Radien ansehen, und auch schreiben kann

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}.$$

2) Für ein Dreieck sind die Radien r, r'', r''' gegeben; man soll den Inhalt, die Seiten und den Radius r' berechnen.

Durch ein ähnliches Verfahren wie in 1. findet man, angenommen, es sey

$$\frac{1}{\sqrt{r''r''' - rr'' - rr'''}} = W',$$

die Formeln

$$F = rr''r'''.\ W' \qquad [1]$$

$$\left.\begin{aligned} a &= r.(r''+r''').\ W' \\ b &= r'''.(r''-r).\ W' \\ c &= r''.(r'''-r).\ W' \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

$$r' = \frac{rr''r'''}{r''r''' - rr'' - rr'''} \qquad [3]$$

Man findet aber auch eben diese Gleichungen, wenn man zunächst r' aus [IV] bestimmt, wo sich [3] finden muß, dann diesen Werth von r' in [I] und [II] setzt.

§. 387. Aufgaben über Transversalen.

Ueber die §. 268 und §. 269. bewiesene Hauptgleichung der Transversalentheorie

$$\frac{Ac}{cB} \times \frac{Ba}{aC} \times \frac{Cb}{bA} = 1 \qquad (A)$$

ist noch Einiges in Hinsicht auf + u. — zu bemerken. Für §. 268 gilt diese Gl., auch in dieser Hinsicht, ganz allgemein; denn in Fig. 62.a (zu Th. I) z. B. sind alle drei mit einander multiplicirten Verhältnißexponenten positiv; in Fig. 62.b dagegen sind die beiden $\frac{Ba}{aC}$ und $\frac{Cb}{bA}$ negativ, wegen entgegengesetzter Richtung der Linien Ba, aC und Cb, bA. Daher ist jedesmal das Product +1, nicht —1. Ganz anders ist es in §. 269. Man wird für Fig. 64.a. nur einen Verhältnißexponenten, in Fig. 64.b aber alle drei als negativ erkennen; es ist daher für §. 269 die in Hinsicht auf + und — richtige Gleichung

$$\frac{Ac}{cB} \times \frac{Ba}{aC} \times \frac{Cb}{bA} = -1 \qquad (B)$$

wo -1 an die Stelle von $+1$ getreten ist. Erst jetzt können folgende Aufgaben vorgelegt werden:

1) Für $\triangle ABC$ sind durch den Punkt P die Geraden APa, BPb, CPc gezogen (Fig. 62) und die Verhältnisse $\frac{Ba}{aC} = m$, $\frac{Cb}{bA} = n$ gegeben; man soll $\frac{Ac}{cB}$ berechnen.

Aus (A) findet sich $\frac{Ac}{cB} = \frac{1}{mn}$.

2) Für $\triangle ABC$ ist die Transversale abc gezogen (Fig. 64) und gegeben $\frac{Ba}{aC} = m$, $\frac{Cb}{bA} = n$; man soll $\frac{Ac}{cB}$ berechnen.

Aus (B) erhält man $\frac{Ac}{cB} = -\frac{1}{mn}$.

3) Dasselbe ist gegeben wie in 1; man soll $\frac{AP}{Pa}$, $\frac{BP}{Pb}$, $\frac{CP}{Pc}$ berechnen.

Hier muß man (B) anwenden, indem man etwa zuerst Cc als Transversale für $\triangle ABa$, später aber etwa Cc als Transversale für $\triangle ABb$, zuletzt etwa Bb als Transversale für $\triangle ACc$ betrachtet. Dabei muß man noch z. B. wissen, aus dem gegebenen $\frac{Ba}{aC}$ abzuleiten $\frac{BC}{aC}$ oder $\frac{CB}{aC}$ u. dgl. (Man hat $\frac{BC}{aC} = \frac{Ba+aC}{aC} = \frac{Ba}{aC} + 1 = m+1$, aber $\frac{CB}{aC} = -(m+1)$). So findet sich

$$\frac{AP}{Pa} = \frac{m+1}{mn}$$

$$\frac{BP}{Pb} = m.(n+1)$$

$$\frac{CP}{Pc} = \frac{mn+1}{m}.$$

4) Dasselbe ist gegeben; man soll die Verhältnisse der Inhalte von ABP, APb, BPa, CAPb (Fig. 62, besonders a) zum ganzen Dreiecke ABC berechnen.

Indem man noch die Sätze von §. 200. zu Hülfe nimmt, und $\triangle ABC = \triangle$ setzt, findet man

$$\triangle ABP = \frac{m}{mn + m + 1} \cdot \triangle$$

$$\triangle APb = \frac{1}{(n+1).(mn+m+1)} \cdot \triangle$$

$$\triangle BPa = \frac{m^2 n}{(m+1).(mn+m+1)} \cdot \triangle$$

$$\text{Viereck } CAPb = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(n+1).(mn+m+1)}\right) . \triangle$$

$$= \frac{n.(mn+2m+1)}{(m+1).(n+1).(mn+m+1)} \cdot \triangle$$

Anm. Man hätte zweifeln können, ob in diesen Aufgaben die gegebenen Größen zur Bestimmung der gesuchten hinreichen möchten, da sie nicht einmal das Dreieck ABC bestimmen. Die Aufl. mittelst der Transversalentheorie hat gezeigt, daß wirklich die gesuchten Verhältnisse durch die gegebenen bestimmt werden. Man bemerke dabei, daß die gegebenen und gesuchten Linienverhältnisse immer nur zwei Linien aus einer und derselben unbegrenzten Geraden als Verhältnißglieder enthalten, so daß Verhältnisse andrer Art, z. B. $\frac{aC}{Cb}$, ganz unbestimmt bleiben.

Zu der besondern Klasse von Aufgaben, zu welcher obige Aufgabe gehört, ist auch diejenige zu zählen, welche in Crelle's Journal, B. 3. S. 201, von Steiner aufgelöset ist.

Epipedometrie.

Vierte Abtheilung.

I. Von den goniometrischen Functionen überhaupt, ihren einfachsten Eigenschaften, und ihrer Anwendung zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

§. 388. In Hinsicht der Auflösung der geometrischen Aufgaben durch Rechnung kann man unter den verschiedenen Aufgaben der Epipedometrie vorzüglich drei Klassen unterscheiden, 1) solche Aufgaben, welche sich nur auf den Zusammenhang von Linien unter sich oder mit Flächenräumen beziehen; von dieser Art waren fast alle Aufgaben der dritten Abtheilung; 2) Aufgaben, die sich bloß auf Winkel beziehen; hieher gehört die Aufgabe des §. 350. 3) Aufgaben, welche sich auf den Zusammenhang zwischen Linien und Winkeln beziehen. Aufgaben dieser Art sind bisher noch gar nicht durch Rechnung, obwohl in großer Menge durch Construction, behandelt. Um sie durch Rechnung lösen zu können, ist es nöthig, mit gewissen Hülfszahlen bekannt zu seyn, welche den Namen der Winkelfunctionen führen. Die Lehre von diesen Winkelfunctionen und von ihrer Anwendung zu dem genannten Zwecke, so wie zu andern Absichten, soll Goniometrie

(Winkelmessung) genannt werden; daher können die Winkelfunctionen auch goniometrische Functionen heißen.

Besonders wichtig ist die Anwendung der goniometrischen Functionen auf das Dreieck; daraus entstehet die Trigonometrie. Dieses Wort bezeichnet eigentlich die Wissenschaft, welche überhaupt den Zusammenhang der in einem Dreiecke vorkommenden Größen arithmetisch, d. h. in Formeln, darstellen lehrt. So verstanden gehören eine Menge schon im Früheren abgeleiteter Formeln, z. B. die des Pythagorischen Satzes, die von §. 221 und §. 356, und überhaupt eine Menge von Aufgaben der dritten Abtheilung, zur Trigonometrie. Den wesentlichsten Gegenstand der Trigonometrie bilden aber die nun anzustellenden wichtigen Untersuchungen, welche den durch die goniometrischen Functionen darstellbaren Zusammenhang der Linien und Winkel eines Dreiecks betreffen. Besonders muß uns die Trigonometrie lehren, wenn ein Dreieck durch drei in Zahlenwerthen gegebene Stücke bestimmt ist, die übrigen in ihm enthaltenen Größen durch Rechnung zu bestimmen.

§. 389. Für einen gegebenen spitzen Winkel XAY (Fig. 17), der kurz durch A bezeichnet werden möge, mache man folgende Construction. Man nehme auf dem einen Schenkel AX willkührlich eine beliebige Länge AM, errichte aus A auf AM das Loth AN = AM, und beschreibe aus A, mit einem Radius, der diesen Linien gleich ist, einen Quadranten. Den Schnittpunkt desselben mit AY nenne man B. Aus B fälle man ein Loth AC auf AM, ein andres AD auf AN. An M ziehe man, den Kreis berührend, also lothrecht gegen AM, eine Gerade, und nenne den Schnittpunkt, welchen dieselbe mit AY giebt, F; auf ähnliche Art ziehe man an N, lothrecht gegen AN, eine Berührende, deren

Schnittpunkt mit AY man G nenne. Dann gelten für gewisse Linien der Figur folgende Benennungen:

CB (oder AD) heißt der Sinus des Winkels A,
AC . . . . . Cosinus . . . .
MF . . . die Tangente. . . . .
NG . . . . . Cotangente . . . . . .
AF . . . . . Secante . . . .
AG . . . . . Cosecante . . . .

Man nennt diese sechs Linien trigonometrische Linien und beziehet sie nicht bloß auf den Winkel A, sondern auch auf den zugehörigen Bogen. So ist AD auch der Sinus des Bogens MB u. s. w.

Der Sinus ist der halben Sehne des doppelten Winkels (nämlich des Doppelten von MAB) gleich.

Anm. Das Wort Sinus soll die lateinische Uebersetzung des bei den Arabern für die Linie CB gebräuchlichen Wortes Dscheib seyn.

§. 390. Man stelle sich vor, der spitze Winkel XAY nehme ein wenig zu, doch so daß er spitz bleibe, so zeigt sich leicht die Nothwendigkeit eines Wachsens bei den Linien Sinus, Tangente, Secante, eines Abnehmens bei den Linien Cosinus, Cotangente, Cosecante. Die trigonometrischen Linien sind also abhängig von der Größe des Winkels, zu welchem sie gehören, oder Functionen dieses Winkels. Sie können also Winkelfunctionen heißen.

Diese sechs Linien sind aber auch zugleich abhängig von dem Radius, mit welchem man den Kreis Quadranten beschrieben hat. Nimmt man den Radius größer, so werden auch für einen und denselben Winkel, alle sechs Linien größer, jedoch so, daß die gleichnamigen Linien (z. B. die zwei Sinuslinien) sich zu einander verhalten, wie die zugehörigen Radien. Es sey z. B. für den Winkel A ein zweiter Kreis mit dem Radius AB′ und das Dreieck AB′C′ construirt, so muß △ABC mit AB′C′ in den Winkeln übereinstimmen, und folglich seyn

$$CB : C'B' = AB : AB',$$

oder, wenn man die Radien mit R, R′ bezeichnet

$$CB : C'B' = R : R'$$

oder $$CB : R = C'B' : R'.$$

Ganz auf ähnliche Weise wird sich finden:

$$AC : R = AC' : R'$$
$$MF : R = M'F' : R'$$
$$NG : R = N'G' : R'$$
$$AF : R = AF' : R'$$
$$AG : R = AG' : R'.$$

Diese Gleichungen sagen aus: Aendert sich der Radius, während der Winkel seine Größe behält, so ändern sich die Verhältnisse der 6 trigonometrischen Linien zum Radius nicht, obschon die Linien selbst sich ändern. Hienach sind diese Verhältnisse der trigonometrischen Linien zu dem Radius bloß von dem Winkel, zu welchem sie gehören, nicht aber vom Radius abhängig. Oder diese Verhältnisse sind nichts als reine Winkelfunctionen, während die trigonometrischen Linien zwar Winkelfunctionen, zugleich aber auch Functionen des Radius sind.

§. 391. Für die ganze Goniometrie und Trigonometrie sind nun eigentlich bloß die Verhältnißexponenten der trigonometrischen Linien zum zugehörigen Radius, — also diese reinen Winkelfunctionen, diese bloßen Zahlen — von Wichtigkeit. Wir könnten sie durch die Benennungen Sinuszahl, Cosinuszahl u. s. w. von der Sinuslinie, Cosinuslinie u. s. w. unterscheiden; wir werden aber auch schon unter Sinus, Cosinus u. s. w. ohne weitern Beisatz diese Verhältnißexponenten der Linien zum Radius verstehen. Es können übrigens die Linien durch Sin., Cos., Tang. od. Tg., Cot., Sec., Cosec., die Verhältnißexponenten derselben zum Radius aber durch sin., cos., tg., sec., cosec. bezeichnet werden. Mittelst dieser Bezeichnungsweise bilden sich leicht die Gleichungen

$$\sin A = \frac{\mathrm{Sin}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Sin}\,A = R.\sin A,$$

$$\cos A = \frac{\mathrm{Cos}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Cos}\,A = R.\cos A,$$

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{\mathrm{Tg}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Tg}\,A = R.\mathrm{tg}\,A,$$

$$\cot A = \frac{\mathrm{Cot}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Cot}\,A = R.\cot A,$$

$$\sec A = \frac{\mathrm{Sec}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Sec}\,A = R.\sec A,$$

$$\mathrm{cosec}\,A = \frac{\mathrm{Cosec}\,A}{R} \text{ und } \mathrm{Cosec}\,A = R.\mathrm{cosec}\,A.$$

Unter der Benennung Winkelfunctionen werden wir in Zukunft meistens bloß die **Zahlen** sin., cos. u. s. w. verstehen.

Anm. Um die Zahlenwerthe der Winkelfunctionen für einen gegebenen spitzen Winkel zu finden, ist es, den eben aufgestellten Begriffen gemäß, nur nöthig, aus der Spitze des Winkels einen Kreis mit beliebigem Radius zu beschreiben, an demselben die trigonometrischen Linien zu construiren, und dieselben mit dem Radius zu messen. Dies ist aber eben so viel, als mäße man diese Linien mit einer dem Radius gleichen Einheit. Für diese Einheit würde aber der Radius selbst durch die Zahl 1 ausgedrückt; man könnte dies schreiben $R = 1$. Daher drückt man sich auch aus: Die Winkelfunctionen, in dem eben festgestellten Sinne, sind die Zahlenwerthe der trigonometrischen Linien, **den Radius = 1 gesetzt.**

Uebrigens könnte man, zur Bestimmung von Zahlenwerthen für die trigonometrischen Linien, ganz allgemein jede beliebige Einheit wählen, nicht eben eine dem Radius gleiche. Dann würden aber diese Zahlenwerthe nicht bloß Functionen des Winkels, sondern zugleich auch Functionen des Radius und der zur Einheit gewählten Linie, oder auch des Verhältnisses des Radius zur Einheit. Dies wäre aber weniger einfach und der Wissenschaft weniger angemessen, als nach den oben aufgestellten Bestimmungen.

§. 392. Es sey jetzt ein bei C'' rechtwinkliges Dreieck $A''B''C''$ vorhanden, welches den Winkel $C''A''B'' = XAY = A$ habe (Fig. 17 u. 18). Dann wird man haben

$$\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC \sim AFM \sim GAN$$

und daher werden folgende 6 Gleichungen entstehen

$$\begin{aligned}
\sin A &= \frac{\operatorname{Sin} A}{R} = \frac{CB}{AB} = \frac{C''B''}{A''B''}\\
\cos A &= \frac{\operatorname{Cos} A}{R} = \frac{AC}{AB} = \frac{A''C''}{A''B''}\\
\operatorname{tg} A &= \frac{\operatorname{Tg} A}{R} = \frac{MF}{AM} = \frac{C''B''}{A''C''}\\
\cot A &= \frac{\operatorname{Cot} A}{R} = \frac{NG}{AN} = \frac{A''C''}{C''B''}\\
\sec A &= \frac{\operatorname{Sec} A}{R} = \frac{AF}{AM} = \frac{A''B''}{A''C''}\\
\operatorname{cosec} A &= \frac{\operatorname{Cosec} A}{R} = \frac{AG}{AN} = \frac{A''B''}{C''B''}.
\end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen sind wir zu Begriffen der Winkelfunctionen gelangt, welche unabhängig von der Construction der trigonometrischen Linien am Kreise sind, und sich nur auf die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks unter einander beziehen. Nämlich: Will man die Winkelfunctionen eines spitzen Winkels kennen lernen, so bilde man nur ein rechtwinkliges Dreieck, welches diesen spitzen Winkel enthält, dann gilt:

Der Sinus ist der Verhältnißexponent der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Der Cosinus ist der Verhältnißexponent der dem Winkel anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Die Tangente ist der Verhältnißexponent der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden.

Die **Cotangente** ist der Verhältnißexponent der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden.

Die **Secante** ist der Verhältnißexponent der Hypotenuse zur anliegenden Kathete.

Die **Cosecante** ist der Verhältnißexponent der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete.

Indem wir uns irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC vorstellen, und setzen die Hypotenuse $AB = c$, die Katheten $AC = b$, $CB = a$, können wir also für die Functionen des darin enthaltenen spitzen Winkels A die **Definitionsgleichungen** aufstellen

$$\sin A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c},$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \qquad \cot A = \frac{b}{a},$$
$$\sec A = \frac{c}{b}, \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$$

Anm. Von den beiden nunmehr aufgestellten Erklärungen der Winkelfunctionen, welche jedoch nach der in diesem §. gemachten Ableitung innig zusammenhängen, so verschieden sie auch in der äußeren Form seyn mögen, hat jede ihre besonderen Vortheile. Die frühere Erklärung, aus den am Kreise construirten Linien, hat hauptsächlich den Vorzug, oft mit Nutzen gebraucht werden zu können, um verschiedene Sätze anschaulich zu machen. Die neue Erklärung, die sich nur aufs rechtwinklige Dreieck stützt, hat den Vorzug der Einfachheit; dann wird sie später die Anwendung der Winkelfunctionen zu Berechnungen erleichtern; endlich zeigt sie, daß nicht mehr als gerade 6 Winkelfunctionen möglich sind, und giebt deutlich die Zweckmäßigkeit der Einführung gerade dieser 6 Winkelfunctionen in die Wissenschaft zu erkennen. Es können ja wirklich aus den Seiten eines rechtwinkl. Dr., indem man je zwei und zwei mit einander vergleicht, nicht mehr als 6 Verhältnißexponenten hergeleitet werden.

Um den Zusammenhang zwischen beiden Erklärungsarten noch besser aufzufassen, achte man darauf, daß jedes der drei ähnlichen Dreiecke ABC, AFM, GAN, (Fig. 17) zur Darstellung zweier Functionen dient;

und zwar ABC, worin die Hypotenuse den Radius bildet, zur Darstellung des Sinus und des Cosinus, welche die Verhältnisse der Katheten zur Hypotenuse ausdrücken; AFM, worin der Radius die am Winkel A = MAF anliegende Kathete bildet, zur Darstellung der Tangente und Secante, durch welche die Verhältnisse der andern Seiten zur anliegenden Kathete bestimmt werden; endlich △GAN, dessen dem Winkel A = NGA gegenüberliegende Kathete der Radius ist, zur Darstellung der Cotangente und Cosecante, welche Functionen die Verhältnisse der andern Seiten zu der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete bestimmen.

Obgleich nach der in diesem §. gegebenen Erklärung nur unsre 6 Winkelfunctionen möglich sind, so findet man doch zuweilen außerdem noch zwei erwähnt, nämlich den Sinus versus und den Cosinus versus eines Winkels. Diese sind aber ganz eigenthümlicher Art. Als Linien betrachtet bedeutet der Sinus versus die Linie CM, der Cosinus versus die Linie DN. Es ist daher Sinus versus A = R — Cos A, Cosinus versus A = R — Sin A. Für den Radius = 1 hat man folglich sin. v. A = 1 — cos A, cos. v. A = 1 — sin A. Wir werden uns im Folgenden statt dieser ziemlich überflüssigen Functionen dieser Differenzen 1 — cos A, 1 — sin A bedienen können.

* * *

§. 393. Es soll jetzt die Anwendung der Winkelfunctionen zu Berechnungen, welche das rechtwinklige Dreieck betreffen, gezeigt werden. Dabei kann man sich entweder der trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus u. s. w. oder der bloßen Zahlen sinus, cosinus u. s. w. bedienen.

Aufgabe I. Von einem rechtwinkl. Dreiecke A″B″C″ (Fig. 18.) ist die Hypotenuse A″B″ = c und der Winkel C″A″B″ = A gegeben. Man soll die gegenüberliegende Kathete C″B″ = a, und die anliegende A″C″ = b berechnen.

Erste Methode. Es ist Dr. A″C″B″ ∾ ACB (Fig. 17), wenn ∠ XAY = C″A″B″. Daher

$$AB : CB = A''B'' : C''B''$$

oder $$R : \mathrm{Sin}\,A = c : a$$

folglich $$a = \frac{c \,.\, \mathrm{Sin}\,A}{R} \qquad (I)$$

Ferner $$AB : AC = A''B'' : A''C''$$

oder $$R : \mathrm{Cos}\,A = c : b$$

daher $$b = \frac{c \,.\, \mathrm{Cos}\,A}{R} \qquad (II)$$

Zweite Methode. Nach vorigem §. hat man

$$\sin A = \frac{C''B''}{A''B''} = \frac{a}{c}, \text{ also } a = c \,.\, \sin A \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{A''C''}{A''B''} = \frac{b}{c}, \text{ also } b = c \,.\, \cos A \qquad (2)$$

§. 394. Um die Formeln (I) und (II) anwenden zu können, wäre es nöthig, eine Tabelle zu besitzen, aus welcher man den Werth von Sin A und Cos A für den gegebenen Winkel A und den zu Grunde gelegten Werth von R entnehmen könnte. Sollen die Formeln (1) u. (2) angewandt werden, so müßte man eine solche Tabelle für $R = 1$ haben, so daß sie die Werthe der Zahlen sin A, cos A enthielte. Eine Tabelle dieser letzten Art ist am Schlusse dieses Bandes angehängt; in ihr sind aber nur die Winkel von 0° bis 90° durch die ganzen Grade hindurch mit den zugehörigen Functionen aufgestellt, und diese Functionen in Decimalbrüchen ausgedrückt, welche sich aber den wahren Werthen meistens nur nähern, indem diese Functionen mit wenigen Ausnahmen irrational sind.

Es sey nun z. B. gegeben $c = 71{,}408$ und $\angle A = 37°$, so findet man, um nach (1) und (2) aus vorigem §. zu rechnen, in der Tabelle

$$\sin 37° = 0{,}6018 \qquad \cos 37° = 0{,}7986$$

daher $$a = 71{,}408 \times 0{,}6018 = 42{,}973..$$
$$b = 71{,}408 \times 0{,}7986 = 57{,}026..$$

In einer Tabelle, welche die trigonometrischen Linien für $R = 10000$ aufstellte, müßte sich finden $\text{Sin}\,37° = 6018$ und $\text{Cos}\,37° = 7986$. Dann hätte man aus den Formeln (I) und (II)

$$a = \frac{71,408 \times 6018}{10000}, \quad b = \frac{71,408 \times 7986}{10000},$$

dies würde ganz mit den eben aus (1) und (2) entwickelten Werthen übereinstimmen.

§. 395. Zur Erleichterung trigonometrischer Rechnungen kann man sich der Briggischen Logarithmen bedienen, besonders, wenn man, außer einer gewöhnlichen Tabelle für die Logarithmen der Zahlen, noch eine Tabelle besitzt, welche unmittelbar die Logarithmen der Winkelfunctionen für gegebene Winkel angiebt. Am Ende dieses Bandes befindet sich auch eine solche Tabelle, ebenfalls für die Functionen der Winkel von 0° bis 90° durch die ganzen Grade hindurch. Es sollte sich in derselben finden

$$\log.\sin 37° = \log.\,0,6018 = 0,7795 - 1.$$

Statt dessen findet sich aber

$$\log.\sin.\,37° = 9,7795,$$

also $+9$ statt der Kennziffer -1. Man kann diese Abweichung auf doppelte Art betrachten. Nämlich

1) Es ist 9,7795 der Brigg. Log. von 6018000000, d. h. von $10^{10} \times 0,6018$ oder von $10^{10} \times \sin.\,37°$. Man kann aber dieses Product als Sin 37° betrachten; dann ist

$$\text{Sin}\,37° = R.\sin 37° = 10^{10} \times \sin 37°$$

also $$R = 10^{10} = 10\,000\,000\,000.$$

Es ist also so gut, als enthielte die Tabelle die Logarithmen der trigonometrischen Linien für den Radius R = zehntausend Millionen. Bei der Anwendung von (I) könnte man nun so rechnen

$$\begin{array}{rcl} \log c & = & 1,8537 \\ \log \text{Sin } A & = & 9,7795 \\ \hline \log . c \text{Sin} A & = & 11,6332 \\ \log R & = & 10,0000 \\ \hline \log a & = & 1,6332. \end{array}$$

Hiezu findet sich aus den Logarithmentafeln ungefähr $a = 42,973$, so wie in §. 394.

2) Viel einfacher ist es aber, die Logarithmen in der Tabelle als die Logarithmen der Winkelfunctionen für $R = 1$ anzusehen, sich zu merken, daß die negativen Kennziffern -1, -2, ... durch die um 10 höheren Zahlen 9, 8... ersetzt sind, und, wo sich ein solcher Logarithme mit einer solchen veränderten Kennziffer in die Rechnung einmischt, hierauf gehörig Rücksicht zu nehmen. Hiernach würde man obige Rechnung nur so schreiben:

$$\begin{array}{rcl} \log c & = & 1,8537 \\ \log \sin A & = & 9,7795 \\ \hline \log a & = & 1,6332 \end{array}$$

indem man statt 11 nur setzte 1.

Anm. Ehemals nannte man in trigonometrischen Rechnungen den Radius auch wohl Sinus totus, und schrieb daher

$$\log \text{Sin. tot.} = 10,0000.$$

Dieser Gebrauch ist aber jetzt ganz veraltet.

§. 396. Es fällt aus den durchgerechneten Beispielen in die Augen, daß die Annahme $R = 1$, oder also die Ansicht der Winkelfunctionen als bloßer Verhältnißexponenten für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, verbunden mit dem unter 2. im vorigen §. gezeigten Verfahren, die Rechnungen einfacher macht, als die Annahme eines andern Radius, und und das unter 1. im vorigen §. gezeigte Verfahren. Deshalb soll im Folgenden in allen Formeln $R = 1$ gesetzt seyn.

Uebrigens ist es leicht, aus einer Formel, worin sich Sin., Cos. u. s. w. nebst R finden, eine andre abzuleiten, welche sin., cos. u. s. w. und kein R enthält, so wie umgekehrt. Zu diesem Ende dienen die Gleichungen aus §. 391, nämlich $\sin A = \frac{\text{Sin}\, A}{R}$, $\text{Sin}\, A = R . \sin A$ u. s. w.

Soll z. B. die Formel aus §. 393,

$$a = \frac{c . \text{Sin}\, A}{R},$$

umgewandelt werden, so muß man statt $\text{Sin}\, A$ substituiren $R . \sin A$; dann kommt

$$a = \frac{c . \text{Sin}\, A}{R} = \frac{c . R . \sin A}{R} = c . \sin A.$$

Wäre umgekehrt diese, $a = c . \sin A$ gegeben, so müßte man statt $\sin A$ setzen $\frac{\text{Sin}\, A}{R}$ und fände so

$$a = c . \sin A = c . \frac{\text{Sin}\, A}{R} = \frac{c . \text{Sin}\, A}{R}.$$

Anm. Die Verwandlung einer Formel mit R in eine ohne R wird noch einfacher durch folgende Betrachtung. Eine solche Formel mit R gilt offenbar, wenn man unter R, Sin A u. s. w. die Zahlenausdrücke der Linien in Bezug auf irgend eine Einheit verstehet. Man nehme nun an, diese Einheit sey dem Radius gleich, so ist der Zahlenwerth des Radius $= 1$, und die Zahlenwerthe von Sin., Cos. u. s. w. gehen in sin., cos. u. s. w. über. Daher die Regel: Man schreibe statt R, Sin., Cos. u. s. w. durchgängig 1, sin, cos u. s. w., so gehet die Formel mit R in eine ohne R über.

Aus $a = \frac{c . \text{Sin}\, A}{R}$ z. B. entstehet auf diese Weise

$$a = \frac{c . \sin A}{1} = c . \sin A.$$

§. 397. Nun können noch folgende Aufgaben, die sich auf das rechtwinklige Dreieck ABC, worin C = ℜ, beziehen, und sich der in §. 393 behandelten Aufgabe anschließen, gelöset werden:

Aufgabe II. Gegeben der W. A (also auch B) und eine Kathete, etwa AC = b; gesucht die beiden andern Seiten.

Da $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$, so ist $c = \frac{b}{\cos A}$.

Da $\operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b}$, so ist $a = b . \operatorname{tg} A$.

Aufgabe III. Gegeben AB = c und CB = a; gesucht der W. A.

Es ist $\sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}$.

Aufgabe IV. Gegeben die Hypotenuse AB = c und eine Kathete AC = b; gesucht der W. A.

Man hat $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$.

Aufgabe V. Gegeben die Katheten AC = b, CB = a; gesucht der Winkel A.

Es ist $\operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b}$.

Zahlenbeispiel für Aufg. III.

Es sey $a = 45{,}07$ und $c = 72{,}49$. Man findet

$$\frac{a}{c} = \frac{45{,}07}{72{,}49} = 0{,}6217\ldots$$

Dieser Quotient soll $\sin A$ seyn. Nun findet man

$$\sin 38^0 = 0{,}6157$$
$$\sin 39^0 = 0{,}6293.$$

Zwischen diesen Zahlen liegt der gefundne Quotient; daher läßt sich schließen, A sey ein Winkel zwischen 38 und 39 Grad.

* * *

§. 398. Wenn zwei Winkel A und B sich zu R oder 90° ergänzen, also Complementwinkel sind, so gelten folgende Gleichungen

$$\sin A = \cos B \quad \text{und} \quad \cos A = \sin B,$$
$$\operatorname{tg} A = \cot B \quad \text{und} \quad \cot A = \operatorname{tg} B,$$
$$\sec A = \operatorname{cosec} B \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec} A = \sec B.$$

Daher kann man auch schreiben

$$\sin A = \cos (\mathfrak{R}-A) \quad \text{und} \quad \cos A = \sin (\mathfrak{R}-A)$$
$$\operatorname{tg} A = \cot (\mathfrak{R}-A) \quad \text{und} \quad \cot A = \operatorname{tg} (\mathfrak{R}-A)$$
$$\sec A = \operatorname{cosec} (\mathfrak{R}-A) \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec} A = \sec (\mathfrak{R}-A).$$

Erster Beweis. Man kann A und B als die spitzen Winkel eines bei C rechtwinkligen Dreiecks betrachten. Dann ist eine Kathete AC, oder CB, welche einem der W. A und B anliegt, immer für den andern Winkel die gegenüberliegende, und der Quotient $\frac{CB}{AB}$ z. B., welcher für A der Sinus ist, ist für B der Cosinus, so daß $\sin A = \cos B$. Auf ähnliche Art entstehen die übrigen Gleichungen.

Zweiter Beweis. Am Quadranten MAN (Fig. 19) sey W. $MAB = A$, und auch W. $bAN = A$, so daß $MAb + A = \mathfrak{R}$, oder MAb das Complement von A sey. Dann seyen, wie für MAB die Dreiecke ACB, AMF, GNA, so für MAb die Dr. Acb, AMf, gNA construirt. Man wird dann finden

$$\triangle ACB \cong bcA, \quad \triangle AMF \cong ANg, \quad \triangle ANG \cong AMf,$$

und folglich

$$CB = Ac, \quad MF = Ng, \quad NG = Mf,$$
$$AC = cb, \quad AF = Ag, \quad AG = Af.$$

Dieses giebt Gleichungen, der Art wie

$$\operatorname{Sin} A = \operatorname{Cos} (\mathfrak{R}-A)$$

woraus man aber, nach §. 396, leicht herleitet

$$\sin A = \cos (\mathfrak{R}-A) \text{ u. s. w.}$$

Anm. 1. Diese Beziehungen zwischen den Functionen können die Complement-Beziehungen genannt werden, und enthalten den Grund der Benennungen Cosinus, Cotangente, Cosecante. Es ist z. B. Cosinus so viel wie Complementi Sinus, abgekürzt Co. Sinus.

Anm. 2. Man kann zwei Complementwinkel auch durch $45^0 + \varphi$ und $45^0 - \varphi$ ausdrücken, und hat demgemäß

$$\sin (45^0 + \varphi) = \cos (45^0 - \varphi)$$
$$\cos (45^0 + \varphi) = \sin (45^0 - \varphi) \text{ u. s. w.}$$

§. 399. Für den arithmetischen Zusammenhang der Functionen eines Winkels gelten folgende, ganz einfach aus den Definitionsgleichungen derselben (§. 392) abzuleitende Gleichungen

$$(1)\quad \sin A \times \operatorname{cosec} A \left[= \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a},\ \text{also}\right] = 1.$$
$$(2)\quad \cos A \times \sec A \left[= \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b},\ \text{also}\right] = 1.$$
$$(3)\quad \operatorname{tg} A \times \cot A \left[= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a},\ \text{also}\right] = 1.$$

Es ist demnach die Cosecante das Reciproke des Sinus, die Secante das des Cosinus, die Cotangente das der Tangente. Wir wollen diese Beziehungen der Functionen desselben Winkels mit dem Namen des Multiplicationsgegensatzes oder der Reciprocität der Functionen bezeichnen. Man kann, vermöge dieser Beziehungen, wo z. B. mit der Secante multiplicirt werden soll, mit dem Cosinus dividiren, und überhaupt in den Formeln die Cotangenten, Secanten und Cosecanten ganz vermeiden, indem man statt $\cot x$ setzt $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ u. dgl. In den trigonometrischen Tafeln sind daher die Secanten und Cosecanten als überflüssig weggelassen; die Cotangenten hat man jedoch für gut befunden, in dieselben mit aufzunehmen.

Aus der Reciprocität der Functionen entspringt der [Additions-] Gegensatz ihrer Logarithmen. Es ist

$$\log \sin A + \log \operatorname{cosec} A = 0$$
$$\log \cos A + \log \sec A = 0$$
$$\log \operatorname{tg} A + \log \cot A = 0.$$

Anm. Für die trigonometrischen Linien hat man die entsprechenden Sätze

$$\operatorname{Sin} A \,.\, \operatorname{Cosec} A = R^2,$$
$$\operatorname{Cos} A \,.\, \operatorname{Sec} A = R^2,$$
$$\operatorname{Tg} A \,.\, \operatorname{Cot} A = R^2.$$

Man beweiset diese Sätze aus den ähnlichen Dreiecken ABC, AFM, GAN (Fig. 17). Z. B. aus $\triangle ABC \sim GAN$ folgt

$$CB : AB = AN : AG$$

oder

$$\mathrm{Sin}\,A : R = R : \mathrm{Cosec}\,A$$

woher die erste dieser Gl. entstehet, u. s. w.

§. 400. Mittelst des Pythagorischen Satzes ergeben sich folgende Gleichungen

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1,$$
$$\sec A^2 = 1 + \mathrm{tg}\, A^2,$$
$$\mathrm{cosec} A^2 = 1 + \cot A^2.\text{*)}$$

Erster Beweis. Es ist unter Anwendung von §. 392

$$\sin A^2 + \cos A^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$1 + \mathrm{tg} A^2 = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec A^2$$

$$1 + \cot A^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \mathrm{cosec}\, A^2.$$

Zweiter Beweis. Für die Fig. 17 construirten trigonometrischen Linien findet man

$$CB^2 + AC^2 = AB^2 \quad \text{d. h.} \quad \mathrm{Sin}\, A^2 + \mathrm{Cos}\, A^2 = R^2,$$
$$AM^2 + MF^2 = AF^2 \quad \text{d. h.} \quad R^2 + \mathrm{Tg}\, A^2 = \mathrm{Sec}\, A^2,$$
$$AN^2 + NG^2 = AG^2 \quad \text{d. h.} \quad R^2 + \mathrm{Cot} A^2 = \mathrm{Cosec}\, A^2$$

und daher, indem man $R = 1$ setzt, die obigen Gleichungen.

Zusatz. Man hat daher auch unter andern

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin A^2} = \sqrt{(1 + \sin A).(1 - \sin A)},$$
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos A^2} = \sqrt{(1 + \cos A).(1 - \cos A)},$$
$$\sec A = \sqrt{1 + \mathrm{tg}\, A^2},$$
$$\mathrm{cosec} A = \sqrt{1 + \cot A^2}.$$

*) In diesen Gl. bedeutet $\sin A^2$ u. s. w. so viel, wie $(\sin A)^2$ u. s. w., nicht aber $\sin (A)^2$, worunter man sich aber auch kaum etwas würde denken können. Die Bezeichnung, welche jetzt die Französischen Mathematiker anwenden, nämlich $\sin^2 A$ u. s. w., ist nicht ganz passend.

§. 401. Ferner gelten die Gleichungen

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Erster Beweis. Nach den Definitionen von §. 392 ist

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A,$$

$$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \cot A.$$

Doch folgt die zweite Gleichung auch aus der ersten mittelst $\cot A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

Zweiter Beweis. Fig. 17. ist $\triangle AMF \backsim ACB$ daher

$$AC : CB = AM : MF$$

d. h. $$\operatorname{Cos} A : \operatorname{Sin} A = R : \operatorname{Tg} A$$

folglich $$\operatorname{Tg} A = \frac{R . \operatorname{Sin} A}{\operatorname{Cos} A}.$$

Hier $R = 1$ gesetzt, entstehet die erste Gleichung. Die zweite folgt auf ähnliche Art aus der Proportion $CB : AC = AN : NG$.

Anm. Andre Gleichungen, z. B.

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}, \qquad \cot A = \frac{\operatorname{cosec} A}{\sec A}$$

sind als einfache Folgerungen der aufgestellten anzusehen, und weniger wichtig.

§. 402. Die Sätze der drei letzten §§. enthalten Mittel zur Auflösung der Aufgabe: Aus dem gegebenen Zahlenwerthe einer Function die Werthe der andern Functionen desselben Winkels zu berechnen.

I. Ist gegeben $\sin A$ so hat man

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \qquad (§. 399)$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin A^2} \qquad (§. 400)$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin A^2}} \qquad (§. 399)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin A^2}} \qquad (§. 401)$$

$$\cot A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\sqrt{1 - \sin A^2}}{\sin A} \quad (\S. 399)$$

Ist $\cos A$ gegeben, so werden die übrigen Functionen durch ganz ähnliche Formeln bestimmt, welche man aus diesen auch bekommt, wenn man $\sin A$ mit $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ mit $\cot A$, $\sec A$ mit $\operatorname{cosec} A$ umtauscht.

II. Ist gegeben $\operatorname{tg} A$, so ist

$$\cot A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} \quad (\S. 399)$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \operatorname{tg} A^2} \quad (\S. 400)$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} A^2}} \quad (\S. 399)$$

$$\sin A = \operatorname{tg} A . \cos A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} A^2}} \quad (\S. 401)$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} A^2}}{\operatorname{tg} A} \quad (\S. 399)$$

Die Formeln für den Fall der gegebenen Cotangente bekommt man aus diesen, wenn man allenthalben sin u. cos, tg u. cot, sec u. cosec umtauscht.

III. Ist $\sec A$ gegeben, so ist

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \quad (\S. 399)$$

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\sec A^2 - 1} \quad (\S. 400)$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec A^2 - 1}} \quad (\S. 399)$$

$$\sin A = \operatorname{tg} A . \cos A = \frac{\sqrt{\sec A^2 - 1}}{\sec A} \quad (\S. 401)$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec A^2 - 1}} \quad (\S. 399)$$

Zur Bestimmung der übrigen Functionen aus $\operatorname{cosec} A$, dienen Formeln, welche man aus diesen durch Umtauschung von sin mit cos, tg mit cot, sec mit cosec bekommt.

* * *

§. 403. Es mögen jetzt für einige Winkel die Werthe der Functionen abgeleitet werden.

I. In Fig. 17. müßten, bei einem sehr kleinen Winkel A, die Punkte B, C, F sehr nahe bei M liegen. Für $A=0°$ müßten diese Punkte zusammenfallen, und $CB = MF = 0$, $AC = AF = AM = R$ seyn. Daher ergiebt sich

$$\sin 0° = 0, \quad \cos 0° = 1, \quad \mathrm{tg}\, 0° = 0, \quad \sec 0° = 1.$$

Uebrigens ergeben sich auch aus einem dieser Werthe schon die übrigen mittelst der Gleichungen von §. 402. Auch findet man leicht

$$\cot 0° = \frac{1}{\mathrm{tg}\, 0°} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\mathrm{cosec}\, 0° = \frac{1}{\sin 0°} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Diese Werthe ergeben sich aber auch aus Betrachtung der Figur, wo für $\angle MAB = 0°$ die Berührende an N mit AB parallel ist, der Schnittpunkt G eigentlich gar nicht existirt, oder in unendlicher Entfernung liegt, also NG und AG unendlich groß sind.

II. Durch die Complement-Beziehungen (§. 398), aber auch unmittelbar aus Betrachtung der Figur, findet man nun

$$\sin 90° = \cos 0° = 1, \quad \cos 90° = \sin 0° = 0,$$
$$\mathrm{tg}\, 90° = \cot 0° = \infty, \quad \cot 90° = \mathrm{tg}\, 0° = 0,$$
$$\sec 90° = \mathrm{cosec}\, 0° = \infty, \quad \mathrm{cosec}\, 90° = \sec 0° = 1.$$

III. In Fig. 20. sey $\triangle ABD$ gleichseitig, und $\angle BAD$ durch AC halbirt, so ist $\triangle ABC$ bei C rechtwinklig, und $\angle BAC = \frac{1}{3}\mathfrak{R} = 30°$. Dann findet man $\sin CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$, also

$$\sin 30° = \tfrac{1}{2} = 0,5$$

daher (§.402) $\mathrm{cosec}\, 30° = 2$

$$\cos 30° = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0,86602\ldots$$
$$\sec 30° = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = 1,15470\ldots$$
$$\mathrm{tg}\, 30° = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = 0,57735\ldots$$
$$\cot 30° = \sqrt{3} = 1,73205\ldots$$

IV. Hiedurch hat man zugleich die Werthe der Functionen von 60°, als des Complements von 30°.

V. Es sey ACB (Fig. 21) ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, so daß $\angle CAB = CBA = 45°$, so hat man $\operatorname{tg} CAB = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathfrak{R} = \frac{CB}{AC} = 1$, also

$$\operatorname{tg} 45° = \cot 45° = 1$$
$$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$
$$\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70710\ldots$$

§. 404. Während ein Winkel, vom Anfangswerthe 0° ausgehend, wächst, und endlich in 90° übergehet, findet mit seinen Functionen Folgendes Statt:

1) Die Sinus durchlaufen wachsend alle Zahlenwerthe von 0 bis 1.

2) Die Cosinus durchlaufen abnehmend dieselben Zahlen in umgekehrter Ordnung, von 1 bis 0.

Sowohl die Sinus als die Cosinus sind für spitze Winkel ächte Brüche, und ihre Logarithmen negativ.

3) Die Tangenten durchlaufen alle Werthe von 0 bis ∞.

4) Die Cotangenten durchlaufen dieselben Werthe von ∞ bis 0.

Bei 45° findet sowohl für Tangente als Cotangente der Uebergang aus den ächten Brüchen zu den unächten, oder umgekehrt, Statt. Die Logarithmen dieser Functionen sind theils positiv, theils negativ.

5) Die Secante gehet durch alle Werthe von 1 bis ∞.

6) Die Cosecante gehet durch alle Werthe von ∞ bis 1.

Die Secanten und Cosecanten sind nie kleiner als 1, ihre Logarithmen nie negativ.

§. 405. Es ist hier der Ort, Einiges über die Einrichtung und den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln zu sagen.

I. Am meisten werden in den Anwendungen der Goniometrie die Logarithmen der Functionen gebraucht. Daher enthalten viele Tafeln nur diese Logarithmen, die man auch wohl künstliche Sinus u. s. w. nennt, nicht die Zahlwerthe der Functionen selbst, die auch natürliche Sinus u. s. w. genannt werden. Am gewöhnlichsten werden diese Logarithmen bis auf 7 oder auch nur auf 5 Decimal-Bruchstellen angegeben.

II. Schon §. 395 ist gesagt, daß in den Tafeln die negativen Kennziffern —1, —2 u. s. w. durch 9, 8 u. s. w. ersetzt sind. Einige geben auch statt der Kennziffern 0, 1..., bei positiven Logarithmen, die Zahlen 10, 11...; andre thun dies nicht. Bei gehöriger Aufmerksamkeit kann dies keine fehlerhafte Rechnung veranlassen.

III. Die meisten Tafeln enthalten eigentlich nur die Sinus und Tangenten für die Winkel von 0° bis 90°. Die Sinus und Tangenten sind aber, wegen §. 398, zugleich als Cosinus und als Cotangenten aufgeführt, und zwar mittelst doppelter Columnentitel, einem oberen und einem unteren. Z. B. der Werth, welcher nach dem oberen Columnentitel den $\log.\sin 20° 10'$ darstellt, erscheint nach dem unteren als $\log.\cos 69° 50'$.

Die Cotangenten sind zwar mit den Tangenten reciprok, und hätten daher, so gut wie die Secanten und Cosecanten (§. 399), in den Tafeln weggelassen werden können, sie stehen aber doch darin, indem sie, nach der eben gemachten Bemerkung, durch die Tangenten der W. 0° bis 90° schon gegeben sind. Hätte man auf die Reciprocität der Tangenten und Cotangenten eine Abkürzung gründen wollen, so hätte man nur der Tangenten von 0° bis 45° bedurft, da z. B. $\mathrm{tg}\, 50° = \frac{1}{\mathrm{tg}\, 40°}$.

IV. Bei den Sinus und Tangenten wachsen die Logarithmen, so wie die Functionen selbst, zugleich mit den Winkeln. Dies ist jedoch bei den Logarithmen der Sinus durchgängig, und auch bei denen der Tangenten von 0° bis 45°, eigentlich nur scheinbar. Hier sind nämlich die Zahlen ächte Brüche, die sich der 1 nähern; die Logarithmen sind also negativ und nähern sich der 0, nehmen also in Hinsicht der bloßen Quantität eigentlich ab; da aber diese negativen Logarithmen mittelst positiver Mantissen ausgedrückt und die negativen Kennziffern durch positive Zahlen, welche um 10 höher sind, ersetzt werden, so erscheint das Annähern der negativen Logarithmen an 0, als ein Annähern kleinerer positiver Zahlen an die größere 10, also als ein Wachsen.

Bei den Cosinus und Cotangenten nehmen die Logarithmen ab, während die Winkel wachsen.

V. Die Logarithmen der Tangenten und der Cotangenten desselben Winkels geben immer die Summe 0 (§. 399), oder dafür, wegen der geänderten Kennziffern, die Summe 10 (in manchen Tafeln 20). Um wie viel also, beim Wachsen eines Winkels, der Logarithme der Tangente zunimmt, um eben so viel muß der Logarithme der Cotangente abnehmen.

VI. Wegen §. 401 hat man

$$\log \operatorname{tg} A = \log \sin A - \log \cos A.$$

Dieser Gleichung gemäß kann jede Zahl der Tangentencolumne aus den zugehörigen Zahlen der Sinus- und Cosinuscolumne abgeleitet werden.

VII. Die Logarithmen der Functionen solcher Winkel, welche nicht in den Tafeln aufgeführt sind, werden durch Interpoliren (Einschalten) bestimmt. Dabei liegt der Satz zu Grunde: Bei geringen Aendrungen (Incrementen) eines

Winkels verhalten sich die Aendrungen einer zugehörigen Function, und auch die Aendrungen des Logarithmen dieser Function, ziemlich genau, wie die Aendrungen des Winkels selbst. — Die Aendrung einer Größe bezeichnet hier die Differenz zwischen zwei verschiedenen Zuständen einer veränderlich gedachten Größe, oder also überhaupt nur die Differenz zweier gleichartigen Größen.

Es bezeichne z. B. A irgend einen Winkel, B einen nur um Weniges größeren, also daß etwa $B - A = 1$ Minute. Beide Winkel mögen in den Tafeln unmittelbar neben einander aufgeführt seyn. M sey ein zwischen ihnen enthaltener Winkel (d. h. größer als A, kleiner als B), der sich nicht in den Tafeln findet. Man bezeichne

$$\log\sin A, \qquad \log\sin M, \qquad \log\sin B$$

nach der Reihe mit

$$a, \qquad m, \qquad b.$$

Dann gilt nach obigem Satze

$$B - A : M - A = b - a : m - a$$

und auch $B - A : B - M = b - a : b - m$,

woher entweder

$$m = a + (m - a) = a + \frac{M - A}{B - A} \cdot (b - a)$$

oder $$m = b - (b - m) = b - \frac{B - M}{B - A} \cdot (b - a).$$

Es sey $B - A = 1' = 60''$, $M - A = d$ Secunden, und $b - a = \delta$, so hat man

$$m = a + \frac{d}{60} \cdot \delta = a + d \cdot \frac{\delta}{60}.$$

VIII. Wenn für einen Logarithmen einer Function, den man nicht genau in den Tafeln findet, der zugehörige Winkel bestimmt werden soll, so ist ein Interpoliren nöthig, welches dem in VII. erläuterten gewissermaßen entgegengesetzt ist. Man hat dazu die Formeln

$$M = A + (M - A) = A + \frac{m-a}{b-a} . (B-A)$$

oder $$M = B - (B - M) = B - \frac{b-m}{b-a} . (B-A)$$

Für $B - A = 60''$, $b - a = \delta$, $m - a = d$ hat man

$$M = A + \frac{d}{\delta} . 60 = A + (d : \frac{\delta}{60})$$

IX. Bei sehr kleinen Winkeln, die immer um 1 Minute wachsen, haben in den Tafeln die Logarithmen der Sinus und Tangenten sehr bedeutende und sich rasch ändernde Differenzen; daher ist bei denselben das Interpoliren, nach der in VII und VIII gezeigten Methode, sehr unsicher, weil die zu Grunde liegende Proportion zu weit von der Wahrheit abweicht. Wie man sich in einem solchen Falle zu helfen hat, kann hier nicht gelehrt werden.

X. Wird ein Winkel, von welchem der Logarithme einer Function gegeben ist, aus den Tafeln bestimmt, so richtet sich die Genauigkeit, in welcher man denselben erhält, gar sehr nach der Differenz, welche zwischen den benachbarten Logarithmen in den Tafeln Statt findet. Je größer diese Differenz ist, desto größer ist die erreichbare Genauigkeit.

Hat man z. B. $\log \sin x = 9,02247$ und weiß, daß in diesem Logarithmen die letzte Ziffer nicht kleiner als 6 und nicht größer als 8 seyn kann, also daß der Fehler des Log. nicht 0,00001 übersteigen kann, so könnte man gewiß seyn, daß der Winkel, welchen man findet, nämlich

$$x = 6° \; 2' \; 42''$$

nicht um mehr als $\frac{1}{2}$ Secunde falsch wäre, indem die Differenz von $\log \sin 6° 2'$ und $\log \sin 6° 3'$ sich $= 120$ (eigentlich 0,00120) findet, so daß Aendrung des Logarithmen um 0,00001 nur Aendrung des W. um $\frac{1}{2}$ Sec. bewirkt, wenn nicht der Umstand, daß selbst die Logarithmen der Tafeln, nämlich

$$\log\sin 6^\circ 2' = 9,02163$$
$$\log\sin 6^\circ 3' = 9,02283$$

um 0,000005 unzuverlässig sind, die Unsicherheit noch um $\frac{1}{4}$ Sec. vergrößerte.

Bei $\log\cos x = 9,98957$ würde dagegen der sich ergebende Winkel $x = 12^\circ 30' 20''$ überaus unsicher seyn, weil

$$\log\cos 12^\circ 30' = 9,98958$$

und

$$\log\cos 12^\circ 31' = 9,98955$$

nur die Differenz 3 geben. Das Schwanken des gegebenen Logar. zwischen 9,98958 und 9,98956 würde ein Schwanken des Winkels zwischen $12^\circ 30'$ und $12^\circ 30' 40''$ bewirken.

Kleine Winkel werden daher durch die Cosinus, solche, die nahe an 90° kommen, durch die Sinus mit geringer Genauigkeit bestimmt. Bestimmungen unbekannter Winkel durch die Tangenten oder Cotangenten haben in dieser Hinsicht einen bedeutenden Vorzug, denn sie leiden nicht an dieser aus der Kleinheit der Differenzen entspringenden Unvollkommenheit.

* * *

§. 406. Bisher ist nur von den Functionen der Winkel von 0° bis 90° die Rede gewesen. Aber auch andre Winkel haben ihre Functionen. Um eine Vorstellung von denselben zu erhalten, ist die Construction der trigonometrischen Linien am Quadranten (Fig. 17) auf den ganzen Kreis auszudehnen. In Fig. 22 seyen aus den Radien AM, AN die Durchmesser MP, NQ gemacht, und die Berührenden über M und N hinaus verlängert. Außer B im ersten Quadranten seyen die Punkte B', B'', B''' im zweiten, dritten und vierten gegeben. Die dadurch hervorgehenden Winkel MAB, MAB', MAB'', MAB''' nenne man nach der Reihe Winkel im 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten. Dann construirt man für diese Winkel die Sinus durch die Geraden AD, AD', AD'', AD'''; die Cosinus durch AC, AC', AC'', AC'''; die Tangenten durch MF, MF', MF'', MF'''; die Cotangenten durch NG, NG', NG'', NG'''; die Secanten durch AF, AF', AF'', AF'''; die Cosecanten durch AG, AG', AG'', AG'''.

§. 407. Es muß bei diesen Constructionen auch auf die Lage der Linien gesehen werden. Dadurch wird eine Anwendung positiver und negativer Zahlen veranlaßt, bei welcher es übrigens am passendsten ist, für den ersten Quadranten, oder also für spitze Winkel, alle Functionen, wie bisher, als positive Zahlen anzunehmen.

Was zunächst die Sinus betrifft, so liegen für die hohlen Winkel MAB, MAB' die Sinuslinien AD, AD' nach oben; bei den erhabenen Winkeln MAB'', MAB''' liegen die Linien AD'', AD''' nach unten. Mißt man nun diese Sinuslinien mit dem Radius, um die Sinuszahlen zu erhalten, so ist es, da der Sinus im ersten Quadranten für positiv gelten soll, nothwendig, auch im zweiten Quadranten für die Sinus positive Zahlen anzunehmen; dann muß man aber, um an den Zahlen den Gegensatz der Lage sichtbar zu machen, die Zahlen für die Sinus der Winkel im dritten und vierten Quadranten als negativ ansehen.

§. 408. Für spitze Winkel haben wir im §. 399 gefunden $\operatorname{cosec} A \cdot \sin A = 1$. Diese Formel gilt, was bloß die Quantität betrifft, auch bei den Winkeln der übrigen Quadranten. Für den zweiten Quadranten ist z. B.

$$\triangle B'D'A \sim \triangle G'NA;$$

daher $AD' : AB' = AN : AG'$,

oder $\text{Sin}\, MAB' : R = R : \text{Cosec}\, MAB'$,

also $\text{Sin}\, MAB' . \text{Cosec}\, MAB' = R^2$,

folglich $\sin MAB' . \text{cosec}\, MAB' = 1$.

Zur Allgemeinheit trigonometrischer Rechnungen wird es aber zweckmäßig seyn, diese Gleichung allenthalben auch in Hinsicht auf die Qualität, d. h. in Hinsicht auf + und —, als richtig anzusehen. Dazu ist aber erforderlich, daß Sinus und Cosecante bei jedem Winkel von übereinstimmendem Vorzeichen sind. Deshalb werden also die Cosecanten für die beiden ersten Quadranten als positiv, für den dritten und vierten als negativ angenommen werden.

§. 409. Durch die eben angestellte Betrachtung wurde eine einfache arithmetische Abhängigkeit des + und — der Cosecante vom + und — der Sinus ermittelt. Zwischen dem + und — dieser beiden Functionen und dem der übrigen vier Functionen läßt sich aber auf ähnlichem Wege aus früheren Formeln (S. §. 402.) kein Zusammenhang auffinden. Was zunächst den Cosinus betrifft, so hat man

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin A^2} = \frac{\sqrt{\text{cosec}\, A^2 - 1}}{\text{cosec}\, A}.$$

Die hierin befindlichen Wurzelzeichen (eigentlich $\pm\sqrt{}$) erlauben, nach bloß arithmetischen Gründen, den Werth des Cosinus für jeden Winkel sowohl als positiv, wie negativ, anzusehen. Ganz auf gleiche Weise verhält es sich mit der Tangente, der Cotangente und der Secante.

§. 410. Wir müssen daher die Beschaffenheit der Cosinus in Hinsicht auf + und —, ohne Rücksicht auf die des Sinus, ursprünglich aus der Construction, nach geometrischen Gründen festzustellen suchen.

Wir finden aber für den ersten und vierten Quadranten den Cosinus AC und AC‴ mit dem Radius AM in der Lage übereinstimmend. Für den zweiten und dritten Quadranten haben AC′ und AC″ die entgegengesetzte Lage. Deshalb müssen wir für den ersten und vierten Quadranten die Cosinus durch positive, für den zweiten und dritten aber durch negative Zahlen ausdrücken.

§. 411. Wie im §. 408 eine einfache Abhängigkeit zwischen dem + und — der Sinus und Cosecanten aufgestellt wurde, so kann man auch eine solche für Cosinus und Secante herleiten.

Man findet auch für nicht spitze Winkel die Formel $\cos A . \sec A = 1$ in Hinsicht der bloßen Quantität gültig. Es ist zweckmäßig, dieselbe auch in Hinsicht auf + und — als allgemein richtig zu betrachten. Dazu ist nothwendig, daß die Secanten immer dasselbe Vorzeichen wie die Cosinus haben, also im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ sind.

§. 412. Sehen wir jetzt die Formeln

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

als für alle Winkel, selbst in Hinsicht auf + und — als richtig an, (was die Quantität betrifft, so können sie für alle Quadranten leicht bewiesen werden), so ist die Beschaffenheit der Tangenten und Cotangenten für jeden Winkel leicht aus der Beschaffenheit der Sinus und Cosinus zu beurtheilen. Wo das Vorzeichen des Sinus mit dem des Cosinus übereinstimmt, also im ersten und dritten Quadranten, da sind die Tangenten und Cotangenten positiv; im zweiten und vierten sind sie negativ.

Die Tangenten und Cotangenten stimmen hienach in Hinsicht des + und — immer mit einander überein. Dies ist auch zur allgemeinen Gültigkeit der Gleichung $tg\,A \,.\, cot\,A = 1$ erforderlich.

§. 413. Daß es zweckmäßig ist, das + und — der Secanten und Cosecanten, der Tangenten und Cotangenten so zu bestimmen, wie es in den §. 408, 411, 412 geschehen, läßt sich aber auch durch Betrachtung der Construction der trigonometrischen Linien am Kreise nachweisen.

Die Tangenten liegen in Fig. 22. für den 1sten und 3ten Quandranten von M aus nach oben, für den 2ten und 4ten nach unten. Die Cotangenten liegen für den 1sten und 3ten Quadranten von N aus rechts hin, für den 2ten und 4ten links hin. Es ist daher passend, die Tangenten und Cotangenten für Winkel im 1sten und 3ten Quadranten als positive Zahlen anzunehmen, für Winkel im 2ten u. 4ten Quadranten aber als negative, ganz wie es im §. 412. festgesetzt ist.

§. 414. Die Ableitung des + und — an den Secanten und Cosecanten, durch ähnliche Betrachtung der Construction, scheint mißlicher. Bei jeder der vier übrigen trigonometrischen Linien haben wir eine unbegrenzte Gerade, auf welcher sie sich jedesmal abschneidet. Man kann diese unbegrenzten Geraden die Scalen dieser trigonometrischen Linien nennen. So sind also die Durchmesser NQ, MP, und die an M und N gezogenen Berührenden nach der Reihe die Scalen für die Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten. Jede dieser Functionen konnte, als Linie, in ihrer Scale vom Anfangspuncte (A, M oder N) aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen liegen, und hienach wurde das + und — bestimmt. Nicht so ist es bei den Secanten und Cosecanten. Diese nehmen, in ihrer Darstellung durch Linien wie AF und AG, für eine unendliche Menge von Winkeln eine unendliche Menge verschiedener Richtungen an; man siehet daher nicht, wie das + und — bei ihnen Anwendung finden könnte.

Es läßt sich aber die bisherige Art, die Secanten und Cosecanten am Kreise zu construiren, so abändern, daß auch für diese Linien Scalen erscheinen, auf denen sie sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen abschneiden, so daß man daraus das + und — beurtheilen kann. Dazu ist nur nöthig, am Endpuncte B des beweglichen Radius AB eine Berührende zu ziehen (Fig. 22). Diese schneide die Verlängerung von MP in K, die Verlängerung von NQ in L, so erhält man $\triangle ABK \cong AMF$, $\triangle ABL \cong ANG$, daher ist die Secante $AF = AK$, die Cosecante $AG = AL$. Man kann demnach auch AK als Secante, AL als Cosecante betrachten. Dadurch wird die unbegrenzte Gerade MP, die schon Scale der Cosinus ist, auch Scale der Secanten, und NQ, die Scale der Sinus, wird auch Scale der Cosecanten. Betrachtet man nun noch die Lage der durch Berührende, die an B', B'', B''' gezogen sind, entstandnen Secanten AK', AK'', AK''', und Cosecanten AL', AL'', AL''', so wird man in Hinsicht des + und — ganz zu den schon in §. 408 und §. 411 aufgestellten Bestimmungen geführt.

§. 415. Ist ein stumpfer Winkel nach seiner Größe gegeben, so kennen wir nach dem Vorigen die Qualität, d. h. das + und —, aller seiner Functionen; ein Mittel aber, auch die Quantität derselben, wenigstens durch Aufschlagen in den Tafeln kennen zu lernen, giebt der Satz: Ein spitzer und ein stumpfer Winkel, welche sich zu 2R ergänzen (also Supplementwinkel) haben, in Hinsicht der bloßen Quantität, gleichgroße gleichnamige Functionen, d. h. es ist der Sinus des einen gleich dem Sinus des andern, der Cosinus gleich dem Cosinus u. s. w.

Dieser Satz ergiebt sich leicht aus der Construction am Kreise. Sind in Fig. 23. die Winkel MAB und MAB′ Supplementwinkel, so sind, wegen congruenter Dreiecke, die trigonometrischen Linien des einen Winkels, AD, AC, MF, NG, AK, AL den gleichnamigen AD′, AC′, MF′, NG′, AK′, AL′ des andern gleich.

§. 416. I. Nimmt man bei diesem Satze noch zugleich auf das + und — Rücksicht, so erkennt man nur an den Sinus und der Cosecante der beiden Supplementwinkel völlige Gleichheit, an den übrigen Functionen aber Gegensatz. Nennt man den einen Winkel A, den andern also 2ℜ — A, so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin(2\mathfrak{R} - A) \\ \cos A &= -\cos(2\mathfrak{R} - A) \\ \operatorname{tg} A &= -\operatorname{tg}(2\mathfrak{R} - A) \\ \cot A &= -\cot(2\mathfrak{R} - A) \\ \sec A &= -\sec(2\mathfrak{R} - A) \\ \operatorname{cosec} A &= \operatorname{cosec}(2\mathfrak{R} - A). \end{aligned}$$

Es kann in diesen Gleichungen A eben sowohl den spitzen wie den stumpfen Winkel bezeichnen.

II. Zwei Supplementwinkel lassen sich auch durch $\mathfrak{R}+\varphi$ und $\mathfrak{R}-\varphi$ darstellen. Dann ist

$$\begin{aligned} \sin(\mathfrak{R}+\varphi) &= \sin(\mathfrak{R}-\varphi) \\ \cos(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\cos(\mathfrak{R}-\varphi) \\ \operatorname{tg}(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\operatorname{tg}(\mathfrak{R}-\varphi) \\ \cot(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\cot(\mathfrak{R}-\varphi) \\ \sec(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\sec(\mathfrak{R}-\varphi) \\ \operatorname{cosec}(\mathfrak{R}+\varphi) &= \operatorname{cosec}(\mathfrak{R}-\varphi). \end{aligned}$$

III. Wendet man endlich auf diese Gleichungen noch die Gl. der Complementsbeziehung (§. 398) an, indem man

$\sin(\mathfrak{R}-\varphi)$, $\cos(\mathfrak{R}-\varphi)$ u. s. w. durch $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. u. s. w. ersetzt, so kommt

$$\begin{aligned}
\sin(\mathfrak{R}+\varphi) &= \cos\varphi \\
\cos(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\sin\varphi \\
\mathrm{tg}(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\cot\varphi \\
\cot(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\mathrm{tg}\,\varphi \\
\sec(\mathfrak{R}+\varphi) &= -\mathrm{cosec}\,\varphi \\
\mathrm{cosec}(\mathfrak{R}+\varphi) &= \sec\varphi.
\end{aligned}$$

§. 417. Die Functionen erhabener Winkel werden, auf eine ähnliche Weise, von den Functionen hohler Winkel durch den Satz abhängig gemacht: **Ein hohler und ein erhabener Winkel, die sich zu 4$\mathfrak{R}$ ergänzen, (also zwei Implementwinkel) haben, in Hinsicht der bloßen Quantität, gleiche gleichnamige Functionen.**

Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man ebenfalls aus Fig. 23, durch Betrachtung congruenter Dreiecke. Es sind aber dabei die zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der hohle Winkel ist ein spitzer, MAB, der erhabene also ein Winkel MAB''' im vierten Quadranten; 2) der hohle Winkel ist ein stumpfer, MAB', der erhabene also ein Winkel MAB'' im dritten Quadranten.

§. 418. I. Nimmt man nun noch auf das + und — Rücksicht, so findet man nur an den Cosinus und Secanten zweier Implementwinkel völlige Gleichheit, bei den übrigen Functionen aber Gegensatz. Daher entstehen, indem man den einen Winkel A, seine Ergänzung zu 4$\mathfrak{R}$ aber 4$\mathfrak{R}$ — A nennt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin A &= -\sin(4\mathfrak{R}-A) \\
\cos A &= \cos(4\mathfrak{R}-A) \\
\mathrm{tg}\,A &= -\mathrm{tg}(4\mathfrak{R}-A) \\
\cot A &= -\cot(4\mathfrak{R}-A) \\
\sec A &= \sec(4\mathfrak{R}-A) \\
\mathrm{cosec}\,A &= -\mathrm{cosec}(4\mathfrak{R}-A)
\end{aligned}$$

II. Denselben Satz kann man auch in den Gleichungen aussprechen

$$\begin{aligned}
\sin(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\sin(2\mathfrak{R}-\varphi)\\
\cos(2\mathfrak{R}+\varphi) &= \cos(2\mathfrak{R}-\varphi)\\
\operatorname{tg}(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\operatorname{tg}(2\mathfrak{R}-\varphi)\\
\cot(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\cot(2\mathfrak{R}-\varphi)\\
\sec(2\mathfrak{R}+\varphi) &= \sec(2\mathfrak{R}-\varphi)\\
\operatorname{cosec}(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\operatorname{cosec}(2\mathfrak{R}-\varphi).
\end{aligned}$$

III. Indem man endlich hierauf die Gleichungen aus §. 416. I. anwendet, ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\sin(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\sin\varphi\\
\cos(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\cos\varphi\\
\operatorname{tg}(2\mathfrak{R}+\varphi) &= \operatorname{tg}\varphi\\
\cot(2\mathfrak{R}+\varphi) &= \cot\varphi\\
\sec(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\sec\varphi\\
\operatorname{cosec}(2\mathfrak{R}+\varphi) &= -\operatorname{cosec}\varphi.
\end{aligned}$$

§. 419. Mittelst der Gleichungen von §. 416 u. §. 418 kann man nun leicht die Functionen eines jeden zwischen 90° und 360° enthaltenen Winkels auf Functionen eines spitzen zurückführen, und dadurch ihre Werthe aus den Tabellen erhalten, obgleich diese Tabellen unmittelbar nur die Functionen spitzer Winkel enthalten. Man hat z. B.

$$\begin{aligned}
\sin 110^\circ &= \sin 70^\circ = \cos 20^\circ\\
\cos 110^\circ &= -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ,\\
\operatorname{tg} 110^\circ &= -\operatorname{tg} 70^\circ = -\cot 20^\circ,\\
\sin 205^\circ &= -\sin 155^\circ = -\sin 25^\circ,\\
\cos 205^\circ &= \cos 155^\circ = -\cos 25^\circ,\\
\operatorname{tg} 205^\circ &= -\operatorname{tg} 155^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ.\\
\sin 310^\circ &= -\sin 50^\circ,\\
\cos 310^\circ &= \cos 50^\circ,\\
\operatorname{tg} 310^\circ &= -\operatorname{tg} 50^\circ.
\end{aligned}$$

§. 420. Im §. 403 sind die Functionen für die Winkel 0° oder 0R und 90° oder R angegeben. Aehnliche Werthe finden sich, durch einfache Betrachtung der Constructionen am Kreise, für die Winkel 2R, 3R, 4R. Die Functionen von 4R fallen mit denen von 0° zusammen. Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht der Functionen von 0R, 1R, 2R, 3R, 4R und zugleich von dem + und — der Functionen in den verschiedenen Quadranten.

	0R oder 4R	1ster Quadrant	1R	2ter Quadrant	2R	3ter Quadrant	3R	4ter Quadrant
sin	0	+	1	+	0	—	—1	—
cos	1	+	0	—	—1	—	0	+
tg	0	+	∞	—	0	+	∞	—
cot	∞	+	0	—	∞	+	0	—
sec	1	+	∞	—	—1	—	∞	+
cosec	∞	+	1	+	∞	—	—1	—

Anm. Bei allen Functionen finden hier Uebergänge aus dem Positiven ins Negative, oder aus dem Negativen ins Positive Statt. Die Uebergangswerthe sind bei den Sinus und Cosinus nur 0; bei den Secanten und Cosecanten nur ∞; bei den Tangenten und Cotangenten sowohl 0 als ∞. Wie ∞ einen solchen Uebergang machen könne, läßt sich auf doppelte Weise erläutern. Dabei wird sich finden, es sey hier gleichgültig, ob man +∞ oder —∞ denke, eben so, wie es einerlei ist, ob man —0 oder —0 schreibt. Nämlich

1) In Hinsicht auf die Construction der Functionen am Kreise wird bei 90° der sich drehende Schenkel AB parallel mit der Berührenden an M, der Schnittpunkt F, der bisher über M lag, verschwindet, ist weder oben noch unten. Man muß diesen Schnittpunkt in unendlicher Entfernung von M denken, es ist aber gleichgültig, ob über M oder unter M. Wie man dann den Schenkel MB noch so wenig weiter dre-

het, so fällt sogleich der Schnittpunkt nach unten. Aehnliches zeigt die Tangente für 3 $\mathfrak{R}$, und auf ähnliche Art ist es auch mit den Cotangenten, den Secanten und Cosecanten, theils bei 0 $\mathfrak{R}$ und 2 $\mathfrak{R}$, theils bei $\mathfrak{R}$ und 3 $\mathfrak{R}$.

2) Nach §. 401. hat man $\mathrm{tg}\,\mathfrak{R} = \frac{\sin \mathfrak{R}}{\cos \mathfrak{R}} = \frac{1}{0}$; auf ähnliche Art ist $\sec \mathfrak{R} = \frac{1}{\cos \mathfrak{R}} = \frac{1}{0}$. Hier kann man den Divisor so gut $+0$ wie -0 schreiben, daher ist auch offenbar der Quotient gleich gut $+\infty$ wie $-\infty$.

§. 421. Zuweilen, z. B. in Rechnungen die sich auf Vielecke beziehen, wo durch Addition mehrer Winkel sehr große Summen entstehen können, werden Functionen von Winkeln gefordert, die an Größe 4$\mathfrak{R}$, ja 8$\mathfrak{R}$ u. s. w. übertreffen. (Man sehe den sechsten Anhang zum 1sten Th., wo von solchen Winkeln die Rede ist.) Die Functionen solcher Winkel können auf die Functionen der Winkel zwischen 0$\mathfrak{R}$ und 4$\mathfrak{R}$, und also auch auf die Functionen spitzer Winkel zurückgeführt werden, mittelst des Satzes: Zwei Winkel, deren Differenz ein Vielfaches von 4$\mathfrak{R}$ ist, haben völlig übereinstimmende gleichnamige Functionen.

Denn wenn zwei Winkel A und 4$\mathfrak{R}$ + A das Centrum A und den Anfangsschenkel AM gemein haben, beide aber durch eine Umdrehung des Schenkels AM von der Rechten zur Linken erzeugt sind, (wo beide Winkel als positiv gelten sollen) so müssen auch ihre Endschenkel in eine einzige halbbegrenzte Gerade AB fallen, und daher auch alle goniometrischen Linien des einen Winkels mit den gleichnamigen des andern zusammenfallen. Gleiches erkennt man auch leicht in Bezug auf die Functionen von A und 8$\mathfrak{R}$+A, von A und 12$\mathfrak{R}$ + A u. s. w. Man hat daher, unter k eine ganze Zahl verstanden,

$$\sin A = \sin(4k\mathfrak{R} + A)$$
$$\cos A = \cos(4k\mathfrak{R} + A)$$
$$\mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}(4k\mathfrak{R} + A)$$
$$\cot A = \cot(4k\mathfrak{R} + A)$$
$$\sec A = \sec(4k\mathfrak{R} + A)$$
$$\mathrm{cosec}\, A = \mathrm{cosec}(4k\mathfrak{R} + A).$$

§. 422. Bisher wurden die Winkel mit dem Anfangsschenkel AM in der Figur immer durch Drehung von der Rechten zur Linken hervorgebracht, und als positiv angesehen. Aber auch negative Winkel, die durch Umdrehung von der Linken zur Rechten entstehend gedacht werden sollen, (s. den sechsten Anhang zum 1sten Th.) habe ihre Functionen, und diese müssen auf die Functionen positiver Winkel, und zuletzt auf die Functionen positiver spitzer Winkel, zurückgeführt werden können.

I. Es bedeute nun $-A$ einen solchen negativen Winkel, welcher kleiner als $4\mathfrak{R}$ sey, so ist $4\mathfrak{R} - A$ der positive Winkel, der mit ihm die Differenz $4\mathfrak{R}$ giebt. Wäre hier nun der Satz von §. 421 gültig, so müßten die Functionen beider Winkel übereinstimmen. Es ist aber dieser Satz hier wirklich anwendbar, denn man siehet, daß die durch $-A$ und $4\mathfrak{R} - A$ ausgedrückten Drehungen in der That dieselbe Lage des Endschenkels AB herbeiführen, daher auch zusammenfallende gleichnamige goniometrische Linien geben. Man hat also

$$\sin(-A) = \sin(4\mathfrak{R} - A)$$
$$\cos(-A) = \cos(4\mathfrak{R} - A)$$
$$\mathrm{tg}(-A) = \mathrm{tg}(4\mathfrak{R} - A)$$
$$\cot(-A) = \cot(4\mathfrak{R} - A)$$
$$\sec(-A) = \sec(4\mathfrak{R} - A)$$
$$\mathrm{cosec}(-A) = \mathrm{cosec}(4\mathfrak{R} - A).$$

II. Indem man nun noch die Gleichungen von §. 418. I. anwendet, erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(-A) &= -\sin A \\
\cos(-A) &= \cos A \\
\operatorname{tg}(-A) &= -\operatorname{tg} A \\
\cot(-A) &= -\cot A \\
\sec(-A) &= \sec A \\
\operatorname{cosec}(-A) &= -\operatorname{cosec} A.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen führen die Functionen eines negativen Winkels auf die des an Quantität gleichen positiven Winkels zurück. Ihre Richtigkeit siehet man auch leicht unmittelbar durch Betrachtung der für zwei entgegengesetzte Winkel am Kreise construirten Linien ein. In ihnen ist der Satz enthalten: Entgegengesetzte Winkel haben, in Hinsicht der Quantität, gleiche Functionen; in Hinsicht auf + und — aber sind nur die Cosinus und Secanten völlig gleich, die übrigen Functionen sind entgegengesetzt.

§. 423. Es verdient Beachtung, daß eine Menge von Gleichungen, welche im Bisherigen abgeleitet worden sind, ehe noch die Winkelfunctionen auf die Winkel, welche 90° oder sogar 360° überschreiten, und auf die negativen Winkel ausgedehnt waren, selbst nach dieser Ausdehnung ganz allgemeine Gültigkeit haben.

Die Gleichungen für die Complementwinkel aus §. 398 gelten, A mag ein Winkel seyn, welcher er will. Z. B. $\sin 130° = \cos(90° - 130°) = \cos(-40°)$. Besonders in der Form $\sin(45° + \varphi) = \cos(45° - \varphi)$ u. s. w. zeigt sich die allgemeine Wahrheit der Gleichungen an der Figur sehr deutlich.

Von der allgemeinen Gültigkeit der Gleichungen der §§. 399 u. 401 ist schon in den §§. 408, 411, 412 einigermaßen die Rede gewesen. Es ist nicht schwer diese Allgemeinheit derselben, unter Benutzung von §. 421 u. §. 422, noch weiter auszudehnen.

Ebenso ist die allgemeine Gültigkeit der sich auf den Pythagorischen Satz stützenden Gleichungen von §. 400 leicht einzusehen.

Die Allgemeinheit der Gleichungen für die Functionen der Supplementwinkel aus §. 416 und die Functionen der Implementwinkel aus §. 418 ist ebenfalls durch Betrachtung der Construction am Kreise zu rechtfertigen. Besonders anschaulich wird dieselbe für die Gleichungen von §. 416. II. und §. 418. II.

§. 424. Ist irgend ein Winkel gegeben, so kann man, nach dem Bisherigen, den Werth jeder Function desselben aus den Tafeln erfahren. Ist dagegen der Werth einer Function gegeben, und der zugehörige Winkel soll bestimmt werden, so tritt Ungewißheit ein, denn zu jedem Werthe einer Function gehören unendlich viele Winkel. Wenn man, wie es meistentheils der Fall ist, sich auf Winkel zwischen 0° und 360° zu beschränken hat, so findet doch noch Zweideutigkeit oder Ungewißheit Statt, denn dann gehören zu jedem Werthe einer Function noch zwei Winkel jener Art. Ist man gar auf Winkel zwischen 0° und 180° beschränkt, wie bei Berechnung der innern Winkel eines Dreiecks, die nicht 180° übersteigen können, so ist nur bei den Sinus und Cosecanten Zweideutigkeit vorhanden, weil dieselben sowohl für spitze als stumpfe Winkel positiv sind.

II. Anwendung der goniometrischen Functionen zur Berechnung der Dreiecke, Vierecke und Vielecke, mit Benutzung der Construction.

Rechtwinkliges Dreieck.

§. 425. Die in den §§. 393 u. 397 aufgestellten Formeln zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke sollten nur zur Erläuterung der Begriffe der goniometrischen Functionen dienen. Jetzt mögen solche Formeln für das rechtwinklige Dreieck vollständiger, nach der Ordnung seiner wichtigsten Bestimmungsarten, gegeben worden. Jede solche Formel muß drei Stücke des rechtwinkligen Dreiecks enthalten, weil aus zwei bestimmenden Stücken ein drittes abhängiges muß berechnet werden können.

Die Winkel des Dreiecks mögen mit A, B, C, die Seiten, nach der Ordnung, wie sie ihnen gegenüberliegen, a, b, c heißen, dabei sey $C = 90°$, also c die Hypotenuse; der Flächeninhalt heiße F; dann sind folgende Formeln als Grundformeln anzusehen:

$$\sin A = a : c, \qquad \sin B = b : c,$$
$$\cos A = b : c, \qquad \cos B = a : c,$$
$$\operatorname{tg} A = a : b, \qquad \operatorname{tg} B = b : a,$$
$$c^2 = a^2 + b^2,$$
$$F = \tfrac{1}{2} . ab .$$

Nicht zu vergessen ist, daß auf die Functionen der Winkel A und B, wegen $A + B = 90°$, die Formeln aus §. 398 bezogen werden können.

§. 426. Ein rechtwinkliges Dreieck kann auf vierfache Art durch Seiten und Winkel bestimmt werden: 1) durch die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, 2) durch eine Kathete und einen spitzen Winkel (es kann für gleichgültig gelten, ob durch den der Kathete anliegenden oder gegenüberliegenden Winkel), 3) durch die Hypotenuse und eine Kathete, 4) durch beide Katheten. Hiedurch werden vier Aufgaben veranlaßt.

I. Aus der Hypotenuse c und einem Winkel, etwa A, die übrigen Stücke zu berechnen.

Hier ist (1) $a = c \cdot \sin A$

(2) $b = c \cdot \cos A$

(3) $F = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin A \cdot \cos A.$

Eine bequemere Formel für F findet man durch eine Construction. Man bilde (Fig. 24) am $\triangle ACB$ ein congruentes $\triangle ACD$, so daß das gleichschenklige $\triangle ABD$ entstehet, worin $\angle BAD = 2A$, und $AD = AB = c$. Nun sey BE lothrecht auf AD, so ist

$$BE = AB \cdot \sin BAE = c \cdot \sin 2A.$$

Daher $\triangle ABD = \frac{1}{2} AD \cdot BE = \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin 2A,$

also $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \triangle ABD = \frac{1}{4} c^2 \cdot \sin 2A,$

oder (3)′ $F = \frac{1}{4} c^2 \cdot \sin 2A.$

Anm. Aus den zwei für F gefundnen Werthen schließt man, es sey

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A.$$

Diese Gleichung wird sich auch später auf einem andern Wege finden.

II. Aus der Kathete b und einem Winkel A (oder $B = 90° - A$) die andern Stücke zu berechnen.

Hier ist (1) $c = \frac{b}{\cos A} \left(= \frac{b}{\sin B}\right),$

(2) $a = b \cdot \operatorname{tg} A \; (= b \cdot \cot B),$

(3) $F = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} b^2 \cdot \operatorname{tg} A.$

III. Aus der Hypotenuse c und einer Kathete, etwa b, die andern Stücke zu berechnen.

Man hat (1) $\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$

(2) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b) \cdot (c-b)}$

oder auch (2)′ $a = c \cdot \sin A.$

Diese noch bequemere Formel setzt nur voraus, daß man den $\angle A$ schon nach (1) berechnet habe.

$$(3)\quad F = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}b \cdot \sqrt{c^2 - b^2}.$$

IV. Aus den Katheten a und b die übrigen Stücke zu berechnen.

Hier ist (1) $\operatorname{tg} A = \cot B = \frac{a}{b}$,

$$(\cot A = \operatorname{tg} B = \tfrac{b}{a})$$

$$(2)\quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Oder, nachdem man A aus (1) gefunden, bequemer

$$(2)'\quad c = \frac{b}{\cos A} = \frac{a}{\sin A}.$$

$$(3)\quad F = \tfrac{1}{2}ab.$$

Beispiele.

Zu I. $c = 425$, $A = 27^0 40'$ giebt $a = 197{,}34$, $b = 376{,}41$, $F = 37140$.

Zu II. $b = 372$, $A = 35^0 6'$ giebt $c = 454{,}68$, $a = 261{,}451$, $F = 48629$.

Zu III. $c = 806{,}4$, $b = 529{,}3$ giebt $A = 48^0\,58'\,34''$, $B = 41^0\,1'\,26''$, $a = 608{,}33$, $F = 161007$.

Zu IV. $a = 192$, $b = 258$, giebt $A = 36^0\,39'\,22''$, $c = 321{,}60$, $F = 24768$.

§. 427. Ueber die Formel aus §. 426. III. (1) $\cos A = \sin B = \frac{b}{c}$ ist eine für die Praxis sehr wesentliche Bemerkung zu machen. Ist b beinahe $= c$, so daß $\frac{b}{c}$ sehr nahe $= 1$, und A ein sehr kleiner, B aber ein dem rechten Winkel nahe kommender spitzer Winkel ist, so erhält man aus den trigonometrischen Tafeln die gesuchten Winkel nicht sehr genau, weil die Cosinus der kleinen Winkel oder die Sinus der großen spitzen Winkel, so wie auch die zugehörigen Logarithmen, kleine Differenzen haben (vergl. §. 405. X.). Will man in einem solchen Falle eine größere Genauigkeit erhalten, so muß man die Rechnung nach folgender, geometrisch beweisbaren Formel führen:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Beweis. Man mache (Fig. 25), in der Richtung der Kathete AC, sowohl AD als AE $=$ AB. Dann ist DC $=$ AB $+$ AC $= c + b$, CE $=$ AB $-$ AC $= c - b$. Ferner $\angle A = CAB = CDB + ABD$, aber auch $\angle CDB = ABD$, also $\angle CDB = \frac{1}{2}A$; und $\angle DBE = \mathfrak{R}$, $\angle CBE = \frac{1}{2}A$ (vergl. §. 65 oder §. 136.2, und §. 256). Man hat also

$$\operatorname{tg} CDB = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{CB}{DC},$$

und

$$\operatorname{tg} CBE = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{CE}{CB},$$

daher

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{CE}{DC} = \frac{c-b}{c+b}$$

also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Man könnte, ohne den P. E, auch so schließen:

$$\operatorname{tg} CDB = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{CB}{DC} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c+b} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Beispiel. Es sey $c = 731$, $b = 718$. Dann findet man, aus den Formeln $\cos A = \frac{b}{c}$,

$$\log \cos A = 9{,}99220.$$

Aber

$$\log \cos 10^\circ 49' = 9{,}99221$$

$$\log \cos 10^\circ 50' = 9{,}99219.$$

Es liegt also A zwischen $10^\circ 49'$ und $10^\circ 50'$. Setzt man $A = 10^\circ 49' 30''$ so ist die Unsicherheit in den Secunden sehr groß.

Nach der neuen Formel bekommt man

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = 8{,}97643 \ (5$$

Aber

$$\log \operatorname{tg} 5^\circ 24' = 8{,}97556$$

$$\log \operatorname{tg} 5^\circ 25' = 8{,}97691$$

$$\text{Differenz} = 135$$

Man findet daraus $\frac{1}{2} A = 5^\circ 24' 39''$ (oder $38'',8$)

$A = 10^\circ 49' 18''$ ($17'',6$).

Die Ungenauigkeit ist hier gering.

§. 428. Die ein gleichschenkliges Dreieck betreffenden Aufgaben zur goniometrischen Berechnung können sehr leicht auf die für das rechtwinklige Dreieck zurückgeführt werden, wenn man die Eigenschaft des gleichschenkligen Dreiecks benutzt, daß es durch eine den Winkel an der Spitze halbirende Gerade in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke getheilt wird.

* * *

Das Dreieck im Allgemeinen.

§. 429. Es soll gezeigt werden, wie man bei jeder der vier Hauptbestimmungsarten des Dreiecks im Allgemeinen aus den bestimmenden Stücken die übrigen berechnen könne. Es liegt, als ein Mittel, dieses zu bewerkstelligen, der Gedanke sehr nahe, durch Fällen eines Lothes aus einem Eckpunkte zur gegenüberliegenden Seite des Dreiecks dasselbe in zwei rechtwinklige zu theilen, dann, besonders unter Anwendung der Formeln von §. 426, durch successive Berechnungen dieser rechtwinkligen Dreiecke, die Stücke des ganzen Dreiecks zu erforschen. Nach dieser Idee soll zunächst verfahren werden.

Vorher ist aber noch zu bemerken, daß wegen $A + B + C = 2\mathfrak{R}$ (indem das Dreieck wie gewöhnlich durch ABC, seine Seiten mit a, b, c bezeichnet werden sollen), Gleichungen folgender Art gelten:

$$\sin A = \sin(B + C)$$
$$\cos A = -\cos(B + C)$$
$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(B + C) \text{ u. s. w.}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A = \cos\tfrac{1}{2}(B + C)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}(B + C) \text{ u. s. w.}$$

§. 430. Aufgabe der ersten Bestimmungsart: Aus der Seite AB = c und den Winkeln A, B, C, wo A + B + C = 2R, die übrigen Stücke zu berechnen.

Wird (Fig. 26. a) das Loth BK aus B auf AC gefällt (ein Loth aus A auf BC wäre eben so brauchbar), so hat man

im Dr. ABK (1) $AK = c.\cos A$ $(= - c.\cos(B+C))$,

und (2) $BK = c.\sin A$ $(= c.\sin(B+C))$;

im Dr. CBK (3) $a = \frac{BK}{\sin C}$ $(= \frac{BK}{\sin(A+B)})$,

(4) $KC = \frac{BK}{\operatorname{tg} C}$;

dann ist (5) $b = AK + KC$,

(6) $F = \frac{1}{2} b . BK$.

Zusatz. Aus (2) und (3) folgt

$$a = \frac{c . \sin A}{\sin C} \left(= \frac{c . \sin A}{\sin(A+B)}\right).$$

Diese Gl. lehrt unmittelbar aus den gegebenen Größen die Seite a berechnen. Sie ist gleichbedeutend mit der Proportion

$$a : c = \sin A : \sin C,$$

welche den wichtigen Satz ausspricht: Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Man kann diese Gleichung ganz einfach aus den Gleichungen $\sin A = \frac{BK}{c}$, $\sin C = \frac{BK}{a}$ herleiten, welche eigentlich mit (2) und (3) gleichbedeutend sind.

Es muß auch ganz auf gleiche Weise die Proportion richtig seyn

$$b : c = \sin B : \sin C,$$

welche giebt $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$,

wonach sich b unmittelbar aus den gegebenen Stücken berechnen läßt.

Anm. Es sind hier einige Bemerkungen wegen des + und — zu machen.

Die Figur 26. a ist so gezeichnet, daß, während alle gegebenen Stücke als positiv betrachtet werden, auch die berechneten Größen durchgängig als positiv erscheinen. Es giebt aber andre Fälle in der Beschaffenheit des Dreiecks, wo auch einige berechnete Werthe negativ erscheinen können, und selbst in diesen Fällen sind die Gleichungen richtig, so daß ihnen überhaupt allgemeine Gültigkeit zukommt.

1) Ist A ein stumpfer Winkel (Fig. 26. b), so ist $\cos A$ negativ. Daher erhält man aus (1) für AK einen negativen Werth. BK und KC dagegen bleiben positiv. Die Gl. (5) ist auch hier richtig; sie würde durch $b = KC - KA$ ersetzt werden können, indem man hier KA als positiv dächte.

2) Ist C ein stumpfer W. (Fig. 26. c), so ist $\operatorname{tg} C$ negativ. In (4) erhält man für KC etwas Negatives, wobei die Gleichung (5) völlig richtig ist, die hier durch $b = AK - CK$ ersetzt werden kann.

3) Ist B ein stumpfer Winkel, so hat dies auf die Gleichungen (1) bis (6) keinen Einfluß.

§. 431. Aufgabe der zweiten Bestimmungsart: Aus den Seiten $AB = c$, $AC = b$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A die übrigen Stücke zu berechnen.

Man fälle (Fig. 27) das Loth CD auf AB (auch ein Loth aus B auf AC wäre brauchbar), so hat man

$$(1)\quad CD = b \cdot \sin A$$

$$(2)\quad AD = b \cdot \cos A$$

$$(3)\quad DB = c - AD \; (= c - b \cdot \cos A)$$

$$(4)\quad \operatorname{tg} B = \frac{CD}{DB}, \text{ oder } \cot B = \frac{DB}{CD}$$

$$(5)\quad a = \frac{CD}{\sin B} = \frac{DB}{\cos B}$$

$$(6)\quad F = \tfrac{1}{2} c \cdot CD.$$

Zusatz 1. Aus den Gleichungen (1) bis (4) kommt

$$\cot B = \frac{c - b\cos A}{b\sin A} = \frac{c}{b\sin A} - \cot A. \quad (A)$$

Diese Gl. lehrt, unmittelbar aus den gegebenen Stükken den W. B berechnen. Sie entstehet auch aus der Gleichung

$$\cot A + \cot B = \frac{c}{b\sin A} = \frac{AB}{CD} \quad (B)$$

welche den Satz ausspricht: Die Summe der Cotangenten zweier Winkel eines Dreiecks ist dem Quotienten aus der anliegenden Seite, dividirt durch das zugehörige Loth, gleich.

Man bekommt diese letzte Gl. auch ganz einfach durch Addition der Gleichungen

$$\cot A = \frac{AD}{CD}, \qquad \cot B = \frac{DB}{CD}.$$

Zur Bestimmung des Winkels C aus den gegebenen Stücken könnte die Gl. dienen

$$\cot C = \frac{b}{c\sin A} - \cot A,$$

welche der (A) ganz analog ist.

Zusatz 2. Setzt man in (6) den Werth von CD aus (1), so hat man

$$F = \tfrac{1}{2}.bc.\sin A.$$

Diese Gl. spricht einen zu beachtenden Lehrsatz aus, und dient zur unmittelbaren Berechnung des Inhaltes eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Zusatz 3. Da durch den Pythagorischen Satz auch

$$a^2 = DB^2 + CD^2$$

so ist, wenn man statt DB und CD die Werthe aus (1) und (3) setzt,

$$a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos A^2 + b^2\sin A^2.$$

Hier ist aber

$$b^2 \cos A^2 + b^2 \sin A^2 = b^2 . (\cos A^2 + \sin A^2) = b^2$$

also $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc . \cos A$$

oder $$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A}.$$

Diese Gleichung, welche eine Erweiterung des Pythagorischen Satzes enthält (vergl. §. 221), ist zwar von Wichtigkeit, jedoch zur logarithmischen Rechnung nicht bequem.

Anm. Die aufgestellten Formeln passen, bei gehöriger Anwendung des + und —, für jedes Dreieck.

1) In Fig. 27. a ist Alles positiv.

2) In Fig. 27. b, wo $\angle A$ |ı R, wird durch Gl. (2) AD negativ, durch (3) DB |ı c.

3) In Fig. 27. c, wo $\angle A$ ı| R, aber AD |ı c, wird DB aus (3) negativ, aus (4) wird $\operatorname{tg} B$ oder $\cot B$ negativ, also $\angle B$ ein stumpfer.

§. 432. **Aufgabe der dritten Bestimmungsart.** Aus den gegebenen Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ die übrigen Stücke, besonders die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Hier kann man, nachdem ein Loth, etwa CD (Fig. 27) gefällt ist, zuerst nach §. 223. oder §. 356. die Linien AD, DB, CD berechnen, dann bestimmen sich die Winkel leicht.

Es sey $AD = f$, $DB = g$, $CD = h$, so hat man:

$$(1) \quad f = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c},$$

wofür man auch die Formeln (I, B) oder (I, C) aus §. 356 brauchen kann;

$$(2) \quad g = c - f;$$

doch kann g ebenfalls durch solche Formeln, wie die für f, unmittelbar berechnet werden;

$$(3) \quad h = \sqrt{b^2 - f^2} = \sqrt{(b+f) . (b-f)}$$
$$= \sqrt{a^2 - g^2} = \sqrt{(a+g) . (a-g)}$$

(4) $F = \frac{1}{2} ch$ (S. auch §. 356)

(5) $\cos A = \frac{f}{b}$ oder $\sin A = \frac{h}{b}$

(6) $\cos B = \frac{g}{a}$ oder $\sin B = \frac{h}{a}$.

Zusatz. Durch Substitution der Werthe von f und h aus §. 356 in die Gl. (5) bekommt man

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

(was auch aus §. 431. Zusatz 3. folgt.)

oder $$= \frac{(b+c+a).(b+c-a)}{2bc} - 1$$

oder $$= 1 - \frac{(a+b-c).(a-b+c)}{2bc}.$$

Und $$\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

oder $$= \frac{1}{2bc}.\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

oder $$= \frac{2}{bc}.\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)},$$

wenn s den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet.

Anm. Aus den in §. 221 u. §. 357 gemachten Bemerkungen über das + und — wird man begreifen, daß die Formeln allgemein gültig sind. Nur ist zu bemerken: 1) Berechnet man die Winkel durch die Cosinus, so deutet ein positiver Cosinus einen spitzen, ein negativer einen stumpfen Winkel an. 2) Berechnet man aber die Winkel durch die Sinus, so lassen die Formeln für dieselben es ganz unentschieden, ob ein Winkel ein spitzer oder der stumpfe Supplementwinkel desselben sey (vergl. §. 415 u. 424). Man muß daher die Beschaffenheit des größten der drei Winkel des Dreiecks nach den Sätzen von §. 202. II. beurtheilen; von den beiden andern ist es ja ausgemacht, daß sie spitz seyn müssen. Genau genommen erlauben aber die Formeln, sowohl für die Cosinus als für die Sinus, auch negative Winkel als Werthe der gesuchten Winkel aufzustellen, die man aber bei gewöhnlichen Anwendungen unberücksichtigt lassen kann.

Für $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$ bekommt man z. B. $A = 53^\circ 7' 50''$, $B = 67^\circ 22' 48''$, $C = 59^\circ 29' 23''$. Man könnte, statt dieser Werthe, auch die entgegengesetzten negativen nehmen; aber dies ist im Allgemeinen zwecklos.

§. 433. Aufgabe der vierten Bestimmungsart. Aus zwei gegebenen Seiten $AB = c$, $BC = a$ und einem nicht eingeschlossenen W. A die übrigen Stücke zu berechnen.

Wir wollen den Fall zu Grunde legen, wo ∠A ı| R, und a ı| c, wo also zwei Dreiecke ABC' und ABC'' aus den bestimmenden Stücken möglich sind (Fig. 28.a). Hier hat man, wenn das Loth BK gefällt ist,

$$(1) \qquad BK = c \,.\, \sin A$$
$$(2) \qquad AK = c \,.\, \cos A$$
$$(3) \qquad \sin C = \frac{BK}{a} \left(= \frac{c \,.\, \sin A}{a}\right).$$

Diese Formel erlaubt, für ∠C zwei Werthe, die sich zu 2R ergänzen, aufzustellen; der eine bestimmt den W. $AC'B$, der andre den $AC''B$.

$$(4) \qquad KC = \pm \sqrt{a^2 - BK^2}$$
$$= a \,.\, \cos C = BK \,.\, \cot C.$$

Man bekommt hieraus einen positiven Werth für KC', und einen negativen für KC''.

$$(5) \qquad b = AK + KC.$$

Hier hat auch b zwei Werthe, indem man für KC die in (4) gefundnen Werthe setzen muß. Dadurch bestimmt sich AC' und AC''.

Anm. In den Fällen von Fig. 28.b, wo ∠A ı| R und a |ı c, und von Fig. 28.c, wo ∠A |ı R, und auch a |ı c, fällt C'' so in die Verlängerung des einen Schenkels vom W. A, daß $\triangle ABC''$ nicht den gegebenen W. A, sondern den Nebenwinkel desselben enthält. Deshalb ist für diese Fälle im §. 71. die vierte Bestimmungsart des Dreiecks für unzweideutig erklärt, während sie, für Fig. 28. a, für zweideutig erkannt worden ist. Man kann aber die Aufgabe, aus den gegebenen Stücken die Figur zu construiren, in ihrem Wortausdrucke so modificiren, daß für alle diese Fälle auch C'' als ein auflösender Punkt betrachtet werden muß. Es ist dabei die Bedingung, daß der gegebene Winkel ein *innerer* des $\triangle$ABC seyn soll, hinwegzulassen, und die Aufgabe nur so auszusprechen: Es ist $\angle$BAS $=$ A, AB $=$ c, und eine Linie $=$ a gegeben, man soll in dem unbegrenzten Schenkel BAS des W. A den Punkt C bestimmen, für welchen BC $=$ a. Hier ist offenbar in jedem Falle C″ so gut ein auflösender Punkt, wie C′.

Unsre Formeln sind nun gänzlich dieser neuen Betrachtungsweise, aus einem höheren, wissenschaftlicheren Standpunkte, anpassend. Sie bestimmen auch für Fig. 28.b und 28.c so gut die Größe der nicht gegebenen Stücke für C″, wie für C′.

Für Fig. 28.b, wo $\angle$A ı| ℜ und a |ı c, wird nach Gl. (3) sinC kleiner als sinA, daher der spitze W. C′ $=$ AC′B $=$ $\angle$(SR, C′B) (nach der Bezeichnung des sechsten Anhangs zu Th. I.) kleiner, als der spitze W. A, und der stumpfe W. C″, oder $\angle$(SR, C″B) größer als der stumpfe Winkel an A. Nach (5), wo der negative Werth von KC″ den positiven von AK übertreffen wird, erhält man b $=$ AC″ negativ.

In Fig. 28.c, wo $\angle$A |ı ℜ und a |ı c ist, bekommt man in (2) AK negativ. Ueber den W. C″ $=$ $\angle$(SR, C″B) gilt Aehnliches, wie im Falle von Fig. 28.b, und AC″ wird auch hier negativ.

Wollte man in jedem dieser Fälle den W. ABC berechnen, so könnte dazu die Gl. dienen

$$\angle ABC = 2\mathfrak{R} - (A + C)$$

und für ABC″ würde man in Fig. 28.b und 28.c negative Werthe erhalten, was den wirklich vorhandnen Gegensatz zwischen ABC′ u. ABC″ andeuten würde.

Selbst für Fig. 28.d, wo $\angle$A |ı ℜ und a ı| c, jedoch a ı| BK oder c.sinA, bekäme man völlig anwendbare Werthe für C′ und C″, obgleich keins der Dreiecke ABC′ und ABC″ den gegebenen W. A als *inneren* enthielte.

Wäre in irgend einem Falle a ı| BK, d. h. a ı| c.sinA, so würde sich kein auflösender Punkt C finden. Dies würde die Gl. (3) dadurch anzeigen, daß sin C |ı 1 würde, was bei keinem Winkel Statt finden kann. Die Gl. (4) würde dasselbe durch einen imaginären Werth von KC andeuten.

§. **434.** Zur noch bequemeren Auflösung der in den §§. **430** bis **433.** behandelten Aufgaben lassen sich noch viele, besonders zu beweisende Formeln anwenden. Zunächst stelle man folgende Betrachtung an:

Es werde um $\triangle ABC$ ein Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt M heiße (Fig. 29). Man ziehe den Durchmesser CMF und die Sehne FB. Dann ist $\angle FBC = 90°$ und $\angle CFB = CAB = A$, daher $\sin A = \sin CFB = \frac{BC}{CF}$, folglich, indem man den Durchm. CF mit D bezeichnet

$$\sin A = \frac{a}{D} \quad \text{und} \quad D = \frac{a}{\sin A}.$$

Auf gleiche Weise muß seyn

$$D = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Dies giebt den Lehrsatz: Der Durchmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises ist dem Quotienten aus einer Seite, dividirt durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels, gleich.

Zusatz. Aus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ entstehen Proportionen, wie $a : b = \sin A : \sin B$, welche sich schon in §. 430. Zus. gefunden haben.

Anm. Die oben bewiesene Gl. $D = \frac{a}{\sin A}$ kann man, als Lehrsatz, auch so aussprechen: Eine Sehne eines Kreises, dividirt durch den Sinus des Peripheriewinkels, welchen ein von der Sehne gebildetes Segment in sich faßt, giebt den Durchmesser des Kreises. — Es ist hiebei gleichgültig, ob man den spitzen Peripheriewinkel im größeren Segmente, oder den stumpfen im kleineren anwendet, weil sie Supplementwinkel sind, also gleiche Sinus haben.

§. 435. Anwendungen dieses Satzes.

I. Sind, nach der ersten Bestimmungsart, die Winkel A, B, C und die Seite c gegeben, so berechnet man die zwei andern Seiten bequem durch die Formeln

(1) $D = \frac{c}{\sin C}$

(2) $a = D . \sin A$ ($= \frac{c . \sin A}{\sin C}$, wie §. 430)

(3) $b = D . \sin B$ ($= \frac{c . \sin B}{\sin C}$).

Zusatz. Soll noch der Inhalt F berechnet werden, so hat man $F = \frac{1}{2} bc \sin A$ (§. 431. Zus. 2.)

daher, indem man hier statt b den Werth $\frac{c . \sin B}{\sin C}$ setzt,

$$F = \frac{c^2 . \sin A . \sin B}{2 . \sin C}.$$

Oder auch so: Nach §. 431. Zus. 1. hat man

$$CD = \frac{c}{\cot A + \cot B}.$$

Es ist aber $F = \frac{1}{2} . c . CD$,

also $F = \frac{1}{2} . \frac{c^2}{\cot A + \cot B}$.

II. Sind nach der vierten Bestimmungsart die Seiten c, a nebst $\angle A$ gegeben, so findet man die übrigen Seiten und Winkel durch die Formeln

(1) $D = \frac{a}{\sin A}$

(2) $\sin C = \frac{c}{D}$ ($= \frac{c . \sin A}{a}$)

(3) $\angle B = 180° - (A + C)$

(4) $b = D . \sin B$.

Die Gl. (2) giebt zwei Winkel, C' und C'', so daß $C' + C'' = 2R$. Daraus findet man auch zwei Werthe von B, wie zwei von b. Auch für den Inhalt, den man nach der Formel $F = \frac{1}{2} bc \sin A$ bestimmen kann, bekommt man zwei Werthe. (Vergl. §. 433. Anm.)

§. 436. Die Berechnung der übrigen Größen im Dreiecke, wenn, nach der zweiten Bestimmungsart, die Seiten b, c nebst dem eingeschlossenen W. A gegeben sind, kann bequem nach Formeln geschehen, die man durch folgende Betrachtung erhält:

Es sey c > b. Man mache (Fig. 30.) in der Verlängerung von BA über A hinaus, AE = AC = b, und auch in AB selbst AF = AC = b. Dann ist EB = c + b, FB = c — b, ∠ECF = R, ∠BEC = $\frac{1}{2}$A, ∠EFC = ACF = 90° — $\frac{1}{2}$A (oder auch = $\frac{1}{2}$(C + B)). Nun fälle man aus B auf die Verlängerungen von EC und CF die Lothe BK, BL, welche m und n heißen mögen, so ist CBKL ein Rechteck, CL = BK = m, CK = BL = n, ∠FBL = FEC = $\frac{1}{2}$A. Ferner ∠CBK = BCL. Diese gleichen Winkel mögen mit u bezeichnet werden.

Man siehet: Könnte man m und n berechnen, so hätte man aus ihnen, als Katheten, den ∠u sammt der Hypotenuse a. Durch u würde man aber sowohl ∠ACB als ABC erfahren; denn es ist

$$\angle ACB = ACF + FCB = 90° - \tfrac{1}{2}A + u$$
$$\angle ABC = AFC - FCB = 90° - \tfrac{1}{2}A - u.$$

Man findet aber aus △EBK und △BFL:

$$m = BK = EB \,.\, \sin BEK = (c+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}A$$
$$n = BL = FC \,.\, \cos FBL = (c-b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}A.$$

So wird man endlich zu folgenden Formeln geführt:

$$(1)\quad m = (c+b) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}A$$
$$(2)\quad n = (c-b) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}A$$
$$(3)\quad \operatorname{tg} u = \frac{n}{m}$$
$$(4)\quad \angle C = 90° - \tfrac{1}{2}A + u$$
$$\angle B = 90° - \tfrac{1}{2}A - u$$
$$(5)\quad a = \frac{n}{\sin u} \text{ oder } = \frac{m}{\cos u} \text{ (vgl. §. 426. IV).}$$

Bemerkung 1. Diese Formeln gelten auch für den Fall, wo c < b, nur werden dann c — b, n und u negativ.

Man darf dann aber auch die Gl. (2) (3) (4) mit folgenden vertauschen

$$n' = (b - c) \cdot \cos \tfrac{1}{2} A$$
$$\operatorname{tg} u' = \frac{n'}{m}$$
$$\angle C = 90° - \tfrac{1}{2} A - u'$$
$$\angle B = 90° - \tfrac{1}{2} A + v'.$$

Es wird dann $n' = - n$, $u' = - u$ seyn.

Bem. 2. Man findet leicht $\angle u = \frac{1}{2}(C - B)$ und daher

$$m = BC \cdot \cos u = a \cdot \cos \tfrac{1}{2}(C - B)$$
$$n = BC \cdot \sin u = a \cdot \sin \tfrac{1}{2}(C - B).$$

Hiedurch gehen die Gl. (1) und (2) über in

$$\text{(A)} \qquad a \cdot \cos \tfrac{1}{2}(C - B) = (c + b) \cdot \sin \tfrac{1}{2} A$$
$$\text{(B)} \qquad a \cdot \sin \tfrac{1}{2}(C - B) = (c - b) \cdot \cos \tfrac{1}{2} A.$$

Bei diesen Gl. ist es merkwürdig, daß jede 6 Größen, alle drei Seiten und alle drei Winkel enthält. Dividirt man (B) durch (A) so erhält man

$$\text{(C)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \cdot \cot \tfrac{1}{2} A$$
$$\text{oder} \qquad = \frac{c - b}{c + b} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C + B).$$

Dieser Formel kann man sich bedienen, wenn man aus b, c, A bloß die Winkel B, C aber nicht die Seite a berechnen will. Man muß dabei, nachdem man aus (C) die halbe Differenz der unbekannten Winkel gefunden, diese Winkel aus dieser halben Differenz und ihrer halben Summe, welche $= 90° - \frac{1}{2} A$, bestimmen.

Anm. Stimmen die beiden Werthe von a, welche man durch die beiden Formeln von (5) erhält, überein, so kann man dieses dennoch nicht als ein Zeichen einer fehlerfreien Rechnung betrachten. Denn, wäre die Berechnung von m und n, d. h. CL und BL, nicht richtig gemacht, so würde sich die folgende Berechnung zwar nicht auf das richtige rechtwinklige Dreieck CBL, sondern auf ein falsches beziehen; wäre sie aber doch, nur für sich genommen, richtig, so würde u den Winkel in diesem falschen Dreiecke, und beide aus den in (5) enthaltenen Formeln entstehenden Werthe von a würden die Hypotenuse dieses falschen Dreiecks darstellen, und also, obgleich sie falsch wären, doch unter sich übereinstimmen. Eine solche Uebereinstimmung der beiden Resultate für a kann also nur die Richtigkeit der Rechnung nach (3) und (4), aber nicht die Richtigkeit der Rechnung nach (1) und (2), also auch nicht die Richtigkeit der berechneten Größen überhaupt, wahrscheinlich machen."

Auch ohne Betrachtung der Figur läßt sich dasselbe aus den Formeln so darthun: Ist $\operatorname{tg} u = \frac{n}{m}$, so ist (§. 402)

$$\sin u = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} u^2}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} u^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Daher in (5) $\qquad \frac{n}{\sin u} = \sqrt{m^2 + n^2}$,

$$\frac{m}{\cos u} = \sqrt{m^2 + n^2}$$

Beide Formeln für a in (5) geben also $\sqrt{m^2 + n^2}$, und stimmen überein, selbst wenn m und n nicht fehlerfrei sind.

Will man daher, bei der Anwendung unsrer Formeln, die Richtigkeit der Rechnung prüfen, so muß dieses noch durch eine besondre Rechnung geschehen. Ganz bequem ist dazu die Gleichung

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Bestimmt man dagegen B und C nach den Formeln von §. 431. Zus. 1.; nämlich

$$\cot B = \frac{c}{b \sin A} - \cot A, \quad \cot C = \frac{b}{c \sin A} - \cot A,$$

so schöpft man eine leichte Prüfung aus der Gl. $A + B + C = 180^0$.

§. 437. Wenn nach der **dritten Bestimmungsart** die drei Seiten eines Dreiecks, a, b, c gegeben sind, so kann die Berechnung der Winkel, statt durch die in §. 432 für die Cosinus und Sinus der Winkel gegebenen Formeln, auch durch Formeln für die Tangenten der halben Winkel geschehen.

Es sey (Fig. 31) m der Mittelpunkt des dem $\triangle ABC$ eingeschriebenen Kreises, r dessen Radius, so hat man, wenn die Lothe ma, mb, mc, die alle $= r$, auf die Seiten BC, AC, AB gefällt werden, nach §. 277, so wie nach §. 349,

$$Ac = Ab = s - a,$$

wo s den halben Umfang, $\frac{a+b+c}{2}$, bedeutet.

Dann hat man im rechtwinkligen Dreiecke Amc,

$$\text{tg}\, mAc = \text{tg}\, \tfrac{1}{2} A = \frac{cm}{Ac} = \frac{r}{s-a}.$$

Es ist aber (§. 279.I.), unter F den Inhalt verstanden,

$$r = \frac{F}{s},$$

und

$$F = \sqrt{s\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}\,.$$

Daher kann man sich, wenn alle drei Winkel aus den Seiten berechnet werden sollen, dieser Formeln bedienen:

$$(1)\quad F = \sqrt{s\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}$$

$$(2)\quad r = \frac{F}{s}$$

$$(3)\quad \text{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{r}{s-a}$$

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{r}{s-b}$$

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{s-c},$$

welche Formeln den Vorzug großer Einfachheit und Bequemlichkeit mit dem großer Genauigkeit verbinden. (Vgl. §. 405. X. und §. 427).

Zusatz. Durch Substitution des Werthes von F aus (1) in (2) und dann des entstandnen Werthes von r in (3) findet man

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,.\,(s-c)}{s\,.\,(s-a)}}.$$

Die analogen Formeln für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$ sind leicht zu bilden.

* * *

§. 438. Die nun vorgetragenen Regeln zu Berechnungen der Dreiecke sollen jetzt zur Auflösung verschiedener Rechnungsaufgaben angewandt werden, welche hauptsächlich Vierecke und Dreiecke betreffen. Bei der Ableitung der Rechnungsvorschriften werden uns mehr oder weniger einfache Hülfsconstructionen wichtige Dienste leisten.

Aufgabe I. Vom Vierecke ABCD sind gegeben die 4 Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, nebst der Diagonale $AC = p$. Man soll die Winkel, den Flächeninhalt F, und die andre Diagonale $BD = q$ berechnen.

Auflösung. Auf jedes der Dreiecke ABC und ADC können die Formeln aus §. 437. angewandt, und dadurch der Inhalt nebst mehren Winkeln gefunden werden. Das Uebrige bekommt man sodann aus dem $\triangle ABD$ oder auch BCD, mittelst der Formeln aus §. 431 oder §. 436.

Zahlenbeispiel. Es sey gegeben $a = 440{,}3$, $b = 506{,}8$, $c = 372{,}6$, $d = 417{,}2$, $p = 519{,}5$.

Man findet: Der Inhalt ungefähr $= 102003$,

$\angle DAB = 108^0 22' (23'')$, $\angle ABC = 66^0 5' (50'')$

$\angle BCD = 103^0 28' (52'')$, $\angle CDA = 82^0 2' (56'')$.

Die Diag. $q = 695{,}5$.

§. 439. Aufgabe II. Für das Viereck ABCD (Fig. 32.) sind die drei Seiten $AB = a$, $BC = b$, $DA = d$ gegeben, nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkeln A und B; man soll die vierte Seite CD, nebst den Winkeln C und D berechnen.

Auflösung.

Erste Methode. Man ziehet eine Diagonale, etwa BD, und wendet §. 436. zuerst auf △ABD, dann auf △CBD an.

Zweite Methode. Man verlängert die Seiten BC, AD, bis sie sich in E schneiden; wendet dann §. 435. I. auf △ABE, dann §. 436. auf △ECD an.

Dritte Methode. Man kann auch durch Hülfslinien die Rechnung auf Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zurückführen. Es dienen dazu Lothe CP, DQ, die man aus C und D auf AB, und noch das Loth DR, das man aus D auf CP fället. Dann stellt man Rechnungen an über: 1) △ADQ, 2) △BCP, 3) △DCR.

Zahlenbeispiel. $a = 914$, $b = 518$, $d = 417$, $A = 82^0$, $B = 83^0$ giebt $CD = 799{,}27$, $\angle C = 89^0 43' (30'')$, $\angle D = 105^0 16' (25'')$.

Will man auch den Inhalt berechnen, so ist dies besonders bequem bei der dritten Methode. Man findet ihn $= 395720$.

§. 440. Aufgabe III. Vom Sechsecke ABCDEF (Fig. 33.) sind die Seiten a, b, c, d, e, f und die drei Winkel B, C, F gegeben; man soll die übrigen Winkel und den Inhalt berechnen.

Auflösung. Durch die Diagonalen AD, AE entstehet

1) ein Viereck ABCD. Auf dieses kann man den vorigen §. anwenden.

2) ein Dreieck AEF. Auf dieses lassen sich die Formeln der zweiten Bestimmungsart anwenden.

3) ein Dreieck ADE. In diesem kennt man jetzt alle Seiten, kann daher §. 437. anwenden.

§. 441. Aufgabe IV. Von einem Viereck (Fig. 32.) sind die gegenüberliegenden Seiten AB = a, CD = c und alle Winkel gegeben; man soll die Seiten AD, BC und den Inhalt berechnen.

Auflösung. Sind die Seiten AD, BC bis E verlängert, so ist jedes der Dreiecke ABE, CDE nach der ersten Bestimmungsart bestimmt. Man kann daher AE, BE, CE, DE und die Inhalte jener Dreiecke berechnen. Dann findet man die gesuchten Größen durch Subtractionen.

Zahlenbeispiel $a = 517,3$, $\angle A = 79^0$, $\angle B = 68^0$,
$c = 281,5$, $\angle C = 97^0$, $\angle D = 116^0$.

Es kommt

$AE = 880,64$,	$BE = 932,35$,	$\triangle ABE = 223595$
$DE = 513,00$,	$CE = 464,54$,	$\triangle CDE = 64898$.

Folglich

$AD = 367,64$	$BC = 467,81$	das Viereck $= 158697$.

§. 442. Aufgabe V. Von einem Dreiecke sind alle Winkel und die Seite AB gegeben; man soll die durch das Loth CD gebildeten Abschnitte der Basis AD, DB berechnen.

Auflösung.

Erste Methode. Nach §. 431. Gl. (B) hat man

$$CD = \frac{AB}{\cot A + \cot B},$$

dann $AD = CD . \cot A$, $DB = CD . \cot B$.

Zweite Methode. Man mache (Fig. 34.) $DE = DB$ und ziehe CE, so ist $CE = CB$, $\angle ECD = BCD$, $\angle ACE = CED - CAE = CBA - CAB = B - A$. Nach §. 430. Zus. ist nun

$$AB : AC = \sin C \quad : \sin B$$

$$AC : AE = \sin AEC : \sin ACE = \sin B : \sin(B - A)$$

daher $AB : AE = \sin C \quad : \sin(B - A)$

oder $(AD + DB) : (AD - DB) = \sin(B + A) : \sin(B - A)$.

Dies giebt den Lehrsatz: Die Summe der Abschnitte der Basis verhält sich zu deren Differenz, wie der Sinus der

Summe der Winkel an der Basis (oder der Sinus des Winkels an der Spitze) zu dem Sinus der Differenz dieser Winkel.

Man hat also die Differenz der Abschnitte durch die Gl.

$$AD - DB = \frac{AB \,.\, \sin(B - A)}{\sin C}.$$

Weil nun auch $AD + DB = AB$ bekannt ist, so bekommt man leicht die einzelnen Abschnitte. Will man dann noch die Höhe CD kennen lernen, so hat man

$$CD = AD \,.\, \mathrm{tg} A = DB \,.\, \mathrm{tg} B.$$

§. 443. Aufgabe VI. Vom Vierecke ABCD (Fig. 32) ist gegeben die Seite AB, nebst den vier Winkeln BAC, BAD, ABC, ABD; man soll CD berechnen.

Auflösung.

Erste Methode. Man wende §. 430 oder §. 435. I. auf die Dr. ABC und ABD, dann §. 431 oder §. 436. auf ACD oder BCD an.

Zweite Methode. Fällt man die Lothe CP, DQ, DR, so kann man erst, nach vorigem §., berechnen AP, CP, AQ, DQ, dann $QP = DR$, CR und CD.

Zahlenbeispiel. Es sey $AB = 750$,
$\angle BAC = 37^0 40'$, $\angle ABC = 117^0 30'$
$\angle BAD = 110^0$, $\angle ABD = 38^0 20'$.
Dann ist $CD = 1562{,}8$.

§. 444. Aufgabe VII. Vom Dr. ABC sind alle Winkel A, B, C nebst der Summe zweier Seiten $AC + BC = s$ gegeben; man soll die Seiten berechnen.

Auflösung. Die entsprechende Constructions-Aufgabe ist in §. 161. I vorgelegt. Die Construction geschiehet folgendermaßen. Man bildet (Fig. 35) aus $AE = s$, $\angle BAE = A$, $\angle BEA = \frac{1}{2} C$ das Dr. ABE, dann bestimmt man den

Punkt C, durch $\angle CBE = AEB = \frac{1}{2}C$, oder durch den geometrischen Ort von §. 88, nämlich ein BE in F halbirendes Loth, so daß $BC = EC$. Dann ist ABC das gesuchte Dreieck.

Aus dieser Construction läßt sich nun leicht eine Vorschrift zur Auflösung der Rechnungs-Aufgabe herleiten. Man berechnet, nach den für die erste Bestimmungsart des Dr. gegebenen Formeln (§. 430 oder §. 435. I) aus $AE = s$, $\angle BAE = A$, $\angle AEB = \frac{1}{2}C$, die Linie AB allein, oder auch außer derselben noch BE. Dann findet man AC und BC durch Anwendung derselben Formeln auf das Dr. ABC; oder man bestimmt für das rechtwinkl. Dr. BFC aus der Kathete BF und dem W. $FBC = \frac{1}{2}C$, die Hypotenuse BC, worauf sodann $AC = s - BC$.

Formeln, nach der ersten Art.

Für $\triangle ABE$ ist (1) $AB = \frac{s \,.\, \sin\frac{1}{2}C}{\sin(A+\frac{1}{2}C)} = \frac{s \,.\, \sin\frac{1}{2}C}{\sin(B+\frac{1}{2}C)}$.

Für $\triangle ABC$ (2) $D = \frac{AB}{\sin C}$

(3) $AC = D \,.\, \sin B$

(4) $BC = D \,.\, \sin A$.

Nach der zweiten Art.

Für $\triangle ABE$ (1) $D' = \frac{s}{\sin(A+\frac{1}{2}C)} = \frac{s}{\sin(B+\frac{1}{2}C)}$

(2) $AB = D' \,.\, \sin\frac{1}{2}C$

(3) $BE = D' \,.\, \sin A$.

Für $\triangle BFC$ (4) $BC = \frac{1}{2} \,.\, \frac{BE}{\cos\frac{1}{2}C}$.

Dann ist (5) $AC = s - BC$.

Zahlenbeispiel. $\angle A = 47^0 5'$, $\angle B = 58^0 43'$, $\angle C = 74^0 12'$, und $s = 47,95$. Hieraus kommt $AB = 29,074$, $AC = 25,822$, $BC = 22,128$.

Anm. Man bemerke, wie hier die Auflösung einer Aufgabe durch Construction den Weg bahnte zur Auflösung der entsprechenden

Rechnungs-Aufgabe. Gleiches kann von vielen andern Constructions-Aufgaben gezeigt werden; so z. B. von den übrigen Aufgaben des §. 161, von denen des §. 162, und denen des §. 184.

III. Rein goniometrische Formeln, die den arithmetischen Zusammenhang der Functionen solcher Winkel darstellen, welche selbst in einem gewissen Zusammenhange stehen; nebst einigen Anwendungen dieser Formeln.

§. 445. Aus den Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b werden die Sinus und Cosinus ihrer Summe $a+b$ und ihrer Differenz $a-b$ durch folgende Formeln ausgedrückt.

[1] $\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$

[2] $\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$

[3] $\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$

[4] $\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b.$

Beweis. Man habe (Fig. 36) einen Winkel $MAR = a$; an denselben sey angelegt $RAS = b$, also $MAS = a + b$. Aus einem beliebigen Punkte B in AS sey auf AM das Loth BC, auf AR das Loth BD, ferner sey aus D auf BC das Loth DE, auf AM das Loth DF gefällt. AB heiße r (es kann als Radius eines Kreises gedacht werden, doch ist dies nicht nöthig), so ist:

$CB = r . \sin(a+b)$, $AC = r . \cos(a+b)$,

$DB = r . \sin b$, $AD = r . \cos b$.

Nach §. 52 ist $\angle EBD = a$, folglich

$EB = DB . \cos a = r . \cos a . \sin b$,

$CF = ED = DB . \sin a = r . \sin a . \sin b$.

Dann $CE = FD = AD . \sin a = r . \sin a . \cos b$,

$AF = AD . \cos a = r . \cos a . \cos b$.

Nun ist $CB = CE + EB$

$AC = AF - CF.$

Setzt man in diese beiden Gl. statt der Linien die obigen Werthe derselben, und schafft den Factor r fort, so ergeben sich die Formeln [1] und [2].

Um [3] und [4] zu beweisen, muß man (Fig. 37) im W. $MAR = a$ den Theil $RAS = b$ machen, so daß $MAS = a - b$. Dann schreitet der Beweis auf ähnliche Art fort, wie der vorige an Fig. 36. Zuletzt entstehen dann die Gl. [3] u. [4] aus $CB = CE - BE$ u. $AC = AF + FC$.

Anm. 1. In den Figuren sind die Winkel a und b beide spitz, so wie auch $a + b$ und $a - b$. Es können aber in Hinsicht der Größe der Winkel mancherlei andre Fälle Statt finden, von denen verschiedene Lagen der Punkte und Linien der Figuren abhängig sind. In allen diesen Fällen werden sich aber bei genau analogen Hülfsconstructionen, und bei consequenter Anwendung des + und — auf die Linien und die Winkelfunctionen, die in den Beweisen angewandten Gleichungen durchaus als richtig bewähren, so daß die Endresultate, d. h. unsre 4 Formeln, selbst jedesmal richtig seyn müssen.

Eine andre Art, die Verallgemeinerung der 4 Gleichungen zu erhalten, findet man z. B. in den Eléments de Géométrie von Legendre.

Anm. 2. Unsre Formeln gelten selbst für negative Winkel. Dies ergiebt sich ebenfalls, wenn, bei gehörigen Hülfsconstructionen, das + und — genau, auch mit Rücksicht auf die Sätze von §. 422, angewandt wird.

Durch Anwendung negativer Winkel läßt sich selbst ein Zusammenhang zwischen [1] und [3] nachweisen. Man setze, in [1] sey b ein negativer Winkel, der mit n bezeichnet werden möge, so hat man

$$\sin(a + n) = \sin a \,.\, \cos n + \cos a \,.\, \sin n.$$

Es sey nun $n = -p$, wo p ein positiver Winkel, so hat man $a + n = a - p$, und (§. 422) $\cos n = \cos p$, $\sin n = -\sin p$, also

$$\begin{aligned}\sin(a - p) &= \sin a \,.\, \cos p + \cos a \,.\, (-\sin p)\\ &= \sin a \,.\, \cos p + (-\cos a \,.\, \sin p)\\ &= \sin a \,.\, \cos p - \cos a \,.\, \sin p.\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ist auch [4] von [2] abhängig.

Gleiche Bemerkungen, die auch das Gedächtniß im Behalten der Formeln unterstützen, könnten auch im Folgenden bei vielen Gleichungen gemacht werden.

Anm. 3. Aus beiden Gl. [1] und [2] zusammen können auch die [3] und [4] folgendermaßen abgeleitet werden. Man hat $a = a - b + b$. Hier betrachte man $a - b$ als den einen, b als den andern Theil, so hat man nach [1] und [2]

$$\sin a = \sin(a-b) \cdot \cos b + \cos(a-b) \cdot \sin b$$
$$\cos a = \cos(a-b) \cdot \cos b - \sin(a-b) \cdot \sin b.$$

Man multiplicire die erste dieser Gl. mit $\cos b$, die zweite mit $\sin b$, und subtrahire die zweite von der ersten, so bleibt (wegen $\cos b^2 + \sin b^2 = 1$)

$$\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a-b) \quad \text{d. i. [3].}$$

Multiplicirt man aber die erste mit $\sin b$, die zweite mit $\cos b$, und addirt, so kommt

$$\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) \quad \text{d. i. [4].}$$

Anm. 4. Uebrigens ist selbst die Formel [2] von [1] abhängig. Nämlich, nach §. 416. III ist

$$\cos(a+b) = \sin((\mathfrak{R}+a)+b)$$

also, nach [1]

$$= \sin(\mathfrak{R}+a) \cdot \cos b + \cos(\mathfrak{R}+a) \cdot \sin b$$
$$= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

Auf ähnliche Weise entstehet auch [4] aus [3].

Anm. 5. In den Formeln [1] bis [4] sind viele frühere enthalten, welche die Beziehungen zwischen den Functionen solcher Winkel betreffen, deren Summe oder Differenz ein Vielfaches des rechten Winkels ist. Man findet z. B.

$$\sin(\mathfrak{R} \pm a) = \sin\mathfrak{R} \cdot \cos a \pm \cos\mathfrak{R} \cdot \sin a$$
$$= \cos a \pm 0 = \cos a$$
$$\cos(\mathfrak{R} \pm a) = \cos\mathfrak{R} \cdot \cos a \mp \sin\mathfrak{R} \cdot \sin a$$
$$= 0 \mp \sin a = \mp \sin a$$
$$\sin(2\mathfrak{R} \pm a) = \sin 2\mathfrak{R} \cdot \cos a \pm \cos 2\mathfrak{R} \cdot \sin a$$
$$= 0 \mp \sin a = \mp \sin a$$

u. s. w.

Anm. 6. Selbst die Gl. $1 = \sin a^2 + \cos a^2$ ist unter [4] begriffen. Man erhält sie daraus, wenn man $a = b$ setzt, und anwendet, daß $\cos 0 = 1$.

Anm. 7. Die Gl. [1] kann auch mittelst des Ptolemäischen Satzes (§. 274) bewiesen werden. Man ziehe (Fig. 38) in einem Kreise den Durchmesser MN, und mache $\angle NMA = a$, $NMB = b$, also $AMB = a + b$. Nach dem erwähnten Satze hat man nun

$$MN \,.\, AB = AN \,.\, MB + BN \,.\, MA.$$

Es ist aber, wegen der rechten Winkel an A und B

$$AN = MN \,.\, \sin a, \qquad MA = MN \,.\, \cos a,$$
$$BN = MN \,.\, \sin b, \qquad MB = MN \,.\, \cos b,$$

und auch (vergl. §. 434. Anm.)

$$AB = MN \,.\, \sin(a + b);$$

diese Werthe setze man in die obige Gleichung, und dividire auf beiden Seiten mit MN, so hat man Gl. [1].

Auch Gl. [3] kann auf ähnliche Art bewiesen werden; es muß nur dabei statt MB eine Linie wie MB′, zwischen MA und MN, angewandt werden.

§. 446. Aus den 4 Formeln des vorigen §. lassen sich nun eine Menge andrer Formeln, durch bloße Rechnung, nur unter Zuziehung früherer Formeln (besonders derjenigen der §§. 399, 400, 401.) ableiten. Es wird diesen Formeln dieselbe allgemeine Gültigkeit zukommen, wie den [1] bis [4] und überhaupt allen denen, welche dabei angewandt werden.

§. 447. Zunächst findet sich, weil $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ (§. 401), aus [1] und [2]

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b}{\cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b},$$

und, indem man hier Zähler und Nenner mit $\cos a \,.\, \cos b$ dividirt

$$[5] \qquad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}.$$

Aehnlich folgt aus [3] und [4]

$$[6] \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}.$$

Formeln für $\cot(a \pm b)$, $\sec(a \pm b)$, $\operatorname{cosec}(a \pm b)$ lassen sich eben so leicht ableiten.

§. 448. Man setze in [1] und [2] $a+b$ statt a und c statt b, so entwickelt sich

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b) \cdot \cos c + \cos(a+b) \cdot \sin c$$
$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b) \cdot \cos c - \sin(a+b) \cdot \sin c,$$

und setzt man nun statt $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ ihre Werthe aus [1] und [2], so erhält man

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos a \cdot \sin b \cdot \cos c + \cos a \cdot \cos b \cdot \sin c - \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c,$$
$$\cos(a+b+c) = \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos c - \sin a \cdot \cos b \cdot \sin c - \cos a \cdot \sin b \cdot \sin c.$$

Aus diesen Gl. oder auch aus [5] kann man herleiten

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c}.$$

Weiter würden sich nun leicht Formeln für die Sinus, Cosinus und Tangenten der Summen von 4, 5, ... Winkeln ableiten lassen.

§. 449. In [1] und [2] setze man a statt b, so kommt

[7] $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$

[8] $\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$.

Auf ähnliche Art würden sich aus den Gl. des vorigen §. Formeln für $\sin 3a$, $\cos 3a$ u. s. w. ergeben. Auch Formeln für $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{tg} 3a$ u. s. w. können leicht entwickelt werden.

Anm. Die Gl. [7] hat sich schon in §. 426. I. Anm. auf einem andern Wege, durch eine besondre Construction ergeben.

§. 450. Theils durch Addition theils durch Subtraction entstehen aus [1] und [3], dann aus [2] und [4] die Gleichungen

[9] $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$

[10] $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \sin b$

[11] $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$

[12] $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \cdot \sin a \cdot \sin b$.

Man setze $a + b = u$, und $a - b = v$
so wird $a = \frac{u + v}{2}$, und $b = \frac{u - v}{2}$.
Substituirt man diese Werthe in die eben gefundnen Gl., so bekommt man:

$$[9]' \quad \sin u + \sin v = 2 . \sin \frac{u+v}{2} . \cos \frac{u-v}{2}$$

$$[10]' \quad \sin u - \sin v = 2 . \cos \frac{u+v}{2} . \sin \frac{u-v}{2}$$

$$[11]' \quad \cos u + \cos v = 2 . \cos \frac{u+v}{2} . \cos \frac{u-v}{2}$$

$$[12]' \quad \cos u - \cos v = -2 . \sin \frac{u+v}{2} . \sin \frac{u-v}{2}.$$

Diese 4 Formeln sind mit den 4 obigen, aus denen sie auf rein arithmetischem Wege abgeleitet sind, im Wesentlichen identisch. Ein Zahlenbeispiel, welches unter einer der Formeln [9] bis [12] begriffen ist, kann auch immer der entsprechenden Gl. aus [9]' bis [12]' untergeordnet werden.

§. 451. Man addire [8] zu $1 = \cos a^2 + \sin a^2$, so findet man

$$[13] \quad 1 + \cos 2a = 2 \cos a^2$$

$$[13]' \quad \cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}} = \pm \tfrac{1}{2} . \sqrt{2 + 2 \cos 2a}.$$

Man subtrahire [8] von $1 = \cos a^2 + \sin a^2$, so kommt

$$[14] \quad 1 - \cos 2a = 2 . \sin a^2$$

$$[14]' \quad \sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}} = \pm \tfrac{1}{2} . \sqrt{2 - 2 \cos 2a}.$$

Anm. 1. In [13]' und [14]' hängt das Vorzeichen von der Beschaffenheit des Winkels a ab. Ist a ein spitzer Winkel, so gilt +.

Anm. 2. Statt 2a setze man φ, statt a also $\frac{1}{2} \varphi$, so ist z. B.

$$\cos \tfrac{1}{2} \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \quad \text{u. s. w.}$$

Anm. 3. Die Gl. [13] u. [14] finden sich auch als besondre Fälle von [11] u. [12], wenn man statt b setzt a, und $\cos 0 = 1$ anwendet.

Anm. 4. Man setze in [13] und [14] $2a = 90^0 - \varphi$, so gehen dieselben über in

$$1 + \sin\varphi = 2.\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2 = 2.\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)^2$$
$$1 - \sin\varphi = 2.\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2 = 2.\cos(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)^2.$$

Anm. 5. Formeln, welche die Abhängigkeit des $\sin a$ und $\cos a$ von $\sin 2a$ ausdrücken, also den Gl. [13] u. [14] verwandt sind, bekommt man so: Man verbinde mit

$$1 = \cos a^2 + \sin a^2$$

die Gl. [7] $\sin 2a = 2\sin a\,.\,\cos a$,

sowohl durch Addition als Subtraction, so bekommt man

$$1 + \sin 2a = (\cos a + \sin a)^2$$
$$1 - \sin 2a = (\cos a - \sin a)^2$$

daher
$$\cos a + \sin a = \pm\sqrt{1 + \sin 2a}$$
$$\cos a - \sin a = \pm\sqrt{1 - \sin 2a}$$

und
$$\cos a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 2a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 2a}$$
$$\sin a = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 2a} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 2a}.$$

Ist $2a$ ein positiver spitzer Winkel, also a ein Winkel zwischen 0 und 45^0, so gelten allenthalben die oberen Vorzeichen.

§. 452. Man dividire [14] durch [13], so kommt

$$[15] \quad \mathrm{tg}\,a^2 = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}, \quad \mathrm{tg}\,a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}}.$$

Diese Formel kann so umgewandelt werden

$$\mathrm{tg}\,a^2 = \frac{(1 - \cos 2a)\,.\,(1 - \cos 2a)}{(1 + \cos 2a)\,.\,(1 - \cos 2a)} = \frac{(1 - \cos 2a)^2}{1 - \cos 2a^2}$$
$$= \frac{(1 - \cos 2a)^2}{\sin 2a^2}.$$

Folglich [16] $\mathrm{tg}\,a = \dfrac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}$,

woher [16]′ $\mathrm{tg}\,a = \mathrm{cosec}\,2a - \cot 2a$.

Auf eine ähnliche Art findet sich

$$[17] \quad \cot a^2 = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}, \quad \cot a = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}}.$$

$$[18] \quad \cot a = \frac{1 + \cos 2a}{\sin 2a}$$

$$[18]' \quad \cot a = \mathrm{cosec}\,2a + \cot 2a.$$

Aus [16]′ und [18]′ entstehet

$$[19] \quad \cot a + \operatorname{tg} a = 2 . \operatorname{cosec} 2a = \frac{2}{\sin 2a}.$$

$$[20] \quad \cot a - \operatorname{tg} a = 2 . \cot 2a = \frac{2}{\operatorname{tg} 2a}.$$

Anm. 1. Die Gl. [16]′ und [18]′ werden, für einen spitzen Winkel $2a$, so durch Construction bewiesen:

In Fig. 39. seyen am Quadranten MAN die Winkel $MAB = 2a$, $MAC = a$ nebst

$$AP = \operatorname{Cosec} 2a, \qquad NP = \operatorname{Cot} 2a$$
$$NQ = \operatorname{Cot} a \quad , \qquad MV = \operatorname{Tg} a$$

construirt, so hat man $\angle PAQ = \angle MAQ = \angle PQA$, also $AP = PQ$. Nun mache man $PW = AP = PQ$, so ist $\angle WAQ = 90^0$, daher $\angle NAW = MAV$, und $WN = MV$. Dann ist

$$MV = WN = WP - NP = AP - NP,$$

oder $\operatorname{Tg} a = \operatorname{Cosec} 2a - \operatorname{Cot} 2a$, woher [16]′;

und $NQ = PQ + NP = AP + NP$,

oder $\operatorname{Cot} a = \operatorname{Cosec} 2a + \operatorname{Cot} 2a$, woher [18]′.

Anm. 2. Ein Beweis von [15] findet sich auch, unter Grundlage von Fig. 25, aus der in §. 427. bewiesenen Gl.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{c - b}{c + b},$$

wenn man bemerkt, daß $\cos A = \frac{b}{c}$.

Anm. 3. Man hat

$$\cot a \pm \operatorname{tg} a = \frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos a^2 \pm \sin a^2}{\sin a \, . \, \cos a}.$$

Bringt man nun die Gl. $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$, und [7] und [8] zur Anwendung, so ergeben sich auch auf diesem Wege die Gl. [19] u. [20].

Anm. 4. Entwickelt man aus [15] den Werth von $\cos 2a$ algebraisch, so findet sich

$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg} a^2}{1 + \operatorname{tg} a^2}.$$

Multiplicirt man diese Gl. mit der sich leicht aus [5], unter der Annahme $a = b$, ergebenden Gleichung

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a^2},$$

so erscheint

$$\sin 2a = \frac{2\,tg\,a}{1 + tg\,a^2}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen bestätigt sich auch durch Umwandlung derselben mittelst $tg\,a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

§. 453. In [11] ersetze man a durch ma und b durch a, so ist $a + b = (m + 1).a$ und $a - b = (m - 1).a$, und man hat

$$\cos(m+1).a + \cos(m-1).a = 2.\cos a.\cos ma,$$

oder [21] $\cos(m+1)a = 2.\cos a.\cos ma - \cos(m-1)a$.

Es kann hier m jeden beliebigen Zahlenwerth bedeuten. Setzt man aber dafür ganze Zahlen, und zwar nach der Reihe 1, 2, 3 u. s. w., so bekommt man

$$\cos 2a = 2.\cos a.\cos a - \cos 0$$
$$\cos 3a = 2.\cos a.\cos 2a - \cos a$$
$$\cos 4a = 2.\cos a.\cos 3a - \cos 2a \quad \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Gl. entstehet

$$\cos 2a = 2.\cos a^2 - 1 \quad \text{(einerlei mit [13])}$$
$$\cos 3a = 2.\cos a.(2\cos a^2 - 1) - \cos a$$

also [22] $\cos 3a = 4\cos a^3 - 3\cos a$.

$$\cos 4a = 2\cos a.(4\cos a^3 - 3\cos a) - (2\cos a^2 - 1)$$

oder [23] $\cos 4a = 8\cos a^4 - 8\cos a^2 + 1$.

$$\cos 5a = 2.\cos a.(8\cos a^4 - 8\cos a^2 + 1) - (4\cos a^3 - 3\cos a)$$

oder [24] $\cos 5a = 16.\cos a^5 - 20.\cos a^3 + 5\cos a$.
u. s. w.

Anm. Aus Gl. [10] würde man finden

$$\sin(m+1)a = 2.\sin a.\cos ma + \sin(m-1)a,$$

die weitre ähnliche Anwendung dieser Gl. ist aber weniger einfach, und kann hier unterbleiben.

§. 454. Den Gl. [9]' bis [12]' analog hat man folgende Gl. für die Summen und Differenzen von Tangenten oder Cotangenten:

$$[25] \quad \mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \,.\, \cos b}$$

$$[26] \quad \mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \,.\, \cos b}$$

$$[27] \quad \cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \,.\, \sin b}$$

$$[28] \quad \cot a - \cot b = -\frac{\sin(a-b)}{\sin a \,.\, \sin b}.$$

Man findet dieselben mittelst der Gleichungen des §. 401 und mittelst [1] und [3]. Auch für $\cot a \pm \mathrm{tg}\,b$ kann man ähnliche Formeln herleiten.

§. 455. Aus den vier Gl. [9]' bis [12]' kann man, indem man an jedem Paare derselben eine Division vornimmt, sechs neue Formeln ableiten. Zwei derselben sind:

$$[29] \quad \frac{\sin u - \sin v}{\sin u + \sin v} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{u-v}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{u+v}{2}}$$

$$[30] \quad \frac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\,\mathrm{tg}\,\frac{u+v}{2} \,.\, \mathrm{tg}\,\frac{u-v}{2}.$$

Ganz auf ähnliche Weise finden sich sechs Gleichungen aus den vier Gl. [25] bis [28]. Nur diese mag bemerkt werden:

$$[31] \quad \frac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b} = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}.$$

§. 456. Aus den bisher entwickelten allgemeinen Formeln kann man eine Menge mehr specielle Gleichungen herleiten, indem man für gewisse in ihnen enthaltene unbestimmte Winkel, bestimmte Werthe, z. B. 45°, 30° setzt, deren Functionen schon bekannt sind. (§. 403. III, IV.) Z. B.:

Aus [1] entstehen, wegen $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, die Gleichungen

$$\sin(45° + \varphi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin\varphi$$
$$\sin(45° - \varphi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin\varphi.$$

Daher [32] $\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2} \cdot \sin(45° + \varphi)$

[33] $\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2} \cdot \sin(45° - \varphi)$.

Wegen $\operatorname{tg} 45° = 1$ entstehet aus [5] u. [6]:

[34] $\operatorname{tg}(45° + \varphi) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}$.

[35] $\operatorname{tg}(45° - \varphi) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi}$.

Wegen $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ hat man

$$\sin(30° + \varphi) = \tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin\varphi$$
$$\sin(30° - \varphi) = \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin\varphi.$$

Also [36] $\sin(30° + \varphi) + \sin(30° - \varphi) = \cos\varphi$.

Diese Formel kann auch als besondrer Fall von [9]′ angesehen werden.

* * *

Rechenvortheile.

§. 457. Sehr häufig können Rechnungen, namentlich logarithmische, selbst wenn sie an sich nicht Winkel betreffen, durch Anwendung goniometrischer Functionen von Winkeln, die man als Hülfswinkel in die Rechnung einführt, bedeutend erleichtert werden. Es werden dabei logarithmisch-trigonometrische Tafeln vorausgesetzt. Kunstgriffe dieser Art, welche besonders einfach oder häufig anwendbar sind, sollen jetzt gezeigt werden.

§. 458. I. Aufgabe. Zwei Zahlen a und b sind nicht selbst, sondern nur durch ihre Logarithmen gegeben; man soll den Logarithmen der Summe $a+b$ berechnen, ohne die Zahlen a und b selbst durch Aufschlagen in den Logarithmentafeln zu bestimmen.

Aufl. Es ist $a+b = a.(1+\frac{b}{a})$.

Man setze nun $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi^2$,

also (1) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$,

wo φ den Hülfswinkel bezeichnet, so entstehet

$$a+b = a.(1+\frac{b}{a}) = a.(1+\operatorname{tg}\varphi^2) = a.\sec\varphi^2,$$

oder (2) $a+b = \frac{a}{\cos\varphi^2}$.

Die Gl. (1) und (2) sprechen die Vorschrift zu der logarithmisch-goniometrischen Rechnung aus, durch welche $\log(a+b)$ gefunden wird.

II. Aufgabe. Unter gleicher Annahme und unter gleicher Bedingung soll man den Logarithmen der Differenz $a-b$ bestimmen.

Aufl. Es ist $a-b = a.(1-\frac{b}{a})$.

Man setze $\frac{b}{a} = \sin\varphi^2$,

also (1) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Dann kommt $a-b = a.(1-\frac{b}{a}) = a.(1-\sin\varphi^2)$

oder (2) $a-b = a.\cos\varphi^2$.

Anm. Diese Rechenvortheile sind eben nicht von Bedeutung. Zu noch bequemerer Auflösung beider Aufgaben dienen gewisse Hülfstafeln, deren Einrichtung zuerst von Gauß angegeben ist, und die man schon manchen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln beigefügt findet. Die Erklärung über Einrichtung und Gebrauch dieser Tafeln gehört aber nicht hieher.

§. 459. I. Aufgabe. Aus den Zahlen a und b, oder auch aus ihren Logarithmen, die Zahl $a^2 - b^2$ oder $\sqrt{a^2 - b^2}$, oder auch nur die Logarithmen dieser Zahlen zu berechnen.

Aufl. Es ist $a^2 - b^2 = a^2 . (1 - (\frac{b}{a})^2)$.

Man setze (1) $\sin\varphi = \frac{b}{a}$,

so ist $a^2 - b^2 = a^2 . (1 - \sin\varphi^2)$, oder

(2) $a^2 - b^2 = a^2 . \cos\varphi^2$ und $\sqrt{a^2 - b^2} = a . \cos\varphi$.

Anm. 1. Sind die Zahlen a und b selbst, nicht bloß ihre Logarithmen gegeben, so kann die Rechnung schon dadurch erleichtert werden, daß man $a^2 - b^2$ in $(a + b) . (a - b)$ verwandelt.

Anm. 2. Man kann obige Vorschrift auch aus Betrachtung eines rechtwinkligen Dreiecks ableiten, in welchem a die Hypotenuse, b eine Kathete, $\sqrt{a^2 - b^2}$ die andre Kathete ist. Dabei ist φ der Winkel, welcher der Kathete b gegenüber liegt.

Anm. 3. Ist b |ı a, also $\frac{b}{a}$ |ı 1, so kann $\frac{b}{a}$ nicht $= \sin\varphi$ gesetzt werden, und $\sqrt{a^2 - b^2}$ wird imaginär, nämlich $= \sqrt{b^2 - a^2} . i$, wo i bedeutet $\sqrt{-1}$.

II. Aufgabe. Aus a und b, oder den Logarithmen dieser Zahlen, zu bestimmen $a^2 + b^2$ oder $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Aufl. Die Regel ist in den Gleichungen enthalten

(1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$

(2) $a^2 + b^2 = \frac{a^2}{\cos\varphi^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos\varphi}$.

Die Ableitung stützt sich auf $1 + \operatorname{tg}\varphi^2 = \sec\varphi^2 = \frac{1}{\cos\varphi^2}$.

Anm. Die Regel ergiebt sich auch aus Betrachtung eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind.

§. 460. Aufgabe. Es sind die Logarithmen der Zahlen a und b gegeben; man soll einen der Werthe

$$\frac{a-b}{a+b},\quad \frac{a+b}{a-b},\quad \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},\quad \sqrt{\frac{a+b}{a-b}},$$

oder den Logarithmen eines derselben bestimmen.

Erste Auflösung.

Es ist $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$.

Man setze nun

$$(1) \quad \cos\varphi = \frac{b}{a},$$

so hat man, nach §. 452. [15]

$$\frac{a-b}{a+b} = \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2,$$

also

$$(2) \begin{cases} \frac{a-b}{a+b} = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2, & \frac{a+b}{a-b} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi, & \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi. \end{cases}$$

Zweite Auflösung.

Man setze $(1) \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$.

Folglich, vermittelst §. 456. [34] und [35]

$$(2) \begin{cases} \frac{a-b}{a+b} = \mathrm{tg}(45^\circ - \varphi), & \frac{a+b}{a-b} = \mathrm{tg}(45^\circ + \varphi) \\ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\mathrm{tg}(45^\circ - \varphi)}, & \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\mathrm{tg}(45^\circ + \varphi)}. \end{cases}$$

§. 461. I. Aufgabe. Aus dem gegebenen $\log a$ zu bestimmen $\log(a + \frac{1}{a})$.

Aufl. Man setze $(1) \; a = \cot\varphi$,

so ist $a + \frac{1}{a} = \cot\varphi + \mathrm{tg}\,\varphi$, also, nach §. 452. [19]

$$(2) \; a + \frac{1}{a} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

II. Aufgabe. Aus $\log a$ zu bestimmen $\log(a - \frac{1}{a})$.

Aufl. Man setze $(1) \; a = \cot\varphi$, so ist $a - \frac{1}{a} = \cot\varphi - \operatorname{tg}\varphi$, also nach §. 452. [20]

$$(2) \quad a - \frac{1}{a} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi}.$$

§. 462. Aufgabe. Die Zahl $x = p \sin A + q \cos A$ durch Logarithmen und Hülfswinkel zu berechnen.

Aufl. Wäre sowohl p wie q kleiner als 1, und $p^2 + q^2 = 1$, so könnte man $p = \cos\varphi$, $q = \sin\varphi$ setzen, und es wäre $x = \cos\varphi . \sin A + \sin\varphi . \cos A = \sin(A + \varphi)$. Dies leitet zur Erfindung folgender Behandlung:

Man darf setzen (a) $p = m . \cos\varphi$

(b) $q = m . \sin\varphi$,

wo m eine Hülfszahl, φ ein Hülfswinkel. Dann folgt aus diesen Gleichungen

$$(1) \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}$$

$$m = \frac{p}{\cos\varphi} = \frac{q}{\sin\varphi} \left(= \sqrt{p^2 + q^2}\right),$$

und es wird

$$x = m . (\cos\varphi . \sin A + \sin\varphi . \cos A) = m . \sin(\varphi + A)$$

also, indem man hier statt m einen seiner Werthe setzt:

$$(2) \quad x = \frac{p}{\cos\varphi} . \sin(\varphi + A) \text{ oder } = \frac{q}{\sin\varphi} . \sin(\varphi + A).$$

Anm. 1. Die Formeln sind allgemein richtig, und daher auch für Fälle anwendbar, wo eine der Zahlen p und q in sich negativ ist. Man könnte aber auch für einen solchen Fall die Rechnungsvorschrift besonders ableiten. Z. B. für

$$x = f \sin A - g \cos A,$$

bekommt man, wenn man setzt

$$f = m \cos\varphi, \qquad g = m \sin\varphi,$$

die Gleichung $x = m . \sin(A - \varphi)$, und daher die Vorschrift

$$(1) \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{g}{f}$$

$$(2) \quad x = \frac{f}{\cos\varphi} . \sin(A - \varphi) = \frac{g}{\sin\varphi} . \sin(A - \varphi).$$

Anm. 2. Man könnte auch annehmen

$$p = m \cdot \sin\varphi, \qquad q = m \cdot \cos\varphi.$$

Dann wäre (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{q}$

$$(2) \quad x = m \cdot \cos(A - \varphi) = \frac{p}{\sin\varphi} \cdot \cos(A - \varphi)$$
$$= \frac{q}{\cos\varphi} \cdot \cos(A - \varphi).$$

Es kommt aber überhaupt nicht darauf an, daß man diese Formeln auswendig wisse, sondern nur darauf, daß man ihre Ableitungsart kenne. Dann wird man in jedem vorkommenden Falle die Anwendung der einen oder der andern Methode leicht machen können.

* * *

Auflösung von Aufgaben, in welchen Winkel gesucht werden, jedoch ohne Beziehung auf Figuren.

§. 463. Aufgabe. Den unbekannten Winkel x für die Gleichung $p \sin x + q \cos x = a$ durch Hülfswinkel zu berechnen.

Aufl. Das Verfahren ist dem von §. 462. höchst ähnlich. Man setze

$$p = m \cos\varphi$$
$$q = m \sin\varphi$$

woraus (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}$

und $m = \frac{q}{\sin\varphi} = \frac{p}{\cos\varphi}.$

Dann ist $m \cos\varphi \cdot \sin x + m \sin\varphi \cdot \cos x = a$

oder $m \cdot \sin(\varphi + x) = a$

also (2) $\sin(\varphi + x) = \frac{a \cdot \sin\varphi}{q} = \frac{a \cdot \cos\varphi}{p}.$

Ist hiedurch $\varphi + x$ bestimmt, so erhält man x durch Subtraction des aus (1) bekannten φ.

Exempel. $10 \sin x + 11 \cos x = 13$
giebt $\varphi = 47^0 43' 35''$, $\varphi + x = 60^0 58' 58''$ oder $= 119^0 1' 2''$;
daher $x = 13^0 15' 23''$ oder $x = 71^0 17' 27''$.

Anm. Um die Aufgabe algebraisch zu lösen, könnte man $\sin x$ als gesuchte Unbekannte betrachten, und etwa z nennen. Dann wäre $\cos x = \sqrt{1 - z^2}$, und man hätte

$$q \,.\, \sqrt{1 - z^2} = a - pz.$$

Hieraus würde durch Quadriren und Ordnen die quadratische Gl. entstehen

$$(p^2 + q^2) \,.\, z^2 - 2apz = q^2 - a^2,$$

woher $z = \sin x = \dfrac{ap \pm q\sqrt{p^2 + q^2 - a^2}}{p^2 + q^2}$.

Die Rechnung nach dieser Formel würde aber, verglichen mit der obigen Vorschrift, sehr beschwerlich seyn.

Uebrigens lassen sich bei dieser Aufgabe ähnliche Bemerkungen, wie in den Anmerkungen zu §. 462. machen.

§. 464. I. Aufgabe. Von zwei unbekannten Winkeln ist ihre Summe und das Verhältniß ihrer Sinus gegeben; man soll diese Winkel berechnen. Oder also: Man soll die Gleichungen auflösen:

$$(1) \quad x + y = S$$
$$(2) \quad \sin x : \sin y = m : n.$$

Erste Auflösung. Durch Elimination von y und leichte Umwandlung kommt

$$m \,.\, \sin(S - x) = n \,.\, \sin x$$

oder $$m \,.\, \sin S \,.\, \cos x - m \,.\, \cos S \,.\, \sin x = n \,.\, \sin x.$$

Um statt der beiden Functionen Sinus und Cosinus nur eine einzige Function in dieser Gleichung zu haben, dividire man sie auf beiden Seiten durch $\sin x$, so ist

$$m \,.\, \sin S \,.\, \cot x - m \,.\, \cos S = n$$

daher $$\cot x = \frac{n + m \cdot \cos S}{m \cdot \sin S}$$

oder $$\cot x = \frac{n}{m \cdot \sin S} + \cot S \qquad (A).$$

Ist hiedurch x gefunden, so hat man $y = S - x$. Man findet aber auch für y die Gleichung

$$\cot y = \frac{m}{n \cdot \sin S} + \cot S.$$

Zweite Aufl. Aus (2) folgt nach einem bekannten Satze der Proportionslehre

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{m - n}{m + n}.$$

Vermöge §. 455. [29] erhält man hieraus

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{m - n}{m + n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x + y}{2}$$

oder $$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{m - n}{m + n} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} S \qquad (B).$$

Dann ist $$x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = \tfrac{1}{2}S + \frac{x - y}{2}$$

$$y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = \tfrac{1}{2}S - \frac{x - y}{2}.$$

Anm. 1. Sind die Zahlen m und n nicht selbst, sondern nur ihre Logarithmen gegeben, so kann man die Rechnung nach (B) durch Anwendung von §. 460. erleichtern. Man setze

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n}{m}$$

so ist $$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg}(45^0 - \varphi) \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} S.$$

Anm. 2. Auf obige Aufgabe kommt auch die Aufgabe zurück: Aus den Seiten c und b eines Dreiecks, nebst dem eingeschlossenen Winkel A, die beiden andern Winkel B und C zu berechnen. Denn hiefür hat man die Gleichungen

(1) $C + B = 180^0 - A$

(2) $\sin C : \sin B = c : b.$

Aus diesen findet sich, entweder

nach (A) $$\cot C = \frac{b}{c \sin A} + \cot(180^0 - A) = \frac{b}{c \cdot \sin A} - \cot A$$

oder nach (B) $\operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b}\cdot\operatorname{tg}(90^0 - \frac{1}{2}A)$

$$= \frac{c-b}{c+b}\cdot\cot\tfrac{1}{2}A.$$

Man siehet, daß diese Formeln ganz mit denen von §. 431. Zus. 1, und der von §. 436. Bem. 2. (C) übereinstimmen.

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x - y = D$

(2) $\sin x : \sin y = m : n.$

III. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$

(2) $\cos x : \cos y = m : n.$

IV. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen.

(1) $x - y = D$

(2) $\cos x : \cos y = m : n.$

Die Auflösungen dieser 3 Aufgaben sind der Auflösung von I. sehr analog. Für III und IV. kann man die Gl. §. 455. [30] anwenden.

§. 465. I. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$

(2) $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = m : n.$

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x - y = D$

(2) $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = m : n.$

Die Auflösungen können aus §. 455. [31] hergenommen werden. Man findet

für I. $\sin(x - y) = \frac{m-n}{m+n}\cdot\sin S,$

für II. $\sin(x + y) = \frac{m+n}{m-n}\cdot\sin D.$

§. 466. I. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$

(2) $\sin x + \sin y = s.$

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x - y = D$

(2) $\sin x + \sin y = s.$

III. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$

(2) $\sin x - \sin y = d.$

IV. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x - y = D$

(2) $\sin x - \sin y = d.$

Auflösung. Für I u. II. ist die Gl. §. 450. [9]′, für III u. IV. die Gl. [10]′ zu Grunde zu legen. Man erhält für I. z. B. die Auflösungsformel

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{s}{2\,.\,\sin\frac{1}{2}S}.$$

Anm. Auf ähnliche Weise werden auch leicht die 4 Aufgaben gelöset, welche man erhält, wenn man in obigen Aufgaben statt sin setzt cos.

§. 467. I u. II. Aufgaben. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$, oder $x - y = D$

(2) $\sin x\,.\,\sin y = p.$

III u. IV. Aufgaben. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x + y = S$, oder $x - y = D$

(2) $\cos x\,.\,\cos y = q.$

Auflösungen. Vermöge §. 450. [12] hat man für I u. II.:

$$\cos D - \cos S = 2\sin x\,.\,\sin y = 2p,$$

und kann hieraus, wenn S gegeben ist, leicht D bestimmen, und wenn D gegeben, S finden. Aus S und D ergiebt sich sodann x und y. Für III u. IV. hat man auf ähnliche Art aus [11]

$$\cos S + \cos D = 2 \cos x . \cos y = 2 . q,$$

welche Gl. man auf ähnliche Weise zu benutzen hat.

§. 468. I. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

$$(1) \quad x + y = S$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = s.$$

Auflösung. Nach §. 454. [25] hat man

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x . \cos y} = s$$

daher $\cos x . \cos y = \frac{\sin(x+y)}{s} = \frac{\sin S}{s}$.

Hiedurch ist die Aufgabe auf §. 467. III. zurückgeführt, und, der dortigen Auflösung gemäß,

$$\cos S + \cos D = \frac{2 . \sin S}{s}$$

also $\cos D = \frac{2 \sin S}{s} - \cos S.$

Die logarithmische Berechnung nach dieser Gleichung kann durch den Kunstgriff von §. 462. erleichtert werden.

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

$$(1) \quad x - y = D$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = s.$$

Auflösung. Nach der Aufl. von I. ist

$$2 . \sin S - s . \cos S = s . \cos D.$$

Da von dem hieraus zu bestimmenden Winkel S die zwei Functionen Sinus und Cosinus vorkommen, und überhaupt die Gl. von der Form

$$p . \sin x + q . \cos x = a$$

ist, so wird man sich der Methode von §. 463. bedienen müssen. Setzt man demgemäß

$$m \cos \varphi = 2$$

$$m \sin \varphi = s,$$

so bekommt man

$$m . \sin(S - \varphi) = s . \cos D$$

und hat daher die Auflösungsformeln

$$(a) \quad \operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{2}.s$$

$$(b) \quad \sin(S-\varphi) = \frac{s.\cos D}{m} = s.\cos D.\frac{\sin\varphi}{s} = \cos D.\sin\varphi.$$

§. 469. I. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

$$(1) \quad x + y = S$$

$$(2) \quad \operatorname{tg}x \,.\, \operatorname{tg}y = p.$$

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

$$(1) \quad x - y = D$$

$$(2) \quad \operatorname{tg}x \,.\, \operatorname{tg}y = p.$$

Auflösungen. Nach [30] oder auch nach [11] und [12] ist

$$p = \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$$

$$= -\frac{\cos S - \cos D}{\cos S + \cos D}.$$

Also $p\cos S + p\cos D = -\cos S + \cos D.$

Daher findet sich

für I. $\cos D = \frac{1+p}{1-p}.\cos S,$

für II. $\cos S = \frac{1-p}{1+p}.\cos D.$

IV. Goniometrische Behandlung des Dreiecks und der Vielecke überhaupt in rechnender Entwicklungsweise.

§. 470. Der Hauptgegenstand dieses Abschnitts wird die goniometrische Behandlung der Vielecke überhaupt seyn, hauptsächlich in Betreff des Zusammenhangs zwischen den Seiten und Winkeln derselben. Die Methode dieser Behandlung soll die rechnende seyn (oder, wie sie wohl auch, nicht ganz passend, genannt wird, die analytische), bei der nur die Fundamentalformeln durch Betrachtung einer Construction, die übrigen Gleichungen aber durch bloße Rechnung hergeleitet werden. Vorher soll aber, hauptsächlich als Vorbereitung, das Dreieck nach derselben Methode abgehandelt werden. Dabei werden sich auf dem Wege der Rechnung Formeln finden, die früher zur Begründung der Rechnungsregeln für das Dreieck auf dem Wege der Construction abgeleitet sind, und so wird sich dabei eine lehrreiche Vergleichung beider Methoden ergeben.

* * *

Trigonometrie, in rechnender Entwicklung.

§. 471. Man fälle (Fig. 40) auf BC im Dreiecke ABC aus A das Loth AD, so hat man die Gleichungen

$$(\mathrm{I}) \qquad BC = BD + DC$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} BD = AB \cdot \cos B \\ DC = CA \cdot \cos C. \end{cases}$$

Diese Formeln sind ganz allgemein für jede Beschaffenheit des Dreiecks ABC richtig, wie man an den Figuren 40. a, b u. c bei gehöriger Anwendung des + und — erkennen wird. Daher werden auch alle weiteren Folgerungen aus diesen Gleichungen eben so allgemein richtig seyn.

Man setze die Werthe von BD und DC aus (II) in (I), so bekommt man

$$BC = AB \cdot \cos B + CA \cdot \cos C,$$

oder, indem man die Seiten wie gewöhnlich bezeichnet,

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C.$$

Ganz auf dieselbe Art folgen auch die Gleichungen

$$b = a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A$$
$$c = b \,.\, \cos A + a \,.\, \cos B.$$

Diese drei Gl. sprechen im Wesentlichen dasselbe aus. Die erste derselben enthält b und c nebst B und C auf gleichmäßige Weise, nämlich so, daß man b, c, B; C mit c, b, C, B nach der Reihe vertauschen kann, ohne die Gl. zu verändern; dagegen enthält sie a, und auch gewissermaßen den gar nicht darin vorkommenden Winkel A auf eigenthümliche Weise. Wir wollen daher diese Gleichung mit (1,a) bezeichnen; die beiden andern werden daher, ganz analog, mit (1,b) (1,c) zu bezeichnen seyn. Wir haben also

$$(1,a) \quad a = c \,.\, \cos B + b \,.\, \cos C$$
$$(1,b) \quad b = a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A$$
$$(1,c) \quad c = b \,.\, \cos A + a \,.\, \cos B.$$

Formeln, die, jede einzeln genommen, zur unmittelbaren Berechnung abhängiger Größen in einem Dreiecke aus drei gegebenen sollen dienen können, dürfen nur vier Größen des Dreiecks enthalten, eben damit sie aus drei Größen, als gegebenen, die vierte zu bestimmen dienen. Solche Formeln können Hauptformeln heißen. Gleichungen dagegen, welche mehr als 4 Größen des Dreiecks enthalten, mögen Nebenformeln heißen. Die obigen drei Gleichungen sind solche Nebenformeln, indem jede 5 Stücke enthält. Es können und sollen aber aus ihnen eine Menge von Hauptformeln hergeleitet werden.

§. 472. Man multiplicire (1,a) (1,b) (1,c) nach der Reihe mit a, b, c, so entstehet

$$a^2 = ac \,.\, \cos B + ab \,.\, \cos C$$
$$b^2 = ab \,.\, \cos C + bc \,.\, \cos A$$
$$c^2 = bc \,.\, \cos A + ac \,.\, \cos B.$$

Durch Addition der beiden letzten und Subtraction der ersten Gl. kommt nun

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cdot \cos A.$$

Dieses ist eine Hauptformel, die mit (2,a) bezeichnet werden mag. Es ist also

$$(2,a) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \text{ (Vergl. §. 431)}$$

Die analog gebildeten und leicht zu entwickelnden Gleichungen (2,b) und (2,c) brauchen nicht hergestellt zu werden.

§. 473. I. Die Gl. (2,a) giebt

$$\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

oder $\cos A = 1 - \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$

also (α) $\cos A = 1 - \frac{(a-b+c) \cdot (a+b-c)}{2bc}$.

Oder $\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + 2bc + c^2}{2bc} - 1 = \frac{-a^2 + (b+c)^2}{2bc} - 1$

also (β) $\cos A = \frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c)}{2bc} - 1.$

Nach [14] ist $1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, und daher aus (α)

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(a-b+c) \cdot (a+b-c)}{2bc}$$

also $\sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{bc} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$.

Daher, wenn man $\frac{a+b+c}{2}$ mit s bezeichnet,

$$(3,a) \quad \sin \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(s-b) \cdot (s-c)}{bc}.$$

Nach [13] ist $1 + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2} A^2$, und daher aus (β)

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(a+b+c) \cdot (-a+b+c)}{2bc}$$

folglich $\cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{bc} \cdot \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$, oder

$$(4,a) \quad \cos \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{s \cdot (s-a)}{bc}.$$

II. Aus (3,a) und (4,a) kommt durch Division

(5,a) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(s-b)\,.\,(s-c)}{s\,.\,(s-a)}.$$

Anm. Diese Gl. ist schon aus §. 437. Zus. bekannt, dagegen die Gl. (3) und (4) waren früher noch nicht entwickelt.

III. Durch Multiplication kommt aus (3) und (4)

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{1}{b^2c^2}\,.\,s\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c).$$

Man bezeichne $\sqrt{s\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}$ mit F, so ist also

$$\sin\tfrac{1}{2}A\,.\,\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{bc}\,.\,F,$$

folglich, vermöge [7],

(6,a) $$\sin A = \frac{2}{bc}\,.\,F.$$

Anm. Aus §. 431. Zus. 2. weiß man, daß der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2}bc\,.\,\sin A$. Man setze hier statt $\sin A$ seinen eben gefundnen Werth, so findet man den Inhalt $= F = \sqrt{s\,.\,(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}$, was mit §. 356. übereinstimmt.

§. 474. Eliminirt man aus

(6,b) $$\sin B = \frac{2}{ac}\,.\,F$$

und (6,c) $$\sin C = \frac{2}{ab}\,.\,F$$

die Größe F durch Division, so fällt zugleich a weg, und man hat

(7,a) $$b\sin C = c\sin B, \text{ oder } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Nimmt man auch (7,b) und (7,c) hinzu, so ist

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

was schon aus §. 430 und §. 434. bekannt ist.

Anm. 1. Man kann die Gleichungen (7) auf andre Weise aus (1) und (2) ableiten, ohne der Gl. (3) (4) u. (6) zu bedürfen. Man quadrire (1,a) so hat man

$$a^2 = c^2\,.\,\cos B^2 + 2bc\,.\,\cos B\,.\,\cos C + b^2\,.\,\cos C^2,$$

und ziehet man diese Gl. von (2,a) ab, so bleibt

$$0 = \begin{cases} b^2 . (1 - \cos C^2) + c^2 . (1 - \cos B^2) \\ -2bc . (\cos A + \cos B . \cos C). \end{cases}$$

Hier ist aber $1 - \cos C^2 = \sin C^2$, $\quad 1 - \cos B^2 = \sin B^2$,
und $\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C$.
Durch Substitution dieser Werthe folgt

$$0 = b^2 \sin C^2 + c^2 \sin B^2 - 2bc . \sin B \sin C$$

und daher, durch Wurzelausziehung

$$0 = b \sin C - c \sin B,$$

woraus (7,a) entstehet.

Anm. 2. Die Gleichungen (1,a) (1,b) (1,c) sind unabhängig von einander, und konnten als Grundformeln für die rechnende Behandlung des Dreiecks dienen. Denn siehet man drei der 6 im Dreiecke enthaltenen Größen a, b, c, A, B, C als bestimmende Stücke, und als gegeben an, so bleiben die drei übrigen Größen unbekannt, und müssen aus den drei Gleichungen algebraisch gefunden werden können. Nicht so ist es mit den Gleichungen (7,a) (7.b) (7,c). Von diesen läßt sich eine jede aus den beiden andern als eine unmittelbare Folge ableiten. Stellt man also diese drei Gleichungen auf, so sind sie eigentlich nur so viel werth, wie zwei unabhängige Gleichungen, und könnten wohl zur Bestimmung von 2 unbekannten Größen dienen, wenn die übrigen 4 gegeben wären, aber keinesweges zur Bestimmung von 3 unbekannten, wenn 3 gegeben sind. Daher konnten diese drei Gleichungen für sich allein nicht als Grundformeln zur Ableitung der übrigen trigonometrischen Gleichungen dienen. Aber wohl können sie dies, wenn man noch die Gleichung

$$A + B + C = 2\mathfrak{R}$$

zu Hülfe nimmt. Man hat nämlich aus dieser

$$\sin A = \sin(B+C) = \sin B . \cos C + \cos B . \sin C.$$

Unter Annahme, daß die Gl. (7) durch Construction bewiesen seyen, und zur Ableitung der übrigen Gl. dienen sollten, könnte man nun ihnen zu Folge setzen

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \text{ (in §. 434 = D)}$$

dann wäre $\sin A = \frac{a}{m}$, $\quad \sin B = \frac{b}{m}$, $\quad \sin C = \frac{c}{m}$.

Diese Werthe setze man in die oben für $\sin A$ gefundne Gleichung, so hat man

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{m} \cdot \cos C + \frac{c}{m} \cdot \cos B$$

woraus durch Multiplication mit m, die Gl. (1, a) folgt. Nun würden sich dann weiter, wie oben, die übrigen Gleichungen durch Rechnung herleiten lassen.

§. 475. I. Man addire (1, b) u. (1, c), so kommt

$$b + c = (b + c) \cdot \cos A + a \cdot (\cos B + \cos C)$$

also $$(b + c) \cdot (1 - \cos A) = a \cdot (\cos B + \cos C).$$

Statt $1 - \cos A$ und $\cos B + \cos C$ setze man die Werthe, welche nach [14] u. [11]′ diesen Ausdrücken gleich sind, so hat man, nachdem man auch mit 2 dividirt,

$$(b + c) \cdot \sin \tfrac{1}{2} A^2 = a \cdot \cos \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2}.$$

Da aber $\sin \frac{1}{2} A = \cos \frac{B + C}{2}$, so findet sich

$$(8, a) \quad (b + c) \cdot \sin \tfrac{1}{2} A = a \cdot \cos \frac{B - C}{2}.$$

Ferner ziehe man von (1, b) die Gl. (1, c) ab, so bleibt

$$b - c = -(b - c) \cdot \cos A - a \cdot (\cos B - \cos C)$$

woraus, unter Anwendung von [13] und [12]′ entstehet,

$$(9, a) \quad (b - c) \cdot \cos \tfrac{1}{2} A = a \cdot \sin \frac{B - C}{2}.$$

Anm. Die Gl. (8) u. (9) sind nur Nebenformeln, und haben sich schon in §. 436. durch Construction ergeben. Sie lassen sich aber auch auf andre Art ableiten. Nämlich:

A). Aus den Gleichungen (7).

Aus (7, a) ist $b : c = \sin B : \sin C$

folglich $b + c : c = \sin B + \sin C : \sin C$

wegen (7, b) $c : a = \sin C : \sin A.$

Daher, durch Multiplication

$$b + c : a = \sin B + \sin C : \sin A,$$

oder $(b + c) \cdot \sin A = a \cdot (\sin B + \sin C)$

Wendet man nun zur Umwandlung dieser Gleichung [7] u. [9]′ an, so entstehet die Gl. (8, a).

Auf ähnliche Weise findet sich aus (7, a)

$$b - c : c = \sin B - \sin C : \sin C$$

wegen (7, b) $\quad c : a = \sin C : \sin A$

folglich $\quad (b - c) . \sin A = a . (\sin B - \sin C).$

Hieraus entstehet mittelst [7] u. [10]′ die Gl. (9, a)

B). Gestützt auf (3) und (4).

Nach [4] ist $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{1}{2}B . \cos\frac{1}{2}C + \sin\frac{1}{2}B . \sin\frac{1}{2}C,$ daher, vermittelst (3, b) (3, c) (4, b) und (4, c)

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} . \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} . \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$= \frac{s}{a} . \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)}{bc}} + \frac{s-a}{a} . \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)}{bc}}$$

$$= \frac{2s-a}{a} . \sin\tfrac{1}{2}A.$$

Weil $2s - a = (a+b+c) - a = b + c$, so entstehet hieraus (8, a).

Ferner ist nach [3]

$$\sin\frac{B-C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}B . \cos\tfrac{1}{2}C - \cos\tfrac{1}{2}B . \sin\tfrac{1}{2}C,$$

folglich, wieder aus (3, b) (3, c) (4, b) (4, c)

$$\sin\frac{B-C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} . \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} - \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} . \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$= \frac{s-c}{a} . \sqrt{\frac{s.(s-a)}{bc}} - \frac{s-b}{a} . \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{b-c}{a} . \cos\tfrac{1}{2}A$$

woher (9, a) folgt.

II. Aus (9, a) dividirt durch (8, a) entstehet die schon im §. 436 gefundne Gleichung

$$(10, a) \quad \mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} . \cot\tfrac{1}{2}A.$$

§. 476. Aus (1, a), nämlich

$$c . \cos B = a - b . \cos C$$

und (7, a) $\quad c . \sin B = b . \sin C$

entstehet durch Division

$$\cot B = \frac{a}{b \cdot \sin C} - \cot C.$$

Hier kann statt $b \cdot \sin C$ auch $c \cdot \sin B$ geschrieben werden, und so hat man die schon im §. 431. gefundne Gleichung

$$(11, a) \quad \cot B + \cot C = \frac{a}{b \cdot \sin C} = \frac{a}{c \cdot \sin B}.$$

§. 477. Will man aus den jetzt auf dem Wege der Rechnung aus den Grundgleichungen (1) abgeleiteten Gleichungen die einfachsten Vorschriften zur Berechnung der übrigen Seiten oder Winkel eines Dreiecks aus drei gegebenen Größen, nach der Ordnung der vier Bestimmungsarten herleiten, so wird man ganz zu den Regeln geführt, welche schon in den §§. 435 bis 437. aufgestellt sind. Nur lassen sich für die Bestimmungsart eines Dreiecks aus den drei Seiten jetzt noch die Formeln (3) und (4) anwenden, welche früher nicht abgeleitet waren. Diese Formeln sind jedoch den Gl. (5), welche auch in §. 437. zu Grunde liegen, keinesweges vorzuziehen; denn die Bestimmung eines Winkels durch die Tangente ist genauer, als die durch den Sinus oder Cosinus (§. 405. X.), und wenn man alle drei Winkel aus den Seiten berechnen will, so ist die in §. 437. mitgetheilte Methode, merklich bequemer, als die, welche sich auf (3) oder (4) gründen lassen würde.

Anm. Zur Uebung in der Einführung von Hülfswinkeln mag hier noch nachträglich gezeigt werden, wie man die Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel durch die Formel

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

auf verschiedene Weise durch Einführung eines Hülfswinkels erleichtern kann.

A) Man verwandle obige Gl. in

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + 2bc \cdot (1 - \cos A)};$$

dann mit Anwendung von [14] in

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4bc\sin\tfrac{1}{2}A^2}$$

oder $$a = \sqrt{(b-c)^2 + (2.\sin\tfrac{1}{2}A.\sqrt{bc})^2},$$

und führe nun, nach §. 459. II. einen Hülfswinkel ein, so hat man, als Rechnungsregel, die Gleichungen

$$1)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}.\sin\tfrac{1}{2}A$$

$$2)\quad a = \frac{b-c}{\cos\varphi}.$$

B) Man verwandle eben jene Gleichung in

$$a = \sqrt{(b+c)^2 - 2bc.(1+\cos A)}$$

oder nach [13] $$a = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc.\cos\tfrac{1}{2}A^2}$$

und führe nun einen Hülfswinkel nach §. 459. I. ein, so bekommt man

$$1)\quad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\cos\tfrac{1}{2}A$$

$$2)\quad a = (b+c).\cos\varphi.$$

C) Endlich kann man die Gleichung wegen

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{2}A^2 - \sin\tfrac{1}{2}A^2$$

und $$1 = \cos\tfrac{1}{2}A^2 + \sin\tfrac{1}{2}A^2$$

auch so umwandeln:

$$a = \sqrt{(b^2-2bc+c^2)\cos\tfrac{1}{2}A^2 + (b^2+2bc+c^2).\sin\tfrac{1}{2}A^2}$$

$$= \sqrt{(b+c)^2.\sin\tfrac{1}{2}A^2 + (b-c)^2.\cos\tfrac{1}{2}A^2}$$

$$= \sqrt{[(b+c).\sin\tfrac{1}{2}A]^2 + [(b-c).\cos\tfrac{1}{2}A]^2}.$$

Führt man dann einen Hülfswinkel nach §. 459. II. ein, so hat man

$$1)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b-c}{b+c}.\cot\tfrac{1}{2}A$$

$$2)\quad a = \frac{(b+c).\sin\tfrac{1}{2}A}{\cos\varphi}.$$

Die Rechnung nach diesen Gleichungen fällt zuletzt ganz mit der nach §. 436. zusammen; statt des dortigen Winkels u hat man hier den W. φ.

* * *

Polygonometrie.

§. 478. In der jetzt folgenden rechnenden Behandlung der Vielecke sollen nur Formeln aufgestellt werden, welche den Zusammenhang der Seiten und Winkel der Vielecke betreffen, ohne daß Diagonalen oder durch Diagonalen gebildete Winkel betrachtet werden.

Die in den Aufgaben über Vierecke von §. 439 u. §. 443. angewandten Methoden lassen schließen, daß auch Aufgaben über Vielecke überhaupt, besonders nach zweierlei Methoden behandelt werden können, nämlich entweder, indem man durch Ziehen von Diagonalen Alles auf Formeln für das Dreieck im Allgemeinen, oder, indem man durch Fällen von Lothen Alles auf das rechtwinklige Dreieck und dadurch recht auf den Ursprung der goniometrischen Functionen zurückführt. Die letztre Methode wird uns im Folgenden zur Begründung der polygonometrischen Gleichungen dienen, so wie sie auch in §. 471. zur Ableitung der Grundgleichung bei der rechnenden Behandlung des Dreiecks gedient hat.

Zur Erleichterung werden die Gleichungen nicht für das Vieleck von n Seiten ganz im Allgemeinen, sondern nur, beispielsweise, für das Fünfeck aufgestellt werden. Man wird an diesen Gleichungen meistens ohne alle Mühe die Natur der Gleichungen für das Vieleck von n Seiten zu erkennen vermögen, wodurch jenes Verfahren um so eher gerechtfertigt werden wird.

§. 479. Ehe zur Ableitung der polygonometrischen Grundgleichungen geschritten wird, muß zuvor auf den vom + und — der Geraden und der Winkel handelnden sechsten Anhang zum 1sten Theile verwiesen werden, weil die Allgemeinheit der polygonometrischen Formeln nur durch Anwendung fester Begriffe und Sätze über das Positive und Negative erreicht werden kann. Doch mag hier noch in der Kürze das für unsern gegenwärtigen Zweck Nothwendigste aus jenem Anhange zusammengestellt werden.

1) Die Linie ab ist der ba entgegengesetzt; $ab = -ba$.

2) Bezeichnen a, b, c Punkte in einer Geraden, die übrigens in ganz beliebiger Ordnung neben einander liegen mögen, so hat man $ab + bc = ac$. Eben so ist für 4, 5... Punkte

$$ab + bc + cd = ad$$
$$ab + bc + cd + de = ae \text{ u. s. w.}$$

3) Unter gleicher Annahme ist

$$ab + ba = 0$$
$$ab + bc + ca = 0 \text{ u. s. w.}$$

4) Bezeichnen die Buchstaben a, b zwei Punkte in einer Geraden, c, d zwei Punkte einer andern, und es ist S der Schnittpunkt beider Geraden, so bezeichnet $\angle(ab, cd)$ oder auch nur (ab, cd) denjenigen an der Spitze S liegenden Winkel, dessen Anfangsschenkel die aus S ausgehende halbbegrenzte Gerade ist, welche in der Richtung mit ab übereinstimmt, und dessen Endschenkel diejenige aus S ausgehende halbbegrenzte Gerade ist, welche in der Richtung mit cd übereinstimmt.

5) Wird nun die Lage zweier Geraden ab, bc bestimmt, indem man sagt

$$\angle(ab, cd) = \varphi,$$

so kann auch gesagt werden

$$\angle(ab, cd) = \varphi + 4k.\mathfrak{R},$$

wo k eine ganze, positive oder negative Zahl bedeutet; und auch durch diese Gleichung wird die Lage der Geraden gegen einander bestimmt. Die gleichnamigen goniometrischen Functionen aller in dem Ausdrucke $\varphi + 4k.\mathfrak{R}$ enthaltenen Winkel stimmen überein (§. 421), so daß es gleichgültig ist, welchen von diesen Winkeln man in den Formeln anwenden will. Am einfachsten kann man sich des kleinsten positiven Werthes jenes Ausdrucks, der zwischen 0R und 4R enthalten seyn wird, als des Hauptwerthes von $\angle(ab, cd)$ bedienen; doch kann man auch immer den absolut-kleinsten Werth anwenden, welcher auch negativ seyn kann, aber zwischen 2R und —2R enthalten seyn wird.

6) Den Gleichungen aus 2. für Linien hat man analog

$$\angle(ab, cd) + \angle(cd, ef) = \angle(ab, ef)$$
$$(mn, pq) + (pq, rs) + (rs, tu) = (mn, tu) \text{ u. s. w.}$$

§. 480. Zur Bestimmung der Lage der Seiten eines Vielecks gegen einander ist es für Gegenwärtiges am besten, nicht die innern, sondern die äußern Winkel anzuwenden. So z. B. für das Fünfeck ABCDE in Fig. 41. die Winkel $\angle$(EA, AB), (AB, BC), (BC, CD), (CD, DE), (DE, EA). In dieser Fig. muß in Hinsicht des + und — der Winkel (CD, DE) durch eine negative Zahl ausgedrückt werden, wenn die übrigen Winkel durch positive ausgedrückt werden. (Vergl. Fig. 122. zum 1sten Thl.)

Bezeichnet man die Seiten

AB, BC, CD, DE, EA

nach der Reihe durch

a, b, c, d, e,

so kann man obige 5 Winkel auch kürzer durch

$\angle$(e, a) (a, b) (b, c) (c, d) (d, e)

bezeichnen. Noch kürzer wollen wir aber für dieselben die einfachen Buchstaben anwenden

A, B, C, D, E.

Es gilt für diese 5 Winkel (nach Thl. I. S. 240. XV.) die Gleichung

$$A + B + C + D + E = 4k.R.$$

§. 481. Zwei sich (Fig. 42.) in O lothrecht schneidende Gerade mögen als Coordinatenaxen, und zwar Xx als Abscissenaxe, Yy als Ordinatenaxe, und O daher als Anfangspunkt betrachtet werden (s. §. 121). Von den Endpunkten A und B irgend einer begrenzten Geraden seyen auf Xx die Lothe Aa, Bb, auf Yy die Lothe Aa′, Bb′ gefällt. Dann sind die Linien Oa, Ob die Abscissen, die Linien Oa′, Ob′ die Ordinaten von A und B. Ferner sagt man, durch die gefällten Lothe seyen die Punkte A und B, so wie die Gerade AB selbst, auf Xx und Yy projicirt; die Punkte a, b, und die Gerade ab sind Projectionen von A, B und AB auf Xx, eben so sind a′, b′ und a′b′ die Projectionen von A, B und AB auf Yy.

Wollte man die Gerade nicht mit AB, sondern umgekehrt mit BA bezeichnen, so wäre es zweckmäßig, die Projectionen nicht ab, a′b′, sondern ba, b′a′ zu nennen.

Es mögen jetzt (Fig. 43.) auf dasselbe Paar von Coordinatenaxen zugleich zwei Gerade AB, CD projicirt werden. Auf diese Gerade wird sich dann im Allgemeinen das + und — nicht anwenden lassen, um die Beziehung ihrer gegenseitigen Lage auszudrücken, da sie nicht Stücke derselben unbegrenzten Geraden, und auch nicht parallel sind. Deshalb wird man AB, CD und überhaupt jede solche Gerade immer durch positive Zahlen ausdrücken müssen. Wohl aber kann man das + und — auf ihre Projectionen anwenden. Doch kann man hiebei nur die Lage der Projectionen auf der Abscissenaxe für sich betrachten, und auch die Lage der Projectionen auf der Ordinatenaxe wieder für sich. In der Figur sind z. B. ab und cd einstimmiger Art, a′b′, c′d′ aber entgegengesetzter Art. Von einem Gegensatze zwischen ab und c′d′ kann aber nicht die Rede seyn.

Der Gegensatz der Projectionen kann arithmetisch dadurch dargestellt werden, daß man in Xx etwa die Lage von der Linken zur Rechten, in Yy etwa die Lage von unten nach oben durch +, die entgegengesetzten Richtungen aber durch — ausdrückt. Von den Projectionen ab, cd, a′b′, c′d′ wäre hienach nur die letzte durch eine negative Zahl auszudrücken.

§. 482. Projicirt man (Fig. 44.) alle Ecken des Fünfecks ABCDE auf eine Gerade, also etwa Xx, so daß ab, bc, cd, de, ea nach der Reihe die Projectionen der Seiten AB, BC u. s. w. sind, so hat man unter andern die Gleichungen

$$ab + bc = ac$$
$$ab + bc + cd = ad$$
$$ab + bc + cd + de = ae$$
$$ab + bc + cd + de + ea = 0.$$

Die letzte Gleichung giebt den Lehrsatz: Die Summe der Projectionen aller Seiten ist = 0.

Es verstehet sich, daß das + und — gehörig angewandt, und daß die Seiten in einer geregelten Ordnung genannt werden müssen, z. B. AB, BC... nicht AB, CB, und dem gemäß auch die Projectionen ab, bc... nicht ab, cb.

In Bezug auf Yy gelten natürlich ganz analoge Gleichungen. Z. B.

$$a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'a' = 0.$$

§. 483. Der kleinste positive Werth des $\angle$(Xx, AB), welchen AB am Schnittpunkte S mit Xx bildet (Fig. 45.) sey ein spitzer Winkel (Fig. 45. a). Man ziehe durch A die Gerade AP parallel Xx, so daß das rechtwinklige $\triangle$ APB entstehet; dann ist

$$\angle(AP, AB) = \angle(Xx, AB)$$

und

$$AP = AB \, . \cos(Xx, AB)$$
$$PB = AB \, . \sin(Xx, AB).$$

Es ist aber $AP = ab$, $PB = a'b'$, folglich

$$(1) \quad ab = AB \cdot \cos(Xx, AB)$$

$$(2) \quad a'b' = AB \cdot \sin(Xx, AB)$$

Diese Gleichungen sind aber ganz allgemein richtig, wie auch der $\angle(Xx, AB)$ beschaffen seyn möge. Dies ergiebt sich unter genauer Anwendung des $+$ und $-$ bei Betrachtung der Fig. 45. b, c, d. In Fig. 45. b z. B. ist (Xx, AB) ein stumpfer Winkel, daher sein Cosinus negativ, sein Sinus positiv; daher findet sich für ab ein negativer, für $a'b'$ ein positiver Werth, ganz mit der Figur harmonirend.

Man darf selbst in diesen Gleichungen statt (Xx, AB) jeden in dem Ausdrucke

$$\varphi + 4k \cdot \mathfrak{R}$$

enthaltenen Werth setzen, wobei φ den kleinsten positiven Werth bezeichnet, ohne daß dadurch die Gl. unrichtig würden.

Anm. Die Construction der trigonometrischen Linien am Kreise in Fig. 22. kann als eine Vereinigung und Vereinfachung der Constructionen der vier Figuren 45 angesehen werden. Dabei ist $\angle(Xx, AB)$ einerlei mit $\angle A = MAB$, die Punkte A, O, S fallen alle in das Centrum des Kreises und die Gleichungen

$$\cos(Xx, AB) = \frac{ab}{AB}, \qquad \sin(Xx, AB) = \frac{a'b'}{AB}$$

gehen über in

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad \sin A = \frac{AD}{AB}.$$

§. 484. Alle Seiten des Fünfecks ABCDE in Fig. 46. seyen verlängert, bis jede die Abscissenaxe Xx in einem Punkte schneidet, so daß nach der Reihe aus den Seiten

AB, BC, CD, DE, EA

die Punkte hervorgehen

S, T, U, V, W.

Der Winkel (Xx, AB) werde mit φ bezeichnet, so hat man

$$\begin{aligned}
\text{an T den } \angle(Xx, BC) &= (Xx, AB) + (AB, BC) \\
&= \varphi + B; \\
\text{an U den } \angle(Xx, CD) &= (Xx, BC) + (BC, CD) \\
&= \varphi + B + C; \\
\text{an V den } \angle(Xx, DE) &= (Xx, CD) + (CD, DE) \\
&= \varphi + B + C + D; \\
\text{an W den } \angle(Xx, EA) &= (Xx, DE) + (DE, EA) \\
&= \varphi + B + C + D + E.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
ab &= AB.\cos(Xx, AB) = a.\cos\varphi \\
bc &= BC.\cos(Xx, BC) = b.\cos(\varphi+B) \\
cd &= CD.\cos(Xx, CD) = c.\cos(\varphi+B+C) \\
de &= DE.\cos(Xx, DE) = d.\cos(\varphi+B+C+D) \\
ea &= EA.\cos(Xx, EA) = e.\cos(\varphi+B+C+D+E).
\end{aligned}$$

Man setze diese Werthe in die Gleichung

$$ab + bc + cd + de + ea = 0$$

so bekommt man

$$AB.\cos(Xx, AB) + BC.\cos(Xx, BC) + CD.\cos(Xx, CD) + DE.\cos(Xx, DE) + EA.\cos(Xx, EA) = 0,$$

oder (I) $\left.\begin{array}{l} a.\cos\varphi + b\cos(\varphi+B) + c.\cos(\varphi+B+C) \\ + d\cos(\varphi+B+C) + e.\cos(\varphi+B+C+D+E) \end{array}\right\} = 0.$

Für die Projectionen auf der Ordinatenaxe findet sich ganz ähnlich:

$$\begin{aligned}
a'b' &= AB.\sin(Xx, AB) = a.\sin\varphi \\
b'c' &= BC.\sin(Xx, BC) = b.\sin(\varphi+B) \\
c'd' &= CD.\sin(Xx, CD) = c.\sin(\varphi+B+C) \\
d'e' &= DE.\sin(Xx, DE) = d.\sin(\varphi+B+C+D) \\
e'a' &= EA.\sin(Xx, EA) = e.\sin(\varphi+B+C+D+E);
\end{aligned}$$

und indem man dies in die Gl.

$$a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'a' = 0$$

hineinsetzt, erscheint:

$$AB.\sin(Xx, AB) + BC.\sin(Xx, BC) + CD.\sin(Xx, CD) + DE.\sin(Xx, DE) + EA.\sin(Xx, EA) = 0,$$

oder (II) $\left.\begin{array}{l} a\sin\varphi + b\sin(\varphi + B) + c\sin(\varphi + B + C) \\ + d\sin(\varphi + B + C + D) + e\sin(\varphi + B + C + D + E) \end{array}\right\} = 0.$

§. 485. Die Gl. (I) u. (II) sind für jeden Werth von φ richtig, auch für $\varphi = 0$, wo AB mit Xx parallel ist. In diesem Falle gehen aber jene Gleichungen in folgende über:

(C) $a + b\cos B + c\cos(B+C) + d\cos(B+C+D) + e\cos(B+C+D+E) = 0$

(S) $b\sin B + c\sin(B+C) + d\sin(B+C+D) + e\sin(B+C+D+E) = 0.$

Die Gleichung (C) wollen wir eine Cosinusgleichung, die (S) eine Sinusgleichung nennen,

In den Schlüssen, woraus diese Gleichungen abgeleitet sind, kann man jede der Seiten a, b, c, d, e mit der zunächst folgenden, und jeden der Winkel A, B, C, D, E mit dem zunächst folgenden vertauschen, wobei a als auf e, und A als auf E folgend anzusehen ist. Dabei wird statt AB die Seite BC mit Xx parallel gedacht. Auf gleiche Weise kann man dann wiederum jeden Buchstaben mit dem zunächst folgenden vertauschen, und dabei CD mit Xx parallel denken; u. s. w. Auf diese Weise entstehen überhaupt fünf Cosinusgleichungen und fünf Sinusgleichungen, nämlich:

(C,a) $a + b\cos B + c\cos(B+C) + d\cos(B+C+D) + e\cos(B+C+D+E) = 0$

(C,b) $b + c\cos C + d\cos(C+D) + e\cos(C+D+E) + a\cos(C+D+E+A) = 0$

(C,c) $c + d\cos D + e\cos(D+E) + a\cos(D+E+A) + b\cos(D+E+A+B) = 0$

(C,d) $d + e\cos E + a\cos(E+A) + b\cos(E+A+B) + c\cos(E+A+B+C) = 0$

(C,e) $e + a\cos A + b\cos(A+B) + c\cos(A+B+C) + d\cos(A+B+C+D) = 0$

(S, a) $b\sin B + c\sin(B+C) + d\sin(B+C+D) + e\sin(B+C+D+E) = 0$

(S, b) $c\sin C + d\sin(C+D) + e\sin(C+D+E) + a\sin(C+D+E+A) = 0$

(S, c) $d\sin D + e\sin(D+E) + a\sin(D+E+A) + b\sin(D+E+A+B) = 0$

(S, d) $e\sin E + a\sin(E+A) + b\sin(E+A+B) + c\sin(E+A+B+C) = 0$

(S, e) $a\sin A + b\sin(A+B) + c\sin(A+B+C) + d\sin(A+B+C+D) = 0.$

Für ein Vieleck von n Seiten würden sich n Cosinusgleichungen und n Sinusgleichungen finden, deren Gesetz man leicht an diesen Gleichungen für das Fünfeck erkennen wird. Die Gleichungen sind übrigens, wenn man noch die Gleichung

$$A + B + C + D + E = 4k\mathfrak{R}$$

allgemein für das nEck:

$$A + B + C + \ldots . + M + N = 4k\mathfrak{R}$$

hinzufügt, die Grundlage der polygonometrischen Formeln, die nun weiter zu entwickeln sind.

Man bemerke, daß die Cosinusgleichungen Nebenformeln, die Sinusgleichungen aber Hauptformeln sind (vgl. §. 471).

Anm. Die Cosinusgl. sind das für das nEck, was die Gleichungen (1, a) (1, b) (1, c) (in §. 471) für das Dreieck sind, und die Sinusgleichungen das für das nEck, was für das Dreieck die Gleichungen (7, a) (7, b) (7, c) (in §. 474) sind. Man muß, um dies einzusehen, darauf achten, daß dort die Winkel A, B, C die gewöhnlichen inneren Winkel des Dreiecks, hier aber die W. A, B, C, D, E die äußeren Winkels des Vielecks sind.

Die Gl. (7) wurden übrigens oben aus den Gl. (1) ohne weitre Beihülfe der Construction abgeleitet; wie sich auch hier die Sinusgleichungen aus den Cosinusgleichungen ergeben, wird weiter unten gezeigt werden.

§. 486. In jeder der Gleichungen (C) wie (S) fehlt ein Winkel. Man kann aber jede so umändern, daß statt des darin fehlenden Winkels ein beliebiger andrer Winkel steht. Dabei ist zu Grunde zu legen, daß, wenn man die Summe $A + B + C + D + E$ in zwei Abtheilungen theilt, z. B.

in $(A + B)$ und $(C + D + E)$

in $(B + C + D)$ und $(E + A)$

immer, wegen $A + B + C + D + E = 4k\mathfrak{R}$, der Sinus der einen Abtheilung dem Sinus der andern Abtheilung entgegengesetzt, der Cosinus der einen Abtheilung aber dem der andern völlig gleich ist, so daß man z. B. hat

$\sin(A+B) = -\sin(C+D+E)$, $\cos(A+B) = \cos(C+D+E)$
$\sin(B+C+D) = -\sin(E+A)$, $\cos(B+C+D) = \cos(E+A)$.

Soll nun z. B. in (C, a) und (S, a) statt des Winkels A der W. D fehlen, so hat man nur zu ersetzen

$$\begin{array}{lcl} \cos(B+C+D) & \text{durch} & \cos(E+A) \\ \sin(B+C+D) & \text{durch} & -\sin(E+A) \\ \cos(B+C+D+E) & \text{durch} & \cos A \\ \sin(B+C+D+E) & \text{durch} & -\sin A, \end{array}$$

und bekommt

$$0 = a + b\cos B + c\cos(B+C) + d\cos(E+A) + e\cos A$$
$$0 = b\sin B + c\sin(B+C) - d\sin(E+A) - e\sin A.$$

§. 487. Aus den fünf Cosinusgleichungen kann man Gleichungen ableiten, welche alle 5 Seiten, aber nur drei Winkel enthalten, und daher Hauptformeln darstellen werden. Zu diesem Ende ist zuerst jede Cosinusgl. mit dem in ihrer Bezeichnung enthaltenen eine Seite ausdrückenden Buchstaben zu multipliciren, nämlich (C,a) mit a, (C,b) mit b u. s. w. Dadurch entstehen, wenn man obendrein jedesmal nach vorigem §. den Winkel A fehlen läßt, die 5 Gleichungen:

(a) $0 = a^2 + ab\cos B + ac\cos(B+C) + ad\cos(B+C+D) + ae\cos(B+C+D+E)$

(b) $0 = b^2 + bc\cos C + bd\cos(C+D) + be\cos(C+D+E) + ab\cos B$

(c) $0 = c^2 + cd\cos D + ce\cos(D+E) + ac\cos(B+C) + bc\cos C$

(d) $0 = d^2 + de\cos E + ad\cos(B+C+D) + bd\cos(C+D) + cd\cos D$

(e) $0 = e^2 + ae\cos(B+C+D+E) + be\cos(C+D+E) + ce\cos(D+E) + de\cos E.$

Man bemerke, daß in diesen Gleichungen jedes Product aus zwei Seiten und dem Cosinus eines Winkels zweimal vorkommt. So ist z. B. $ce\cos(D+E)$ sowohl in (e) als (c) enthalten. Ferner ist auf die Abhängigkeit des in jedem Producte enthaltenen Winkels von den darin enthaltenen Seiten zu achten. In dem eben genannten Producte ist

$$D+E = \angle(CD,DE) + (DE,EA) = (CD,EA)$$

oder auch,

$$D+E = \angle(c,e),$$

d. h. $D+E$ ist der Winkel, den die Richtungen der Seiten c u. e in ihrem Schnittpunkte mit einander bilden, und eben diese Seiten sind in dem Producte als Factoren enthalten. Man wird Gleiches bei allen übrigen Producten bemerken, und daher auch schreiben können:

$$(a)' \; 0 = a^2 + ab\cos(a,b) + ac\cos(a,c) + ad\cos(a,d) + ae\cos(a,e)$$
$$(b)' \; 0 = b^2 + bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + be\cos(b,e) + ba\cos(b,a)$$
$$(c)' \; 0 = c^2 + cd\cos(c,d) + ce\cos(c,e) + ca\cos(c,a) + cb\cos(c,b)$$
$$(d)' \; 0 = d^2 + de\cos(d,e) + da\cos(d,a) + db\cos(d,b) + dc\cos(d,c)$$
$$(e)' \; 0 = e^2 + ea\cos(e,a) + eb\cos(e,b) + ec\cos(e,c) + ed\cos(e,d).$$

Diese 5 Gleichungen sind von den obigen nur in der äußeren Form verschieden. Die letzten Glieder in (b) u. (b)' z. B., nämlich $ab\cos B$ und $ba\cos(b,a)$ sind völlig gleich, ungeachtet $\angle(b,a)$ oder (BC,AB) nicht $= B$ d. h. $= (AB,BC)$ sondern $= -B$ ist; indem entgegengesetzte Winkel gleiche Cosinus haben. Ferner sind die vorletzten Glieder in (c) u. (c)' ebenfalls gleich, ungeachtet $\angle(c,a) = \angle(CD,AB)$ nicht $= B+C$ d. h. $= (AB,BC) + (BC,CD)$ oder $= (AB,CD)$ sondern das Gegentheil davon ist, u. s. w.

Soll nun 1) aus diesen Gleichungen eine neue abgeleitet werden, in welcher außer A noch ein benachbarter Winkel, es sey B, fehlt, so ist nur nöthig, die Gleichungen (b) (c) (d) (e) zu addiren und dann von der Summe (a) abzuziehen. So bekommt man

$$0=\begin{cases} \quad b^2+c^2+d^2+e^2-a^2 \\ +2bc\cos C+2bd\cos(C+D)+2bc\cos(C+D+E) \\ +2cd\cos D+2ce\cos(D+E) \\ +2de\cos E. \end{cases}$$

Diese Gleichung mag eine Quadratgleichung genannt, und mit (Q, ab) bezeichnet werden, indem die beiden Winkel A und B in ihr fehlen. Man kann sie auch in folgender Form schreiben:

$$(Q,ab)'\quad a^2 = \begin{aligned}[t] & b^2+c^2+d^2+e^2 \\ & +2bc\cos(b,c)+2bd\cos(b,d)+2be\cos(b,e) \\ & +2cd\cos(c,d)+2ce\cos(c,e) \\ & +2de\cos(d,e). \end{aligned}$$

Soll nun 2) aus den obigen Gl. eine neue abgeleitet werden, in der außer A ein nicht benachbarter Winkel, etwa C, fehlen soll, so muß man von der Summe der Gleichungen (c) (d) (e) die Summe der Gl. (a) u. (b) subtrahiren. Man bekommt:

$$0 = \begin{aligned}[t] & c^2+d^2+e^2-a^2-b^2 \\ & +2cd\cos D+2ce\cos(D+E) \\ & +2de\cos E-2ab\cos B. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist ebenfalls eine Quadratgleichung zu nennen, und mit (Q, ac) zu bezeichnen. Man kann dieselbe auch in folgender Gestalt schreiben

$$(Q,ac)'\quad \left.\begin{aligned} & a^2+b^2 \\ & +2ab\cos(a,b) \end{aligned}\right\} = \begin{cases} \quad c^2+d^2+e^2 \\ +2cd\cos(c,d)+2ce\cos(c,e) \\ +2de\cos(d,e). \end{cases}$$

In dieser Gestalt ist das allgemeine Gesetz der Quadratgleichungen leicht zu erkennen,

§. 488. Es kann jetzt gezeigt werden, wie sich die Sinusgleichungen aus den Cosinusgleichungen durch Rechnung herleiten lassen.

Man versetze in (C,a) das Glied a auf die andre Seite der Gleichung, und quadrire, so erscheint, wenn man zur Abkürzung die Winkel $B+C+D$ und $B+C+D+E$ durch $B..D$ und $B..E$ bezeichnet:

$$a^2 = b^2\cos B^2 + c^2\cos(B+C)^2 + d^2\cos(B..D)^2 + e^2\cos(B..E)^2$$
$$+2bc\cos B.\cos(B+C) + 2bd\cos B.\cos(B..D)$$
$$+2be\cos B.\cos(B..E) + 2cd.\cos(B+C)\cos(B..D)$$
$$+2ce\cos(B+C).\cos(B..E) + 2de\cos(B..D)\cos(B..E).$$

Diese Gl. ziehe man von $(Q,ab)'$ ab, und nehme dabei, auf die Formeln

$$\sin a^2 + \cos a^2 = 1$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

gestützt, Verwandlungen wie folgende vor:

a) $b^2 - b^2\cos B^2 = b^2.(1-\cos B^2) = b^2\sin B^2$

b) $2bc\cos C - 2bc\cos B.\cos(B+C)$

$$= 2bc.[\cos C - \cos B.\cos(B+C)]$$
$$= 2bc.[\cos(B+C-B) - \cos B.\cos(B+C)]$$
$$= 2bc.[\cos(B+C).\cos B + \sin(B+C).\sin B]$$
$$- \cos B.\cos(B+C)]$$
$$= 2bc \sin B . \sin(B+C),$$

so findet man als Resultat:

$$0 = b^2\sin B^2 + c^2\sin(B+C)^2 + d^2\sin(B..D)^2 + e^2\sin(B..E)^2$$
$$+2bc\sin B.\sin(B+C) + 2bd.\sin B\sin(B...D)$$
$$+2bc\sin B\text{-}\sin(B..E) + 2cd\sin(B+C)\,\mathrm{six}(B...D)$$
$$+2ce\sin(B+C).\sin(B..E) + 2de\sin(B..D)\sin(B..E).$$

Indem man aus dieser Gleichung links und rechts die Quadratwurzel ausziehet, erscheint die Gleichung (S, a).

§. 489. Nunmehr ist darzulegen, wie vermittelst der bisher aufgestellten pentagonometrischen Gleichungen aus 7 Größen, Seiten oder Winkeln, des Fünfecks, die dasselbe bestimmen, die übrigen berechnet werden können. Die dabei zu un=

terscheidenden Bestimmungsarten und daher entspringenden Aufgaben zerfallen in drei Klassen.

1. Alle Winkel eines Fünfecks, — oder eigentlich nur vier — sind gegeber, nebst drei Seiten; man soll die fehlenden Seiten berechnen. (Analog der 1sten Bestimmungsart des Dreiecks.)

2. Drei Winkel und vier Seiten sind gegeben; man soll die fehlenden Winkel und die fehlende Seite berechnen. (Analog der 2ten und 4ten Bestimmungsart des Dreiecks).

3. Alle fünf Seiten und zwei Winkel des Fünfecks sind gegeben; man soll die fehlenden Winkel berechnen. (Analog der 3ten Bestimmungsart des Dreiecks).

§. 490. Es seyen alle Winkel gegeben, (wobei $A+B+C+D+E = 4k\mathfrak{R}$) nebst drei Seiten; man soll die zwei fehlenden Seiten berechnen.

Die Auflösung einer solchen Aufgabe kann immer sehr leicht aus den Sinusgleichungen genommen werden. Man muß die zwei Sinusgl. aufsuchen, in welchen die drei gegebenen Seiten vorkommen; dann findet man aus jeder derselben eine der unbekannten Seiten.

Erstes Beispiel. Sind die auf einander folgenden Seiten a, b, c gegeben, so findet man, daß sie alle drei in (S, d) und (S, e) vorkommen. Aus (S, e) bestimmt sich d, und aus (S, d) findet man e, nämlich

$$d = -\frac{a \sin A + b \sin(A+B) + c \sin(A+B+C)}{\sin(A+B+C+D)}$$

$$e = -\frac{a \sin(E+A) + b \sin(E+A+B) + c \sin(E+A+B+C)}{\sin E}.$$

Man kann aber auch, wenn schon die eine der beiden Seiten durch die Formel berechnet ist, wodurch sie hier bestimmt ist, die andre Seite durch diejenige Cosinusgleichung

berechnen, welche von dieser Seite selbst benannt ist. Hat man z. B. schon d berechnet, so bekommt man aus (C, e)
$e = -[a\cos A + b\cos(A+B) + c\cos(A..C) + d\cos(A..D)]$.

Zweites Beispiel. Werden die Seiten c und e gesucht, so hat man aus (S, e)

$$c = -\frac{a\sin A + b\sin(A+B) - d\sin E}{\sin(A+B+C)}.$$

Dann aus (S, c)

$$e = -\frac{d\sin D + a\sin(D+E+A) - b\sin C}{\sin(D+E)},$$

Oder dafür aus (C, e)
$e = -[a\cos A + b\cos(A+B) + c\cos(D+E) + d\cos E]$.

§. 491. Es sind drei Winkel und vier Seiten gegeben; man soll die fehlende Seite und die fehlenden Winkel berechnen.

Die gegebenen Seiten mögen immer seyn b, c, d, e. Die Auflösungen sind dann hauptsächlich aus (S, a) herzunehmen. Diese Gl. kann aber dabei in folgenden Gestalten zur Anwendung kommen:

(𝔄) $0 = b\sin B + c\sin(B+C) + d\sin(B+C+D) + e\sin(B+C+D+E)$

(𝔅) $0 = b\sin(A+C+D+E) + c\sin(A+D+E) + d\sin(A+E) + e\sin A$

(ℭ) $0 = b\sin B - c\sin(A+D+E) - d\sin(A+E) - e\sin A$

(𝔇) $0 = b\sin B + c\sin(B+C) - d\sin(A+E) - e\sin A$

(𝔈) $0 = b\sin B + c\sin(B+C) + d\sin(B+C+D) - e\sin A$.

Nun sind aber drei Fälle zu unterscheiden, nach der Lage der gegebenen Winkel gegen die vier Seiten und auch gegen einander.

Erster Fall. Die gegebenen Winkel sind von den gegebenen Seiten eingeschlossen, also die Winkel C, D und E.

Hier kann B aus (A) oder A auf eine gleiche Weise aus (B) gesucht werden. Es ist aber, wegen $A+B+C+D+E = 4k.R$, nur nöthig, den einen dieser Winkel zu bestimmen. Für B findet sich aus (A) durch Anwendung von [1] (§. 445.):

$$0 = \begin{cases} b\sin B + c\sin B.\cos C + c\cos B.\sin C \\ + d\sin B.\cos(C+D) + d\cos B.\sin(C+D) \\ + e\sin B.\cos(C+D+E) + e\cos B.\sin(C+D+E) \end{cases}$$

daher, indem man mit $\cos B$ dividirt, dann durch Versetzungen weiter umwandelt:

$$\operatorname{tg} B = -\frac{c\sin C + d\sin(C+D) + e\sin(C+D+E)}{b + c\cos C + d\cos(C+D) + e\cos(C+D+E)}.$$

Man würde diese Formel auch durch Elimination der Seite a aus (C, b) und (S, b) erhalten, zu welchem Ende man nur in (C, b) das Glied $a.\cos(C+D+E+A)$ oder $a.\cos B$, in (S, b) aber $a\sin(C+D+E+A)$ oder $-a\sin B$ auf die andre Seite der Gl. versetzen, und dann die letzte Gl. durch die erste dividiren müßte.

Wollte man nun noch die fehlende Seite a aus den gegebenen Größen b, c, d, e, C, D, E unmittelbar berechnen, so würde man die Gl. (Q, ab) anzuwenden haben. Diese ist aber für die logarithmische Rechnung nicht bequem, es wäre also besser, erst nach obiger Gl. B und daher auch A zu bestimmen, dann aber a aus irgend einer Sinus- oder Cosinusgleichung, ausgenommen (S, a), welche dazu unbrauchbar ist, da sie a nicht enthält. Am besten dient dazu die Gleichung (S, b) oder (C, b).

Zweiter Fall. Es sind drei Winkel gegeben, die zwar auf einander folgen, aber nicht durchgängig von gegebenen Seiten eingeschlossen sind.

Hier ist, um zuerst die unbekannten Winkel zu bestimmen, wieder (S, a) zu Grunde zu legen. Sind die gegebenen Winkel z. B. A, B, C, so findet man entweder D aus (S, a) in der Umformung (𝔈), oder E aus der Umformung (𝔇). Für D z. B. entstehet aus (𝔈)

$$\sin(B+C+D) = \frac{e \sin A - b \sin B - c \sin(B+C)}{d}.$$

Hat man hieraus B+C+D gefunden, so ist der Winkel D durch Subtraction der bekannten Summe B+C zu bestimmen.

Die Seite a, welche sich aus (Q, ab) unmittelbar, aber nur unbequem berechnen lassen würde, kann man hierauf am besten aus (C, a) bestimmen, wonach

$$a = -[b \cos B + c \cos(B+C) + d \cos(E+A) + e \cos A].$$

Dritter Fall. Es sind drei nicht auf einander folgende Winkel gegeben.

Hier läßt sich, wenn man zunächst einen der unbekannten Winkel berechnen will, die Auflösung nur aus (S, a), oder einer der Umformungen dieser Gl., durch Einführung eines Hülfswinkels nach der Methode von §. 463. erhalten.

Außer b, c, d, e seyen z. B. die Winkel A, B, D gegeben, so kann entweder C aus (𝔈) oder E aus (ℭ) bestimmt werden. Es geschehe das Letztre. Man verwandelt (ℭ) durch Auflösung von sin(A+D+E) und von sin(A+E) nach [1] (§. 445) in

$$\left.\begin{array}{l} c \sin(A+D) \,.\, \cos E + c \cos(A+D) \sin E \\ + d \sin A \,.\, \cos E + d \cos A \,.\, \sin E \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} b \sin B \\ - e \sin A. \end{array}\right.$$

Nun stelle man, zur Bestimmung der Hülfszahl m und des Hülfswinkels φ die Gleichungen auf

$$c \sin(A+D) + d \sin A = m \sin \varphi$$
$$c \cos(A+D) + d \cos A = m \cos \varphi$$

so gehet obige Gl. über in

$$m \sin\varphi \,.\, \cos E + m \cos\varphi \,.\, \sin E = b \sin B - e \sin A$$

oder $$m \,.\, \sin(\varphi + E) = b \sin B - e \sin A,$$

wobei (1) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c \sin(A+D) + d \sin A}{c \cos(A+D) + d \cos A}$$

und $$m = \frac{c \sin(A+D) + d \sin A}{\sin\varphi}$$

also (2) $$\sin(\varphi + E) = \frac{(b \sin B - e \sin A) \,.\, \sin\varphi}{c \sin(A+D) + d \sin A}.$$

Die Regel zur Berechnung ist in (1) u. (2) enthalten.

Durch Bestimmung von E ist auch schon C gefunden. Um noch a zu berechnen, könnte wieder unmittelbar eine Quadratgleichung dienen, nämlich (Q, ce); bequemer ist es aber, nachdem die Winkel C und E gefunden, die Gl. (C, a) dazu anzuwenden.

§. 492. Alle Seiten nebst zwei Winkeln des Fünfecks sind gegeben; man soll die übrigen Winkel berechnen.

Erster Fall. Die gegebenen Winkel seyen zwei benachbarte, z. B. A und B.

Hier berechnet man am besten zuerst den Winkel D, den mittleren der unbekannten C, D, B, und zwar aus

(Q, ce) $$c^2 + d^2 + 2cd \cos D = e^2 + a^2 + b^2 + 2ea \cos A + 2eb \cos(A+B) + 2ab \cos B.$$

Nachdem hieraus D gefunden, bestimmen sich die Winkel C und E nach §. 491. 3ter Fall.

Zweiter Fall. Die gegebenen Winkel seyen zwei nicht benachbarte, z. B. A und C.

Hier würde es weniger einfach seyn, den zwischenliegenden Winkel B, als einen der andern, D oder E, zu suchen. Es möge hier D bestimmt werden (für E würden ähnliche Formeln erscheinen); dazu dient die Gleichung (Q, be), nämlich

$$e^2 + a^2 + 2ea\cos A = b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\cos C$$
$$+ 2bd\cos(C+D) + 2cd\cos D.$$

Durch Auflösung von $\cos(C+D)$ erscheint

$$2(bd\cos C + cd).\cos D - 2bd\sin C.\sin D = P,$$

wenn hier

$$P = e^2 + a^2 + 2ea\cos A - b^2 - c^2 - d^2 - 2bc\cos C.$$

Man setze $2(bd\cos C + cd) = m\sin\varphi$
$2bd\sin C = m\cos\varphi$

so entstehet (1) $\operatorname{tg}\varphi = \cot C + \frac{c}{b\sin C}$

$$m = \frac{2bd\sin C}{\cos\varphi}, \text{ und } m\sin(\varphi - D) = P$$

folglich (2) $\sin(\varphi - D) = \frac{P}{2bd\sin C}.\cos\varphi.$

Die Regel der Berechnung liegt in (1) und (2), und in der Gl., wodurch P bestimmt wird. Die Berechnung eines der übrigen Winkel B und E kommt sodann auf §. 491. 3ter Fall zurück.

§. 493. Um aus 2n—3 gegebenen Größen eines Vielecks, die aber nichts anders als Seiten und Winkel sind, den Inhalt zu berechnen, dient folgender

Lehrsatz. Wenn bei einem nEcke alle Seiten und Winkel gegeben sind, ausgenommen eine Seite nebst den beiden daran liegenden Winkeln (wie §. 491 erster Fall), so findet man den Inhalt, indem man

1) jedes Paar der gegebenen Seiten, — es seyen zwei benachbarte, oder nicht — unter sich und auch mit dem Sinus des Winkels, den sie an ihrem Schnittpunkte bilden, multiplicirt, und zwar so, daß, wenn man z. B. ab mit sin(a,b) oder sinB multiplicirt hat, dann ac mit sin (a, c) oder sin(B+C) (nicht mit sin(c,a), was = sin (D+E+... A) oder =

$-\sin(B+C))$, dann ad mit $\sin(a,d)$ oder $\sin(B+C+D)$, ferner bd mit $\sin(b,d)$ oder $\sin(C+D)$ multiplicirt werden muß, u. s. w.

2) dann diese verschiedenen Producte addirt,

3) die entstandne Summe mit 2 dividirt.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird hinreichend erhellen, wenn wir nach der Reihe die Formeln für das Dreieck, Viereck und Fünfeck darlegen, welche diesem Lehrsatze untergeordnet sind.

I. Beim Dreiecke ist nach §. 431. der Inhalt $F = \frac{1}{2} bc \sin A$, wenn AB durch c, AC durch b bezeichnet wird, und A den innern Winkel an A bedeutet. Jetzt ist aber AB durch a, AC durch c zu bezeichnen, daher entstehet

$$F = \tfrac{1}{2} ac \sin A = \tfrac{1}{2} ca \sin(c,a),$$

wo man nun unter A auch den Außenwinkel an A verstehen kann, dessen Sinus dem Sinus des innern Winkels gleich ist. Ganz auf gleiche Weise hat man auch

$$2 . F_3 = ab \sin B = ab \sin(a,b),$$

wobei durch F_3 angedeutet werden soll, daß vom Inhalte eines Dreiecks die Rede ist.

II. Beim Vierecke ABCD (Fig. 47) werde die Diagonale AC gezogen, und mit p bezeichnet. Der Inhalt von $\triangle$ABC heiße F_3, der von $\triangle$ACD aber f, endlich sey F_4 der des Vierecks. Dann ist

$$\text{(A)} \qquad 2F_4 = 2F_3 + 2f.$$

Hier ist aber, nach I.

$$\text{(B)} \quad 2F_3 = ab \sin(a,b) = ab \sin B$$

und

$$\text{(C)} \quad 2f = CD.CA.\sin(CD,CA)$$
$$= cp . \sin(c,p).$$

Nun hat man, wenn man den auf Vielecke von jeder Seitenzahl anwendbaren Satz, der im §. 484. in Bezug auf das Fünfeck in der Gl.

$$AB.\sin(Xx,AB) + BC.\sin(Xx,BC) + CD.\sin(Xx,CD)$$
$$+ DE.\sin(Xx,DE) + EA.\sin(Xx,EA) = 0$$

ausgedrückt ist, auf das Dreieck CAB anwendet, und dabei CD als die Abscissenaxe Xx betrachtet, die Gl.

$$p \sin(c,p) + a \sin(c,a) + b \sin(c,b) = 0.$$

Hier ist aber

$$\sin(c,a) = -\sin(a,c)$$
$$\sin(c,b) = -\sin(b,c),$$

daher auch $p \sin(c,p) = a \sin(a,c) + b \sin(b,c)$.

Setzt man dieses in (C), so hat man

ADE − BCE

$$2f = ac \sin(a,c) + bc \sin(b,c)$$

und indem man diesen Werth von $2f$ sammt dem von $2F_3$ aus (B) in die Gl. (A) substituirt, ist endlich

$$2F_4 = ab \sin(a,b) + ac \sin(a,c) + bc \sin(b,c)$$

oder $$2F_4 = ab \sin B + ac \sin(B+C) + bc \sin C.$$

= BCD − DCE + A

= ACD

III. Beim Fünfecke ABCDE (Fig. 48) werde die Diagonale AD mit q bezeichnet. Der Inhalt des Fünfecks sey $= F_5$, der des 4Ecks ABCD $= F_4$, der des Dreiecks ADE $= f$; dann hat man

(A) $2F_5 = 2F_4 + 2f$

(B) $2F_4 = ab \sin(a,b) + ac \sin(a,c) + bc \sin(b,c)$

(C) $2f = DE.DA.\sin(DE, DA) = dq \sin(d,q)$.

Jetzt wende man den schon in II erwähnten Satz aus §. 484 auf ABCD an, indem man DE als Absciſſenaxe ansiehet, so hat man

$$q \sin(d,q) = a \sin(a,d) + b \sin(b,d) + c \sin(c,d)$$

daher $$2f = ad \sin(a,d) + bd \sin(b,d) + cd \sin(c,d)$$

also $$2F_5 = ab \sin(a,b) + ac \sin(a,c) + ad \sin(a,d) + bc \sin(b,c) + bd \sin(b,d) + cd \sin(c,d)$$

oder $$2F_5 = ab \sin B + ac \sin(B+C) + ad \sin(B+C+D) + bc \sin C + bd \sin(C+D) + cd \sin D.$$

§. 494. Die in den §§. 439, 440 u. 441 behandelten Aufgaben über das Viereck und Sechseck lassen sich auch, anders als dort, nach den eben beendigten Lehren der Polygonometrie auflösen. Hierüber mag noch Einiges bemerkt werden.

Aufgabe von §. 439.

Diese Aufgabe für das Viereck entspricht der in §. 491. erster Fall behandelten für das Fünfeck. Man findet, unter A', B', C' D' die Außenwinkel, oder die Supplemente von A, B, C, D verstanden, die Sinusgleichung

(S,d) $0 = d \sin D' + a \sin(D' + A') + b \sin(D' + A' + B')$

woher (I) $$\operatorname{tg} D' = -\frac{a \sin A' + b \sin(A' + B')}{d + a \cos A' + b \cos(A' + B')}.$$

Dann findet man die gesuchte Seite aus der Quadratgleichung

(2) $c^2 = CD^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab\cos B' + 2ad\cos A'$
$+ 2bd\cos(A' + B')$,

oder, nachdem die W. D' und C' durch (1) bestimmt sind, bequemer durch die Cosinusgleichung

(3) $c = -[d\cos D' + a\cos(D' + A') + b\cos(D' + A' + B')]$

Endlich ist der Inhalt, nach §. 493,

(4) $F = \frac{1}{2}.[ab\sin B' + ad\sin A' + bd\sin(A' + B')]$.

Anm. Zu den Formeln (2) und (4) hätte übrigens auch schon die in §. 439. angegebene dritte Methode geführt, wenn man dort schon die erst in §. 445. abgeleiteten Formeln gekannt, und folgende allgemeine Schlüsse angestellt hätte: Es ist (Fig. 32.)

$$DR = QP = a - b\cos B - d\cos A$$
$$CR = b\sin B - d\sin A.$$

Setzt man dieses in die Gl. $c^2 = DR^2 + CR^2$, so bekommt man unter Anwendung von

$$\cos a^2 + \sin a^2 = 1$$

und
$$\cos a.\cos b - \sin a.\sin b = \cos(a + b)$$

zuletzt
$$c^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2ab\cos B - 2ad\cos A + 2bd\cos(A + B).$$

Diese Gl. fällt aber mit (2) ganz zusammen, indem

$$\cos A = \cos(2\mathfrak{R} - A') = -\cos A'$$
$$\cos B = \cos(2\mathfrak{R} - B') = -\cos B'$$
$$\cos(A + B) = \cos(4\mathfrak{R} - A' - B') = \cos(A' + B').$$

Ferner ist, was den Inhalt betrifft,

$$2F = 2.(\triangle ADQ + \triangle BCP + \text{Trap. } PCDQ)$$

Nun ist
$$2.\triangle ADQ = AQ.DQ$$
$$2.\triangle BCP = PB.CP$$

und
$$2\,\text{Tr. } PCDQ = QP.(CP + DQ)$$
$$= (a - AQ - PB).(CP + DQ)$$
$$= a.(CP + DQ) - AQ.CP - AQ.DQ - PB.CP - PB.DQ.$$

Setzt man diese Werthe in obige Gl. für F, so kommt

$$2F = a.(CP + DQ) - AQ.CP - PB.DQ$$
$$= a.(b\sin B + d\sin A) - bd\sin B.\cos A - bd\cos B.\sin A$$
$$= ab.\sin B + ad\sin A - bd\sin(A + B).$$

Es ist aber $\sin A = \sin(2\mathfrak{R} - A') = \sin A'$
$$\sin B = \sin(2\mathfrak{R} - B') = \sin B'$$
$$\sin(A + B) = \sin(4\mathfrak{R} - A' - B') = -\sin(A' + B').$$
Durch Substitution dieser Werthe erscheint nun die Gl. (4).

Aufgabe von §. 440.

Hier kann (entsprechend §. 492. 2ter Fall) bequem zunächst der W. E (nämlich der äußere) bestimmt werden, mittelst der Quadratgleichung
$$d^2 + e^2 + f^2 + 2de\cos E + 2df\cos(E+F) + 2ef\cos F$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos B + 2ac\cos(B+C) + 2bc\cos C.$$
Es muß dabei $\cos(E+F)$ aufgelöset und ein Hülfswinkel eingeführt werden.

Dann findet man den W. A durch die Sinusgleichung
$$0 = b\sin B + c\sin(B+C) - d\sin(E+F+A) - e\sin(F+A) - f\sin F,$$
wobei ebenfalls ein Hülfswinkel nöthig ist.

Aufgabe von §. 441.

Man bekommt hier die unbekannten Seiten b und d durch die Sinusgleichungen
$$(S,d) \quad 0 = a\sin A + b\sin(A+B) + c\sin(A+B+C)$$
$$(S,b) \quad 0 = c\sin C + d\sin(C+D) + a\sin(C+D+A).$$

V. Vermischtes.

Bestimmung der Werthe der Functionen gewisser Winkel, die dem rechten Winkel commensurabel sind.

§. 495. Die Formeln aus §. 403. für die Functionen der Winkel $\frac{1}{2}\mathfrak{R}$ und $\frac{1}{3}\mathfrak{R}$ enthalten die Quadratwurzeln aus 2 und 3, fordern aber keine höheren Rechnungen als eben Quadratwurzel-Ausziehungen. Es giebt aber noch andre, dem rechten Winkel commensurable Winkel, deren Functionen sich ebenfalls durch Formeln ausdrücken lassen, die keine höheren Rechnungen, als Quadratwurzel-Ausziehungen in sich schließen. Hieher gehören unter andern die Winkel von der Form $\frac{m}{5}\Re$, also $18° = \frac{1}{5}\Re$, $36° = \frac{2}{5}\Re$ u. s. w.

In §. 360 ist, gestützt auf §. 287, gefunden, daß, wenn MA der Radius eines Kreises, die Chorde AB des Centriwinkels AMB von 36° (Fig. 49.) $= \frac{1}{2}.(-1+\sqrt{5}).MA$ ist. Es werde nun $\angle AMB$ durch MC halbirt, so hat man

$$\angle AMC = 18° = \frac{1}{5}\Re, \qquad \sin AMC = \frac{AC}{MA}.$$

Hier ist nun $\quad AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}.(-1+\sqrt{5}).MA.$

Man bekommt also

$$\sin 18° = \cos 72° = \frac{1}{4}.(-1+\sqrt{5}) = 0,30907\ldots$$

Wendet man nun die Formeln von §. 402 an, so gelangt man, mit Hülfe verschiedener arithmetischer Umwandlungen, zu folgenden Formeln für die übrigen Functionen des Winkels 18°:

$$\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}.\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\operatorname{tg} 18° = \cot 72° = \frac{1}{5}.\sqrt{5}.\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$
$$\cot 18° = \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$
$$\sec 18° = \operatorname{cosec} 72° = \frac{1}{5}.\sqrt{5}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\operatorname{cosec} 18° = \sec 72° = 1 + \sqrt{5}.$$

§. 496. Kennt man den Cosinus eines Winkels a, so kann man vermittelst [13]′ auch die Cosinus der Winkel $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{8}a$ u. s. w., allgemein der Winkel von der Form $\frac{1}{2^n}.a$ berechnen, ohne daß dazu eine höhere Rechnung, als Quadratwurzel-Ausziehung, erforderlich wäre. Es ist nämlich

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos a},$$

dann

$$\cos\tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\tfrac{1}{2}a},$$
$$\cos\tfrac{1}{8}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\tfrac{1}{4}a}, \quad \text{u. s. w.}$$

Durch Substitutionen findet man hieraus

$$\cos\tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2+2.\cos a})}$$

$$\cos\tfrac{1}{8}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2+2\cos a})})} \text{ u. s. w.}$$

Da auch die Formeln des §. 402, durch welche aus einer gegebenen Function eines Winkels jede andre Function desselben Winkels berechnet werden kann, keine höheren Rechnungen, als Ausziehung von Quadratwurzeln fordern, so erhellt, daß überhaupt, wenn der Werth irgend einer Function von a gegeben ist, sich die Werthe aller Functionen der Winkel

$$a,\ \tfrac{1}{2}a,\ \tfrac{1}{4}a\ldots.,\ \text{allgemein}\ \frac{1}{2^n}a$$

berechnen lassen, ohne daß höhere Rechnungen, als Ausziehung der Quadratwurzel, anzuwenden wären.

Was noch insbesondre die Sinus betrifft, so hat man nach [14]′

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\cos a}$$

$$\sin\tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\tfrac{1}{2}a}$$

$$\sin\tfrac{1}{8}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\tfrac{1}{4}a} \text{ u. s. w.}$$

und daher

$$\sin\tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2+2\cos a})}$$

$$\sin\tfrac{1}{8}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2+2\cos a})})} \text{ u. s. w.}$$

§. 497. I. Zur Bestimmung der Functionen der Winkel von der Form $\frac{1}{2^n}\Re$ setze man $a = \Re = 90°$, wo $\cos a = 0$, so hat man, mittelst der Formeln von §. 496:

$$\cos 45 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \sin 45 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 22\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \sin 22\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 11\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})} \qquad \sin 11\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}$$

u. s. w. u. s. w.

Was die übrigen Functionen betrifft, so mag nur noch angegeben werden, daß

$$\cot 22\tfrac{1}{2} = \sqrt{2}+1 \qquad \mathrm{tg}\, 22\tfrac{1}{2} = \sqrt{2}-1$$

wie sich aus den Formeln [18]′ und [16]′ und den schon in §. 403 angegebenen Werthen von cosec 45 und cot 45 ergiebt.

II. Um die Functionen der Winkel von der Form $\frac{1}{3\cdot 2^n}\mathfrak{R}$ zu bestimmen, setze man in den Gleichungen von §. 496 für a den Werth $\frac{2}{3}\mathfrak{R} = 60°$, also $\cos a = \frac{1}{2}$, so erscheint:

$$\cos 30 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-1} = \tfrac{1}{2}$$

$$\cos 15 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad \sin 15 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\cos 7\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})} \qquad \sin 7\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}$$

u. s. w. u. s. w.

Die Werthe von cos 15 und sin 15 können auch so ausgedrückt werden

$$\cos 15 = \tfrac{1}{4}.(\sqrt{6}+\sqrt{2}), \quad \sin 15 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Mittelst [18]′ [16]′ und §. 403 erhält man

$$\cot 15 = 2+\sqrt{3}, \qquad \mathrm{tg}\, 15 = 2-\sqrt{3}.$$

III. Aus den Functionen von $\frac{1}{5}\mathfrak{R}$ in §. 495 kann man auf ähnliche Weise die Functionen aller Winkel von der Form $\frac{1}{5\,.\,2^n}\mathfrak{R}$ berechnen. Wir wollen jedoch dieses unterlassen, und nur statt dessen die Functionen von 36° angeben, die sich hier ebenfalls, und zwar auf verschiedene Weise entwickeln lassen. Es ist

$$\cos 36 = \tfrac{1}{4}.(1+\sqrt{5})$$
$$\sin 36 = \tfrac{1}{4}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\cot 36 = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}.\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$
$$\mathrm{tg}\, 36 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$
$$\mathrm{cosec}\, 36 = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\,.\,.\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\sec 36 = -1+\sqrt{5}.$$

Den Cosinus findet man z. B. entweder so:

1) $\cos 36 = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 72} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sin 18}.$

Setzt man hier statt $\sin 18$ seinen Werth aus §. 495, so kommt, nach Vereinfachungen

$$\cos 36 = \tfrac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

was einerlei mit $\cos 36 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5})$

oder 2) mittelst [8]

$$\cos 36 = \cos 18^2 - \sin 18^2.$$

Hier statt $\cos 18$ und $\sin 18$ die Werthe aus §. 495 gesetzt, ist

$$\cos 36 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{4+4\sqrt{5}}{16} = \tfrac{1}{4} \cdot (1+\sqrt{5}).$$

§. 498. Indem man nun noch hauptsächlich die Formeln [1] bis [4] anwendet, lassen sich noch die Functionen vieler andrer Winkel berechnen.*) Z. B. die von $\frac{1}{3.5}\mathfrak{R}$ oder $6°$ bekommt man mittelst der Gl. [3] [4], wenn man $a = 36°$, $b = 30°$ setzt. Es findet sich hiedurch

$$\cos 6 = \tfrac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \tfrac{1}{8}\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{5})$$

$$\sin 6 = \tfrac{1}{8}\sqrt{3} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \tfrac{1}{8} \cdot (1+\sqrt{5}),$$

in Decimalbrüchen

$$\cos 6 = 0{,}99452189537 \qquad \sin 6 = 0{,}10452846327.$$

---

*) Der Verf. glaubt, sich hier der Kürze befleißigen und auf Weniges beschränken zu müssen. Den ganzen Gegenstand der §§. 495 bis 498 hat er weiter ausgeführt, in dem auch in den Buchhandel gekommenen Programme: Inquisitio in plurimorum angulorum functiones goniometricas, quarum valores per radices aequationum quadraticarum exhiberi possunt. Halae 1820. (Libr. Renger., i. c.). Er erlaubt sich noch, anzuführen, daß er in dieser kleinen Schrift unter andern auch folgende Formeln gefunden hat, welche früher noch nicht bekannt gewesen zu seyn scheinen

$$\sec 6^0 = \sqrt{3} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} 12^0 = \sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} 24^0 = \sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$\sec 42^0 = -\sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

§. 499. Aus dem bekannten cos6 findet man

$$\cos 3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos 6} = 0{,}99862953476.$$

Man möchte hieraus cos1 zu berechnen wünschen. Dazu könnte Gl. [22] dienen. Setzt man darin $a = 1$, so hat man

$$\cos 3 = 4\cos 1^3 - 3\cos 1.$$

Also, wenn man cos1 als Unbekannte mit x bezeichnet,

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x = \tfrac{1}{4}\cos 3 = 0{,}24965738369.$$

Diese kubische Gleichung könnte nun näherungsweise gelöset werden. Man würde dadurch bekommen

$$\cos 1 = 0{,}9998477\ldots$$

und könnte hieraus die übrigen Functionen von 1° finden. Man siehet auch, wie man nun weiter die Functionen von 30′, 15′, 5′ und vieler andrer Winkel berechnen könnte. Dieses mag einigermaßen eine Idee davon geben, wie die trigonometrischen Tafeln wohl hätten berechnet werden können, obgleich höhere arithmetische Lehren weit vollkommnere Wege zu diesem Ziele anzeigen.

* * *

Anwendung goniometrischer Functionen zur Auflösung algebraischer Gleichungen.

§. 500. Wie schon nach den §§. 457 u. f. die goniometrischen Functionen und Tafeln zur Erleichterung vieler Rechnungen, die sich nicht einmal auf Winkel beziehen, angewandt werden können, so können sie dies auch nicht selten bei der Auflösung algebraischer Aufgaben. Es mag dies nur an Wegem gezeigt werden.

§. 501. I. Aufgabe. Zwei Unbekannte aus den Gleichungen zu bestimmen

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a$$
$$(2) \qquad xy = b.$$

Erste Auflösung. Man setze, um eine Hülfszahl und einen Hülfswinkel einzuführen,

$$x = f\cos\varphi, \qquad y = f\sin\varphi,$$

so bekommt man, durch Substitution

$$f^2.(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = a, \quad f^2\sin\varphi.\cos\varphi = b$$

und daher $f = \sqrt{a}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{2b}{f^2} = \frac{2b}{a}.$

Daher spricht sich die Vorschrift zu einer bequemen logarithmisch-trigonometrischen Rechnung in den Gleichungen aus:

(a) $\sin 2\varphi = \frac{2b}{a}$

(b) $x = \sqrt{a}.\cos\varphi$, und $y = \sqrt{a}.\sin\varphi$.

Zweite Auflösung. Man setze

$$x = f.\sqrt{\cot\varphi}, \qquad y = f.\sqrt{tg\varphi},$$

so bekommt man

aus (2) $f^2.\sqrt{\cot\varphi.tg\varphi} = f^2 = b$, also $f = \sqrt{b}$,

aus (1) $f^2.(\cot\varphi + tg\varphi) = a$,

oder nach [19] $2f^2.\mathrm{cosec}\, 2\varphi = a$

oder $\sin 2\varphi = \frac{2f^2}{a} = \frac{2b}{a}$,

so hat man die Rechnungsvorschrift

(a) $\sin 2\varphi = \frac{2b}{a}$

(b) $x = \sqrt{\frac{b}{tg\varphi}} \qquad y = \sqrt{b.tg\varphi}$.

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x^2 - y^2 = a$

(2) $xy = b$.

Aufl. Aus denselben Annahmen ergiebt sich:

Wenn (a) $tg\, 2\varphi = \frac{2b}{a}$,

so ist (b) $x = \sqrt{\frac{b}{tg\varphi}}, \qquad y = \sqrt{b.tg\varphi}$.

§. 502. I. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x^2 + y^2 = a$

(2) $x + y = b$.

Aufl. Unter Annahme, daß $x = f\cos\varphi$, $y = f\sin\varphi$,
kommt aus (1) $f^2 = a$, also $f = \sqrt{a}$,
aus (2) $f.(\cos\varphi + \sin\varphi) = b$
oder nach [32] $f.\sqrt{2}.\sin(45^0 + \varphi) = b$.

Folglich, wenn (a) $\sin(45^0 + \varphi) = \frac{b}{\sqrt{2a}}$

so ist (b) $x = \sqrt{a}.\cos\varphi$, $y = \sqrt{a}.\sin\varphi$.

II. Aufgabe. Die Gleichungen zu lösen

(1) $x^2 + y^2 = a$

(2) $x - y = b$.

Aufl. Wenn (a) $\sin(45^0 - \varphi) = \frac{b}{\sqrt{2a}}$

so ist (b) $x = \sqrt{a}.\cos\varphi$, $y = \sqrt{a}.\sin\varphi$.

§. 503. Aufgabe. Die Gl. zu lösen

(1) $x + y = a$

(2) $xy = b$.

Aufl. Man muß zwei Fälle unterscheiden:

Erstens. b ist eine positive Zahl.
Man setze hier $x = f.\cot\varphi$, $y = f.\mathrm{tg}\,\varphi$,
so iist aus (2) $f^2 = b$, also $f = \sqrt{b}$.
Aus (1) unter Anwendung von [19]

$$2f.\operatorname{cosec} 2\varphi = a.$$

Folglich, wenn (a) $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$,

so iist (b) $x = \frac{\sqrt{b}}{\mathrm{tg}\,\varphi}$, $y = \sqrt{b}.\mathrm{tg}\,\varphi$.

Zweitens. b ist eine negative Zahl.
Man setze $x = f\cot\varphi$, $y = -f.\mathrm{tg}\,\varphi$
so iist aus (2) $-f^2 = b$, also $f = \sqrt{-b}$.
Diesser Werth von f ist reel, weil $-b$ positiv.
Num ist ferner aus (1) mittelst [20]

$$2f.\cot 2\varphi = a.$$

Folgglich, wenn (a) $\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{2\sqrt{-b}}{a}$

so iist (b) $x = \frac{\sqrt{-b}}{\mathrm{tg}\,\varphi}$, $y = -\sqrt{-b}.\mathrm{tg}\,\varphi$.

§. 504. **Aufgabe.** Die quadratische Gl. $x^2 + px = q$ aufzulösen.

Aufl. Aus der Theorie der quadratischen Gleichungen ist bekannt, daß, wenn die beiden gesuchten Werthe von x mit x', x'' bezeichnet werden, die Gleichungen Statt finden

$$x' + x'' = -p$$
$$x'x'' = -q.$$

Hienach wird diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt, indem man vertauscht $x,\ y,\ a,\ b$
mit $x',\ x'',\ -p,\ -q,$
und so findet sich:

Erstens. Für q = einer negativen Zahl.

Wenn (a) $\sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p}$

so ist (b) $x' = \frac{\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad x'' = \sqrt{-q}\,.\operatorname{tg}\varphi.$

Zweitens. Für q = einer positiven Zahl.

Wenn (a) $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}$

so ist (b) $x' = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad x'' = -\sqrt{q}\,.\operatorname{tg}\varphi.$

Anm. Aus obiger quadratischer Gl. erhalten, zu Folge ihrer algebraischen Auflösungs-Gleichung

$$(\alpha) \qquad x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

die Unbekannten x', x'' imaginäre Werthe, wenn q negativ, und dabei größer als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist. In diesem Falle ist aber auch $2\sqrt{-q}$ größer als p, und daher giebt die Gl. $\sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p}$, für den Sinus einen Werth, der größer als 1, und so läßt sich kein Hülfswinkel φ bestimmen. Man muß daher zur Auflösung obige Gl. (α) benutzen, doch kann man zur Erleichterung der Rechnung nach dieser Gleichung zuweilen mit Vortheil den Kunstgriff aus §. 459. I anwenden.

§. 505. **Aufgabe.** Die kubische Gl.

$$x^3 + mx + n = 0$$

für den Fall, wo m negativ, und n ∥ $2 . \left(\frac{-m}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, in welchem Falle x drei reelle Werthe hat, und die Cardanische Formel auf Kubikwurzeln aus imaginären Binomen führt, mittelst eines Hülfswinkels aufzulösen.

Aufl. Man lege die Gl. [22] zu Grunde, wonach

$$\text{(A)} \qquad \cos a^3 - \tfrac{3}{4} \cos a - \tfrac{1}{4} \cos 3a = 0$$

und setze $x = f . \cos\varphi$, welches in die aufzulösende Gl. substituirt, giebt

$$f^3 . \cos\varphi^3 + m . f\cos\varphi + n = 0$$

oder

$$\text{(B)} \qquad \cos\varphi^3 + \frac{m}{f^2} . \cos\varphi + \frac{n}{f^3} = 0.$$

Nun ist, damit (B) der Form von (A) untergeordnet werde, zu setzen

$$\frac{m}{f^2} = -\tfrac{3}{4}, \quad \text{und} \quad \frac{n}{f^3} = -\tfrac{1}{4} \cos 3\varphi.$$

Daraus folgt $f^2 = -\tfrac{4}{3} m$, $\quad f = 2 . \sqrt{\frac{-m}{3}}$,

und $\cos 3\varphi = -\frac{4n}{f^3}$.

So hat man: Wenn (a) $f = 2\sqrt{\frac{-m}{3}}$

und (b) $\cos 3\varphi = -\frac{4n}{f^3}$,

so ist (c) $x = f . \cos\varphi$.

Es ist hier erlaubt, für 3φ drei verschiedene Winkel aufzustellen, welche, wenn $3\varphi'$ etwa den kleinsten positiven, zwischen 0R und 4R enthaltenen andeutet, in den Formen enthalten sind,

$$3\varphi', \qquad 3\varphi' + 360^0, \qquad 3\varphi' + 720^0,$$

dann hat in (c) φ die 3 Werthe

$$\varphi', \qquad \varphi' + 120^0, \qquad \varphi' + 240^0$$

und hieraus bekommt man die drei reellen Werthe von f. Man schreibe u statt $3\varphi'$, so hat man als Rechnungsvorschrift die Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad f = 2\sqrt{\frac{-m}{3}}$$

$$\text{(b)} \qquad \cos u = -\frac{4n}{f^3}$$

$$\text{(c)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = f . \cos \tfrac{1}{3} u \\ x'' = f . \cos(\tfrac{1}{3} u + 120^0) \\ x''' = f . \cos(\tfrac{1}{3} u + 240^0). \end{array} \right.$$

* * *

Summation der Sinus einer beliebigen Anzahl von Winkeln, die eine arithmetische Progression bilden.

§. 506. **Aufgabe.** Man soll die Sinus der n Winkel
$a,\ a+b,\ a+2b,\ \ldots\ldots\ a+(n-2).b,\ a+(n-1)b$
summiren, oder also den durch die Gleichung
$$S = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) \ldots + \sin(a+(n-1)b)$$
bestimmten Werth von S in einer einfacheren Form darstellen.

Auflösung. Man gelangt zum Ziele, wenn man jeden Sinus der Reihe mit $2\sin\frac{1}{2}b$ multiplicirt, die entstehenden Producte mittelst [12] umwandelt, dann durch Addtion eine Gleichung ableitet, welche durch Aufheben ziemlich einfach ausfällt, dann noch einige Umwandlungen vornimmt, die sich hauptsächlich auf [12]′ stützen.

Man findet auf diesem Wege

$$2\sin a.\sin\tfrac{1}{2}b = \cos(a-\tfrac{1}{2}b) - \cos(a+\tfrac{1}{2}b)$$
$$2\sin(a+b).\sin\tfrac{1}{2}b = \cos(a+\tfrac{1}{2}b) - \cos(a+\tfrac{3}{2}b)$$
$$2\sin(a+2b).\sin\tfrac{1}{2}b = \cos(a+\tfrac{3}{2}b) - \cos(a+\tfrac{5}{2}b)$$

u. s. w., zuletzt

$$2\sin(a+(n-2)b).\sin\tfrac{1}{2}b = \cos(a+\frac{2n-5}{2}b) - \cos(a+\frac{2n-3}{2}b)$$
$$2\sin(a+(n-1)b)\ \sin\tfrac{1}{2}b = \cos(a+\frac{2n-3}{2}b) - \cos(a+\frac{2n-1}{2}b).$$

Durch Addition erhält man

$$2\sin\tfrac{1}{2}b\,.\,S = \cos(a-\tfrac{1}{2}b) - \cos(a+\frac{2n-1}{2}b)$$

oder $$2\sin\tfrac{1}{2}b\,.\,S = 2\,.\sin(a+\frac{n-1}{2}b)\,.\sin\frac{n}{2}b,$$

folglich

$$S = \frac{\cos(a-\frac{1}{2}b) - \cos(a+\frac{2n-1}{2}b)}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin(a+\frac{n-1}{2}b)\,.\,\sin\frac{n}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

Beispiel. Man soll die Summe
$$\sin 1^0 + \sin 2^0 + \sin 3^0 + \ldots + \sin 89^0 + \sin 90^0$$
berechnen. — Es ist hier $a = 1^0$, $b = 1^0$, $n = 90$, und daher
$$S = \tfrac{1}{2}.(\cot\tfrac{1}{2}^0 + 1) = \frac{\sin 45\frac{1}{2}^0\,.\,\sin 45^0}{\sin\frac{1}{2}^0} = 57{,}7943\ldots$$

* * *

Aufgaben über das Dreieck.

§. 507. I. Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten eines Dreiecks, $AC + BC = s$, gegeben, nebst allen (eigentlich nur zwei) Winkeln; man soll daraus die Seiten $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$ berechnen.

Aufl. Aus der Proportion $x : y = \sin A : \sin B$ hat man

$$(x+y) : x = (\sin A + \sin B) : \sin A$$
$$(x+y) : y = (\sin A + \sin B) : \sin B.$$

Ferner ist $x : z = \sin A : \sin C.$

Daher entstehet, wenn man $x + y$ mit s, und $\sin A + \sin B$ willkührlich mit M bezeichnet,

$$(1)\; x = \frac{s \cdot \sin A}{M}, \quad (2)\; y = \frac{s \cdot \sin B}{M}, \quad (3)\; z = \frac{s \cdot \sin C}{M}.$$

Aus den Gleichungen $x = D \sin A$, $y = D \sin B$, $z = D \sin C$, wo D der Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, hätte man dieselben Formeln finden können. Es können aber diese Formeln noch weiter umgewandelt werden, indem man $\sin A + \sin B$ nach [9]′ umändert. Wendet man dabei noch die Gleichungen an,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \tfrac{1}{2} C, \quad \text{und } \cos \frac{A-B}{2} = \sin(B + \tfrac{1}{2} C),$$

welche sich auf $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 90^0$ stützen, so kommt man auf Werthe für x und y, die sich mit den in §. 444 für AC u. BC durch Construction gefundnen übereinstimmend zeigen.

II. Aufgabe. Die Differenz zweier Seiten, $BC - AC = d$ ist gegeben, nebst den Winkeln, man soll die Seiten berechnen.

Die Aufl. ist der von I. ganz ähnlich.

§. 508. I. Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten $BC + AC = s$, die dritte Seite $AB = c$ und der ihr gegenüberliegende Winkel C gegeben. Man soll die unbekannten Winkel A, B, und die unbekannten Seiten $BC = x$, $AC = y$ berechnen.

Aufl. Aus $\frac{x}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$, $\frac{y}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$ folgt

$$\sin A + \sin B = \frac{s \cdot \sin C}{c},$$

Hiedurch ist die Aufgabe auf I. in §. 466. zurückgeführt.

Es ist aber $\sin A + \sin B = 2 . \sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}$

$$\sin C = 2 . \sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A+B}{2},$$

daher entstehet die Gleichung

$$(\mathfrak{A}) \quad \frac{s}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2} C}.$$

Dies ist ein schon in §. 436 u. §. 475. enthaltener Lehrsatz. Man findet daraus $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{s . \sin \frac{1}{2} C}{c}.$

Hienach bestimmen sich leicht die Winkel, dann auch die Seiten x, y.

II. Aufgabe. Aus der Summe $BC + AC = s$, der Seite c, und der Differenz der anliegenden Winkel $A - B$ diese Winkel A, B nebst den unbekannten Seiten zu berechnen.

Die Aufl. ist leicht aus ($\mathfrak{A}$) herzunehmen.

III. Aufgabe. Aus der Differenz $BC - AC = d$, der Seite c, und dem gegenüberliegenden Winkel die übrigen Größen zu berechnen.

Aufl. Nach einer Methode, die der von I. sehr ähnlich ist, bekommt man die Gl.

$$(\mathfrak{B}) \quad \frac{d}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C},$$

welche schon in den §§. 436 u. 475 gefunden ist. Aus derselben bekommt man leicht die gesuchten Größen.

IV. Aufgabe. Aus der Differenz $BC - AC = d$, der Seite c, und der Differenz der anliegenden Winkel $A - B$, die übrigen Größen zu berechnen.

Die Aufl. ist leicht aus ($\mathfrak{B}$) herzunehmen.

Anm. Die Rechnungsvorschriften, zu denen obige Auflösungen führen, kann man auch aus den Constructions-Auflösungen (§. 184. Aufg. 1, 2, 5 u. 6) herleiten.

§. 509. Aufgabe. Es sind zwei Seiten eines Dreiecks $BC = a$ und $AC = b$ gegeben, nebst der Differenz der gegenüberliegenden Winkel $A - B = u$; man sucht die Winkel.

Aufl. Aus (A) und (B) in §. 508. folgt

$$\frac{d}{s} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}.$$ (S. auch §. 436 u. §. 475).

Durch diese Gl. bestimmt sich $\frac{1}{2}(A+B)$, und dann findet man hieraus und aus u die einzelnen Winkel A u. B.

§. 510. I. Aufgabe. Die durch das Loth CD auf AB gebildeten Abschnitte $AD = f$, $DB = g$, sind gegeben, nebst dem Winkel C; man sucht das Uebrige.

Aufl. Es ist $\operatorname{tg} DCB = \frac{g}{CD}$, $\operatorname{tg} ACD = \frac{f}{CD}$,

daher $\operatorname{tg} DCB : \operatorname{tg} ACD = g - f$

und $$\frac{\operatorname{tg} DCB - \operatorname{tg} ACD}{\operatorname{tg} DCB + \operatorname{tg} AMD} = \frac{g-f}{g+f}$$

oder nach [31] $$\frac{\sin(DCB - ACD)}{\sin(DCB + ACD)} = \frac{g-f}{g+f}.$$

Es ist aber $DCB + ACD = C$, $DCB - ACD = A - B$,

also (C) $$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{g-f}{g+f}$$ (S. §. 442.)

folglich $$\sin(A - B) = \frac{g-f}{g+f} \cdot \sin C.$$

Wie man hieraus die Winkel A, B, dann die Seiten AC, BC finden kann, ergiebt sich leicht.

II. Aufgabe. Es sind die Abschnitte f, g, nebst der Differenz $A - B = u$ gegeben; man sucht das Uebrige.

Die Aufl. wird leicht aus (C) hergenommen.

§. 511. I. Gegeben die Summe der Seiten, $BC+AC=s$, der Winkel C, und die Differenz der auf AB durch das Loth gebildeten Abschnitte, nämlich $DB - AD = m$; man sucht die Winkel A, B, und die übrigen Größen.

Aufl. Es ist $$s = \frac{CD}{\sin B} + \frac{CD}{\sin A} = CD \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin A \cdot \sin B},$$

$$m = CD \cdot \cot B - CD \cdot \cot A = CD \cdot \frac{\sin(A-B)}{\sin A \cdot \sin B};$$

daher $\frac{s}{m} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A-B)}$

oder, unter Anwendung von [9]' und [7]

$$(\mathfrak{D}) \qquad \frac{s}{m} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Diese Gleichung giebt einen Lehrsatz, der im Früherem noch nicht vorgekommen. Man findet aus derselben $\frac{1}{2}(A-B)$, dann die Winkel A, B, und endlich leicht die Seiten AC, BC u. s. w.

II. Aufgabe. Gegeben die Summe $BC + AC = s$, die Differenz der Winkel $A - B = u$, und die Differenz der Abschnitte $DB - AD = m$; man sucht die Winkel A, B u. s. w.

Die Aufl. ergiebt sich aus ($\mathfrak{D}$).

III. Aufgabe. Gegeben die Differenz $BC - AC = d$, der Winkel C, und die Differenz $DB - AD = m$; gesucht A, B u. s. w.

Aufl. Durch Schlüsse, die den in I. angewandten ähnlich sind, gelangt man zu der Gleichung

$$(\mathfrak{E}) \qquad \frac{d}{m} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

woraus sich das Weitere leicht ergiebt.

IV. Aufgabe. Gegeben $BC - AC = d$, $\angle A - B = u$, und $DB - AD = m$; gesucht A, B u. s. w.

Die Aufl. folgt aus ($\mathfrak{E}$).

§. 512. I. Aufgabe. Es ist gegeben $AB = c$, $CD = h$, und der W. C, man sucht A, B u. s. w.

Aufl. Es ist (§. 431) $\cot A + \cot B = \frac{c}{h}$.

Hiedurch ist die Aufgabe auf diese zurückgeführt: Zwei Winkel aus ihrer Summe und der Summe ihrer Cotangenten zu bestimmen.

Aber $\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}$.

Daher ergiebt sich $\cos(A-B) - \cos(A+B) = \frac{2h}{c} \cdot \sin(A+B)$

oder $\cos(A-B) = \frac{2h}{c} \cdot \sin C - \cos C$.

Hienach kann man A—B berechnen. Um die Rechnung aber zu erleichtern, kann man auch einen Hülfswinkel nach §. 462. einführen. Dadurch erhält man:

Wenn (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{2h}$, so ist (2) $\cos(A-B) = \frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi}$.

II. Aufgabe. Gegeben $AB = c$, $CD = h$, und $A - B = u$; man sucht A, B, C u. s. w.

Aufl. Nach ähnlichen Schlüssen wie in I. oder auch aus den in I. gefundnen Gleichungen findet man:

Wenn (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{2h}$, so ist (2) $\sin(C-\varphi) = \cos u \,.\, \sin\varphi$.

III. Aufgabe. Gegeben $DB - AD = m$, $CD = h$ und $\angle C$; man sucht A, B u. s. w.

Aufl. Man findet $\cot B - \cot A = \frac{m}{h}$. Hiedurch ist die Aufgabe auf diese zurückgeführt: Zwei Winkel zu suchen aus ihrer Summe und der Differenz ihrer Cotangenten. Jene Gleichung giebt aber

$$\frac{2\sin(A-B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} = \frac{m}{h},$$

und daher $2h\sin(A-B) - m\cos(A-B) = -m\cos(A+B) = m\cos C$. Hieraus A — B zu bestimmen ist ein Hülfswinkel nach §. 463. einzuführen. Man findet:

Wenn (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{2h}$, so ist (2) $\sin(A-B-\varphi) = \cos C \,.\, \sin\varphi$.

IV. Aufgabe. Gegeben $DB - AD = m$, $CD = h$ und $A - B = u$; gesucht A, B, C u. s. w.

Aufl. Aus III. folgt:

Ist (1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{2h}$, so ist (2) $\cos C = \frac{\sin(u-\varphi)}{\sin\varphi}$.

§. 513. Aufgabe. Es ist gegeben $AB = c$, der W. C, und das Product (Rechteck) der zwei Seiten AC, BC, nämlich $AC \,.\, BC = p$; man sucht A, B u. s. w.

Erste Aufl. Aus $AC = \frac{c \,.\, \sin B}{\sin C}$, und $BC = \frac{c \,.\, \sin A}{\sin C}$

folgt $\sin A \,.\, \sin B = \frac{p \,.\, \sin C^2}{c^2}$.

Hiedurch ist die Aufgabe auf §. 467. I. zurückgeführt.

Zweite Aufl. Da der doppelte Inhalt des Dreiecks ist $= ch$ und auch $= AC.BC.\sin C = p.\sin C$, so hat man $h = \frac{p \sin C}{c}$, wodurch die Aufgabe auf 512. I. zurückgeführt ist.

Bei jeder dieser Auflösungen finden sich dieselben Auflösungsformeln.

§. 514. **Aufgabe.** Es ist gegeben der Umfang U eines Dreiecks, das Loth $CD = h$ und der W. C; man sucht die Winkel A, B u. s. w.

Aufl. Wegen $AD = h \cot A$, $AC = h \operatorname{cosec} A$

ist $\quad AD + AC = h.(\operatorname{cosec} A + \cot A) = h.\cot \frac{1}{2} A$

und $\quad DB + BC = h.(\operatorname{cosec} B + \cot B) = h.\cot \frac{1}{2} B.$

Daher $$\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B = \frac{U}{h}.$$

Da man auch $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B = \mathfrak{R} - \frac{1}{2} C$ kennt, so hat man zwei Winkel aus ihrer Summe und der Summe ihrer Cotangenten zu bestimmen. Diese Aufgabe ist mit der von §. 468. verwandt. Da

$$\cot u + \cot v = \frac{\sin(u+v)}{\sin u \,.\, \sin v} = \frac{2 \sin(u+v)}{\cos(u-v) - \cos(u+v)}$$

so bekommt man

$$\cos \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{2h}{U} \,.\, \cos \tfrac{1}{2} C + \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Zur Erleichterung der Rechnung kann man einen Hülfswinkel nach §. 462. einführen.

§. 515. I. **Aufgabe.** Es ist gegeben $\angle A$ und die Summen $AB + BC = p$, $AC + BC = q$; man sucht B, C u. s. w.

Aufl. Wegen $AB = \frac{\sin C}{\sin A} . BC$ hat man

$$p = BC.(1 + \frac{\sin C}{\sin A}) = BC \,.\, \frac{\sin A + \sin C}{\sin A};$$

Nachdem man eben so q bestimmt hat, findet man

$$p : q = \sin A + \sin(A+B) : \sin A + \sin B.$$

Durch Anwendung von [1] und andre Verwandlungen kommt

$$(p - q \cos A).\sin B - q \sin A.\cos B = (q-p).\sin A.$$

Hieraus kann man B nach §. 463. finden. — Auf ähnliche Art sind folgende Aufgaben zu behandeln.

II. Aufgabe. Aus $AB - BC$, $AC - BC$ und $\angle A$ die Winkel B, C zu berechnen.

III. Aufgabe. Aus $AB + BC$, $AC - BC$ u. $\angle A$ zu berechnen B und C.

§. 516. I. Aufgabe. Es ist gegeben $\angle C = 90^\circ$, das Loth $CD = h$, und $AC + BC = s$; man sucht den Winkel A.

Aufl. Man hat $h.(\operatorname{cosec} A + \sec A) = s$

daher $\frac{\cos A + \sin A}{2\cos A \cdot \sin A} = \frac{\cos A + \sin A}{\sin 2A} = \frac{s}{2h}$.

Durch Quadriren kommt $\frac{1 + 2\sin A \cdot \cos A}{(\sin 2A)^2} = \frac{s^2}{4h^2}$.

Also $1 + \sin 2A = \frac{s^2}{4h^2} \cdot (\sin 2A)^2$.

Sonach ist $\sin 2A$ durch eine unreine quadratische Gleichung bestimmt, zu deren Auflösung auch der Kunstgriff von §. 504. anwendbar ist. — Aehnlich ist folgende Aufgabe zu behandeln.

II. Aufgabe. Gegeben $C = 90^\circ$, $CD = h$ und $AC - BC = d$; gesucht der Winkel A.

§. 517. Aufgabe. Es ist gegeben $\angle A$, der Umfang $= U$, der Flächeninhalt F; man sucht die Seiten $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$.

Aufl. Es ergeben sich die Gleichungen

$$(1)\ x + y = U - z \qquad (2)\ xy = \frac{2F}{\sin A}$$

$$(3)\ x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos A = z^2.$$

Aus (1) und (3) folgt

$$U^2 - 2Uz = 2xy \cdot (1 + \cos A) = 4xy \cdot \cos \tfrac{1}{2} A^2.$$

Daher, vermittelst (2) $U^2 - 2Uz = 4F \cdot \cot \frac{1}{2} A$.

Hieraus bestimmt sich z; dann kann man das Uebrige finden.

§. 518. Aufgabe. Es ist gegeben $AB = c$, $\angle C$ und die Gerade $CE = f$, die den Winkel C halbirt (Fig. 50) man sucht das Uebrige.

Aufl. Man suche zunächst den $\angle BEC = x$. Es ist

$$AE = \frac{f \,.\, \sin \frac{1}{2} C}{\sin (x - \frac{1}{2} C)}, \quad EB = \frac{f \,.\, \sin \frac{1}{2} C}{\sin (x + \frac{1}{2} C)}.$$

Daher $$\frac{c}{f \sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (x + \frac{1}{2} C) + \sin (x - \frac{1}{2} C)}{\sin (x + \frac{1}{2} C) \,.\, \sin (x - \frac{1}{2} C)}.$$

Es gilt aber die merkwürdige Gleichung

$$\sin (a + b) \,.\, \sin (a - b) = \sin a^2 - \sin b^2$$
$$(\text{oder} = (\sin a + \sin b) . (\sin a - \sin b)),$$

welche man unter andern so erhält: Nach [12] ist

$$\sin (a + b) \,.\, \sin (a - b) = \tfrac{1}{2} . (\cos 2b - \cos 2a)$$

daher auch $$= \tfrac{1}{2} . (1 - \cos 2a) - \tfrac{1}{2} . (1 - \cos 2b)$$

folglich nach [14] $$= \sin a^2 - \sin b^2.$$

Unter Anwendung dieser Gl. und der [9]′ kommt

$$\frac{c}{f \sin \frac{1}{2} C} = \frac{2 \,.\, \sin x \,.\, \cos \frac{1}{2} C}{\sin x^2 - \sin \frac{1}{2} C^2}.$$

Hieraus entwickelt sich für $\sin x$ eine unreine quadratische Gleichung.

* * *

Pothenotsche Aufgabe.

§. 519. Aufgabe. Man kennt die Lage dreier Punkte A, B, C (Fig. 51.) gegen einander, so daß man die Werthe der Linien $CA = a$, $CB = b$ und des Winkels $ACB = C$ hat; für einen vierten Punkt D sind die 2 Winkel $ADB = u$, $BDC = v$ gegeben; man soll die Winkel $CAD = x$, $CBD = y$ berechnen.

Aufl. Aus $\triangle ACD$ ist $$CD = \frac{a \,.\, \sin x}{\sin u}$$

aus $\triangle BCD$ $$CD = \frac{b \,.\, \sin y}{\sin v}$$

daher $$\sin x : \sin y = b \sin u : a \sin v.$$

Ferner ist $$x + y = S$$

wenn $$S = 360^0 - (C + u + v).$$

Hiedurch kommt man auf die Aufgabe von §. 464. I. zurück und findet, (nach der zweiten dortigen Aufl.)

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{b\sin u - a\sin v}{b\sin u + a\sin v} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S,$$

und mittelst des auch an der angeführten Stelle angewandten Kunstgriffs sind die Auflösungsformeln

$$\text{(II)} \quad 1)\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin v}{b\sin u}, \qquad 2)\ \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^0-\varphi).\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}S.$$

Anm. Dieselbe Aufl. findet man aus der Construction der Aufgabe (vergl. §. 166. 2). Man construirt über AC einen Kreisbogen, der einen Peripheriewinkel $= u$, und über CB einen andern, der einen Peripheriewinkel $= v$ faßt; dann ist der Schnittpunkt D der gesuchte Punkt. Man findet aber, wenn M und N die Centra jener Kreisbogen sind, leicht die Gleichungen

$$\angle MCA = \Re - u, \quad \angle NCB = \Re - v, \quad \angle MCN = C - 2\Re + u + v,$$
$$\angle CMN = \tfrac{1}{2}CMD = x, \qquad \angle CNM = \tfrac{1}{2}CND = y$$
$$CM = \frac{a}{2.\sin u}, \qquad CN = \frac{b}{2\sin v}.$$

Nun ist, nach §. 436. Gl. (C)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(CMN - CNM) = \frac{CN - CM}{CN + CM} \cdot \cot\tfrac{1}{2}MCN.$$

Hieraus gelangt man, durch Substitution und Umwandlung, zur Gl. (I).

* * *

Vom Vierecke im Kreise.

§. 520. I. Bezeichnet man bei einem Vierecke im Kreise ABCD (Fig. 52) die Seiten AB, BC, CD, DA nach der Reihe mit a, b, c, d, und den Umfang $a+b+c+d$ mit $2s$, also

die Ausdrücke	$\frac{1}{2}.(-a+b+c+d)$	mit	$s-a$
	$\frac{1}{2}.(a-b+c+d)$		$s-b$
	$\frac{1}{2}.(a+b-c+d)$		$s-c$
	$\frac{1}{2}.(a+b+c-d)$		$s-d$,

und es sollen aus den Seiten die Winkel BAD und BCD, welche Supplementwinkel sind, berechnet werden, so dienen dazu folgende Formeln:

$$(1)\quad \cos BAD = -\cos BCD = \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2.(ad+bc)}$$

$$\text{oder} \quad = \frac{2.(s-b).(s-c)}{ad+bc} - 1$$

$$\text{oder} \quad = 1 - \frac{2.(s-a).(s-d)}{ad+bc}.$$

$$(2)\quad \sin\tfrac{1}{2}BAD = \cos\tfrac{1}{2}BCD = \sqrt{\frac{(s-a).(s-d)}{ad+bc}}$$

$$(3)\quad \cos\tfrac{1}{2}BAD = \sin\tfrac{1}{2}BCD = \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)}{ad+bc}}$$

$$(4)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}BAD = \cot\tfrac{1}{2}BCD = \sqrt{\frac{(s-a).(s-d)}{(s-b).(s-c)}}$$

$$(5)\quad \sin BAD = \sin BCD = \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)}.$$

Ableitung. Durch Anwendung der Gl. zwischen den Seiten und dem Cosinus eines Winkels eines Dreiecks hat man, wenn man die Diagonale BD mit q bezeichnet, aus $\triangle ABD$:

$$q^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos BAD$$

und aus $\triangle BCD$, wegen $\angle BCD = 180^0 - BAD$,

$$q^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos BAD.$$

Hieraus ergiebt sich (1). Dann findet man (2) und (3) mittelst [13]′ und [14]′, endlich aus diesen Gl. auch (4) und (5). — Aehnliche Formeln für $\angle ABC$ und ADC sind leicht zu bilden.

II. Der Flächeninhalt des Vierecks, der durch F bezeichnet werden möge, wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$F = \sqrt{(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)}.$$

Ableitung. Es ist $\triangle ABD = \frac{1}{2}ad.\sin BAD$
und $\triangle BCD = \frac{1}{2}bc.\sin BAD$,
daher durch Addition $F = \frac{1}{2}.(ad+bc).\sin BAD.$
Setzt man hier statt $\sin BAD$ seinen Werth aus (5), so bekommt man die zu beweisende Gleichung.

III. Wird der Radius des umschriebenen Kreises mit R bezeichnet, so ist

$$R = \frac{1}{4F}.\sqrt{(ac+bd).(ab+cd).(ad+bc)}.$$

Ableitung. Nach §. 434 ist $\sin BAD = \frac{q}{2R}$

dies in $\triangle BAD = \frac{1}{2} ad . \sin BAD$

gesetzt, kommt $\triangle BAD = \frac{adq}{4R}$

(was auch aus §. 282. folgt). Eben so muß seyn

$$\triangle BCD = \frac{bcq}{4R}$$

daher $$F = \frac{(ad + bc) . q}{4R}.$$

Setzt man hier statt q seinen leicht nach §. 383. zu entwickelnden Werth, nämlich

$$q = \sqrt{\frac{(ac + bd) . (ab + cd)}{ad + bc}}$$

so bekommt man für R die obige Gleichung.

Will man statt des Werthes von q bloß den Ptolemäischen Satz, nach welchem $pq = ac + bd$ (unter p verstanden AC), anwenden, so kann man so schließen:

Wie $$F = \frac{(ad + bc) . q}{4R}$$

so muß auch seyn $$F = \frac{(ab + cd) . p}{4R},$$

multiplicirt man an diesen Gleichungen, und schreibt $ac + bd$ statt pq, so entstehet das Verlangte.

Anm. Stellt man sich bei dem Vierecke im Kreise vor, der Punkt C falle mit D zusammen, so ist $CD = c = 0$, $BD = BC = b$, das Viereck ist ein Dreieck ABD geworden. Setzt man also in den Gleichungen $c = 0$, so gehen sie in Gleichungen für ein Dreieck im Kreise, d. h. für ein Dreieck im Allgemeinen, über, und zeigen sich mit längst bekannten Formeln für das Dreieck übereinstimmend, wenn man nur noch vertauscht

	$\angle BAD$,	a,	b,	d
mit	$\angle BAC$,	c,	a,	b.

* * *

Gleichungen für die Functionen von drei Winkeln, deren Summe $= 2\mathfrak{R}$, nebst einigen Anwendungen.

§. 521. Drei mit a, b, c bezeichnete Winkel mögen als Summe $2\mathfrak{R}$ geben, also die Bedingungsgleichung

$$(\mathfrak{B}) \qquad a + b + c = 2\mathfrak{R}$$

Statt finden, so hat man Folgendes:

I. Es gelten die Gleichungen:

$$(a) \quad \sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}$$

$$(b) \quad \sin a + \sin b - \sin c = 4\sin\frac{a}{2} \cdot \sin\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}$$

$$(c) \quad \cos a + \cos b + \cos c = 4\sin\frac{a}{2} \cdot \sin\frac{b}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} + 1$$

$$(d) \quad \cos a + \cos b - \cos c = 4\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} - 1.$$

Beweis. Gl. (a) findet man so: Auch wenn ($\mathfrak{B}$) nicht Statt findet, hat man nach [9]′ u. [7], wenn man statt sin und cos nur s und c schreibt

$$s\,a + s\,b + s\,c = 2s\frac{a+b}{2} \cdot c\frac{a-b}{2} + 2s\frac{c}{2} \cdot c\frac{c}{2}.$$

Wegen ($\mathfrak{B}$) ist aber $\sin\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}$, und $\cos\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}$,

also $s\,a + s\,b + s\,c = 2\cos\frac{c}{2} \cdot (\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2})$,

aber nach [11]′ ist $\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} = 2\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}$,

hieraus gehet (a) hervor. Gl. (b) wird ähnlich bewiesen.

Gl. (c) folgt so: Auch wenn ($\mathfrak{B}$) nicht Statt findet, ist

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 = 2c\frac{a+b}{2} \cdot c\frac{a-b}{2} - 2(s\frac{c}{2})^2$$

oder, wegen ($\mathfrak{B}$) $\quad = 2s\frac{c}{2} \cdot (\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2})$.

Es ist aber $\quad \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a}{2} \cdot \sin\frac{b}{2}$.

Dies substituirt folgt (c). Gl. (d) wird ähnlich abgeleitet.

II. Ferner ist

(e) $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a . \sin b . \sin c$

(f) $\sin 2a + \sin 2b - \sin 2c = 4 \cos a . \cos b . \sin c$

(g) $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -(1 + 4 \cos a \cos b \cos c)$

(h) $\cos 2a + \cos 2b - \cos 2c = 1 - 4 \sin a \sin b \cos c.$

Beweis. Diese Gl. lassen sich nach der Reihe aus (a) bis (d) ableiten. Man setze nämlich

$$a = 2\mathfrak{R} - a', \quad b = 2\mathfrak{R} - b', \quad c = 2\mathfrak{R} - c',$$

so ergiebt sich aus ($\mathfrak{B}$)

$$2\mathfrak{R} = 6\mathfrak{R} - (a' + b' + c')$$

daher $\quad a' + b' + c' = 4\mathfrak{R}.$

Ferner ist $\sin a = \sin a'$, $\sin b = \sin b'$, $\sin c = \sin c'$; dann $\cos a = -\cos a'$ u. s. w.; ferner $\sin \frac{1}{2} a = \cos \frac{1}{2} a'$ u. s. w.; endlich $\cos \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} a'$ u. s. w. Durch Substitution erhält man nun aus (a) bis (d) vier Gleichungen, welche für $a' + b' + c' = 4\mathfrak{R}$ gelten. Man setze in diesen Gleichungen $2A$, $2B$, $2C$ statt a', b', c', so hat mam Gleichungen, für die Bedingung, daß

$$2A + 2B + 2C = 4\mathfrak{R}, \text{ oder } A + B + C = 2\mathfrak{R}.$$

Schreibt man dann, der Gleichmäßigkeit wegen, statt A, B, C wieder a, b, c, so hat man die zu beweisenden Gleichungen.

III. Für die Tangenten gilt:

(i) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c$

(k) $1 = \cot a . \cot b + \cot a . \cot c + \cot b . \cot c.$

Beweis. Wegen ($\mathfrak{B}$) ist $\operatorname{tg} c = -\operatorname{tg}(a+b)$, also

$$\operatorname{tg} c = -\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b}.$$

Hieraus entstehet (i). Dann bekommt man (k), indem man auf beiden Seiten mit $\operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} c$ dividirt.

IV. Endlich gilt:

(l) $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c$

(m) $\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = 2 + 2 \cos a \cos b \cos c$

(n) $2 sa^2 sb^2 + 2 sa^2 sc^2 + 2 sb^2 sc^2 - sa^4 - sb^4 - sc^4$

$$= 4 sa^2\ sb^2\ sc^2.$$

oder auch

$(n)'$ $(sa+sb+sc).(-sa+sb+sc).(sa-sb+sc).(sa+sb-sc)$
$= 4sa^2 . sb^2 . sc^2.$

Beweis. Wegen (B) hat man

$\cos c = -\cos(a+b) = -\cos a . \cos b + \sin a . \sin b$

daher durch Versetzen und Quadriren

$\sin a^2 . \sin b^2 = \cos a^2 . \cos b^2 + 2\cos a . \cos b . \cos c + \cos c^2.$

Da aber $\sin a^2 . \sin b^2 = (1-\cos a^2) . (1-\cos b^2)$,
so bekommt man durch Substituiren u. s. w. die Gl. (l).

Dann ist $\left.\begin{array}{l}\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 \\ + \cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2\end{array}\right\} = 3.$

Ziehet man hievon (l) ab, so erscheint (m).

Aus (m) ist endlich

$4\cos a^2 \cos b^2 \cos c^2 = (\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 - 2)^2$

oder $4 . (1-\sin a^2)(1-\sin b^2)(1-\sin c^2)$
$= (\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 - 2)^2.$

Führt man links die Multiplication, rechts die Quadrirung aus, so erscheint (n).

Gl. $(n)'$, welche eigentlich nur eine andre Form von (n) ist, findet man bequem so: Nach (b) ist

$$\sin a + \sin b - \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\sin a - \sin b + \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

daher durch Multiplication

$(\mathfrak{a})$ $(sa - sb + sc)(sa + sb - sc) = 4\sin\frac{a}{2}^2 \sin b \sin c.$

Ferner ist aus (a) und (b)

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$-\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2},$$

also durch Multiplication

$(\mathfrak{b})$ $(sa+sb+sc)(-sa+sb+sc) = 4\cos\frac{a}{2}^2 \sin b \sin c.$

Durch Multiplication von $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ kommt $(n)'$.

Anm. Es sey $a = \Re - A$, $b = \Re - B$, $c = \Re - C$, so ist, wegen (B) $A + B + C = \Re$, ferner $\sin a = \cos A$, $\cos a = \sin A$ u. s. w. Substituirt man dies in (l), so kommt

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = 1 - 2 \sin A \sin B \sin C$$

eine Gleichung, die für die Bedingung $A + B + C = \Re$ gilt. Aehnliche Ableitungen kann man aus (m) und (n) machen.

§. 522. Da die drei Winkel eines Dreiecks der Gl. $A + B + C = 2\Re$ genügen, die sich von (B) nur dadurch unterscheidet, daß statt der kleinen Buchstaben große stehen, so läßt sich erwarten, daß zwischen mehren der Gl. (a)...(n) und gewissen bekannten Gleichungen für das Dreieck eine Verbindung Statt finde. Wirklich zeigt sich dieses bei vielen Gleichungen, hauptsächlich mittelst des Satzes aus §. 434., wonach

$$D = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

welcher dazu dient, den Uebergang von der einen Klasse der Gl. zur andern zu machen. Es mag Solches an Folgendem nachgewiesen werden.

I. Da wegen $A + B + C = 2\Re$, $\sin A = \sin(B + C)$, so ist

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C.$$

Man schreibe statt $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ die Werthe, $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, so kommt, beim Aufheben des D,

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Dies ist Gl. (I) aus §. 471. Umgekehrt würde aus dieser Gl. durch die Substitutionen $a = D . \sin A$ u. s. w. sich ergeben $\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C$.

II. Man setze in den Gl. (a) und (b), die im Beweise zu §. 521. IV. gefunden sind, statt der kleinen Buchstaben a, b, c die großen, und dann $\frac{a}{D}$ u. s. w. statt $\sin A$ u. s. w., so hebt sich D, und man erhält aus (a) $(a - b + c)\,(a + b - c) = 4 \sin \frac{A}{2}^2 . bc$

aus (b) $(a + b + c)\,(-a + b + c) = 4 \cos \frac{A}{2}^2 . bc.$

Diese Gl. fallen mit (3) und (4) von §. 473. zusammen.

Auf ähnliche Weise folgt aus (n)′ eine Gleichung, die mit (6) aus §. 473. zusammenfällt.

III. Führt man an (b) die Multiplication aus, so kommt

$-\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 + 2 \sin b \sin c = 4 \cos \frac{a}{2}^2 \sin b \sin c$

oder $-\sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = 2 \sin b \sin c . (-1 + 2 \cos \frac{a}{2}^2)$

oder nach [13] $= 2 \cos a \sin b \sin c.$

Setzt man nun A, B, C statt a, b, c, dann $\frac{a}{D}$ u. s. w. statt $\sin A$ u. s. w.; so hat man durch Aufheben von D,

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A,$$

die Gl. (2) von §. 472.

V. Durch Division von (a) durch (b) kommt eine Gleichung, die mit (5) aus §. 473. zusammenhängt.

§. 523. Aus Gl. (i) kann man auf folgende Weise die Formel zur Berechnung des Inhaltes eines Dreiecks aus seinen Seiten ableiten. Es ist bekanntlich (s. Fig. 73. zum 1sten Thl.) wenn c den Berührungspunkt der Seite AB und des eingeschriebenen Kreises bezeichnet, Ac = s—a, und daher, wenn der Radius r heißt,

$$\operatorname{tg} Amc = \frac{Ac}{r} = \frac{s-a}{r}$$

Eben so $$\operatorname{tg} Bma = \frac{Ba}{r} = \frac{s-b}{r}$$

$$\operatorname{tg} Cmb = \frac{Cb}{r} = \frac{s-c}{r}.$$

Es gilt aber $\angle Amc + Bma + Cmb = 2\mathfrak{R}$, folglich gilt für die Tangenten dieser Winkel die Gl. (i), und es ist

$$\frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r} = \frac{s-a}{r} \cdot \frac{s-b}{r} \cdot \frac{s-c}{r},$$

folglich, weil $(s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - 2s = s$,

$$s \cdot r^2 = (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \qquad (\text{s. §. } 278.)$$

Mittelst $F = s \cdot r$ erhält man hieraus die Gl. für F.

Diese Ableitung giebt Gerono in Gergonnes Annales de Math. T. 15. p. 305.

§. 524. I. Aufgabe. Für ein Dreieck sind die drei Winkel und der Umfang $= p$ gegeben; man sucht die Seiten.

Aufl. Bezeichnet D den Durchmesser des umschriebenen Kreises, so ist

$$BC = D \cdot \sin A, \quad AC = D \cdot \sin B, \quad AB = D \cdot \sin C,$$

daher $p = D \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$.

Folglich $$D = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

und, mittelst Gl. (a) aus §. 521,

$$D = \frac{p}{4 \cdot \cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}B \cdot \cos\frac{1}{2}C}.$$

Daher $$BC = \frac{p \cdot \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p \cdot \sin\frac{1}{2}A}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}B \cdot \cos\frac{1}{2}C}$$

$$AC = \frac{p \cdot \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p \cdot \sin\frac{1}{2}B}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}C}$$

$$AB = \frac{p \cdot \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p \cdot \sin\frac{1}{2}C}{2 \cdot \cos\frac{1}{2}A \cdot \cos\frac{1}{2}B}.$$

II. Aufgabe. Für ein Dreieck sind die Winkel und die Größe $AC + BC - AB = q$ gegeben; man soll die Seiten berechnen.

Aufl. Sie ist der Aufl. der Aufgabe I. ähnlich, und dabei kann Gl. (b) aus §. 521. benutzt werden.

§. 525. I. Aufgabe. Für ein Dreieck ist die Summe $AC + BC = s$, die dritte Seite $AB = c$, und der an derselben liegende Winkel A gegeben; man soll die Winkel B und C berechnen.

Erste Aufl. Aus $AC = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$, $BC = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$, folgt $$s = \frac{c.(\sin A + \sin B)}{\sin(A+B)}.$$

Hieraus $s.\sin A.\cos B - (c - s.\cos A).\sin B = c.\sin A$ und daher, mittelst eines Hülfswinkels, die Auflösungsformeln:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{s.\sin A}{c - s.\cos A}$, oder $\cot\varphi = \frac{c}{s.\sin A} - \cot A$

2) $\sin(\varphi - B) = \frac{c.\sin\varphi}{s}$.

Zweite Aufl. Nach den ersten in der vorigen Auflösung entwickelten Gleichungen hat man

$$s : c = \sin A + \sin B : \sin C$$

also auch $$\frac{s-c}{s+c} = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Aendert man hier den Zähler und den Nenner des letzten Bruches nach den Gl. (a) u. (b) aus §. 521. um, so bekommt man

$$\frac{s-c}{s+c} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B$$

also $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \frac{s-c}{s+c} . \cot\tfrac{1}{2}A.$$

Anm. Man kann die Auflösungsformeln beider Auflösungen auch aus der Construction der Aufgabe (§. 162. I.) herleiten, unter Anwendung von §. 431. Zus. 1. und §. 436. Gl. (C).

II. Aufgabe. Von einem Dreiecke ist die Differenz $AC - BC = d$, die dritte Seite $AB = c$, und der an derselben liegende Winkel A gegeben; man soll $\angle B$ und C berechnen.

Diese Aufgabe kann nach ähnlicher Art behandelt werden, wie die in I.

§. 526. I. Es seyen M, m die Centra des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises (Fig. 53), ferner R, r die Radien derselben, und D die Linie Mm, der Abstand der Centra, dann gilt

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

Beweis. Man fälle aus M und m die Lothe MP und mp auf AB, und bilde mittelst des Lothes MN das rechtwinklige Dreieck MNm, Dann ist $r = pm = Am \cdot \sin\frac{1}{2}A$

aber $Am = \frac{AB \cdot \sin\frac{1}{2}B}{\sin AmB} = \frac{AB \cdot \sin\frac{1}{2}B}{\sin(\Re + \frac{1}{2}C)} = \frac{AB \cdot \sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}$

und $AB = 2R \cdot \sin C$ (nach §. 434, wo $D = 2R$)

also $r = 4R \cdot \sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C$,

oder nach Gl. (c)

$$\text{(A)} \qquad r = R \cdot (\cos A + \cos B + \cos C - 1).$$

Weiter ist $Ap = \frac{1}{2}(-a + b + c) = R \cdot (-\sin A + \sin B + \sin C)$

und $AP = \frac{1}{2}AB = R \sin C$

also $Pp = Ap - AP = R \cdot (-\sin A + \sin B)$.

Ferner $Nm = pm - PM = r - R\cos C$

oder nach (A) $Nm = R \cdot (\cos A + \cos B - 1)$.

Nun ist $D^2 = Pp^2 + Nm^2 = R^2 \cdot (-\sin A + \sin B)^2 + R^2 \cdot (\cos A + \cos B - 1)^2$

und also

$$\frac{D^2}{R^2} = \begin{cases} \sin A^2 + \sin B^2 - 2\sin A \sin B \\ + \cos A^2 + \cos B^2 + 2\cos A \cos B \\ - 2\cos A - 2\cos B + 1 \end{cases}$$

$$= 3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C.$$

Eliminirt man hieraus und aus (A) die Summe $\cos A + \cos B + \cos C$, so kommt

$$\frac{D^2}{R^2} = 1 - 2 \cdot \frac{r}{R}$$

woher die zu beweisende Gl. entspringt.

Zusatz. Sind von den drei Größen D, R, r zwei gegeben, so ist durch die bewiesene Gleichung die dritte bestimmt. Da aber zwei Stücke nicht hinreichen, ein Dreieck zu bestimmen, so werden dann immer noch unendlich viel Dreiecke möglich seyn, bei welchen dieselben Größen D, R, r vorkommen. Dann folgt: Wird (Fig. 53.) für das $\triangle ABC$ der eingeschriebene und der umschriebene Kreis construirt, dann im letztern eine beliebige Sehne $A'B'$ gezogen, nur so, daß sie den eingeschriebenen Kreis berührt, ferner aus A' und B' Gerade gezogen, die denselben Kreis berühren, so schneiden sich diese Gerade in einem Punkte C', der im Umfange des umschriebenen Kreises liegt, und so entstehet ein zweites Dreieck $A'B'C'$, das denselben eingeschriebenen und denselben umschriebenen Kreis hat, wie ABC. (Man vergl. hiezu den Anfang der Aufl. der Aufgabe von §. 359).

II. Während M und R dasselbe, wie in I., bedeuten, bezeichne m' den Mittelpunkt eines außeneingeschriebenen Kreises, etwa dessen, der die Seite BC selbst, von AB und AC aber die Verlängerungen berührt, r' den Radius dieses Kreises, und D' die Entfernung der Mittelpunkte, dann ist

$$D'^2 = R^2 + 2Rr'.$$

Beweis. Dem von I. ganz ähnlich. Man findet

$$r' = 4R \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= R \,.\, (-\cos A + \cos B + \cos C - 1).$$

Dann $$D'^2 = R^2 \,.\, (\sin A + \sin B)^2$$

$$+ R^2 \,.\, (-\cos A + \cos B + 1)^2.$$

Endlich $$\frac{D'^2}{R^2} = 1 + 2 \,.\, \frac{r'}{R}$$

und hieraus die obige Gleichung.

Auch läßt sich hier Aehnliches schließen, wie im Zusatze zu I.

Epipedometrie.

Fünfte Abtheilung.

I. Rectification und Quadratur des Kreises.

§. 527 Das Messen einer geraden Linie mit einer geraden kommt, genau betrachtet, darauf zurück, daß man die eine, welche als Einheit dienen soll, oder Theile derselben, mit den Theilen der andern zusammenhält, und daraus, daß sie congruiren, ihre Gleichheit erkennt. Auf demselben Wege auch das Verhältniß einer krummen Linie zu einer geraden zu erforschen ist dagegen unmöglich. Dennoch sind gerade und krumme Linien gleichartige Größen, in dem Sinne, in welchem dieses Wort in der allgemeinen Größenlehre (der Arithmetik) genommen wird, und die Geometrie muß auf wissenschaftlichem Wege Mittel aufsuchen, Curven, d. h. krumme, nach bestimmten Gesetzen construirte Linien, zu rectificiren, d. h. das Verhältniß jeder solchen krummen Linie zu einer geraden Linie, die als Längeneinheit angenommen wird, zu erforschen, so wie auch Flächen, die von Curven eingeschlossen sind, zu quadriren, d. h. ihr Verhältniß zum Quadrate einer Längeneinheit auszumitteln.

Die Aufgaben der Rectification und der Quadratur gehören nun zwar, im Allgemeinen, in das Gebiet der höhern Analysis; doch kann schon die Elementargeometrie, mit Hülfe der niedern Arithmetik, die Rectification und Quadratur des Kreises in genügender Strenge durchführen. Die Aufgabe, welche in der Kreis-Rectification zu lösen ist, kann so gefaßt werden: „Eine Zahl zu bestimmen, welche das Verhältniß des Umfangs eines Kreises zum Radius ausdrückt;" die der Kreis-Quadratur so: „Eine Zahl zu bestimmen, die das Verhältniß des Inhaltes eines Kreises zum Quadrate des Radius ausdrückt." Daß es solche Zahlen geben muß, welche für alle Kreise gelten, ist daraus klar, daß Kreise ähnliche Figuren sind.

§. 528. Es ist zuweilen zweckmäßig, Curven als Grenzzustände gebrochner Linien, die aus geraden Theilen bestehen, und sich den Curven immer mehr nähern, zu betrachten. In Fig. 55. nähert sich die gebrochne Linie abcd der Curve schon einigermaßen in Hinsicht ihrer Gestalt. Schiebt man zwischen den Punkten a, b, c, d noch m, n, p ein, so daß diese Punkte ungefähr in der Mitte der Theile ab, bc, cd liegen, so ist die Annäherung der gebrochnen Linie ambncpd an die Curve noch größer, indem die Sehnen am, bm u. s. w. nur sehr wenig von den zugehörigen Bogen der Curve abweichen, und man begreift die Möglichkeit, durch weitre Vermehrung der Eckpunkte und Sehnen eine gebrochne Linie zu erhalten, die für die sinnliche Anschauung mit der Curve zusammenfällt.

§. 529. Wird die Sehne bn verlängert, so hat man eine Gerade, welche die Curve schneidet; denkt man nun aber den Punkt n in der Curve immer näher nach b zu rückend, endlich selbst in b übergehend, so erreicht die Sehne den Grenzwerth 0, die schneidende Gerade gehet in bx, eine Berührende am Punkte b, über. Stellt man sich vor, die Curve entstehe, indem ein sich bewegender Punkt von a ausgehet, und sich durch m, b, n... hindurch bewegt, so drückt die Richtung von bx die Richtung aus, welche der Bewegung des Punktes in der Stelle b zugeschrieben werden muß.

§. 530. Es sind ungebrochne und gebrochne Curven zu unterscheiden. Die Curve in Fig. 55. ist eine ungebrochne; sie entstehet durch Bewegung eines Punktes, der immerfort seine Richtung ändert, aber sie auch an jeder Stelle nur allmälig ändert. Die Curve von Fig. 56. ist eine gebrochne; in derselben sind zwei Ecken vorhanden, b und c, wo der sich bewegende Punkt seine Richtung plötzlich ändert; an diesem Punkte b sind zwei Berührende vorhanden bx und by, und der Winkel xby den dieselben bilden, drückt die Größe der plötzlichen Richtungsändrung aus. Aehnlich verhält es sich an der Ecke c.

Denkt man in der ungebrochnen Curve Fig. 55. zwei Punkte, etwa m und n, sich einem dazwischen liegenden b, der festliegend gedacht wird, von entgegengesetzten Seiten immerfort nähernd, so wird $\angle$mbn immer größer, und nähert sich dem Grenzwerthe 2R; dabei nähern sich die beiden Sehnen bm, bn immer mehr der Richtung der an b gezogenen Berührenden. Stellt man sich aber etwas Aehnliches in Bezug auf die Ecke b der gebrochnen Curve von Fig. 56. vor, so nähert sich $\angle$mbn nicht der Grenze 2R, sondern dem Supplemente des Winkels xby.

Auch aus geraden und krummen Theilen können gebrochne Linien bestehen.

§. 531. Die ungebrochnen Curven zerfallen wieder in Curven ohne Wendungspunkte und Curven mit Wendungspunkten. Wie sich dieselben unterscheiden ist an Fig. 57. und Fig. 58 zu erkennen, von denen die erste eine Curve ohne Wendungspunkte, die andre eine Curve mit einem Wendungspunkte ist. In der ersten, Fig. 57., möge man einen Punkt nehmen, welchen man wolle, z. B. b, so kann man immer zwei benachbarte Punkte m und n finden, zwischen denen b enthalten ist, so daß das ganze Stück mbn der Curve in der einen von der an b gezogenen Berührenden gebildeten Ebenenhälfte liegt. In der zweiten Curve, Fig. 58, giebt es dagegen einen Punkt b, der sich durch eine gerade entgegengesetzte Eigenschaft auszeichnet. Man kann nämlich in seiner Nähe zwei Punkte m und n von der Beschaffenheit finden, daß die beiden Curventheile mb und bn in den beiden einander entgegengesetzten Ebenenhälften liegen, welche von der an ihm gezogenen Berührenden gebildet werden.

Eine Curve mit Wendungspunkten wird durch die Wendungspunkte selbst in Theile getheilt, welche keinen Wendungspunkt in sich enthalten; z. B. die Curve abcd Fig. 59. durch zwei Wendungspunkte b und c in drei Theile ab, bc, cd, die keine Wendungspunkte enthalten.

Ist eine Curve ohne Wendungspunkte zugleich in sich selbst zurücklaufend, so giebt keine Gerade mit derselben mehr als zwei Schnittpunkte; hieher gehört z. B. der Kreis. In dieser Hinsicht sind solche Curven den Vielecken gewöhnlicher Art, mit lauter hohlen innern Winkeln, verwandt (vgl. §. 115). Anders kann es bei Curven ohne Wendungspunkte seyn, wenn dieselben nicht in sich zurücklaufen. So bei der Curve Fig. 57.

§. 532. Lehrsatz. Die von zwei Punkten einer Ebene begrenzte gerade Linie ist die kürzeste Linie, welche zwischen diesen Punkten in der Ebene gezogen werden kann.

Beweis. Sollte der Satz falsch seyn, so müßte es zwischen den beiden Punkten eine oder mehre nicht gerade Linien geben, welche die geringste Länge hätten, die eine Linie zwischen diesen Punkten haben könnte, und diese geringste Länge müßte kleiner seyn, als die Länge der Geraden zwischen den Punkten. Mit Unterscheidung aller möglichen Fälle zeigt sich aber nun:

1) Eine aus geraden Theilen bestehende gebrochne Linie kann nicht diese geringste Länge haben.

Denn nach §. 126. ist eine solche gebrochne Linie länger, als die Gerade zwischen den beiden Punkten.

2) Eine in den beiden Punkten begrenzte Curve ohne Wendungspunkte kann nicht eine solche geringste Länge haben.

A und B seyen die beiden Punkte (Fig. 60). Man beschreibe aus ihnen, mit einem Radius $=$ AB, die beiden Kreisbogen AS und BS, welche sich in S schneiden, so zeigt sich, daß eine Curve, wie APQB, welche einen dieser Kreisbogen, etwa AS, in einem Punkte P schneidet, nicht die kürzeste Linie zwischen A und B seyn kann. Denn dann wäre die Gerade BP $=$ AB, es wäre über AB eine Curve möglich, die der Curve BQP congruent wäre, diese Curve BQP wäre aber nur ein Theil von APQB; die Annahme, APQB sey die kürzeste Linie zwischen A und B könnte also nicht bestehen.

Hienach ist klar, daß, wenn eine in A und B begrenzte Curve AFGB ohne Wendungspunkte unter allen Linien zwischen A und B die kleinste Länge haben, und in der Hälfte der Ebene liegen sollte, worin die Kreisbogen AS, BS liegen, dieselbe ganz in dem von AB und diesen Kreisbogen eingeschlossenen Flächenraum enthalten seyn müßte. Nun zeigt sich aber, daß auch eine solche Curve nicht die geringste Länge haben kann. Man verbinde nämlich einen beliebigen Punkt C derselben mit A u. B, so ist jede der Geraden AC und BC offenbar kleiner als AB. Es giebt daher zwischen A u. B zwei Punkte D, E, so daß AD$=$AC, BE$=$BC, und wegen §. 62. muß E zwischen A und D liegen. Man denke jetzt, in derselben Ebenenhälfte, über AD eine Curve AKD $\cong$ AFC, und über EB eine andre BLE$\cong$BGC construirt, so müssen sich dieselben in einem Punkte M schneiden. Auf diese Weise hätte man zwischen A und B eine Linie AKMLB', die um EM + MD kleiner als die Summe AFC + CGB, d. h. kleiner als die Curve AFCGB wäre. Auf diese Weise kann also die Annahme, diese Curve habe die geringste Länge zwischen A und B, nicht bestehen.

3) Eine in A und B begrenzte Curve mit Wendungspunkten kann nicht die kleinste Linie zwischen diesen Punkten seyn.

Eine Curve ACDB (Fig. 61.) habe die Wendungspunkte C und D. Man ziehe die Geraden AC, CD, DB. Dann müßte, wenn die Curve die kleinste Linie zwischen A und B seyn sollte, die Curve AC die kleinste Linie zwischen A und C seyn, eben so die Curve CD die kleinste zwischen C und D, endlich die Curve DB die kleinste Linie zwischen D und B. Dies ist aber, nach dem in 2. Bewiesenen, nicht der Fall.

4) Eine gebrochene Linie, sie bestehe aus bloßen krummen Theilen, wie ACDEB in Fig. 62., oder enthalte, außer krummen Theilen, auch gerade, kann nicht die die kürzeste Linie zwischen ihren Grenzpunkten seyn.

Dies erhellt aus ähnlichen Schlüssen, wie das in 3. Bewiesene.

Faßt man Alles nun Bewiesene zusammen, so ergiebt sich, daß nur die gerade Linie unter allen Linien zwischen denselben Grenzpunkten die kleinste Länge haben kann.

§. 533. I. Lehrsatz. Es sey ein Vieleck mit lauter hohlen innern Winkeln vorhanden, z. B. das Viereck ABCD in Fig. 63.; eine Linie AFEB von beliebiger Art sey in A und B, den Endpunkten der Seite AB, begrenzt, und schließe mit dieser Seite einen Flächenraum ein, von dem der Flächenraum jenes Vielecks ein Theil sey, so ist die Linie AFEB größer als die gebrochne ADCB.

Beweis. Man verlängere AD, DC bis zu den Schnittpunkten L und K, so ist nach §. 532.

AFL |ı AD + DL
DL + LEK |ı DC + CK
CK + KB |ı CB.

Durch Addition, Aufheben und Zusammenziehen entstehet hieraus AFLEKB |ı ADCB.

Anm. 1. Der Satz von §. 68. ist hievon ein besondrer Fall.

Anm. 2. Die Bedingung, daß die innern Winkel des Vielecks lauter hohle seyn sollen, ist in Bezug auf die an A und B liegenden Winkel nicht einmal nöthig. Es kann z. B. an Fig. 64 gezeigt werden, daß darin die Linie ALKB größer ist, als die gebrochne AGFEDCB.

II. Lehrsatz. Eine ungebrochne Curve ohne Wendungspunkt, ACB in Fig. 65., sey in A und B begrenzt; in denselben Punkten sey auch eine Linie von beliebiger Art, AEFB, begrenzt, aber so, daß der Flächenraum, der von AB und der Curve ACB gebildet wird, ganz innerhalb des Flächenraums liege, der von AB und AEFB umschlossen ist, — wobei übrigens auch die Linie AEFB mit ACB außer A und B noch andre Punkte, oder selbst Linientheile gemein haben kann, — so ist die eingeschlossene Linie ACB kleiner als die einschließende AEFB.

Beweis. Wäre der Satz falsch, so müßte es unter den unendlich vielen möglichen einschließenden Linien eine oder mehre geben, welche die kleinste Länge hätten, und diese Länge müßte kleiner seyn, als die von ACB, oder höchstens derselben gleich, nicht aber größer. Es sey nun AEFB eine solche Linie von der kleinsten Länge. Dann kann man zwei Punkte K und L in derselben finden, deren Verbindungslinie KL die ACB gar nicht trifft, oder sie höchstens berührt, nicht schneidet. Dann ist, nach §. 532., KL ı| KEL. Setzt man also KL an die Stelle dieser Linie KEL, so hat man eine Linie AKLFB, welche kleiner als AEFB; die Annahme, diese sey die kleinste, kann folglich nicht bestehen, und so erhellt die Richtigkeit des Satzes.

Anm. 1. Daß der Satz auf eine Curve ADCB mit Wendungspunkten wie D und C, in Fig. 66., nicht Anwendung finden kann, erhellt so: Man kann hier in derselben solche zwei Punkte E und F finden, deren gerade Verbindungslinie außerhalb des Flächenraums ABCD fällt; dann ist die Gerade EMF kleiner, als der Bogen ENF, daher auch die Linie AFMEB, welche als eine umschließende angesehen werden kann, kleiner als die umschlossene ADNCB.

Anm. 2. Der Satz in I. kann auch ganz auf ähnliche Art bewiesen werden, wie der in II.

III. Auf ähnliche Weise beweiset man den Satz: AB...E sey entweder ein Vieleck gewöhnlicher Art, mit lauter hohlen innern Winkeln (Fig. 67.) oder eine ungebrochne, in sich zurück laufende Curve ohne Wendungspunkte (Fig. 68.); diese Linie werde von einer andern in sich zurück laufenden Linie umgeben, — sie möge mit der ersten Linie gar nichts, oder Berührungspunkte, oder selbst Linientheile gemein haben, — so ist die umschlossene Linie kürzer als die umschließende.

§. 534. I. Es sey (Fig. 69.) BC eine Sehne eines Kreises, BMC der zugehörige Bogen, BAC der zugehörige Centriwinkel. AM halbire den Bogen und den Winkel, und der halbe Winkel, nämlich BAM sey $=$ a. Dann ist, nach §. 532.:

1) Die Sehne BC kleiner, als der zugehörige Bogen BMC.

Folglich auch, indem man davon die Hälften nimmt:

2) Die Sinuslinie BD kleiner, als der zugehörige Bogen MB.

Daraus folgt $\frac{BD}{R} < \frac{MB}{R}$,

wenn R den Radius bezeichnet, oder

$$\sin a < \frac{BM}{R}.$$

Man setze hier den Ausdruck Bog. a, als Bezeichnung des zum Winkel a gehörigen Bogens MB, so hat man:

3) Es ist $\sin a < \frac{\text{Bog. } a}{R}$

d. h. die Sinuszahl eines Winkels ist kleiner, als der Verhältnißexponent des zugehörigen Bogens zum Radius.

II. Aus I. 1. folgt auch: Der Umfang eines Vielecks im Kreise ist kleiner, als die Kreisperipherie.

Anm. Dieser Satz wird im Folgenden hauptsächlich auf regelmäßige Vielecke im Kreise angewandt werden. Er ist übrigens nur bei Vielecken gewöhnlicher Art, deren Seiten sich nur in ihren Verlängerungen schneiden, gültig, nicht bei solchen Vielecken im weiteren Sinne, wie im 1sten Th. Anh. VII, betrachtet sind.

III. Werden (Fig. 69.) an den Endpunkten des Bogens BC, der kleiner als die halbe Kreisperipherie, Berührende gezogen, die sich in einem Punkte K schneiden, so liegt K in der Halbirungslinie AM, und es ist BK = CK (§. 132). Nach §. 533. gilt sodann:

1) Die gebrochne Linie BKC ist länger als der Bogen BMC.

Indem man von diesen Linien die Hälften nimmt, folgt:

2) Die Tangenten-Linie BK eines spitzen Winkels ist größer als der zugehörige Bogen MB.

Hieraus folgt auch

3) Es ist $\operatorname{tg} a > \frac{\text{Bog. } a}{R}$,

d. h. die Tangente eines spitzen Winkels ist größer als der Verhältnißexponent des zugehörigen Bogens zum Radius.

IV. Noch folgt: Der Umfang eines Vielecks um den Kreis ist größer als die Kreisperipherie.

Anm. Die Sätze II. und IV. können auch aus dem Satze §. 533. III. eingesehen werden, und sie sind ganz allgemein richtig, so wie auch I, Der Satz III mußte aber die Bedingung enthalten, daß der Bogen BMC kleiner sey, als die halbe Peripherie, weil sonst der Flächenraum BDCM nicht in dem BDCK enthalten, und daher der Satz §. 533. unanwendbar seyn würde; daher sind auch die Sätze III. 2. u. 3. auf spitze Winkel eingeschränkt.

§. 535. Es sey (Fig. 69.) BC die Seite eines regelmäßigen nEcks im Kreise, so ist der Umfang desselben das nfache der Sehne BC, und der Umfang des regelmäßigen nEcks um denselben Kreis ist das nfache der gebrochnen Linie BKC, die durch die an B und C gezognen Berührenden gebildet ist.

Man ziehe nun BM, CM und an M eine Berührende, welche BK und CK in P und Q treffe. Dann ist der Umfang des regelmäßigen 2nEcks im Kreise das nfache der aus den zwei Sehnen BM und CM bestehenden gebrochnen Linie BMC, und der Umfang des regelmäßigen 2nEcks um den Kreis das nfache der gebrochnen Linie BPQC.

Es ist aber die gebrochne Linie BMC länger als die gerade BC; und, weil PQ kürzer als PKQ, auch BPQC kürzer als BKC. Hieraus folgt:

1) Der Umfang des regelmäßigen 2nEcks im Kreise ist größer, als der des regelmäßigen nEcks im Kreise, und die Differenz des Umfangs des ersten von der Kreisperipherie ist kleiner, als die Differenz des Umfangs des zweiten von der Kreisperipherie.

2) Der Umfang des regelmäßigen 2nEcks um den Kreis ist kleiner, als der des regelmäßigen nEcks um den Kreis, und die Differenz des Umfangs des ersten von der Kreisperipherie ist kleiner, als die Differenz des Umfangs des zweiten von der Kreisperipherie.

§. 536. Wenn (Fig. 69) $\angle BAC = \frac{4\mathfrak{R}}{n}$, also $a = \frac{2\mathfrak{R}}{n}$, so ist

$$BD = R.\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n},\quad BK = R.\mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n},$$

daher Sehne $BC = 2R.\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n}$, Linie $BKC = 2R.\mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$.

Das $n$fache dieser Linien stellt aber die Umfänge des regelmäßigen nEcks im Kreise, und des regelmäßigen nEcks um den Kreis dar, es ist also, wenn man diese Umfänge mit $Per.I_n$ und $Per.U_n$ bezeichnet,

$$Per.I_n = 2n.R.\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n},\quad Per.U_n = 2n.R.\mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}.$$

Anm. Berechnet man, unter Voraussetzung trigonometrischer Tafeln, nach diesen Formeln die Umfänge der regelm. Vielecke von 3, 4, 5, 6, 7, 8 Seiten, so findet man:

Für $n =$	ist $Per.I_n =$	und $Per.U_n =$
3	R . 5,196152	R . 10,392304
4	R . 5 656854	R . 8,000000
5	R . 5,877853	R . 7,265425
6	R . 6,000000	R . 6,928203
7	R . 6,074372	R . 6,742044
8	R . 6,122934	R . 6,627417.

Man siehet hier, daß, dem §. 535. gemäß, wirklich

$Per.I_6$ |ı $Per.I_3$, und $Per.I_3$ |ı $Per.I_4$

so wie $Per.U_6$ ı| $Per.U_3$, und $Per.U_3$ ı| $Per.U_4$.

Aber man findet auch, daß überhaupt $Per.I_n$ zunimmt, und $Per.U_n$ abnimmt, wenn n zunimmt. Es wird gezeigt werden, warum dies so seyn müsse.

§. 537. Es seyen $\angle MAB = k$, $\angle MAC = g$ in Fig. 70. zwei spitze Winkel, davon g der größere, k der kleinere; man construire die Sinuslinien DB, EC, und die Tangentenlinien MP, MQ; dann ziehe man die Sehne BC, welche die Verlängerung von AM in F schneide, fälle das Loth BG auf CE, ziehe an B eine Berührende, welche die

Verlängerung von AC in U, die von AM in V treffe, und bezeichne endlich den Schnittpunkt der Verlängerungen von DB und AC mit W. Dann findet sich:

Erstens. Nach §. 532. ist Sehne BC $<$ Bog. BC, ferner, weil (§. 534.) BV $>$ Bog. MB, und FB $>$ BV,

ist $$FB > \text{Bog. } MB$$

also $$\frac{BC}{FB} < \frac{\text{Bog. } BC}{\text{Bog. } MB}.$$

Aber $$\frac{GC}{DB} = \frac{BC}{FB},$$

also auch $$\frac{GC}{DB} < \frac{\text{Bog. } BC}{\text{Bog. } MB}.$$

Hiezu addirt $$\frac{DB}{DB} = \frac{\text{Bog. } MB}{\text{Bog. } MB} \quad \text{(beides} = 1),$$

kommt $$\frac{EC}{DB} < \frac{\text{Bog. } MC}{\text{Bog. } MB};$$

endlich $$\frac{\sin g}{\sin k} < \frac{\text{Bog. } MC}{\text{Bog. } MB},$$

oder auch $$\frac{\sin g}{\sin k} < \frac{\angle g}{\angle k}.$$

Dies spricht den Satz aus: Bei zwei ungleichen spitzen Winkeln ist der Verhältnißexponent des Sinus des größern Winkels zum Sinus des kleinern kleiner, als der Verhältnißexponent des größern Winkels (oder des zugehörigen Bogens) zum kleineren Winkel (dem zugehörigen Bogen).

Zweitens. Da BW $>$ BU und BU $>$ Bog. BC,

so ist $$BW > \text{Bog. } BC;$$

ferner $$DB < \text{Bog. } MB,$$

daher $$\frac{BW}{DB} > \frac{\text{Bog. } BC}{\text{Bog. } MB}.$$

Aber $\dfrac{PQ}{MP} = \dfrac{BW}{DB}$,

also auch $\dfrac{PQ}{MP} > \dfrac{\text{Bog. } BC}{\text{Bog. } MB}$.

Hiezu addirt $\dfrac{MP}{MP} = \dfrac{\text{Bog. } MB}{\text{Bog. } MB}$,

kommt $\dfrac{MQ}{MP} > \dfrac{\text{Bog. } MC}{\text{Bog. } MB}$,

endlich $\dfrac{\operatorname{tg} g}{\operatorname{tg} k} > \dfrac{\text{Bog. } g}{\text{Bog. } k}$,

oder auch $\dfrac{\operatorname{tg} g}{\operatorname{tg} k} > \dfrac{\angle g}{\angle k}$.

Dies giebt den Satz: Bei zwei ungleichen spitzen Winkeln ist der Verhältnißexponent der Tangente des größeren Winkels zur Tangente des kleinern größer, als der Verhältnißexponent des größeren Winkels (oder des zugehörigen Bogens) zum kleineren (dem zugehörigen Bogen).

§. 538. Unter Anwendung der beiden eben gefundnen Sätze ergiebt sich nun Folgendes für die Vergleichung der Umfänge der regelmäßigen Vielecke von m und von n Seiten, beide in demselben Kreise, oder beide um denselben Kreis, wobei $n > m$ sey:

1) Da nach §. 536. ist

$$\text{Per. } I_m = 2m \cdot R \cdot \sin\frac{2\mathfrak{R}}{m}, \quad \text{Per. } I_n = 2n \cdot R \cdot \sin\frac{2\mathfrak{R}}{n},$$

so ist
$$\frac{\text{Per. } I_m}{\text{Per. } I_n} = \frac{m \cdot \sin\dfrac{2\mathfrak{R}}{m}}{n \cdot \sin\dfrac{2\mathfrak{R}}{n}}.$$

Wegen $m < n$ ist aber $\dfrac{2\mathfrak{R}}{m} > \dfrac{2\mathfrak{R}}{n}$, und daher nach §. 537.

$$\frac{\sin\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n}} > \frac{\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\frac{2\mathfrak{R}}{n}} \quad \text{oder} > \frac{n}{m},$$

also, indem man beiderseits mit $\frac{m}{n}$ multiplicirt,

$$\frac{m \cdot \sin\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{n \cdot \sin\frac{2\mathfrak{R}}{n}} > 1,$$

folglich auch $$\frac{\text{Per.}\,I_m}{\text{Per.}\,I_n} > 1$$

oder $$\text{Per.}\,I_m > \text{Per.}\,I_n.$$

Dieses sagt aus: Der Umfang eines regelmäßigen Vielecks in einem bestimmten Kreise ist desto größer, je größer seine Seitenzahl ist.

2) Da nach §. 536.

$$\text{Per.}\,U_m = 2m \cdot R \cdot \operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{m}, \quad \text{Per.}\,U_n = 2n \cdot R \cdot \operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n},$$

so ist $$\frac{\text{Per.}\,U_m}{\text{Per.}\,U_n} = \frac{m \cdot \operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{n \cdot \operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}}.$$

Aber nach vorigem §. ist, wegen $\frac{2\mathfrak{R}}{m} < \frac{2\mathfrak{R}}{n}$,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}} < \frac{\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\frac{2\mathfrak{R}}{n}} \quad \text{oder} < \frac{n}{m},$$

Daher, mittelst Multiplication mit $\frac{m}{n}$ und Substitution

$$\frac{\text{Per.}\,U_m}{\text{Per.}\,U_n} < 1,$$

oder $$\text{Per.}\,U_m < \text{Per.}\,U_n.$$

Dies giebt den Satz: Der Umfang eines regelmäßigen Vielecks um einen bestimmten Kreis ist desto kleiner, je größer seine Seitenzahl ist.

Hiedurch hat sich bestätigt, was in der Anm. zu §. 536. bemerkt wurde.

§. 539. Um das Verhältniß der Kreisperipherie zum Radius näherungsweise zu erfahren, kann man den Umfang eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten im Kreise, und den eines eben solchen Vielecks um den Kreis berechnen; dann wird, den Sätzen von §. 535. zu Folge, der Umfang des Kreises zwischen jenen beiden Vielecksumfängen, als Grenzen, enthalten seyn, und diese Grenzen werden sich selbst, so wie dem Kreisumfange, desto mehr nähern, je größer n ist. Wegen der Formeln aus §. 536.

$$\text{Per.}\,I_n = 2n \,.\, R \,.\, \sin\frac{2\mathfrak{R}}{n}, \quad \text{Per.}\,U_n = 2n \,.\, R \,.\, \text{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$$

kommt also die Aufgabe der Kreisrectification darauf zurück, daß man für einen großen Werth von n den Sinus und die Tangente des kleinen Winkels $\frac{2\mathfrak{R}}{n}$ berechnen könne. Um dieses, unabhängig von den trigonometrischen Tafeln, zu leisten, gehe man von einem Winkel aus, dessen Functionen aus §. 403. bekannt sind, und bestimme daraus (vgl. §. 496.) die Functionen der Winkel, die aus jenem Winkel durch fortgesetztes Halbiren hervorgehen, wobei die Formeln zu Grunde liegen:

$$2.\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{2+2\cos A} \qquad (\text{§. 451. [13]}')$$

$$2.\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{2-2\cos A} \qquad (\text{ebendas. [14]}')$$

und $$\text{tg}\,A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

Angenommen, es seyen die Functionen eines Winkels, der $= \frac{2\mathfrak{R}}{m}$, bekannt, und zwar

$$C = 2.\cos\frac{2\mathfrak{R}}{m}, \quad S = 2.\sin\frac{2\mathfrak{R}}{m}, \quad T = 2.\text{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{m}$$

bezeichne man auch für die durch fortgesetztes Halbiren entstehenden Winkel

$\frac{2\mathfrak{R}}{2m}$, $\frac{2\mathfrak{R}}{4m}$, $\frac{2\mathfrak{R}}{8m}$ u. s. w.

das Zweifache des Cosinus mit C_1, C_2, C_3 u. s. w.
das Zweifache des Sinus mit S_1, S_2, S_3 u. s. w.
das Zweifache der Tangente mit T_1, T_2, T_3 u. s. w.

so hat man nach obigen Formeln:

1) $C_1 = \sqrt{2+C}$, $C_2 = \sqrt{2+C_1}$, $C_3 = \sqrt{2+C_2}$ u. s. w.

2) $S_1 = \sqrt{2-C}$, $S_2 = \sqrt{2-C_1}$, $S_3 = \sqrt{2-C_3}$ u. s. w.

3) $T_1 = 2 . \frac{S_1}{C_1}$, $T_2 = 2 . \frac{S_2}{C_2}$ u. s. w.

Kennt man hiedurch $\sin\frac{2\mathfrak{R}}{n}$ und $\mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$ für ein hinreichend großes n, so bestimmt man daraus ohne Mühe Per. I_n und Per. U_n, und dadurch näherungsweise den Verhältnißexponenten der Peripherie zum Radius.

§. 540. Bei wirklicher Anwendung dieser Rechnungsmethode ist es bequem, von der Annahme $m = 3$ auszugehen. Hier ist

$$C = 2 . \cos\frac{2\mathfrak{R}}{3} = 2 . \cos 60° = 1$$

$$S = 2 . \sin\frac{2\mathfrak{R}}{3} = 2 . \sin 60° = \sqrt{3} = 1,732\,050\,807\,569 \ldots$$

$$T = 2 . \mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{3} = 2 . \mathrm{tg}\, 60° = 2\sqrt{3} = 3,464\,101\,615\,138 \ldots$$

Daraus findet man

$$
\begin{aligned}
1)\quad C_1 &= \sqrt{2+C} = \sqrt{3} &&= 1,732\,050\,807\,569 \\
C_2 &= \sqrt{2+C_1} &&= 1,931\,851\,652\,578 \\
C_3 &= \sqrt{2+C_2} &&= 1,982\,889\,722\,748 \\
C_4 &= \sqrt{2+C_3} &&= 1,995\,717\,846\,477 \\
C_5 &= \sqrt{2+C_4} &&= 1,998\,929\,174\,953 \\
C_6 &= \sqrt{2+C_5} &&= 1,999\,732\,275\,819 \\
C_7 &= \sqrt{2+C_6} &&= 1,999\,933\,067\,835
\end{aligned}
$$

$$C_8 = \sqrt{2 + C_7} = 1,999\,983\,266\,889$$
$$C_9 = \sqrt{2 + C_8} = 1,999\,995\,816\,718$$
$$C_{10} = \sqrt{2 + C_9} = 1,999\,998\,954\,179$$

2) $S_1 = \sqrt{2 - C} = 1,000\,000\,000$
$$S_2 = \sqrt{2 - C_1} = 0,517\,638\,090$$
$$S_3 = \sqrt{2 - C_2} = 0,261\,052\,384$$
$$S_4 = \sqrt{2 - C_3} = 0,130\,806\,258$$
$$S_5 = \sqrt{2 - C_4} = 0,065\,438\,166$$
$$S_6 = \sqrt{2 - C_5} = 0,032\,723\,463$$
$$S_7 = \sqrt{2 - C_6} = 0,016\,362\,279$$
$$S_8 = \sqrt{2 - C_7} = 0,008\,181\,208$$
$$S_9 = \sqrt{2 - C_8} = 0,004\,090\,613$$
$$S_{10} = \sqrt{2 - C_9} = 0,002\,045\,307.$$

3) Durch die Formel $T_m = 2 \cdot \frac{S_m}{C_m}$;

$T_1 = 1,154\,700\,538$	$T_6 = 0,032\,727\,844$
$T_2 = 0,535\,898\,385$	$T_7 = 0,016\,362\,827$
$T_3 = 0,263\,304\,995$	$T_8 = 0,008\,181\,276$
$T_4 = 0,131\,086\,926$	$T_9 = 0,004\,090\,621$
$T_5 = 0,065\,473\,221$	$T_{10} = 0,002\,045\,308.$

Wegen $S = 2 \cdot \sin \frac{2\mathfrak{R}}{3}$ und $T = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\mathfrak{R}}{3}$

ist nun $S_1 = 2 \cdot \sin \frac{2\mathfrak{R}}{6}$, $T_1 = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\mathfrak{R}}{6}$,

$S_2 = 2 \cdot \sin \frac{2\mathfrak{R}}{12}$, $T_2 = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{2\mathfrak{R}}{12}$ u. s. w.

Daher $\text{Per.}\,I_3 = 2 \cdot 3 \cdot R \cdot \sin \frac{2\mathfrak{R}}{3} = 3R \cdot S$,

$\text{Per.}\,U_3 = 2 \cdot 3 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{2\mathfrak{R}}{3} = 3R \cdot T$,

dann $\text{Per.}\,I_6 = 6R \cdot S_1$, $\text{Per.}\,I_{12} = 12R \cdot S_2$ u. s. w.

$\text{Per.}\,U_6 = 6R \cdot T_1$, $\text{Per.}\,U_{12} = 12R \cdot T_2$ u. s. w.

Berechnet man hiernach die Umfänge der regelmäßigen Vielecke im Kreise und um den Kreis von 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536 Seiten, so findet man:

Für m =	Per. I_m =	Per. U_m =
3	R . 5, 196 152 4	R . 10, 392 304 8
6	R . 6, 000 000 0	R . 6, 928 203 2
12	R . 6, 211 657 1	R . 6, 430 780 6
24	R . 6, 265 257 2	R . 6, 319 319 9
48	R . 6, 278 700 4	R . 6, 292 172 4
96	R . 6, 282 063 9	R . 6, 285 429 2
192	R . 6, 282 904 9	R . 6, 283 746 1
384	R . 6, 283 115 2	R . 6, 283 325 6
768	R . 6, 283 167 8	R . 6, 283 220 4
1536	R . 6, 283 181 0	R . 6, 283 194 2

Da nun der Umfang des Kreises zwischen Per. I_{1536} und Per. U_{1536} als Grenzen enthalten seyn muß*), so läßt sich schließen, daß die Zahl, welche das Verhältniß der Kreisperipherie zum Radius ausdrückt, näherungsweise = 6,28318... sey. Man hat nicht für diese Zahl, sondern für ihre Hälfte,

*) Man muß nicht glauben, es müsse der gesuchte Verhältnißexponent der Peripherie zum Radius gerade dem arithmetischen Mittel von Per. I_m und Per. U_m sehr nahe liegen; durch höhere arithmetische Untersuchungen kann man sich im Gegentheil überzeugen, man komme dieser Zahl weit näher, wenn man den dritten Theil der Differenz zwischen Per. I_m und Per. U_m zu Per. I_m addire. Verfährt man auf diese Weise, so erhält man aus obiger Tabelle

für m = 48 den Werth R . 6, 282 1911
... m = 96 ... ... R . 6, 283 1857
... m = 192 ... ... R . 6, 283 1853

und ist hiemit schon zum richtigen Werthe gekommen.

also für den Exponenten des Verhältnisses der halben Peripherie zum Radius ein besondres Zeichen, nämlich den Buchstaben π eingeführt. Diese Zahl ist, bis auf 20 Decimalbruchstellen, folgende:

$$\pi = 3,\ 141592\ 653589\ 793238\ 46\ldots$$

Man pflegt dieselbe die Ludolphische Zahl zu nennen, weil Ludolph van Ceulen (geb. zu Hildesheim, gest. zu Leyden 1610) dieselbe bis auf 32 Decimalbruchstellen berechnet hat. Bei vielen Rechnungen ist es hinreichend genau, zu setzen

$$\pi = 3,\ 1416.$$

Zu logarithmischen Rechnungen ist es gut, den Briggischen Logarithmen dieser Ludolphischen Zahl zu kennen; es ist

$$\log.\pi = 0,\ 497\ 1499.$$

Archimedes hat gefunden, daß der Bruch $\frac{22}{7}$, Adrian Metius, daß der Bruch $\frac{355}{113}$ das Verhältniß der Peripherie zum Radius näherungsweise ausdrückt. Beide Brüche sind zu groß, der letztre aber nur um sehr wenig. Es ist nämlich

$$\frac{22}{7} = 3,\ 142857\ldots$$

$$\frac{355}{113} = 3,\ 141592\ 92\ldots$$

Anm. Bei Bekanntschaft mit der Theorie der Kettenbrüche findet man

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

und daraus die Näherungsbrüche

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103993}{33102},\quad \frac{104348}{33215},$$

welche abwechselnd zu klein und zu groß sind.

§. 541. Nachdem im Vorhergehenden der Kreis rectificirt worden, ist nunmehr zur Quadratur desselben zu schreiten. Diese ist aber, mittelst eines gewissen Satzes, auf eine solche Weise von seiner Rectification abhängig, daß durch die Berechnung der Ludolphischen Zahl auch schon der Kreis für quadrirt gelten kann. Jener Satz wird aber erst später aufgestellt und bewiesen werden; zunächst soll die Quadratur ganz unabhängig von der Rectification vorgenommen werden; dabei wird sich zeigen, daß dieselbe in vieler Hinsicht einfacher ausfällt, als die Rectification, theils, indem sie nicht so viele vorläufige Betrachtungen voraussetzt, theils indem selbst die Zahlenrechnung, wodurch man zuletzt zum Ziele geführt wird, etwas bequemer ist.

§. 542. Es ist Fig. 69. wieder BC die Seite des regelmäßigen nEcks im Kreise, also $\angle BAC = \frac{4\mathfrak{R}}{n}$, $\angle MAB = \frac{2\mathfrak{R}}{n}$. Dann ist $\triangle BAC$ der nte Theil des regelmäßigen nEcks im Kreise, und das 4Eck ABKC ist der nte Theil des regelm. nEcks um den Kreis. Wird nun das Loth BV auf AC gefällt, so hat man

$$BV = AB \,.\, \sin BAC = R \,.\, \sin\frac{4\mathfrak{R}}{n}$$

$$\triangle BAC = \tfrac{1}{2} AC \,.\, BV = \tfrac{1}{2} \,.\, R^2 \,.\, \sin\frac{4\mathfrak{R}}{n} \text{ (vgl. §. 426. I.)}$$

folglich, durch Multiplication mit n.

$$\text{(I.)} \qquad I_n = \tfrac{1}{2} n \,.\, R^2 \,.\, \sin\frac{4\mathfrak{R}}{n},$$

wenn I_n den Inhalt des regelm. nEcks im Kreise bezeichnet.

Ferner ist $BK = AB \,.\, \mathrm{tg}\, BAK = R \,.\, \mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$,

daher $\qquad \triangle BAK = \tfrac{1}{2} AB \,.\, BK = \tfrac{1}{2} R^2 \,.\, \mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$,

folglich $\qquad 4\mathfrak{E} \,.\, ABKC = R^2 \,.\, \mathrm{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n}$,

und, durch Multiplication mit n,

$$\text{(II.)} \qquad U_n = n \,.\, R^2 \,.\, \operatorname{tg}\frac{2\mathfrak{R}}{n},$$

wenn U_n den Inhalt des regelm. nEcks um den Kreis bezeichnet.

Beispiele. Man findet hienach unter andern

$$I_4 = 2 \,.\, R^2 \,.\, \sin 90^0 = 2 \,.\, R^2$$
$$U_4 = 4 \,.\, R^2 \,.\, \operatorname{tg} 45^0 = 4R^2;$$

die Richtigkeit beider Werthe läßt sich leicht elementar-geometrisch zeigen. Ferner ist

$$I_6 = 3R^2 \,.\, \sin 60^0 = \tfrac{3}{2} \,.\, R^2 \,.\, \sqrt{3} = R^2 \,.\, 2{,}598\,076 \ldots$$
$$U_6 = 6R^2 \,.\, \operatorname{tg} 30^0 = 2 \,.\, R^2 \,.\, \sqrt{3} = R^2 \,.\, 3{,}464\,101 \ldots$$

§. 543. Für die Vergleichung der Inhalte zweier regelmäßigen Vielecke von verschiedener Seitenzahl, welche aber demselben Kreise eingeschrieben, oder demselben Kreise umschrieben sind, ergiebt sich, ähnlich den sich auf die Umfänge solcher Vielecke beziehenden Sätzen von §. 538., jetzt Folgendes:

1) Der Inhalt eines regelm. Vielecks in einem bestimmten Kreise ist desto größer, je mehr Seiten es hat.

2) Der Inhalt eines regelm. Vielecks um einen bestimmten Kreis ist desto kleiner, je mehr Seiten es hat.

Die Beweise stützen sich auf die eben abgeleiteten Gl. (I) und (II), und auf die Sätze von §. 537. Sie bedürfen, als denen von §. 538. ganz ähnlich, keiner weitern Ausführung.

§. 544. Die Quadratur des Kreises kann man, auf ähnliche Art wie die Rectification, dadurch ausführen, daß man aus dem Inhalte der regelm. Vielecke im Kreise und um den Kreis von n Seiten, nach der Reihe die Inhalte der regelm. Vielecke von $2n$, $4n$, $8n$.... Seiten ableitet. Daß man sich auf diese Weise dem Inhalte des Kreises in jedem beliebigen Grade wird nähern können, ist mittelst folgender Lehrsätze einzusehen:

Lehrsatz I. Die Differenz zwischen dem Kreisinhalte und dem Inh. des regelm. 2nEcks in dem Kreise ist kleiner, als die Hälfte der Differenz zwischen dem Inhalte des Kreises und dem Inhalte des regelm. nEcks in demselben. Oder, ist der Kreisinhalt = K, und

$$K - I_n = D, \quad K - I_{2n} = D', \quad K - I_{4n} = D'' \text{ u. s. w.}$$

so ist $\quad D' < \frac{1}{2}D, \quad D'' < \frac{1}{2}D'$ u. s. w.

Lehrsatz II. Die Differenz zwischen dem Inhalte des Kreises und dem Inhalte des regelm. 2nEcks um denselben ist kleiner als die Hälfte der Differenz zwischen dem Inhalte des Kreises und dem Inhalte des regelm. nEcks um denselben. Oder, ist

$$U_n - K = d, \quad U_{2n} - K = d', \quad U_{4n} - K = d'' \text{ u. s. w.}$$

so ist $\quad d' < \frac{1}{2}d, \quad d'' < \frac{1}{2}d'$ u. s. w.

Beweis zu I. In Fig. 69, wo $\angle BAC = \frac{4\mathfrak{R}}{n}$, ist das $\triangle DBM > \triangle MBP$; daher auch $\triangle DBM$ größer als das Segment über der Sehne MB; also auch dies Segment kleiner als die Hälfte des von den Geraden DM, DB und dem Bogen MD begrenzten Halbsegments DBM. Es ist aber das Segment über MB der 2nte Theil von D', und das Halbsegment DBM der 2nte Theil von D; also hat man

$$\frac{1}{2n} \cdot D' < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \cdot D$$

folglich auch $\quad D' < \frac{1}{2} \cdot D$

Eben so ist $\quad D'' < \frac{1}{2} \cdot D'$ u. s. w.

Beweis zu II. In Fig. 69 ist ferner MP = BP, aber PK (als Hypotenuse vom $\triangle MKP$) $>$ MP, also auch PK $>$ BP, und $\triangle MKP > \triangle MBP$. Um so mehr ist also das $\triangle MKP$ größer, als der von den Geraden MP, BP und dem Bogen MB eingeschlossene gemischtlinige Flächenraum MPB, daher dieser gemischtlinige Flächenraum MPB kleiner als die Hälfte des von MK, KB und dem Bogen MB eingeschlossenen gemischtlinigen Flächenraums MKB. Es ist aber MPB der 2nte Theil von d', MKB der 2nte Theil von d, also

$$\frac{1}{2n} \cdot d' < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \cdot d$$

also auch $d' < \frac{1}{2} d$

und eben so $d'' < \frac{1}{2} d'$ u. s. w.

Folgerungen. Aus der Arithmetik ist bekannt, daß, wenn der Werth einer Größe a und außerdem eine weit kleinere Größe k gegeben ist, die geometrische Reihe

$$a, \quad \tfrac{1}{2}a, \quad \tfrac{1}{4}a, \quad \tfrac{1}{8}a, \quad \text{u. s. w.}$$

die Eigenschaft hat, daß man in ihr gewiß einmal zu einem Gliede gelangt, welches kleiner als k ist, diese gegebene Größe sey auch so klein als sie wolle. Hieraus, und aus obigen Lehrsätzen folgt nun: Ist ein sehr kleiner Flächenraum F gegeben, so kann man die Berechnung sowohl der Vielecke I_n, I_{2n}, I_{4n}, I_{8n} u. s. w., als auch der U_n, U_{2n}, U_{4n}, U_{8n} u. s. w. so weit treiben, daß man endlich zu Vielecken gelangt, deren Unterschied vom Kreise kleiner als F ist, dieser gegebene Flächenraum sey auch noch so klein.

§. 545. Lehrsatz I. Der Inhalt des regelmäßigen Vielecks im Kreise von doppelter Seitenzahl ist das geometrische Mittel zwischen dem Inhalte des regelm. Vielecks in demselben Kreise und des regelm. Vielecks um denselben Kreis, beide von einfacher Seitenzahl; oder es ist

$$\text{I.} \qquad I_{2n} = \sqrt{I_n \, . \, U_n} \, .$$

Lehrsatz II. Der Inhalt des regelm. Vielecks um den Kreis von doppelter Seitenzahl, ist das harmonische Mittel zwischen dem Inhalte des regelm. Vielecks in demselben Kreise von derselben doppelten Seitenzahl und dem Inhalte des regelm. Vielecks um den Kreis von der einfachen Seitenzahl; oder es ist

$$\text{II.} \qquad U_{2n} = \frac{2 \, . \, I_{2n} \, . \, U_n}{I_{2n} + U_n} \, .$$

In den Beweisen dieser Sätze wollen wir statt

$$I_n, \quad U_n, \quad I_{2n}, \quad U_{2n} \quad \text{und} \quad \angle \frac{2\mathfrak{R}}{n}$$

zur Abkürzung die Zeichen gebrauchen

$$I, \quad U \quad i, \quad u, \quad \text{und } a.$$

Erster Beweis zu I. (nach geometrischer Methode).

Weil, in Fig. 69, $\triangle ABK$ bei B rechtwinklig, und BD ein Loth auf der Hypotenuse AK ist, so hat man

$$AB^2 \text{ oder } AM^2 = AD . AK$$

oder
$$AD : AM = AM : AK.$$

Mittelst des Satzes, daß sich Dreiecke bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien verhalten, folgt hieraus

$$\triangle ABD : \triangle ABM = \triangle ABM : \triangle ABK$$

oder
$$\frac{1}{2n} . I : \frac{1}{2n} . i = \frac{1}{2n} . i : \frac{1}{2n} . U$$

folglich auch $I : i = i : U$, und $i = \sqrt{I . U}$.

Zweiter Beweis zu I. (mittelst goniometr. Functionen).

Es ist $I = \frac{1}{2} n . R^2 . \sin \frac{4\mathfrak{R}}{n} = \frac{1}{2} n . R^2 . \sin 2a$

oder
$$= n . R^2 . \sin a . \cos a.$$

Dann
$$U = nR^2 . \operatorname{tg} \frac{2\mathfrak{R}}{n} = nR^2 . \operatorname{tg} a = nR^2 . \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Hieraus folgt
$$I . U = n^2 R^4 . \sin a^2$$
$$\sqrt{I . U} = nR^2 . \sin a.$$

Es ist aber auch $i = \frac{1}{2} . 2nR^2 . \sin \frac{4\mathfrak{R}}{2n} = nR^2 . \sin a$

also
$$i = \sqrt{I . U}.$$

Erster Beweis zu II. (nach geometrischer Methode).

Wird, Fig. 69., AP gezogen, so halbirt dieselbe den $\angle BAK$; daher hat man nach §. 259.

$$AB : AK = BP : KP,$$

oder
$$AM : AK = BP : KP.$$

Folglich, mittelst des Satzes, daß sich Dreiecke bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien verhalten,

$$\triangle ABM : \triangle ABK = \triangle MBP : \triangle MPK,$$

wofür man auch setzen kann

$$\triangle ABM : \triangle ABK = (4\mathfrak{E}. ABPM - \triangle ABM) : (\triangle ABK - 4\mathfrak{E}. ABPM)$$

oder
$$\frac{1}{2n} . i : \frac{1}{2n} . U = \left(\frac{1}{2n} . u - \frac{1}{2n} . i\right) : \left(\frac{1}{2n} . U - \frac{1}{2n} . u\right),$$

folglich auch $i : U = (u - i) : (U - u)$;

aus dieser Proportion folgt aber

$$u = \frac{2 . i . U}{i + U}$$

und nach §. 270. kann sowohl diese Gleichung als jene Proportion ausgesprochen werden: u ist das harmonische Mittel zwischen i und U.

Zweiter Beweis zu II. (mittelst goniometrischer Functionen).

Man bemerke zunächst, daß aus der zu beweisenden Gleichung

$$(A) \qquad u = \frac{2i\,.\,U}{i+U},$$

indem man Zähler und Nenner mit I multiplicirt, dann im Nenner, nach Lehrsatz I., statt IU selbst i^2, folgt

$$u = \frac{2i\,.\,U.I}{iI+UI} = \frac{2i\,.\,U\,.\,I}{iI+i^2}$$

und also $\quad (B) \quad u = \dfrac{2UI}{I+i},$

nach welcher Gl. u aus den drei Größen I, U, i berechnet werden könnte, wie nach (A) aus den zweien i und U; und daß auch umgekehrt aus Gl. (B) sich (A) folgern, und also der Beweis für (A) sich führen lassen wird, wenn man zuerst (B) ableitet.

Nun ist aber nach dem 2ten Bew. zu I.

$$2IU = 2n^2R^4\,.\,\sin a^2,$$

und $I+i = nR^2 \sin a\,.\,(1+\cos a) = 2nR^2\,.\,\sin a\,.\,\cos\tfrac{1}{2}a^2.$

Also $\dfrac{2IU}{I+i} = nR^2\,.\,\dfrac{\sin a^2}{\sin a\,.\,\cos\frac{1}{2}a^2} = 2nR^2\,.\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a^2}$

oder $\quad \dfrac{2IU}{I+i} = 2nR^2\,.\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}a = 2n\,.\,R^2\,.\,\mathrm{tg}\,\dfrac{2\mathfrak{R}}{2n}.$

Dies ist aber gerade der Werth von i, also Gl. (B) richtig.

Aus (B) ist nun, unter Anwendung von Lehrsatz I.

$$u = \frac{2UIi}{Ii+i^2} = \frac{2UIi}{Ii+UI} = \frac{2Ui}{i+U}$$

also auch (A) richtig.

§. 546. Man gehe nun von dem Inhalte der regelm. 4Ecke aus, so hat man, nach §. 542., $I_4 = 2\,.\,R^2$ und $U_4 = 4\,.\,R^2$, daher

$$I_8 = \sqrt{I_4\,.\,U_4} = R^2\,.\,\sqrt{8} = R^2\,.\,2,828\,427\ldots$$

$$U_8 = \frac{2\,.\,I_8 U_4}{I_8+U_4} = R^2\,.\,3,313\,708\ldots$$

Setzt man die Rechnung weiter fort, so bekommt man:

Für m =	I_m =	U_m =
4	$R^2 . 2,000\ 000$	$R^2 . 4,000\ 000$
8	$R^2 . 2,828\ 427$	$R^2 . 3,313\ 708$
16	$R^2 . 3,061\ 467$	$R^2 . 3,182\ 598$
32	$R^2 . 3,121\ 445$	$R^2 . 3,151\ 725$
64	$R^2 . 3,136\ 548$	$R^2 . 3,144\ 118$
128	$R^2 . 3,140\ 331$	$R^2 . 3,142\ 224$
256	$R^2 . 3,141\ 277$	$R^2 . 3,141\ 750$
512	$R^2 . 3,141\ 514$	$R^2 . 3,141\ 632$

Da nun der Kreisinhalt zwischen I_{512} und U_{512} enthalten seyn muß, so erhellt daß derselbe ungefähr $= R^2 . 3,1416$ zu setzen ist.

Anm. 1. Hienach scheint die Ludolphische Zahl, welche das Verhältniß der halben Peripherie zum Radius ausdrückt, zugleich der Exponent des Verhältnisses der Kreisfläche zum Quadrat des Radius zu seyn. Daß dies wirklich so seyn müsse, wird später sich zeigen lassen.

Anm. 2. Die Rechnung wird etwas einfacher, wenn man statt U_{2n} als harmonisches Mittel aus I_{2n} und U_n zu berechnen, diese Größe aus I_n, U_n, I_{2n} nach Gl. (B) aus dem zweiten Beweise von §. 545. II. berechnet, indem man bei dieser Methode in den zwei Formeln für I_{2n} und U_{2n} nur ein Product nämlich $I_n . U_n$ zu berechnen hat, während sonst zwei Producte, $I_n . U_n$ und $I_{2n} . U_n$ zu berechnen sind.

§. 547. Die jetzt mittelst der Gl. I. u. II. von §. 545. durchgeführte Berechnung des Kreisinhaltes läßt aber noch eine bedeutende Erleichterung zu. Man bemerke zunächst, daß diese Gleichungen auch gelten müssen, wenn der Radius R durch die Zahl 1 ausgedrückt wird, in welchem Falle I_n, U_n, I_{2n}, U_{2n} bloße Zahlen werden, die das Verhältniß des Inhalts der regelm. Vielecke von n und 2n Seiten im Kreise und um den Kreis zum Quadrate des Radius ausdrücken, so daß z. B. nicht mehr $I_4 = 2R^2$ und $U_4 = 4R^2$, sondern bloß $I_4 = 2$, $U_4 = 4$ gesetzt wird. Weiter verstehe man unter (I_n), (U_n), (I_{2n}), (U_{2n}) nach der Reihe das Reciproke der Größen I_n, U_n, I_{2n}, U_{2n}, so daß

$$I_n = \frac{1}{(I_n)},\ (I_n) = \frac{1}{I_n},\ U_n = \frac{1}{(U_n)},\ \text{u. s. w.}$$

Dann gehet Gl. I. von vorigem §. durch Substitution über in

$$\frac{1}{(I_{2n})} = \sqrt{\frac{1}{(I_n)} \cdot \frac{1}{(U_n)}} = \sqrt{\frac{1}{(I_n) \cdot (U_n)}}.$$

woher folgt

$$[I] \qquad (I_{2n}) = \sqrt{(I_n) \cdot (U_n)}.$$

Dieses sagt aus: Für die reciproken Werthe von I_n, U_n, I_{2n}, U_{2n} gilt eine gleiche Beziehung wie für diese Zahlen selbst, nämlich die, daß auch das Reciproke der letztern Zahl das geometrische Mittel zwischen den reciproken Werthen der beiden ersten Zahlen ist.

Durch ähnliche Substitutionen gehet Gl. II. über in

$$\frac{1}{(U_{2n})} = \frac{2 \cdot \frac{1}{(I_{2n})} \cdot \frac{1}{(U_n)}}{\frac{1}{(I_{2n})} + \frac{1}{(U_n)}}.$$

Multiplicirt man hier den Zähler und Nenner mit $(I_{2n}) \cdot (U_n)$, so erscheint

$$\frac{1}{(U_{2n})} = \frac{2}{(U_n) + (I_{2n})},$$

woraus folgt

$$[II] \quad (U_{2n}) = \frac{(I_{2n}) + (U_n)}{2}.$$

Diese Gleichung sagt: Das Reciproke der Zahl U_{2n} ist das arithmetische Mittel der reciproken Werthe von I_{2n} und

U_n, — während U_{2n} selbst zwischen I_{2n} und U_n das harmonische Mittel ist.*)

§. 548. Man kann also nunmehr, unter Anwendung von [I] und [II], statt der Zahlen I_4, U_4, I_8, U_8, I_{16}, U_{16} u. s. w. die reciproken Werthe derselben berechnen, und hat dabei in [II] die ganz einfache Berechnung eines arithmetischen Mittels auszuführen, an deren Stelle in Gl. II. die Berechnung des harmonischen Mittels mehr Umstände macht. Es ist dabei

$$(I_4) = \tfrac{1}{2} = 0,5 \qquad (U_4) = \tfrac{1}{4} = 0,25.$$

Von diesen Werthen ausgehend findet man:

Für m =	(I_m) =	(U_m) =
4	0, 500 000 000	0, 250 000 000
8	0, 353 553 391	0, 301 776 695
16	0, 326 640 741	0, 314 208 718
32	0, 320 364 431	0, 317 286 575
64	0, 318 821 789	0, 318 054 182
128	0, 318 437 754	0, 318 245 968
256	0, 318 341 846	0, 318 293 907
512	0, 318 317 876	0, 318 305 891

Der Grenzwerth, welchem sich hier die Werthe von (I_m) und (U_m) immer mehr nähern, ist das Reciproke des Exponenten des Verhältnisses des Kreisinhalts zum Quadrate des Radius.

*) Ueberhaupt gilt der Satz: Ist H das harmonische Mittel von A und B, und a, b, h sind die reciproken Werthe von A, B, H, so ist h das arithmetische Mittel von a und b, — und umgekehrt.

§. 549. Um jetzt, gestützt auf die Werthe dieser Tabelle, bequem eine noch genauere Annäherung an den Verhältniß-exponenten zwischen dem Kreisinhalte und dem Quadrate des Radius zu erhalten, dienen folgende Betrachtungen.

Es ist aus der Arithmetik bekannt, daß, wenn zwei Zahlen, a und $a+d$, eine im Verhältniß zu a sehr kleine Differenz d haben, das arithmetische Mittel derselben sehr wenig von ihrem geometrischen abweicht.*) Hienach kann das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}.[(I_m)+(U_m)]$ um desto weniger von dem geometrischen $\sqrt{(I_m).(U_m)}$ oder also von (I_{2m}) abweichen, je geringer die Differenz zwischen (I_m) und (U_m), oder also je größer m ist. Man berechne das arithmetische Mittel der in obiger Tabelle enthaltenen Werthe von (I_{64}) und (U_{64}), so findet man dasselbe nur um 0, 000 000 231 größer als (I_{128}). Dann ist $\frac{1}{2}.[(I_{128})+(U_{128})]$ nur um 0,000 000 015 größer als (I_{256}). Endlich ist $\frac{1}{2}.[(I_{256})+(U_{256})] = 0,318\,317\,876(5$; also mit (I_{512}), wenn dies nur auf 9 Bruchstellen berechnet ist, übereinstimmend.

Hienach ist es erlaubt, bei Einschränkung der Rechnung auf 9 Bruchstellen, (I_{1024}) als arithmetisches Mittel von (I_{512}) und (U_{512}) und überhaupt von hier an (I_{2m}) als arithmetisches Mittel zwischen (I_m) und (U_m) zu berechnen, was eine große Erleichterung gewährt. Eine nähere Betrachtung macht aber selbst die Berechnung der einzelnen Werthe

*) Man kann sich davon etwa so überzeugen: Es sey $a = b^2$, und $d = 2bm + m^2$, wo also, damit d sehr klein sey, m ein sehr kleiner ächter Bruch, und also m^2 noch weit kleiner seyn muß. Dann ist zwischen b^2 und $b^2 + 2bm + m^2$ das geometrische Mittel $= b.(b+m) = b^2 + bm$, das arithmetische aber $= b^2 + bm + \frac{1}{2}m^2$, und also das letztre nur um die sehr kleine Zahl $\frac{1}{2}m^2$ größer, als die erstre.

von (I_{1024}), (U_{1024}), (I_{2048}), (U_{2048}) u. s. w. überflüssig. Man setze nämlich, es sey

$$(I_{512}) = A + D, \qquad (U_{512}) = A,$$

so hat man, durch fortgesetzte Bestimmung arithmetischer Mittel

$$(I_{1024}) = A + \tfrac{1}{2}D, \qquad (U_{1024}) = A + \tfrac{1}{4}D$$
$$(I_{2048}) = A + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{8}D, \qquad (U_{2048}) = A + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{16}D$$
$$(I_{4096}) = A + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{16}D + \tfrac{1}{32}D, \qquad (U_{4096}) = A + \tfrac{1}{4}D + \tfrac{1}{16}D + \tfrac{1}{64}D.$$

Man überzeugt sich hieraus, daß die Reihe der (U) sich immer mehr dem Grenzwerthe

$$A + D \cdot \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \ldots\right)$$

nähert, wobei das Eingeklammerte eine ins Unendliche fortschreitende geometrische Progression ist. Es ist aber der Werth dieser Progession $= \tfrac{1}{3}$; also nähern sich die Werthe der (U) dem Grenzwerthe

$$A + \tfrac{1}{3}D.$$

Dieser Grenzwerth der (U) ist aber auch der Exponent des Verhältnisses des Quadrates des Radius zum Kreisinhalte, und also dieser Verhältnißexponent $= A + \tfrac{1}{3}D$. Nun ist aus den Werthen von (I_{512}) und (U_{512})

$$D = 0,318\,317\,876 - 0,318\,305\,891 = 0,000\,011\,985$$
$$\tfrac{1}{3}D = 0,000\,003\,995$$

also jener Verhältnißexponent

$$= 0,318\,309\,886.$$

Hieraus kommt nun

$$\text{das Reciproke} = \frac{1}{0,\,318\,309\,886} = 3,141\,592\,655,$$

wo nur die letzte Ziffer unzuverlässig ist, als Exponent des Verhältnisses des Kreisinhalts zum Quadrate des Radius.

Anm. Auch dieses Resultat stimmt mit der Zahl π bis zur vorletzten Ziffer überein.

§. 550. Daß die Zahl, welche das Verhältniß des Kreisinhalts zum Quadrate des Radius ausdrückt, der Zahl π, d. h. dem Verhältnißexponenten der halben Peripherie zum Radius gleich seyn muß, erhellt aus dem Lehrsatze: Der Inhalt eines Kreises ist dem halben Producte, oder Rechtecke, aus seinem Umfange und dem Radius gleich.

Beweis. Ein gleicher Satz gilt für jedes dem Kreise umschriebene Vieleck, es sey regelmäßig oder nicht. Denn verbindet man das Centrum mit jeder Ecke eines solchen Vielecks von n Seiten, so erscheinen n Dreiecke, die, wenn man die Seiten des Vielecks als Grundlinien betrachtet, alle den Radius zur Höhe haben, so daß die Summe ihrer Inhalte der halben Summe ihrer Seiten, multiplicirt mit dem Radius, gleich seyn muß. Da man nun, durch fortwährende Vermehrung der Seitenzahl eines solchen Vielecks, dasselbe dem Kreise immer näher bringen kann, — wobei sich der Inhalt des Vielecks immer mehr dem Inhalte des Kreises, der Umfang des Vielecks immer mehr dem Umfange des Kreises nähert, und wobei jener Satz immerfort seine Gültigkeit behält, — so ist klar, daß dieser Satz auch für jene Grenzzustände, d. h. für den Umfang und den Inhalt des Kreises Statt finden muß.*)

Folgerung. Es heiße nun der Radius des Kreises R, seine Peripherie P, sein Inhalt C, so ist, der Bedeutung des Buchstaben π gemäß,

$$P = 2R . \pi.$$

*) Scheint obige Ableitung nicht streng genug, so kann man den Satz indirect beweisen. — Man findet solche indirecte Beweise z. B. in den Lehrbüchern von Legendre, Nizze, Lehmus; auch in Klügels mathematischem Wörterbuche, Art. Quadratur, Nro. 13. u. f.

Das halbe Product aus Peripherie und Radius ist also $= R^2 \pi$, und folglich

$$C = R^2 . \pi.$$

Für den Radius $= 1$ muß also der Inhalt des Kreises durch die Zahl π ausgedrückt werden, gerade so, wie es sich in den §§. 545. und 548. gefunden hat.

§. 551. Für zwei Kreise mit den Radien R, r, den Peripherien P, p, den Inhalten C, c, hat man also

$$P : p = 2R\pi : 2r\pi = R : r$$
$$C : c = R^2\pi : r^2\pi = R^2 : r^2,$$

d. h. 1) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien; 2) die Inhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Anm. Beide Sätze ergeben sich auch geradezu daraus, daß Kreise ähnliche Figuren sind, bei denen die Radien mit einander, und auch die Peripherien mit einander homolog sind.

II. Cyclometrische Aufgaben.

§. 552. Die Gleichungen

$$(1)\quad P = 2R . \pi \qquad (2)\quad C = R^2 . \pi$$

und die aus ihnen entspringenden

$$(3)\quad R = \frac{P}{2\pi} \qquad (4)\quad R = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$$

$$(5)\quad C = \frac{P^2}{4\pi} \qquad (6)\quad P = 2\sqrt{\pi} . \sqrt{C}$$

dienen zur Auflösung von sechs Aufgaben, die man so zusammenfassen kann: Von den drei Größen R, P, C ist eine gegeben; man soll irgend eine der beiden andern berechnen.

Anm. Man bezeichne den Durchmesser mit D, so daß $D = 2R$, so bekommt man aus Gl. (2)

$$C = \tfrac{1}{4}\pi . D^2.$$

Setzt man hier statt π als Näherungswerthe die Brüche 3,14 und $\frac{22}{7}$, so hat man

$$C = 0,785 \,.\, D^2 \qquad C = \frac{11}{14} D^2.$$

Aus Gl. (5) bekommt man, unter Anwendung von denselben Näherungswerthen

$$C = 0,0796 \ldots \times P^2 \qquad C = \frac{7}{88} \,.\, P^2.$$

§. 553. Man bezeichne mit Bog. (R, A) und Sect. (R, A) den Bogen und den Sector, welche in einem Kreise vom Radius R zum Centriwinkel A gehören, so ist, wegen der Proportionalität zwischen den Centriwinkeln (wovon einer auch $= 4\mathfrak{R}$ seyn kann) und den zugehörigen Bogen und Sectoren

$$P \text{ (oder } 2R.\pi) : \text{Bog. } (R, A) = 360^\circ : A,$$

und $$C \text{ (oder } R^2.\pi) : \text{Sect. } (R, A) = 360^\circ : A;$$

woher

$$(1) \quad \text{Bog. } (R, A) = \frac{A}{180^0} \,.\, R\pi$$

$$(2) \quad \text{Sect. } (R, A) = \frac{A}{360^0} \,.\, R^2\pi.$$

Nach diesen Gleichungen lassen sich die Aufgaben lösen, aus dem Radius und dem Centriwinkel den zugehörigen Bogen und den zugehörigen Ausschnitt zu berechnen. Sie können leicht so umgewandelt werden, daß sie auch Aufgaben zu lösen dienen, in welchen der Radius oder der Centriwinkel unbekannt ist.

Da der Winkel A auch in Minuten oder in Secunden gegeben seyn kann, so muß man in Gl. (1) und (2) auch die Nenner 180° und 360° oft in Minuten oder Secunden ausdrücken. Hier ist

$$180^\circ = 10800' = 648000''$$
$$360^\circ = 21600' = 1296000''.$$

Für logarithmische Rechnungen hat man
log. 180 = 2,2552725, log. 10800 = 4,0334238, log. 648000 = 5,8115750
log. 360 = 2,5563025, log. 21600 = 4,3344538, log. 1296000 = 6,1126050.

Uebrigens kann die Bestimmung eines Bogens aus einem gegebenen Centriwinkel und gegebenen Radius auch mittelst Tabellen geschehen, welche solche Bogen geradezu für den Radius $R = 1$ enthalten. Tabellen dieser Art finden sich an manchen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Wir wollen einen Bogen für $R = 1$, der zum Centriwinkel A gehört, durch $\text{arc}\, A$ bezeichnen, so ist nach (1)

$$\text{arc}\, A = \frac{A}{180^0} \cdot \pi$$

und dann $$\text{Bog.}\, A = R \,.\, \text{arc}\, A.$$

§. 554. **Aufgabe.** Es ist der Radius $= R$ und der Centriwinkel $= A$ gegeben; man soll den zugehörigen Kreisabschnitt berechnen.

Aufl. Es sey (Fig. 71.) $ZB = ZC = ZM = R$, $\angle BZC = A$, so ist $BDCM$ das zugehörige Segment, welches mit Segm. (R, A) bezeichnet werden kann. Dies Segment erscheint aber in der Figur als Differenz eines Sectors $ZBMC$ und eines Dreiecks ZBC. Es ist aber

$$\text{Sector } ZBMC = \frac{A}{360^0} \,.\, R^2 \pi$$

$$\triangle\ ZBC = \tfrac{1}{2} R^2 \,.\, \sin A$$

also (1) $$\text{Segm.}\, (R, A) = \tfrac{1}{2} R^2 \,.\, \left(\frac{A}{180^0} \cdot \pi - \sin A\right)$$

oder auch, weil $\frac{A}{180^0} \cdot \pi = \text{arc}\, A$,

(2) $$\text{Segm.}\, (R, A) = \tfrac{1}{2} R^2 \,.\, (\text{arc}\, A - \sin A).$$

Diese Formeln sind auch richtig, wenn der Centriwinkel ein erhabener ist. Man bezeichne nämlich, Fig. 71., den erhabenen Implementwinkel des hohlen W. A mit A', so ist das zugehörige Segment BDCN eine Summe des Sectors ZBNC und des Dreiecks ZBC, nun ist

$$\text{Sect. ZBNC} = \frac{A'}{360^0} . R^2 \pi$$

$$\triangle ZBC = \tfrac{1}{2} R^2 . \sin A = -\tfrac{1}{2} R^2 . \sin A' \quad (\S. 418.)$$

daher $\text{Segm. } (R, A') = \tfrac{1}{2} R^2 . (\frac{A'}{180^0} . \pi + \sin A)$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 . (\frac{A'}{180^0} . \pi - \sin A')$$

$$= \tfrac{1}{2} R^2 . (\text{arc} A' \quad - \sin A')$$

ganz mit obigen Gl. (1) und (2) übereinstimmend.

Man bezeichne den Werth des zum Centriwinkel A gehörigen Segments in einem Kreise, dessen Radius $= 1$, mit segm. A, so hat man

$$\text{segm.} A = \tfrac{1}{2} . (\frac{A}{180^0} . \pi - \sin A) = \tfrac{1}{2} . (\text{arc} A - \sin A).$$

Es ist also $\quad \text{arc} A - \sin A = 2 . \text{segm.} A$

und $\quad \text{Segm.} (R, A) = R^2 . \text{segm.} A,$

Hienach könnte die Bestimmung eines Segments durch Tabellen vereinfacht werden, welche die Werthe von segm. A für eine Menge von Winkeln enthalten müßten.

Zusatz. Aus Gl. (1) und (2) kann man auch leicht die Aufgabe lösen, den Radius R zu bestimmen, wenn der Inhalt des Segments und der Centriwinkel A gegeben ist. Viel schwerer ist die Berechnung des Centriwinkels aus dem Segmente und dem Radius. Man muß dabei eine indirecte Rechnungsmethode*) anwenden, bei der man zuerst dem gesuchten Winkel einen oder mehre Werthe beilegt, von denen

---

*) Auch bei vielen andern Rechnungsaufgaben ist eine solche indirecte Rechnungsmethode anwendbar, die man auch wohl mit dem Namen Regel des falschen Satzes (regula falsi, règle de fausse position) bezeichnet.

man glaubt, daß sie sich einigermaßen dem wahren Werthe nähern, dann dieselben mittelst der Gl. (1) oder (2) prüft, hierauf dieselben durch Correction dem wahren Werthe näher zu bringen sucht, und überhaupt so lange Correctionen anbringt, bis man sich dem richtigen Werthe hinreichend genähert hat. Das dabei anzuwendende Princip der Correction bestehet, ähnlich dem Principe, welches dem Interpoliren nach §. 405. VII. zu Grunde liegt, in dem Satze: Bei kleinen Aendrungen eines Centriwinkels A verhalten sich die Aendrungen der Größe segm. A ziemlich genau so, wie die Aendrungen des Winkels A selbst.

Beispiel. Der Radius sey $= 6$, der Inhalt des Segments $= 7,2$, so hat man

$$7,2 = 18 \,.\, (\text{arc}\, A - \sin A) = 18 \,.\, \text{segm.}\, A,$$

daher $\text{segm.}\, A = \text{arc}\, A - \sin A = 0,4.$

Man könnte nun als Annäherungswerthe an A die Winkel 70° u. 80° versuchen. Dabei findet man

$$\begin{array}{ll} \text{arc}\ 70^0 = 1,22173 & \text{arc}\ 80^0 = 1,39626 \\ \underline{\sin\ 70^0 = 0,93969} & \underline{\sin\ 80^0 = 0,98481} \\ \text{segm.}\ 70^0 = 0,28204 & \text{segm.}\ 80^0 = 0,41145. \end{array}$$

Es ist daher 70° viel zu klein, 80° etwas zu groß. Man versuche nun 79°. Hier ist

$$\begin{array}{l} \text{arc}\ 79^0 = 1,378\,8101 \\ \underline{\sin\ 79^0 = 0,981\,6271} \\ \text{segm.}\ 79^0 = 0,397\,1830 \ \text{um}\ 0,002\,8170\ \text{zu klein.} \end{array}$$

Jetzt setze man $A = 79^0\, x'$ (d. h. x Minuten), so ergiebt sich, zur nähernden Bestimmung von A, dem oben angegebenen Principe gemäß,

$$(\text{segm.}\ 80^0 - \text{segm.}\ 79^0) : (\text{segm.}\, A - \text{segm.}\ 79^0) = 60 : x$$

oder $$0,01427 : 0,002817 = 60 : x,$$

daher ungefähr $x = \dfrac{16902}{1427} = 11,8.$

Also ist näherungsweise $A = 79^0\ 12'$.

Um weiter zu corrigiren, berechnet man

$$\text{segm.}\ 79^0\ 12' = 0,4000\,136 \ \text{um}\ 0,000\,0136\ \text{zu groß.}$$

Nun kann man so schließen: Wollte man den Winkel $79^0\,12'$ um 1 Min. oder 60 Sec. abnehmen lassen, so würde der arc. um

$$\text{arc }1' = 0{,}000\,2909,$$

der Sinus aber um

$$(\sin 79^0\,12' - \sin 79^0\,11') = 0{,}000\,0545$$

abnehmen, folglich segm. $79^0\,12'$ um die Differenz dieser Zahlen, also um

$$0{,}000\,2364.$$

Da nun segm. $79^0\,12'$ um 0, 000 0136 abnehmen soll, so muß der Winkel um $\frac{136}{2364}$ Minuten, oder um $\frac{8160}{2364} = 3{,}45$ Secunden abnehmen. Es ist also näherungsweise

$$A = 79^0\,11'\,56'',5.$$

§. 555. Von den Peripherien zweier concentrischen Kreise wird ein Flächenraum begrenzt, den man einen **Ring** nennt.

Die **Aufgabe**, den Inhalt eines Ringes zu berechnen, ist leicht zu lösen. Derselbe ist der Unterschied der Inhalte beider Kreise; folglich, wenn der größere Radius R, der kleinere r ist, hat man

$$\text{Ring }(R, r) = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,.\,\pi$$

oder zu bequemerer logarithmischer Rechnung

$$\text{Ring }(R, r) = (R + r)\,.\,(R - r)\,.\,\pi.$$

Zusatz. Diese Formeln dienen überhaupt, um den Inhalt der zwischen den Peripherien zweier Kreise liegenden Fläche zu berechnen, wenn nur der eine Kreis ganz vom andern eingeschlossen wird, auch ohne daß sie concentrisch sind.

§. 556. Zwei sich schneidende Kreise theilen einer den andern in zwei Bogen. Dadurch entstehen vier Flächenräume, jeder durch einen Bogen des einen und einen Bogen des andern Kreises begrenzt. Nämlich, heißen die Bogen, in welche der erste Kreis getheilt wird, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, die, in welche der andre getheilt ist, b und b′, so hat man 1) einen Flächenraum, begrenzt von $\mathfrak{B}$ und b, 2) einen Flächenraum, begrenzt von $\mathfrak{B}$ und b′, 3) einen Fl., begrenzt von $\mathfrak{B}'$ und b,

4) einen Fl., begrenzt von B' und b'. Jeden solchen Flächenraum wollen wir eine Lunula, ein Möndchen nennen, obschon gewöhnlich diesem Worte ein etwas engerer Sinn beigelegt wird.

Die Berechnung des Inhaltes einer Lunula kommt auf die Berechnung der Segmente (§. 554.) zurück, indem jede Lunula, sobald die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise zwischen ihren Schnittpunkten gezogen ist, entweder als Summe oder als Differenz zweier Segmente erscheint.

Die vier Lunulae sind bestimmt, sobald die Radien der beiden Kreise gegeben sind, nebst der Entfernung ihrer Mittelpunkte. Nun seyen die Mittelpunkte M, m, die Radien R, r, die Entfernung der Mittelpunkte $Mm = d$, die Schnittpunkte der Kreise S, S' (Fig. 72.); dann kann man zuerst aus d, R, r, als Seiten des $\triangle MmS$, die Winkel SMm, SmM und die zweimal so großen SMS', SmS' berechnen. Es sey nun $\angle SMS' = A$, $\angle SmS' = a$, ihre Implemente also $360° - A$ und $360° - a$; dann giebt die Sehne SS' im ersten Kreise die Segmente

$$\text{Segm.}\ (R, A) = \tfrac{1}{2} R^2 . (\text{arc} A - \sin A)$$

$$\text{Segm.}\ (R, 360°-A) = \tfrac{1}{2} R^2 . (\text{arc}(360°-A) - \sin(360°-A))$$

wo aber auch $\text{arc}(360° - A) = 2\pi - \text{arc} A$ und $-\sin(360° - A) = +\sin A$. Eben so hat man im zweiten Kreise die Segmente

$$\text{Segm.}\ (r, a) = \tfrac{1}{2} r^2 . (\text{arc}\, a - \sin a)$$

$$\text{Segm.}\ (r, 360°-a) = \tfrac{1}{2} r^2 . (\text{arc}(360°-a) - \sin(360°-a))$$

wo auch $\text{arc}(360°-a) = 2\pi - \text{arc}\, a$, und $-\sin(360°-a) = +\sin a$.

Hierauf bekommt man

(1) Lun. $SES'e = \text{Segm.}\ (R, A) + \text{Segm.}\ (r, a)$

(2) Lun. $SES'f = \text{Segm.}\ (r, 360°- a) - \text{Segm.}\ (R, A)$

(3) Lun. $SeS'F = \text{Segm.}\ (R, 360°-A) - \text{Segm.}\ (r, a)$

(4) Lun. $SFS'f = \text{Segm.}\ (R, 360°-A) + \text{Segm.}\ (r, 360°-a)$.

Es ist zu bemerken, daß die Lun. (4) der Summe aller drei übrigen Lunulen, und daß die Summe der Lun. (1) und (4) der Summe der beiden ganzen Kreise, also $(R^2+r^2).\pi$, gleich ist.

Beispiel. Es sey $d = 15$, $R = 11$, $r = 8$ so hat man

$\angle A = 62^0\,34'\,51'',2$ $\angle a = 91^0\,8'\,45'',6$

$360^0 - A = 297^0\,25'\,8',8$ $360^0 - a = 268^0\,51'\,14'',4.$

Dann	Segm. (R, A)	=	12, 3771
	Segm. (R, 360⁰—A)	=	367, 7556
	Segm. (r, a)	=	18, 9119
	Segm. (r, 360⁰—a)	=	182, 1500.
Endlich	Lun. (1)	=	31, 2890
	(2)	=	169, 7729
	(3)	=	348, 8437
	(4)	=	549, 9056.

§. 557. I. Es sey $\triangle ABC$ in Fig. 73. ein bei C rechtwinkliges Dreieck. Man beschreibe über seinen drei Seiten, als Durchmessern, Halbkreise, so daß der Umfang des Halbkreises über der Hypotenuse durch C gehet, die Halbkreise über den Katheten aber ganz außerhalb des Dreiecks liegen, so entstehen zwei Segmente S′, S″ u. zwei Möndchen L′, L″. Es muß nun, nach dem Pythag. Lehrsatze in der weiteren geometrischen Form (§. 258.), der Halbkreis über der Hypotenuse der Summe der Halbkreise über den Katheten gleich seyn; dies giebt, wenn man den Inhalt des Dreiecks mit D bezeichnet,

$$S' + L' + S'' + L'' = D + S' + S'',$$

daher auch $$L' + L'' = D,$$

d. h. die Summe der beiden Lunulen ist dem rechtwinkligen Dreiecke gleich.

II. Es sey, als ein besondrer Fall, das rechtwinklige Dreieck auch gleichschenklig (Fig. 74). Dann sind die Lunulen congruent, daher die eine dem halben rechtwink. Dr. ABC, oder also dem rechtwinkl. Dr. AMC gleich, wenn M der Mittelpunkt von AB ist. Es sey nun $AM = a$, so ist $\triangle AMC = \frac{1}{2}a^2$, also auch $L = \frac{1}{2}a^2$.

Anm. Man findet dies auch so: Es ist $AC = a.\sqrt{2}$, der Radius des Kreises über AC also $= \frac{1}{2}\sqrt{2}.a$ folglich der ganze Kreis $= \frac{1}{2}.a^2\pi$, der Halbkreis $= \frac{1}{4}a^2\pi$. Eben so groß ist aber auch der Quadrant AMC mit dem Radius a, folglich, wenn d das Dreieck AMC bezeichnet,

$$d + S = S + L$$

also

$$d = L$$

oder

$$L = \tfrac{1}{2}a^2.$$

III. Maxima und Minima.

§. 558. Hat eine Größe den größten Werth, den sie unter gewissen Bedingungen haben kann, so heißt sie ein Maximum, hat sie den kleinsten ein Minimum.*) Man bedient sich dieser Worte jedoch vorzüglich nur dann, wenn jener größte Werth nicht unendlich groß, und dieser kleinste Werth nicht = 0 ist. Auf diese Weise läßt der Sinus nur ein Maximum zu, welches = 1; die Tangente hat aber kein Minimum und kein Maximum.

Im Früheren sind ziemlich viel Sätze über Maxima und Minima enthalten. Man sehe die §§. 532, 61, 101, 138, 139, 140, auch 179 (wo es aber in 1. statt maximum heißen muß minimum.).

Hier sollen vorzüglich Maxima und Minima der Flächenräume betrachtet werden.

§. 559. Lehrsatz. Unter allen Dreiecken, welche in zwei Seiten übereinstimmen, ist dasjenige das größte, in

---

*) In der Differentialrechnung giebt man diesen Worten einen etwas andern Sinn.

welchem die gegebenen Seiten einen rechten Winkel einschließen.

Der Beweis kann, als sehr leicht, wegbleiben.

§. 560. **Lehrsatz.** Von allen Dreiecken, welche in einer Seite und der Summe der beiden andern übereinstimmen, ist dasjenige das größte, in welchem diese andren Seiten gleich sind.

Beweis. Ist in Fig. 75. $AC + BC = AD + BD$, ferner $AC = BC$ aber nicht $AD = BD$, so ist $\triangle ABC > ABD$. Denn man beschreibe aus C mit dem Radius CA einen Kreis, der die Verlängerung von AC in K schneide, so ist $\angle ABK$ ein rechter; man verlängere KB, mache $DL = DB$, ziehe AL und fälle die Lothe CM, DN. Dann ist $AD + DL = AD + DB = AC + CB = AK$, aber $AD + DL > AL$, folglich $AK > AL$, daher auch $BK > BL$, $BM > BN$, und also, weil BM, BN die Höhen der Dreiecke ABC, ABD für die Basis AB sind, $\triangle ABC > ABD$.

§. 561. **Lehrsatz.** Von allen Dreiecken, welche in der Basis und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, ist dasjenige der größte, in welchem die diesen Winkel einschließenden Seiten gleich sind.

Beweis. Man beschreibe, Fig. 76., um $\triangle ABC$, worin $AC = BC$, einen Kreis dessen Centrum Z, und ziehe CZ bis zum Punkte E der Basis, dann hat man $\angle CAB = CBA$, Bogen $AC = B.\,BC$, daher CE lothrecht auf AB. Für ein andres Dreieck ABD, welches dieselbe Basis AB haben soll, und dessen $\angle ADB = ACB$ seyn soll, muß nun offenbar D in dem Kreisbogen ACB liegen. Fällt man nun die Lothe DK, DF, so ist $ZF < ZD$, oder $< ZC$, daher $EF < EC$ (so daß F zwischen Z und C liegen muß), also auch $DK < EC$, und daher $\triangle ABD < ABC$.

Zusatz. Zugleich hat ABC den größten Umfang. Denn man ziehe CD und verlängere AD um $DB' = DB$, so hat man $\angle CDB = \frac{1}{2} B.\,CAB = \frac{1}{2} B.\,CBA$; aber $\angle CDA = \frac{1}{2} B.\,CA$, also auch $CDB' = \frac{1}{2} B.\,CBA$, daher $\angle CDB = CDB'$ und $\triangle CDB \cong CDB'$, also $CB = CB'$, mithin $AC + BC = AC + CB' > AB'$ oder $> AD + BD$.

§. 562. **Lehrsatz.** Von allen Vielecken, welche demselben Kreise eingeschrieben sind, und gleiche Seitenzahl haben, ist dasjenige, welches gleiche Seiten hat, — also das regelmäßige, — das größte.

Beweis. Man behaupte, das Fünfeck ABCDE, Fig. 77., in welchem nicht alle Seiten gleich, sondern z. B. AB |ı BC, sey das größte Fünfeck welches dem gegebenen Kreise eingeschrieben werden könne, so zeigt sich dies als ungereimt. Denn ziehet man die Diagonale AC, und verbindet A und B mit dem Mittelpunkte B′ des Bogens AC, so ist, nach §. 561., △AB′C |ı ABC, daher auch 5E. AB′CDE |ı ABCDE; also die Annahme, ABCDE sey das größte, ungereimt.

Zusatz. Da nach dem Zusatze von §. 561. auch AB′+B′C |ı AB+BC, so zeigt sich auch, auf ähnliche Weise, daß ABCDE nicht den größten Umfang von allen Fünfecken, die dem Kreise eingeschrieben sind, haben kann. Also hat auch das regelmäßige Vieleck unter allen Vielecken in demselben Kreise und von derselben Seitenzahl den größten Umfang.

§. 563. **Lehrsatz.** Von allen nEcken, welche man aus $n-1$ gegebenen Seiten und einer beliebigen Seite bilden kann, ist dasjenige das größte, um welches sich ein Halbkreis beschreiben läßt, von welchem die nicht gegebene Seite der Durchmesser ist.

Beweis. Das Vieleck sey z. B. ein Fünfeck ABCDE (Fig. 78). Die gegebenen Seiten seyen AB, BC, CD, DE, und AE die nicht gegebene. Man ziehe EB und finde, daß ∠ABE nicht = 90°, so wird, wenn man ein andres Dreieck A′BE bildet, so daß A′B = AB und ∠A′BE = 90°, das △A′BE |ı ABE (§. 559.) und folglich auch A′BCDE |ı ABCDE seyn. Eben so wird das 5E. ABCDE eine Vergrößerung zulassen, wenn nicht ∠ACE = R; denn dann könnte man die Dreiecke ABC, CDE, ohne sie sonst zu ändern, so an einander legen, daß ∠ACE = R würde, dann würde das △ACE und auch das Fünfeck eine Vergrößerung erfahren haben. Auf gleiche Weise muß auch ∠ADE = 90° seyn, wenn sich das Fünfeck nicht soll vergrößern lassen. Sind aber die Winkel ABE, ACE, ADE alle rechte Winkel, so läßt sich um das Fünfeck ein Kreis beschreiben, von dem AE der Durchmesser ist. Also nur wenn dies der Fall ist, ist das Fünfeck das größte, indem es keine weitre Vergrößerung zuläßt.

Ganz auf ähnliche Weise kann man auch bei einem Vielecke von einer andern Seitenzahl schließen.

Zusatz. Heißen die Seiten des Fünfecks AB, BC, CD, DE nach der Reihe a, b, c, d und der Durchmesser AE heißt D, so findet sich aus Fig. 79, daß, wenn

$$(1)\quad \sin\mathfrak{A} = \frac{a}{D},\quad \sin\mathfrak{B} = \frac{b}{D},\quad \sin\mathfrak{C} = \frac{c}{D},\quad \sin\mathfrak{D} = \frac{d}{D}$$

die Gleichung gilt $(2)\quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 90^0.$

Dies giebt ein Mittel zur Berechnung von D, wenn a, b, c, d gegeben sind. Diese Berechnung kann aber bequem auf indirecte Weise geschehen (vergl. §. 554.) Wenn man dabei in den Gleichungen (1) D zu groß nimmt, so werden die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ zu klein, und daraus kommt in (2) die Summe kleiner als 90^0. Das Gegentheil findet Statt, wenn man dem D einen zu kleinen Werth beilegt.

D ist jedoch nur von der Größe der a, b, c, d, nicht von der Ordnung abhängig, in der sie sich berühren. Denn man kann z. B. in demselben Halbkreise die Sehne $AB' = b$ machen, dann wird $B'C = a$ seyn u. s. w. Auch ergiebt sich dasselbe aus den Gl. (1) und (2). Aber selbst der Flächeninhalt des Vielecks, welcher

$$= \tfrac{1}{8} D^2 . (\sin 2\mathfrak{A} + \sin 2\mathfrak{B} + \sin 2\mathfrak{C} + \sin 2\mathfrak{D}),$$

ist nicht von der Ordnung der Seiten a, b, c, d abhängig, und daher gilt: Stimmen bei zwei Fünfecken 4 Seiten in Hinsicht der Größe, wenn auch nicht in der Ordnung überein, und die fünfte Seite ist bei jedem der Durchmesser eines Halbkreises, in welchen die Fünfecke eingeschrieben sind, so sind auch diese fünften Seiten und die Inhalte der Fünfecke einander gleich; — kommt noch gleiche Ordnung der Seiten a, b, c, d hinzu, so sind die Fünfecke sogar congruent.

Ganz ähnlich ist es bei jeder andern Seitenzahl der Vielecke.

§. 564. **Lehrsatz. Unter allen Vielecken, die in allen Seiten übereinstimmen, ist dasjenige das größte, um welches ein Kreis beschrieben werden kann.**

Beweis. Die beiden Fünfecke ABCDE u. A'B'C'D'E' (Fig. 80) mögen in allen Seiten übereinstimmen, so daß $AB = A'B'$ u. s. w., und um das erste ein Kreis sich beschreiben lassen, um das zweite nicht. Man ziehe im ersten einen Durchmesser AF, und verbinde dessen Endpunkt F mit den in der Kreislinie zunächst liegenden Ecken C und D. Ueber $C'D'$ bilde man $\triangle C'D'F' \cong CDF$ und ziehe $A'F'$. Dann ist nach §. 563. das Vieleck $ABCF > A'B'C'F'$, den Fall ausgenommen, wo auch um dieses ein Halbkreis mit dem Durchmesser $A'F'$ beschrieben werden kann, in welchem Falle $ABCF \cong A'B'C'F'$. Eben so ist $AEDF > A'E'D'F'$, ausgenommen in dem Falle, wo auch $A'E'D'F'$ ein Viereck im Halbkreise und also mit AEDF congruent wäre. Es wird aber nicht zugleich $ABCF \cong A'B'C'F'$ und auch $AEDF \cong A'E'D'F'$ seyn, denn dann wäre auch $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$, und auch um $A'B'C'D'E'$ ließe sich ein Kreis beschreiben, was doch nach der Annahme nicht seyn soll. Es wird also seyn

$$ABCF + AEDF > A'B'C'F' + A'E'D'F'$$

oder $\qquad ABCFDE > A'B'C'F'D'E'$.

Hievon abgezogen $\qquad \triangle CFD = \triangle C'F'D'$

bleibt $\qquad ABCDE > A'B'C'D'E'$.

Zusatz. Sind die Seiten AB, BC, CD, DE, EA nach der Reihe $= a, b, c, d, e$, und der Durchmesser des Kreises $= D$, so hat man: Wenn

$$(1)\quad \sin\mathfrak{A} = \frac{a}{D},\quad \sin\mathfrak{B} = \frac{b}{D},\quad \sin\mathfrak{C} = \frac{c}{D},$$
$$\sin\mathfrak{D} = \frac{d}{D},\quad \sin\mathfrak{E} = \frac{e}{D},$$

so ist $\quad (2)\quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} = 180^0$.

Diese Gleichungen machen eine Berechnung von D aus den 5 Seiten des 5Ecks möglich. Uebrigens ist D bloß von der Größe der Seiten, nicht von ihrer Ordnung abhängig, und eben so der Inhalt, welcher

$$= \tfrac{1}{8} D^2 . (\sin 2\mathfrak{A} + \sin 2\mathfrak{B} + \sin 2\mathfrak{C} + \sin 2\mathfrak{D} + \sin 2\mathfrak{E}).$$

§. 565. Lehrsatz. Unter allen Vielecken von demselben Umfange und derselben Seitenzahl ist das regelmäßige am größten.

Beweis. Es ist erstens nothwendig, daß die Seiten des größten die gegebenen Bedingungen erfüllenden Vielecks alle gleich sind. Denn hat ein Vieleck, z. B. das Fünfeck ABCDE (Fig. 81.) nicht alle Seiten einander gleich, so hat es gewiß wenigstens ein Paar sich berührende ungleiche Seiten, etwa AB, BC. Dann giebt es über der Diagonale AC ein Dr. AB′C, welches AB′ = B′C, und die Summe AB′+B′C = AB+BC hat; hier ist (§. 560.) △AB′C |ı ABC, also auch 5Eck AB′CDE |ı ABCDE, während doch beide denselben Umfang haben. Es ist also ABCDE nicht das größte Fünfeck mit diesem Umfange.

Zweitens ist nothwendig, daß um das Vieleck sich ein Kreis beschreiben läßt, dies erhellt aus §. 564.

Aus Beidem zusammen genommen folgt endlich die Wahrheit des Lehrsatzes.

§. 566. Lehrsatz. Soll mit einer Linie, deren Länge gegeben, deren sonstige Beschaffenheit aber nicht gegeben ist, und mit einer geraden Linie, deren Länge nicht gegeben ist, das Maximum des Flächenraums eingeschlossen werden, so muß die Figur ein Halbkreis seyn, von welchem die gerade Linie der Durchmesser, die der Länge nach gegebene Linie aber die halbe Kreisperipherie ist.

Der Beweis ist dem von §. 563. ähnlich. Ein Flächenraum (Fig. 82.) sey von einer geraden Linie AB und einer andern Linie AMNPB begrenzt. Ein beliebiger Punkt N dieser Linie gebe, mit A und B verbunden, einen Winkel ANB, der nicht = 90°, so wird der Flächenraum von AMNPB nicht der größte seyn können, welcher von einer nicht gegebenen Geraden und einer Linie, welche = AMNPB, begrenzt werden kann; denn man könnte, wegen §. 559., sogleich einen größeren Flächenraum hervorbringen, wenn man die Lage der Flächenräume AMN und BPN so ändern wollte, daß ∠ANB = 90° würde. Es muß also, damit der Flächenraum AMNPB ein Maximum sey, die Linie von nicht gegebener Art so beschaffen seyn, daß jeder ihrer Punkte, mit A und B verbunden, einen rechten Winkel gebe, oder also, sie muß eine halbe Kreisperipherie seyn.

§. 567. Lehrsatz. Unter allen Flächenräumen, welche gleichen Umfang haben, ist die Kreisfläche am größten.

Beweis. In Fig. 83. mögen die Kreisfläche AKBL und eine andre davon verschiedene Figur CMDN gleichen Umfang haben. Im Kreise ziehe man einen Durchmesser AB, und in der andern Figur eine Gerade CD, welche deren Umfang in zwei gleich lange Theile CMD und CND theile. Dann hat man die Linie AKB = CMD u. ALB = CND. Nach vorigem §. ist nun die Fläche AKB |ı CMD, ausgenommen, wenn CMD auch ein Halbkreis, und also mit AKB congruent wäre; eben so ist die Fläche ALB |ı CND, ausgenommen, wenn auch CND ein Halbkreis, folglich mit ALB congruent wäre. Es kann aber nicht zugleich CMD und auch CND ein Halbkreis seyn; denn dann wäre der Kreis der andern ganzen Figur congruent, der Annahme zuwider. Es ist daher

Fl. AKB + ALB |ı Fl. CMD + CND

oder AKBL |ı CMDN.

§. 568. **Lehrsatz.** **Unter allen Flächenräumen, die von einer auch in Hinsicht der Länge gegebenen Geraden und einer Linie von gegebener Länge aber nicht gegebener Art eingeschlossen werden können, ist das Kreissegment am größten, das aus der gegebenen geraden Linie, als Sehne, und der Linie von gegebener Länge, als Bogen, gebildet werden kann.**

Beweis. In Fig. 84. sey AKB das aus der gegebenen Geraden AB und einem Bogen AKB von der gegebenen Länge gebildete Segment, A′B′K′ aber ein Flächenraum andrer Art, wovon die Gerade A′B′ = AB und die Linie A′K′B′ = dem Bogen AKB. Man vervollständige in der ersten Figur den Kreis, und beschreibe über A′B′ ein Segment A′L′B′ = ALB, was möglich ist, weil A′B′ = AB. Dann ist, nach vorigem §., die Kreisfläche AKBL |ı A′K′B′L′. Hievon ziehe man ab Segm. ABL = Segm. A′B′L′, so bleibt Segm. ABK |ı Fläche A′B′K′.

* * *

§. 569. Zwei Figuren seyen einander ähnlich. Der Inhalt der einen sey = F, der der andern = f; der Umfang der ersten = P, der der andern = p. Dann hat man, nach §. 247.,

$$\frac{F}{f} = \left(\frac{P}{p}\right)^2 = \frac{P^2}{p^2}$$

also

$$\frac{P^2}{F} = \frac{p^2}{f}.$$

Hienach giebt es für ähnliche Figuren eine constante Zahl, die das Verhältniß des Quadrates des Umfangs zum Flächeninhalte ausdrückt. Man bezeichne sie mit C, so daß

$$C = \frac{P^2}{F}.$$

Es ist also diese Zahl C bei jeder Figur von der Form derselben, nicht ihrer absoluten Größe, abhängig.

Beispiele. 1) Für den Kreis ist $F = R^2\pi$, $P = 2R\pi$, daher

$$C = \frac{4R^2\pi^2}{R^2\pi} = 4\pi = 12,56637\ldots$$

2) Für das Quadrat, dessen Seite a heiße, ist $F = a^2$, $P = 4a$, also

$$C = \frac{16\,a^2}{a^2} = 16.$$

3) Für ein Rechteck, dessen eine Seite zweimal so lang wie die andre, ist, wenn die kürzere Seite $= a$, $F = 2a^2$, $P = 6a$, also

$$C = \frac{36\,a^2}{2a^2} = 18.$$

4) Für das gleichseitige Dreieck, dessen Seite $= a$, ist $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,.\,a^2$, $P = 3a$, also

$$C = \frac{9a^2}{\frac{1}{4}\sqrt{3}\,.\,a^2} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} = 20,78461.$$

§. 570. I. Haben zwei Figuren gleichen Umfang, so ist der Flächeninhalt derjenigen der größere, deren Zahl C die kleinere ist.

II. Haben zwei Figuren gleichen Inhalt, so ist der Umfang derjenigen der größere, deren Zahl C die größere ist.

Beweis. Der Inhalt, der Umfang und die Zahl der einen Figur seyen F, P, C, der andern F′, P′, C′. Dann ist

$$C = \frac{P^2}{F}, \qquad C' = \frac{P'^2}{F'}.$$

Ist nun C |ı C', so hat man

$$\frac{P^2}{F} \;|\text{ı}\; \frac{P'^2}{F'}.$$

Es sey nun, wie in I., $P = P'$, also auch $P^2 = P'^2$, so muß auch $F < F'$ seyn.

Es sey, wie in II., $F = F'$, so muß $P^2 > P'^2$, also auch $P > P'$ seyn.

§. 571. **Lehrsatz.** Für das regelmäßige Vieleck von n Seiten ist

$$C = 4n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}.$$

Beweis. Man nenne den Radius des eingeschriebenen Kreises R, so ist, nach §. 536 und 542,

$$P = 2n \cdot R \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}, \qquad F = n \cdot R^2 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}.$$

Also $$C = \frac{4n^2 \cdot R^2 \cdot \left(\mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}\right)^2}{n \cdot R^2 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}} = 4n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}.$$

Beispiele. Hienach ist:

Für $n = 3$, $C = 12 \cdot \mathrm{tg}\,60^0 = 12 \cdot \sqrt{3} = 20{,}78461$ (wie §. 569. Beisp. 4.

Für $n = 4$, $C = 16 \cdot \mathrm{tg}\,45^0 = 16$ (wie §. 569. Beisp. 2.)

Für $n = 5$, $C = 20 \cdot \mathrm{tg}\,36^0 = 14{,}53085$

Für $n = 6$, $C = 24 \cdot \mathrm{tg}\,30^0 = 8 \cdot \sqrt{3} = 13{,}85641$

§. 572. **Lehrsatz.** Von zwei regelmäßigen Vielecken, die gleichen Umfang haben, ist dasjenige das größere, dessen Seitenzahl die größere ist.

Beweis. Wenn mit C_m und C_n der constante Quotient für das regelm. m Eck und das regelm. n Eck bezeichnet wird, so ist, nach §. 571.,

$$C_m = 4m \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{m}, \qquad C_n = 4n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}.$$

Es sey nun $n > m$, so ist, nach §. 537,

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}} > \frac{\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{\frac{2\mathfrak{R}}{n}} \quad \text{oder} \quad > \frac{n}{m}$$

folglich $$\frac{m \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{m}}{n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}} > 1$$

und $\quad m \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{m} \quad > \quad n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}$

also auch $\quad 4m \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{m} \quad > \quad 4n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\mathfrak{R}}{n}$

oder $\quad C_m \quad > \quad C_n$.

Hieraus folgt, mittelst des Satzes von §. 570. I., daß, bei gleichem Umfange, das regelmäßige n Eck einen größeren Inhalt hat, als das regelmäßige m Eck, wenn $n > m$.

Anhänge.

Anhang I.

Ueber die Anzahl der ein Vieleck bestimmenden Größen oder Gleichungen.

Man denke, es sey von einem Dreiecke zunächst bloß die Bestimmungsart durch seine drei Seiten bekannt, so müssen die übrigen im Dreiecke vorkommenden Größen Functionen seiner drei Seiten seyn, oder aus diesen drei Seiten eines Dreiecks müssen die übrigen Größen berechnet werden können. Die drei aus den Ecken zu den Seiten gefällten Lothe im Dreiecke ABC (Fig. 85.) mögen AE, BF, CD, der Inhalt des Dreiecks F, der Radius des umschriebenen Kreises R, der des eingeschriebenen Kreises r heißen; endlich seyen die als gegeben angenommenen Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, so hat man bekanntlich die Gleichungen

(1) $AD = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$ (2) $DB = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$

(3) $BE = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ (4) $EC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

(5) $CF = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ (6) $FA = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}$

$$(7)\quad AE = \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

$$(8)\quad BF = \frac{1}{2b} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

$$(9)\quad CD = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

$$(10)\quad F = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

$$(11)\quad \cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$$

$$(12)\quad \cos B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$$

$$(13)\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$(14)\quad R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}}$$

$$(15)\quad r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Jede dieser Gleichungen enthält außer den drei Seiten noch ein viertes Stück, und dient daher, dieses aus den Seiten zu berechnen. Es hätten leicht noch eine Menge solcher Gleichungen, in Beziehung auf andre bei dem Dreiecke vorkommende Größen, aufgestellt werden können.

Man begreift nun:

1) Sind für ein Dreieck 2 Seiten und 1 andre Größe, oder 1 Seite und 2 andre Größen, oder nur 3 andre Größen gegeben, so wird man, im Allgemeinen, die unbekannten Seiten berechnen können, und also wird auch durch die drei gegebenen Größen das Dreieck bestimmt seyn.

Es sey z. B. die Seite c nebst den Lothen AE, BF gegeben, dann wird man die Gleichungen (7) u. (8) benutzen können, um die noch unbekannten Seiten a und b zu berechnen; dann hätte man die drei Seiten, und das Dreieck wäre bestimmt; also wird dasselbe auch durch c, AE, BF bestimmt.

Würden die drei Lothe AE, BF, CD gegeben, so könnte man aus (7), (8) u. (9) die Seiten berechnen (§. 374). Es würde also das Dreieck auch durch die Lothe bestimmt seyn.

2) Würden weniger als drei Größen, z. B. nur zwei, gegeben, so könnte das Dreieck nicht dadurch bestimmt seyn. Denn sollte z. B. das Dreieck aus den zwei Lothen AE, BF bestimmt seyn, so müßten sich daraus die Seiten berechnen lassen; man hätte aber für diese drei Unbekannten nur die zwei Gleichungen (7) u. (8), welche dazu nicht genügen würden. Oder auch, wohl noch genauer geschlossen, so: Sollten die Lothe AE, BF das Dreieck bestimmen, so müßten sich daraus die Seiten a, b berechnen lassen; es müßte also eine Gl. zwischen a, AE, BF, und eine andre zwischen b, AE, BF geben. Dann würde man aber, wenn nur c und b gegeben wären, aus diesen Gleichungen auch AE, BF berechnen können, während doch, vermöge (7) u. (8), AE u. BF nur aus den drei Seiten berechnet werden können.

Daher sind Aufgaben, ein Dreieck aus zwei gegebenen Stücken zu construiren, unbestimmte, indem bei ihnen unendlich viele auflösende Dreiecke möglich sind. Ist unter den zwei gegebenen Stücken eine Seite, und wird dieselbe auch angesehen als der Lage nach gegeben, so muß der gegenüberliegende Eckpunkt des Dreiecks in einer bestimmten Linie, als einem geometrischen Orte liegen. — Aufgaben dagegen, bei denen ein Dreieck aus drei gegebenen Stücken construirt werden soll, sind im Allgemeinen bestimmte, weil bei ihnen nur eine endliche Menge auflösender Dreiecke möglich sind, wenn auch nicht gerade bloß ein einziges. Es mag hier bemerkt werden, daß selbst die Aufgabe, ein Dreieck aus den drei Seiten zu construiren, als eine Aufgabe mit zwei auflösenden Dreiecken angesehen werden kann, indem, wenn man eine Seite als Basis zeichnet, dann die Spitze durch Beschreiben zweier Kreise bestimmt, die zwei verschiedenen Schnittpunkte dieser Kreise doch zwei Dreiecke hervorbringen, welche wenigstens der Lage nach verschieden sind. Will man aber diese Verschiedenheit der Lage nicht berücksichtigen, so hat diese Aufgabe nur ein auflösendes Dreieck, weil jene beiden Dreiecke congruent sind.

3) Es wäre unerlaubt, mehr als drei Größen für das Dreieck zu geben, da schon drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Seiten a, b, c als Unbekannte genügen.

Man weiß also, daß ein Dreieck nur durch drei gegebene Stücke zu bestimmen ist. Keineswegs würden aber jede drei gegebene Stücke das Dreieck bestimmen; sollen drei Stücke das Dreieck bestimmen, so müssen sie unabhängig von einander seyn. Folgendes giebt Beispiele für drei Größen, die abhängig von einander sind, und deshalb nicht zur Bestimmung eines Dreiecks dienen:

1) Die drei Winkel. Diese sind wegen der Gleichung

$$A + B + C = 2\mathfrak{R}$$

abhängig von einander. Mittelst dieser Gleichung kann zwar ein Winkel aus den zwei andern, aber keineswegs eine Seite berechnet werden. Wenn wir Gleichungen von der Art wie die obigen 15, welche vier Größen enthalten, und daher dienen, aus drei gegebenen die vierte zu berechnen, Hauptgleichungen, Hauptformeln, nennen, so können wir einer Gleichung, wie $A + B + C = 2\mathfrak{R}$, den Namen einer Nebengleichung, Nebenformel beilegen.

2) Eine Seite, z. B. a, das zugehörige Loth AE, und der Inhalt F.

Nebenformel: $F = \frac{1}{2} a \cdot AE$.

3) Der Umfang P, der Inhalt F, der Radius des eingeschriebenen Kreises, r.

Nebenformel: $F = \frac{1}{2} r . P$ (§. 279.)

4) Eine Seite, z. B. a, der Winkel gegenüber, A, der Radius des umschriebenen Kreises R.

Nebenformel: $a = 2R . \sin A$ (§. 434.)

5) Die Radien R, r des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises, und die Entfernung ihrer Mittelpunkte D.

Nebenformel: $D^2 = R . (R - 2r)$ (§. 526. I.)

Auch §. 526. II. würde Aehnliches geben.

Die hier betrachteten Nebenformeln enthalten weniger Stücke als die Hauptformeln; es giebt andre, welche mehr Stücke enthalten. So die Gleichungen

$$a = c . \cos B + b . \cos C \qquad (§. 471.)$$

$$(b + c) . \sin \tfrac{1}{2} A = a . \cos \frac{B - C}{2} \qquad (§. 475.)$$

mit 5, ja 6 Stücken. Man hat demgemäß **Nebenformeln mit Mangel** und **Nebenformeln mit Ueberfluß** zu unterscheiden.

Die Aufstellung bestimmter Stücke ist als Aufstellung von **Gleichungen** anzusehen, und es gilt im Allgemeinen: Durch drei Gleichungen, welche drei gegebene Größen enthalten, wird ein Dreieck bestimmt. So z. B. durch die Gleichungen

$$a + b = 47{,}95 \qquad A = 47^\circ 5' \qquad B = 58^\circ 43'$$

(s. §. 444.). Daher können selbst Bedingungen, in welchen gar keine Größe des Dreiecks angegeben zu seyn scheint, zur Bestimmung eines Dreiecks angewandt werden, wenn man nur dieselben in Gleichungen aussprechen kann. Z. B. soll ein Dreieck gleichschenklig, mit der Basis AB, seyn, so hat man die Gleichung

$$AC = BC \qquad \text{oder} \qquad \frac{AC}{BC} = 1.$$

Daher braucht man zur Bestimmung eines gleichschenkligen Dreiecks nur noch 2 Größen anzugeben, und man muß die Sache so ansehen, als liege im Begriffe des gleichschenkligen Dreiecks ein gegebenes Stück. Soll das Dreieck gleichseitig seyn, so hat man die zwei Gleichungen

$$\frac{AC}{AB} = 1, \qquad \frac{BC}{AB} = 1,$$

die dritte $\frac{BC}{AC} = 1$ ist von diesen beiden abhängig, und darf daher nicht mitgezählt werden. Es liegen also im Begriffe des gleichseitigen Dreiecks zwei Gleichungen, so daß zu seiner Bestimmung nur noch Angabe eines Stückes erforderlich ist.

Aehnliches muß sich in Bezug auf ein Vieleck von n Seiten durchführen lassen. Da man z. B. weiß, daß ein nEck durch seine Seiten, und durch n—3 Diagonalen, durch welche dasselbe in n—2 Dreiecke getheilt wird, bestimmt werden kann, also durch 2n—3 Stücke, so kann überhaupt ein nEck nur durch 2n—3 Stücke bestimmt werden, die aber unabhängig von einander seyn müssen. Hauptformeln für das nEck enthalten deshalb 2n—2 Stücke, so daß sie zur Berechnung eines Stücks aus 2n—3 gegebenen dienen (so die Sinusgleichungen in der Polygonometrie, s. §. 485.); Nebenformeln mit Mangel enthalten weniger als 2n—2 Stücke (so z. B. die Gleichung für die Winkel $A + B + \ldots N = 4k.R$ in §. 485.); endlich Nebenformeln mit Ueberfluß enthalten mehr als 2n—2 Größen (so die Cosinusgleichungen in §. 485.).

Wie man zur Bestimmung des Dreiecks 3 Größen gebraucht, so gebraucht man auch 3 Größen zur Bestimmung der Lage von 3 Punkten in einer Ebene. Ueberhaupt muß Alles, was über die Bestimmung eines nEcks gesagt ist, auch für die Bestimmung eines Constructs, das aus n Punkten in einer Ebene bestehet, gültig seyn, weil aus jedem solchen Constructe durch das Ziehen von n Geraden zwischen den Punkten ein n Eck, es sey im engern oder weitern Sinne (Thl. I. Anh. VII.), gebildet werden kann.

Daß ein Trapez nur vier bestimmende Stücke erfordert, während ein Viereck im Allgemeinen deren 5 nöthig macht, läßt sich daraus einsehen, daß in seinem Begriffe, wenn AB, DC die parallelen Seiten seyn sollen, die Gleichung enthalten ist

$$\angle(AB, DC) = 0,$$

da parallele Linien als solche angesehen werden können, die einen Winkel $= 0$ bilden (vgl. Thl. I. Anh. VI. No. XIII.), und daß diese eine Gl. den Begriff des Trapezes auch völlig erschöpft, indem, wenn sie Statt findet, das Viereck gewiß ein Trapez ist. Im Begriffe des Parallelogramms liegen zwei solche ihn erschöpfende Gleichungen,

$$\angle(AB, DC) = 0 \quad \text{und} \quad \angle(AD, BC) = 0,$$

daher sind zu seiner Bestimmung nur 3 Stücke nöthig. Beim Begriffe des rechtwinkligen Parallelogramms kommt noch die Gleichung $\angle A = 90°$, bei dem des Rhombus aber die Gleichung $\frac{BC}{AB} = 1$, (die Gleichungen $\angle B = 90°$ u. s. w., so wie $\frac{CD}{AB} = 1$, $\frac{DA}{AB} = 1$ sind von jenen schon, nach bekannten geometrischen Sätzen, abhängig, und deshalb nicht mitzuzählen) hinzu; folglich wird sowohl das Rechteck als der Rhombus durch 2 Stücke bestimmt. Für das Quadrat endlich hat man die 4 Gleichungen

$$\angle(AB, DC) = 0 \qquad \angle(AD, BC) = 0$$
$$\angle A = 90° \qquad \frac{BC}{AB} = 1$$

welche seinen Begriff erschöpfen, unter sich selbst aber weder in arithmetischer noch geometrischer Abhängigkeit stehen, folglich kann das Quadrat schon durch ein einziges Stück bestimmt werden. Man könnte hier übrigens auch aus den vier Gleichungen

$$\frac{BC}{AB} = 1, \quad \frac{CD}{AB} = 1, \quad \frac{DA}{AB} = 1, \quad \angle A = 90^\circ$$

welche ebenfalls den Begriff des Quadrates erschöpfen, denselben Schluß ziehen.

Ein dem Kreise eingeschriebenes n Eck $ABC \ldots MN$ (Fig. 86.) kann durch n Stücke bestimmt werden (z. B. durch seine Seiten, wie aus §. 564. folgt). Denn, indem man das Centrum Z hinzunimmt, kann man dasselbe als ein Construct aus $n+1$ Punkten betrachten, und bedarf deswegen zu seiner Bestimmung $2(n+1)-3$ d. h. $2n-1$ gegebene Größen oder Gleichungen; nun hat man, wegen der Gleichheit der Radien, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{ZB}{ZA} = 1, \quad \frac{ZC}{ZA} = 1, \quad \ldots\ldots \quad \frac{ZN}{ZA} = 1,$$

welche unter einander unabhängig sind, und auch den Begriff des n Ecks im Kreise erschöpfen, da, wenn sie Statt finden, sich ein Kreis aus Z mit dem Radius ZA beschreiben läßt, der durch alle Ecken hindurchgehet; man braucht daher zur Bestimmung des Constructs nur $(2n-1)-(n-1)$ d. h. n Größen.

Ein dem Kreise umschriebenes n Eck $ABC \ldots MN$ (Fig. 87.) kann ebenfalls durch n unabhängige Stücke bestimmt werden. Das zeigt sich so: Man fälle aus dem Centrum Z die Lothe Za, Zb... Zn auf die Seiten, so hat man ein Construct aus $2n+1$ Punkten, nämlich den Punkten A, B, ...N, a, b ... n und Z. Dies würde zur Bestimmung $2.(2n+1)-3$ d. h. $4n-1$ Stücke erfordern. Die Bedingung, daß AaB eine gerade Linie seyn soll, eben so BbC

u. s. w., und daß die Geraden Za, $Zb \dots Zn$ auf ihnen lothrecht seyn sollen, führt aber zu den $2n$ Gleichungen
$ZaA = 90°$, $ZaB = 90°$, $ZbB = 90°$, ... $ZnN = 90°$, $ZnA = 90°$, und die Bedingung, daß die Geraden Za, $Zb \dots$ gleich seyn sollen, giebt die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{Zb}{Za} = 1, \quad \frac{Zc}{Za} = 1, \quad \dots\dots \quad \frac{Zn}{Za} = 1.$$

Finden aber diese Gleichungen, deren Anzahl $= 3n-1$, wirklich Statt, so ist wirklich $ABC \dots MN$ ein nEck, in welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Es erfordert also dies Construct nur $(4n-1) - (3n-1)$ d. h. n gegebene Größen zu seiner Bestimmung.

Ein Vieleck, welches sowohl ein Vieleck in einem Kreise als ein Vieleck um einen Kreis ist, kann jedesmal durch drei Stücke bestimmt werden, seine Seitenanzahl n sey, welche sie wolle. Dies erhellt so: Heißt das Centrum des eingeschriebenen Kreises X, das des umschriebenen Z und man ziehet die Radien ZA, $ZB \dots$ und fällt die Lothe Xa, Xb, ... auf die Seiten (Fig. 88.), so hat man ein Construct aus den $2n+2$ Punkten A, B, ... N, a, b .... n, Z, X, braucht also für dasselbe $2.(2n+2) - 3$ d. h. $4n+1$ bestimmende Größen oder Gleichungen. Nun liegen in der Fordrung, daß der Kreis mit dem Centrum Z durch alle Ecken gehen soll, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{ZB}{ZA} = 1, \quad \frac{ZC}{ZA} = 1, \quad \dots\dots \quad \frac{ZN}{ZA} = 1,$$

in der Bedingung, daß AaB, BbC ... gerade Linien seyn sollen, und daß der Kreis mit dem Centrum X dieselben berühren soll, sind enthalten

die $2n$ Gl. $XaA = 90°$, $XaB = 90°$, ... $XnN = 90°$, $XnA = 90°$,

und die $n-1$ Gl. $\frac{Xb}{Xa} = 1$, $\frac{Xc}{Xa} = 1$, ... $\frac{Xn}{Xa} = 1$.

finden diese Gleichungen Statt, deren Anzahl im Ganzen $= 4n-2$, so ist die Bedingung, daß ABC ... N ein Vieleck im Kreise und um den Kreis seyn soll, erfüllt, und so wird dasselbe durch $(4n+1)-(4n-2)$ oder also 3 Stücke bestimmt.*)

Es werde folgende Aufgabe vorgelegt: Man denkt durch einen beliebigen Punkt M in der Ebene eines Dreiecks ABC (Fig. 89.) aus den Ecken die Geraden AMa, BMb, Cmc gezogen, welche die gegenüberliegenden Seiten in a, b, c schneiden; es sind die 6 Größen MA, MB, MC, Ma, Mb, Mc gegeben; man soll die Figur construiren, oder auch die übrigen Größen in derselben berechnen. — Hier kann untersucht werden, ob für dies Construct 6 die richtige Anzahl der zur Bestimmung nöthigen Stücke ist. Man betrachte die Figur als ein Construct aus den 7 Punkten A, B, C, a, b, c, M, so ist dieselbe durch 11 Stücke zu bestimmen. Wegen der Bedingung, daß AcB, BaC, CbA, ferner AMa, BMb, CMc gerade Linien seyn sollen, hat man aber die 6 Gleichungen

---

*) Es ist hier aber zu bemerken, daß der Radius des umschriebenen Kreises, der des eingeschriebenen Kreises und die Linie ZX zwischen den Mittelpunkten, obgleich drei Größen, doch ein solches Vieleck nicht bestimmen, weil sie, was auch die Seitenzahl n sey, immer in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehen, wie für das Dreieck schon in §. 526. bewiesen ist. (Vergl. C. G. J. Jacobi in Crelle's Journal, Band 3. S. 376.) Daß zwischen jenen drei Größen eine Gleichung (eine Nebenformel) Statt finden muß, ist schon daraus zu begreifen, daß, wenn $ZX=0$, das n Eck ein regelmäßiges seyn muß, bei welchem sodann die beiden Radien ein bestimmtes nur von n abhängiges Verhältniß haben.

$\angle AcB = 180°$, $\angle BaC = 180°$, $\angle CbA = 180°$,
$\angle AMa = 180°$, $\angle BMb = 180°$, $\angle CMc = 180°$.

Zur Bestimmung des Constructs bedarf man also nur noch 11—6 d. h. 5 Größen. Die Anzahl der gegebenen Stücke in obiger Aufgabe ist daher zu groß, und die Aufgabe darf gar nicht vorgelegt werden.*)

Fügt man bei dem Constructe von Fig. 89. noch die Bedingung hinzu, daß a, b, c die Mittelpunkte der Seiten seyn sollen, so hat man daraus noch zwei Gleichungen mehr, nämlich etwa $\frac{Ac}{cB} = 1$, $\frac{Ba}{aC} = 1$; die dritte dieser Art, nämlich $\frac{Cb}{bA} = 1$, ist von diesen beiden, nach §. 267. I. Zus. 3, oder auch nach §. 268., abhängig, und folglich nicht mitzuzählen. Es sind also nur noch $5 - 2 = 3$ bestimmende Stücke erforderlich. Die Aufgabe, aus Aa, Bb, Cc die übrigen Größen zu berechnen, (s. §. 378.), ist also nicht ungereimt.

*) Diese Schlußweise ist wohl genauer, als die, welche bei Betrachtung derselben Aufgabe in dem Lehrbuche der Geometrie von Lehmus (2te Auflage, Berlin 1826) angewandt wird.

Anhang II.
Von der Gleichheit der Dimensionen.

Eine Gleichung, welche als arithmetischer Ausdruck des geometrischen Zusammenhangs mehrer Linien eines Constructs, und als Darstellung eines allgemeinen Lehrsatzes angesehen werden kann, enthält eigentlich nicht die Linien selbst, sondern nur Buchstaben, als allgemeine Zeichen für Zahlenwerthe, welche sich auf eine Längeneinheit beziehen, mit der man die Linien gemessen denkt, und sie muß richtig seyn, diese Längeneinheit sey, welche sie wolle. Es enthalte nun eine solche Gleichung etwa die Buchstaben a, b, c ... als Ausdrücke der Verhältnisse der Linien eines Constructs zu der Längeneinheit. Diese Längeneinheit sey U. Man nehme jetzt, statt derselben, eine andre Längeneinheit U', und bezeichne, während das Construct sich nicht ändre, die Zahlen, welche jene Linien in Bezug auf U' ausdrücken, mit a', b', c' ..., so muß, dem Gesagten gemäß, die allgemeine Gleichung, so gut wie für die Zahlen a, b, c ..., auch für a', b', c' ... richtig seyn.

Es sey jetzt $U = n . U'$, wo die Zahl n das Verhältniß $U : U'$ ausdrückt, so werden die Linien, welche $= aU$, bU, cU ... sind, auch $= a . nU'$, $b . nU'$, $c . nU'$ ... oder $= (an) . U'$, $(bn) . U'$, $(cn) . U'$ .... seyn, oder man wird haben

$$a' = na, \qquad b' = nb, \qquad c' = nc \text{ u. s. w.}$$

So folgt: Die Gleichung, welche für a, b, c ... gültig ist, muß auch für na, nb, nc ... gelten; und daß dies wirklich der Fall ist, muß sich bei der Gleichung arithmetisch bestätigen.

Wir wollen einige wenige bekannte Gleichungen in dieser Hinsicht der Betrachtung unterwerfen.

1) Die Gleichung des Pythagorischen Satzes ist

$$(1) \qquad h^2 = a^2 + b^2,$$

wenn h die Hypotenuse, a und b die Katheten ausdrücken. Sie giebt, wenn man statt a, b, h setzt na, nb, nh, die Gleichung

$$(2) \begin{cases} \qquad (na)^2 = (na)^2 + (nb)^2 \\ \text{oder } n^2h^2 = n^2a^2 + n^2b^2. \end{cases}$$

Man siehet aber, daß wenn (1) Statt findet, auch wirklich (2) gelten muß, indem (2) aus (1) durch Multiplication mit n^2 entstehet. Die Gleichung des Pythagorischen Satzes hat also die geforderte Eigenschaft.

Als Zahlenbeispiel denke man, in Bezug auf U, $a = 3$, $b = 4$; dann ist $h = 5$, und

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Ist nun U′ nur die Hälfte von U, also $U = 2U'$ und $n = 2$, so wird $a' = 2.3 = 6$, $b' = 2.4 = 8$, $h' = 2.5 = 10$, und es ist auch

$$10^2 = 6^2 + 8^2.$$

Auch die Umwandlungen der Gleichung, z. B. $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{b^2 - h^2}$, bewähren sich bei ähnlicher Untersuchung.

2) Die Gleichung, welche den Zusammenhang der 3 Seiten eines Dreiecks und eines auf einer Seite c durch ein Loth gebildeten Abschnittes f ausdrückt, nämlich (§. 221.)

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2cf$$

giebt

$$(2) \begin{cases} \qquad (na)^2 = (nb)^2 + (nc)^2 - 2(nc) . (nf) \\ \text{oder } n^2a^2 = n^2b^2 + n^2c^2 - 2n^2 . cf \end{cases}$$

welche Gleichung ebenfalls mit (1) gleichbedeutend ist.

Gleiches zeigt sich auch bei andern Gestalten dieser Gleichung, z. B. bei

$$f = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}.$$

3) Die Gleichung für das Loth h, das aus C zur gegenüberliegenden Seite AB gefällt ist, nämlich (§. 356.)

$$h = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

zeigt dasselbe.

Man kann sich in allen diesen Fällen ausdrücken, es finde bei den Gleichungen Gleichheit der Dimensionen Statt. Man verstehe nämlich unter einem Buchstabenausdrucke von der mten Dimension einen von der Eigenschaft, daß er mit n^m multiplicirt erscheint, wenn man jeden darin vorkommenden Buchstaben mit n multiplicirt denkt, so wird in den Gleichungen

$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cf$$

jeder Ausdruck, links und rechts vom Gleichheitszeichen, von der zweiten Dimension, in den Gleichungen

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$f = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$
$$h = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}$$

jeder Ausdruck von der ersten Dimension seyn, und es wird also bei allen diesen Gleichungen Gleichheit der Dimensionen Statt finden.

Hienach würde man sogleich gewisse fehlerhafte Gleichungen als falsch erkennen. Z. B. der Zusammenhang der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks könnte nimmermehr durch $h^2 = a^2 + b^3$ ausgedrückt werden, weil der Ausdruck rechts nicht einmal eine bestimmte Dimension hätte, da seine Theile a^2 und b^3 von verschiedener Dimension wären; eben so wenig durch $h^3 = a^2 + b^2$, weil hier der Ausdruck links eine andre Dimension hätte, als der rechts.

Wir können uns also kurz ausdrücken: In einer Gleichung, welche, als Lehrsatz, den allgemeinen Zusammenhang der Linien eines Constructs darstellen soll, muß Gleichheit der Dimensionen Statt finden.

Jetzt muß noch von Gleichungen in denen Buchstaben vorkommen, welche Flächenräume bezeichnen, und Gleichungen mit goniometrischen Functionen besonders geredet werden.

Zahlen, welche Flächenräume ausdrücken, beziehen sich auf das Quadrat der Längeneinheit. Ist aber $U = nU'$, und man bezeichnet die Quadrate von U und U' mit U^2, U'^2, so hat man bekanntlich $U^2 = n^2 . U'^2$, und daher muß, wenn in einer Gleichung, für die Einheit U, ein Buchstabe, etwa F, für einen Flächenraum vorkommt, in der Gleichung für U' an die Stelle desselben treten $n^2 . F$; verfährt man übrigens wie vorher, so muß die ursprüngliche Gleichung sich mit der daraus entstehenden als gleichbedeutend zeigen. Diese Probe werden z. B. die Gleichungen aushalten, welche den Inhalt eines Dreiecks aus einer Seite, etwa b, als Basis, und dem zugehörigen Lothe h, oder aus den drei Seiten ausdrücken, nämlich

$$F = \tfrac{1}{2} bh$$

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}.$$

Man muß deshalb, während man den Buchstaben für Linien die erste Dimension zuschreibt, denen für Flächenräume die zweite beilegen.

Die goniometrischen Functionen, als Zahlen, nicht als Linien, sind bekanntlich nur von den Winkeln, nicht von einer

Längeneinheit abhängig. Deshalb müssen sie, bei Verwandlung der Einheit U in U′, durchaus keine Aendrung erfahren, und man muß ihnen deshalb die 0te Dimension, — oder also gar keine — zuschreiben. Wendet man dieses an, so werden alle Gleichungen für den Zusammenhang von Winkeln und Linien oder auch Flächenräumen, welche wir früher in Menge aufgestellt haben, die Probe aushalten, und nicht als ungereimt erscheinen; so z. B. die Gleichungen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos A$$

$$tg \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b) \, . \, (s-c)}{s \, . \, (s-a)}}$$

$$F = \tfrac{1}{2} bc \, . \sin A$$

von denen die mittlere die 0te Dimension, die beiden andern aber die zweite haben.

Einige Nachträge zum ersten Theile.

Zu §. 267. IV.

Der Satz, daß die drei Lothe, welche in einem Dreiecke aus dem Eckpunkte zu den Seiten gefällt werden, sich in einem einzigen Punkte schneiden, kann auch recht einfach so bewiesen werden.

Es mögen im Dreiecke ABC (Fig. 90.) aus A und B auf BC und AC die Lothe AM, BN gefällt, nach deren Schnittpunkte L die Linie CL gezogen und nach P verlängert, endlich die Linie MN gezogen werden. Wegen der rechten Winkel an M und N wird dann ein Kreis mit dem Durchmesser AB durch die Punkte M und N, und ein Kreis mit dem Durchmesser CL ebenfalls durch M und N gehen. Es ist also ABMN ein Viereck im Kreise, und eben so CMLN. Aus dem ersten Vierecke folgt, wegen der Gleichheit der Peripheriewinkel über gleichen Bogen $\angle BAM = BNM$, aus dem zweiten eben so $\angle BNM$ oder $LNM = LCM$, es ist folglich $\angle BAM = LCM$. Bei Vergleichung der Winkel der Dreiecke ABM, CBP findet man nun $\angle ABM = CBP$, $\angle BAM = BCP$, folglich ist auch der dritte Winkel AMB dem dritten BPC gleich. Es ist aber $AMB = \mathfrak{R}$, also auch $BPC = \mathfrak{R}$, und die durch L gezogene Linie CP stehet lothrecht auf AB. Es folgt nun leicht, daß auch umgekehrt, wenn CP lothrecht auf AB gezogen wird, diese Linie durch L hindurch gehen muß.

Zu §. 293. Anm.

Für den an dieser Stelle angeführten sehr wichtigen Satz über das Sechseck im Kreise, der von Pascal zuerst gefunden ist, und den man auch wohl mit dem Namen des Hexagrammum mysticum bezeichnet, können hier folgende zwei Beweise gegeben werden, die schon im ersten Theile dieses Werkes ihre Stelle hätten finden können.

Erster Beweis, nach Dandelin (Annales de Math. T. 14. p. 39.)

Es sey ABCDEF (Fig. 91.) das Sechseck im Kreise. Die gegenüberliegenden Seiten AB, DE mögen sich in P, die Seiten BC, EF in Q, die Seiten CD, FA in R schneiden, so ist zu beweisen, daß die Punkte P, Q, R in einer geraden Linie liegen.

Man ziehe an jedem Eckpunkte eine Berührende und bilde dadurch das Sechseck um den Kreis GHIKLM; bei diesem mögen sich die gegenüberliegenden Seiten MG, IK in U, die Seiten GH, KL in V, die Seiten HI, LM in W schneiden.

Man hat jetzt GA = GB, deshalb gehet ein Kreis mit dem Centrum G und dem Radius GA durch die Punkte A und B. Dieser Kreis heiße (G). Eben so giebt es einen Kreis (H), der durch B und C gehet, einen Kreis (I), welcher durch C und D, einen Kreis (K), der durch D und E, einen Kreis (L), der durch E und F, einen Kreis (M), der durch F und A gehet.

Ganz auf gleiche Weise giebt es drei Kreise (U), (V), (W), von denen der erste durch A und D, der zweite durch B und E, der dritte durch C und F gehet.

Jeder der 6 Eckpunkte A, B, C, D, E, F ist der gemeinschaftliche Berührungspunkt für drei Kreise. In B z. B. berühren sich die Kreise (G), (H), (V).

Es werden aber die Kreise (U) und (V) vom Kreise (G) auf ungleichartige Weise in A und B berührt; folglich wird nach §. 302. I. 2. die Linie AB, welche durch die Berührungspunkte hindurch gehet, den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise (U) und (V) treffen. — Ferner werden die Kreise (U) und (V) auch vom Kreise (K) auf ungleichartige Weise in D und E berührt, deshalb muß auch der innere Aehnlichkeitspunkt von (U) und (V) in DE liegen. — Es wird also P, als der einzige Punkt, der sowohl in AB als DE liegt, der innere Aehnlichkeitspunkt von (U) und (V) seyn.

Auf eine ganz gleiche Weise läßt sich schließen, daß auch Q der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise (V) und (W) sey.

Endlich werden die Kreise (W) und (U) vom Kreise (I) auf gleichartige Weise in C und D, und auch vom Kreise (M) auf gleichartige Weise in F und A berührt; daher muß, nach §. 302. I. 1., sowohl CD als FA durch den äußern Aehnlichkeitspunkt von (W) und (U) geben, und also muß R dieser äußere Aehnlichkeitspunkt von (W) und (U) seyn.

Nach §. 301. müssen nun aber der äußere Aehnlichkeitspunkt von (W) und (U), der innere von (U) und (V) und der innere von (V) und (W) in einer geraden Linie liegen; es liegen also die Punkte P, Q, R in einer geraden Linie.

Zweiter Beweis, nach Gergonne (Annales de Mathem. T. 17. p. 143.)

Das Sechseck im Kreise sey $aa'bb'cc'$ (Fig. 92). Es seyen

A', B', C'

die Schnittpunkte der Seitenpaare

aa' und $b'c$, bb' und $c'a$, cc' und $a'b$,

so soll bewiesen werden, daß A', B', C' in einer geraden Linie liegen.

Man bezeichne nun mit

C, A, B

die Schnittpunkte der Seitenpaare

aa' und bb', bb' und cc', cc' und aa'

Ferner betrachte man die Gerade $ac'B'$ als Transversale für das Dreieck ABC, so hat man, nach §. 269., wenn man zugleich genau das + und — beachtet (vergl. §. 387.), die Gleichung

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{Ca}{aB} \times \frac{Bc'}{c'A} = -1.$$

Eben so erhält man, wenn man, ebenfalls für $\triangle ABC$, $ba'C'$ als Transversale ansiehet,

$$\frac{BC'}{C'A} \times \frac{Ab}{bC} \times \frac{Ca'}{a'B} = -1.$$

Zuletzt ist, wenn $cb'A'$ als Transversale angesehen wird,

$$\frac{CA'}{A'B} \times \frac{Bc}{cA} \times \frac{Ab'}{b'C} = -1.$$

Mittelst §. 260. hat man $Ac.Ac' = Ab.Ab'$. Statt dieser Gleichung kann auch geschrieben werden

$$\frac{cA \, . \, c'A}{Ab \, . \, Ab'} = 1$$

und auch diese Gleichung ist in Hinsicht des + und — ganz genau. Auf gleiche Art hat man auch

$$\frac{aB \, . \, a'B}{Bc \, . \, Bc'} = 1$$

und

$$\frac{bC \, . \, b'C}{Ca \, . \, Ca'} = 1.$$

Multiplicirt man jetzt alle sechs Gleichungen, so kommt, indem sich vieles tilgt,

$$\frac{AB'}{B'C} \times \frac{CA'}{A'B} \times \frac{BC'}{C'A} = -1.$$

Hieraus folgt, wieder nach §. 269., daß A', B', C' in einer geraden Linie, einer Transversale für $\triangle$ABC, enthalten sind.

Dieser zweite Beweis hat den Vorzug, daß er schon gleich nach § 269. seinen Platz finden könnte, während der erste Sätze über Aehnlichkeitspunkte und Berührungen von Kreisen voraussetzt, und nicht früher als nach §. 302. folgen könnte.

In Bezug auf den Umfang des Satzes ist übrigens zu bemerken, daß das Sechseck auch ein Sechseck im weitern Sinne seyn kann, bei welchem sich Seiten schneiden, wie z. B. in Fig 93. das Sechseck AB'C'DE'F', das aus ABCDEF in Fig. 92. durch Vertauschung der Buchstaben B, C, E, F mit E', B', F', C' entstanden ist. Bei diesem liegen der Schnittpunkt von AB' und DE', der von B'C' und E'F', und der von C'D und F'A auch in einer geraden Linie. Man würde überhaupt 6 Punkte in der Peripherie eines Kreises zu 60 verschiedenen Sechsecken verbinden, und daraus 60 verschiedene Linien der Art wie PQR ableiten können. (Noch andre sehr merkwürdige Sätze, welche dann Statt finden würden, hat Steiner in den Annales de Mathem. T. 18. p. 339. bekannt gemacht.) Es würde dabei, zur Vervollständigung des ersten Beweises, noch nachgewiesen werden müssen, daß immer, was die Punkte P, Q, R betrifft, entweder zwei innere, und der dritte ein äußerer, oder alle drei äußere Aehnlichkeitspunkte je zweier der Kreise (U), (V), (W) seyn müßten.

Gewisse andre Beweise des Satzes gehören zur Stereometrie. Einen Beweis mittelst goniometrischen Calculs findet man in: F. Strehlke Aufgaben über das gradlinigte Dreieck, geometrisch und analytisch gelöset. Königsberg, 1826.

Uebrigens ist schon in §. 293. Anm. bemerkt, daß, mittelst der Theorie der Pole und Polaren, aus dem jetzt bewiesenen Satze noch dieser folgt: Bei jedem Sechsecke um einen Kreis schneiden sich die drei Diagonalen, welche gegenüberliegende Ecken verbinden, in einem einzigen Punkte. — Endlich mag bemerkt werden, daß es noch andre krumme Linien (die Kegelschnitte) giebt, welche dieselben Eigenschaften haben, die nach diesen zwei Sätzen dem Kreise zukommen.

Tafel
der goniometrischen Functionen.

Gr.	sin.	cosin.	tang.	cotang.	sec.	cosec.	
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	1,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	1,00015	57,29869	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	1,00061	28,65371	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	1,00137	19,10732	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	1,00244	14,33559	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	1,00382	11,47371	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	1,00551	9,56677	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	1,00751	8,20551	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	1,00983	7,18530	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	1,01247	6,39245	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	1,01543	5,75877	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	1,01872	5,24084	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	1,02234	4,80973	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	1,02630	4,44541	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	1,03061	4,13357	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	1,03528	3,86370	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	1,04030	3,62796	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	1,04569	3,42030	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	1,05146	3,23607	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	1,05762	3,07155	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	1,06418	2,92380	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	1,07114	2,79043	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	1,07853	2,66947	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	1,08636	2,55930	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	1,09464	2,45859	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	1,10338	2,36620	65
	cosin.	sin.	cotang.	tang.	cosec.	sec.	Gr.

Gr.	sin.	cosin.	tang.	cotang.	sec.	cosec.	
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	1,11260	2,28117	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	1,12233	2,20269	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	1,13257	2,13005	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	1,14335	2,06267	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	1,15470	2,00000	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	1,16663	1,94160	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	1,17918	1,88708	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53986	1,19236	1,83608	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	1,20622	1,78829	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	1,22077	1,74345	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	1,23607	1,70130	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	1,25214	1,66164	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	1,26902	1,62427	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	1,28676	1,58902	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	1,30541	1,55572	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	1,32501	1,52425	49
42	0,66913	0 74314	0,90040	1,11061	1,34563	1,49448	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	1,36733	1,46628	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	1,39016	1,43956	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	1,41421	1,41421	45
	cosin.	sin.	cotang.	tang.	cosec.	sec.	Gr.

Tafel
der Logarithmen der goniometrischen Functionen.

Gr.	log. sin.	log. cos.	log. tg.	log. cot.	log. sec.	log. cosec.	
1	8,24186	9,99993	8,24192	1,75808	0,00007	1,75814	89
2	8,54282	9,99974	8,54308	1,45692	0,00026	1,45718	88
3	8,71880	9,99940	8,71940	1,28060	0,00060	1,28120	87
4	8,84358	9,99894	8,84464	1,15536	0,00106	1,15642	86
5	8,94030	9,99834	8,94195	1,05805	0,00166	1,05970	85
6	9,01923	9,99761	9,02162	0,97838	0,00239	0,98077	84
7	9,08589	9,99675	9,08914	0,91086	0,00325	0,91411	83
8	9,14356	9,99575	9,14780	0,85220	0,00425	0,85644	82
9	9,19433	9,99462	9,19971	0,80029	0,00538	0,80567	81
10	9,23967	9,99335	9,24632	0,75368	0,00665	0,76033	80
11	9,28060	9,99195	9,28865	0,71135	0,00805	0,71940	79
12	9,31788	9,99040	9,32747	0,67253	0,00960	0,68212	78
13	9,35209	9,98872	9,36336	0,63664	0,01128	0,64791	77
14	9,38368	9,98690	9,39677	0,60323	0,01310	0,61632	76
15	9,41300	9,98494	9,42805	0,57195	0,01506	0,58700	75
16	9,44034	9,98284	9,45750	0,54250	0,01716	0,55966	74
17	9,46594	9,98060	9,48534	0,51466	0,01940	0,53406	73
18	9,48998	9,97821	9,51178	0,48822	0,02179	0,51002	72
19	9,51264	9,97567	9,53697	0,46303	0,02433	0,48736	71
20	9,53405	9,97299	9,56107	0,43893	0,02701	0,46595	70
21	9,55433	9,97015	0,58418	0,41582	0,02985	0,44567	69
22	9,57358	9,96717	9,60641	0,39359	0,03283	0,42642	68
23	9,59188	9,96403	9,62785	0,37215	0,03597	0,40812	67
24	9,60931	9,96073	9,64858	0,35142	0,03927	0,39069	66
25	9,62595	9,95728	9,66867	0,33133	0,04272	0,37405	65
	log. cos.	log. sin.	log. cot.	log. tg.	log. cosec.	log. sec.	Gr.

	log. sin.	log. cos.	log. tg.	log. cot	log. sec.	log. cosec.	
26	9,64184	9,95366	9,68818	0,31182	0,04634	0,35816	64
27	9,65705	9,94988	9,70717	0,29283	0,05012	0,34295	63
28	9,67161	9,94593	9,72567	0,27433	0,05407	0,32839	62
29	9,68557	9,94182	9,74375	0,25625	0,05818	0,31443	61
30	9,69897	9,93753	9,76144	0,23856	0,06247	0,30103	60
31	9,71184	9,93307	9,77877	0,22123	0,06693	0,28816	59
32	9,72421	9,92842	9,79579	0,20421	0,07158	0,27579	58
33	9,73611	9,92359	9,81252	0,18748	0,07641	0,26389	57
34	9,74756	9,91857	9,82899	0,17101	0,08143	0,25244	56
35	9,75859	9,91336	9,84523	0,15477	0,08664	0,24141	55
36	9,76922	9,90796	9,86126	0,13874	0,09204	0,23078	54
37	9,77946	9,90235	9,87711	0,12289	0,09765	0,22054	53
38	9,78934	9,89653	9,89281	0,10719	0,10347	0,21066	52
39	9,79887	9,89050	9,90837	0,09163	0,10950	0,20113	51
40	9,80807	9,88425	9,92381	0,07619	0,11575	0,19193	50
41	9,81694	9,87778	9,93916	0,06084	0,12222	0,18306	49
42	9,82551	9,87107	9,95444	0,04556	0,12893	0,17449	48
43	9,83378	9,86413	9,96966	0,03034	0,13587	0,16622	47
44	9,84177	9,85693	9,98484	0,01516	0,14307	0,15823	46
45	9,84949	9,84949	0,00000	0,00000	0,15051	0,15051	45
	log. cos.	log. sin.	log. cot.	log. tg.	log. cosec.	log. sec.	Gr.

Uebersicht
der wichtigsten trigonometrischen Formeln für das Dreieck, nach seinen vier Haupt-Bestimmungsarten.

I. Ist gegeben c, A, B, und $C = 180^0 - (A+B)$, so ist

$$a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin A}{\sin(A+B)}, \quad b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin B}{\sin(A+B)},$$

$$F = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2\sin(A+B)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\cot A + \cot B}.$$

Will man alle diese Größen berechnen, so dienen dazu die Gleichungen

$$1)\ D = \frac{c}{\sin C}, \qquad 2)\ a = D \cdot \sin A, \qquad 3)\ b = D \cdot \sin B,$$

$$4)\ F = \tfrac{1}{2} bc \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} ac \cdot \sin B = \tfrac{1}{2} ab \cdot \sin C.$$

II. Ist gegeben A, b, c, so ist

$$\cot B = \frac{c}{b \sin A} - \cot A, \quad \cot C = \frac{b}{c \sin A} - \cot A,$$

$$\operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \cot \tfrac{1}{2} A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}, \qquad F = \tfrac{1}{2} bc \cdot \sin A.$$

Will man zusammen die Winkel B, C nebst der Seite a berechnen, so hat man dazu die Gleichungen

$$1)\ m = (c+b) \cdot \sin \tfrac{1}{2} A \qquad 2)\ n = (c-b) \cdot \cos \tfrac{1}{2} A$$

$$3)\ \operatorname{tg} u = \frac{n}{m}, \qquad 4)\ C = 90^0 - \tfrac{1}{2} A + u, \quad B = 90^0 - \tfrac{1}{2} A - u,$$

$$5)\ a = \frac{m}{\cos u} = \frac{n}{\sin u},$$

III. Ist gegeben a, b, c, so hat man,

wenn $$s = \frac{a+b+c}{2},$$

$$F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

$$\cos A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{2 \cdot s \cdot (s-a)}{bc} - 1 = 1 - \frac{2 \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{bc}.$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot F = \frac{2}{bc} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{bc}}, \qquad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s \cdot (s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{s \cdot (s-a)}}.$$

Zur Berechnung aller Winkel nebst F dienen am bequemsten die Gleichungen

1) $F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ 2) $r = \frac{F}{s}$

3) $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{s-a}$, $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{r}{s-b}$, $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{r}{s-c}$.

Sollte man aber gern die Sinus der Winkel bestimmen wollen, so kann man so rechnen:

1) $F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ 2) $Q = \frac{2F}{abc}$

3) $\sin A = Q \cdot a$, $\sin B = Q \cdot b$, $\sin C = Q \cdot c$.

IV. Ist gegeben A, c, a, so hat man

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}, \qquad b = c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \sin A^2}.$$

Zur Berechnung aller der Größen C, B, b, F dienen die Gleichungen

1) $D = \frac{a}{\sin A}$, 2) $\sin C = \frac{c}{D}$, 3) $B = 180^0 - (A + C)$.

Es hat hier C zwei Werthe; der kleinere, welcher ein spitzer Winkel ist, heiße C', der größere, welcher stumpf ist, heiße C''. Dann giebt es auch zwei zugehörige Werthe von B, nämlich B' u. B'', und es ist auch

$$B' = C'' - A, \qquad B'' = C' - A.$$

4) $b = D \cdot \sin B$ (woher zwei Werthe b', b'')

5) $F = \tfrac{1}{2} bc \sin A = \tfrac{1}{2} ac \cdot \sin B = \tfrac{1}{2} ab \cdot \sin C$

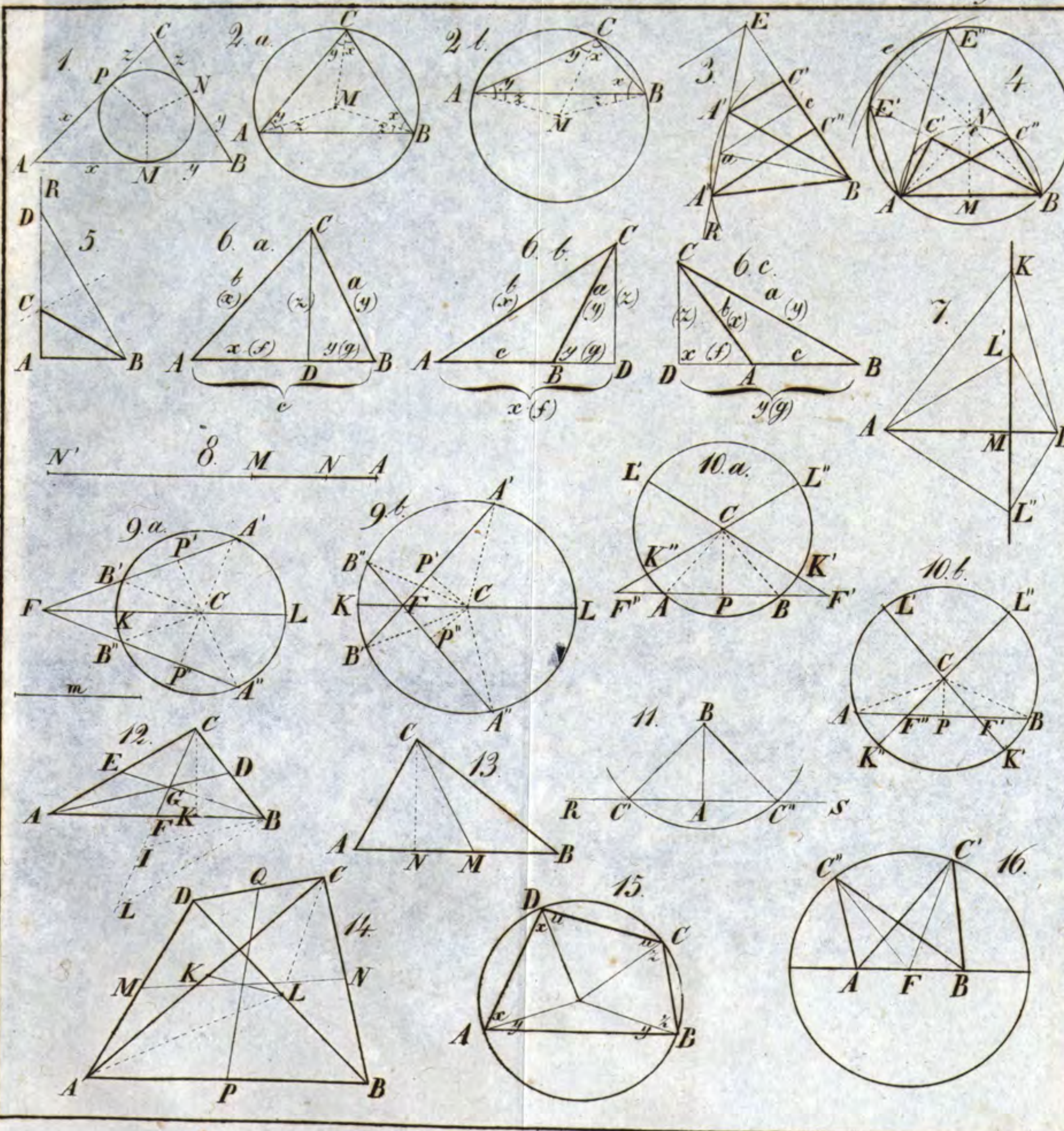
(woher zwei Werthe F' und F'').

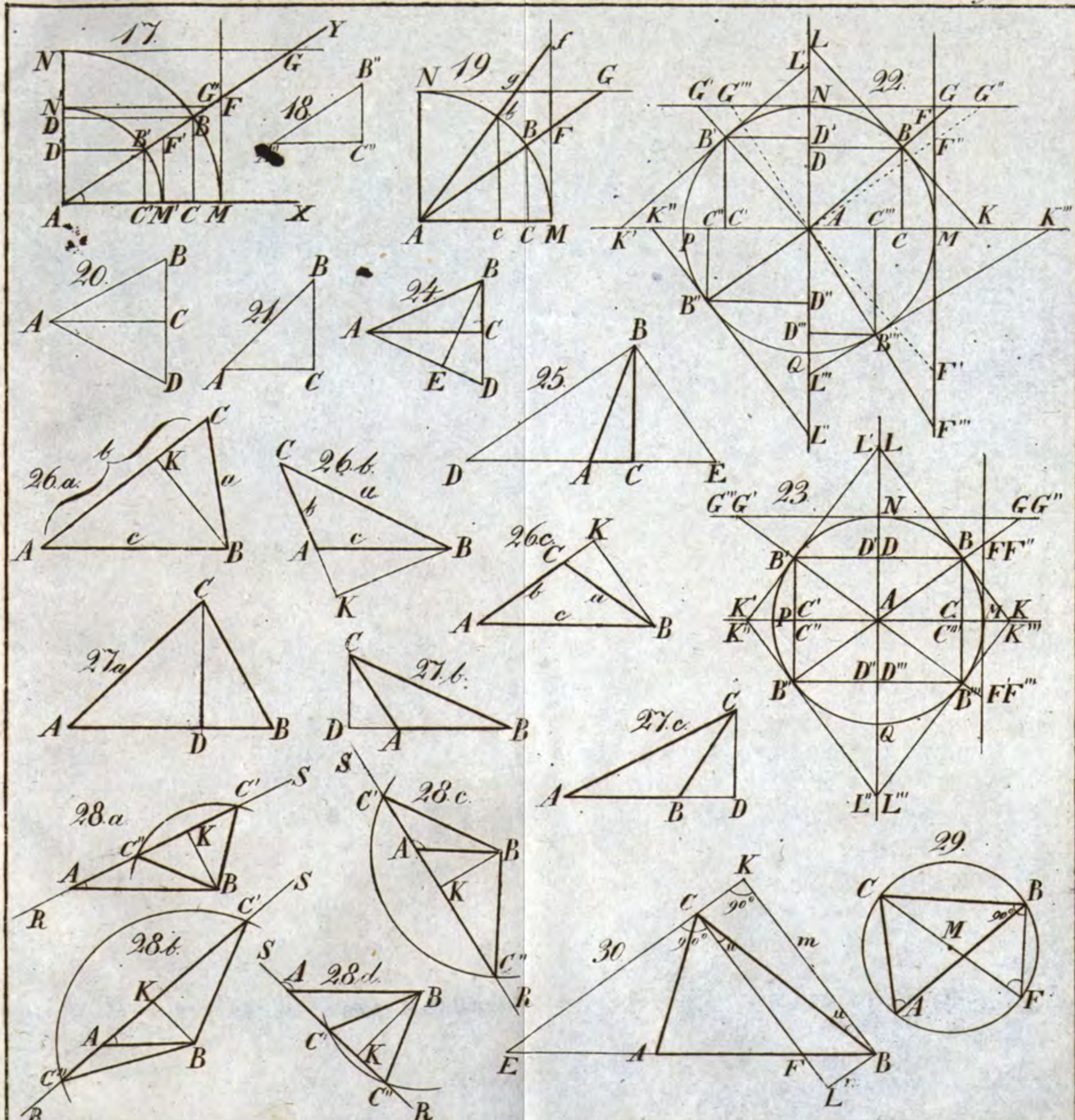
Verbesserungen.

S. 8. Z. 13. Statt $(-a^2)$ setze $(-a)^2$.
S. 19. Z. 6. Statt $a^4 - \sqrt{a^4 - 16F^2}$ s. $a^2 - \sqrt{a^4 - 16F^2}$.
S. 48. Z. 8. Statt $\sqrt{^2 - \frac{1}{4}m^2}$ s. $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}m^2}$.
S. 61. Z. 2 v. u. fehlt eine) und am Ende der Zeile ist statt $-p$ zu setzen $-q$.
S. 71. Z. 5 v. u. Statt AC setze BC, statt AD s. BD.
S. 110. Z. 18. Statt 608,33 s. 608,38.
S. 119. Z. 11. v. u. Statt a ı| BK s. a |ı BK.
S. 121. Z. 13. Statt b s. a.
S. 126. Z. 9. v. u. Statt 102003 s. 178980.
Es ist hier nämlich 102003 nur der Inhalt des Dreiecks ABC, nicht des ganzen Vierecks.
S. 134. Z. 12. Statt MN s. MN^2.
S. 135. Z. 12. Statt tgc.tgc im Nenner des Bruchs setze tgb.tgc.
S. 137. Z. 16. Statt $\pm$ vor dem letzten Wurzelausdrucke s. $\mp$.
— Z. 20. Statt $1 - \cos 2a$ im Nenner s. $1 + \cos 2a$.

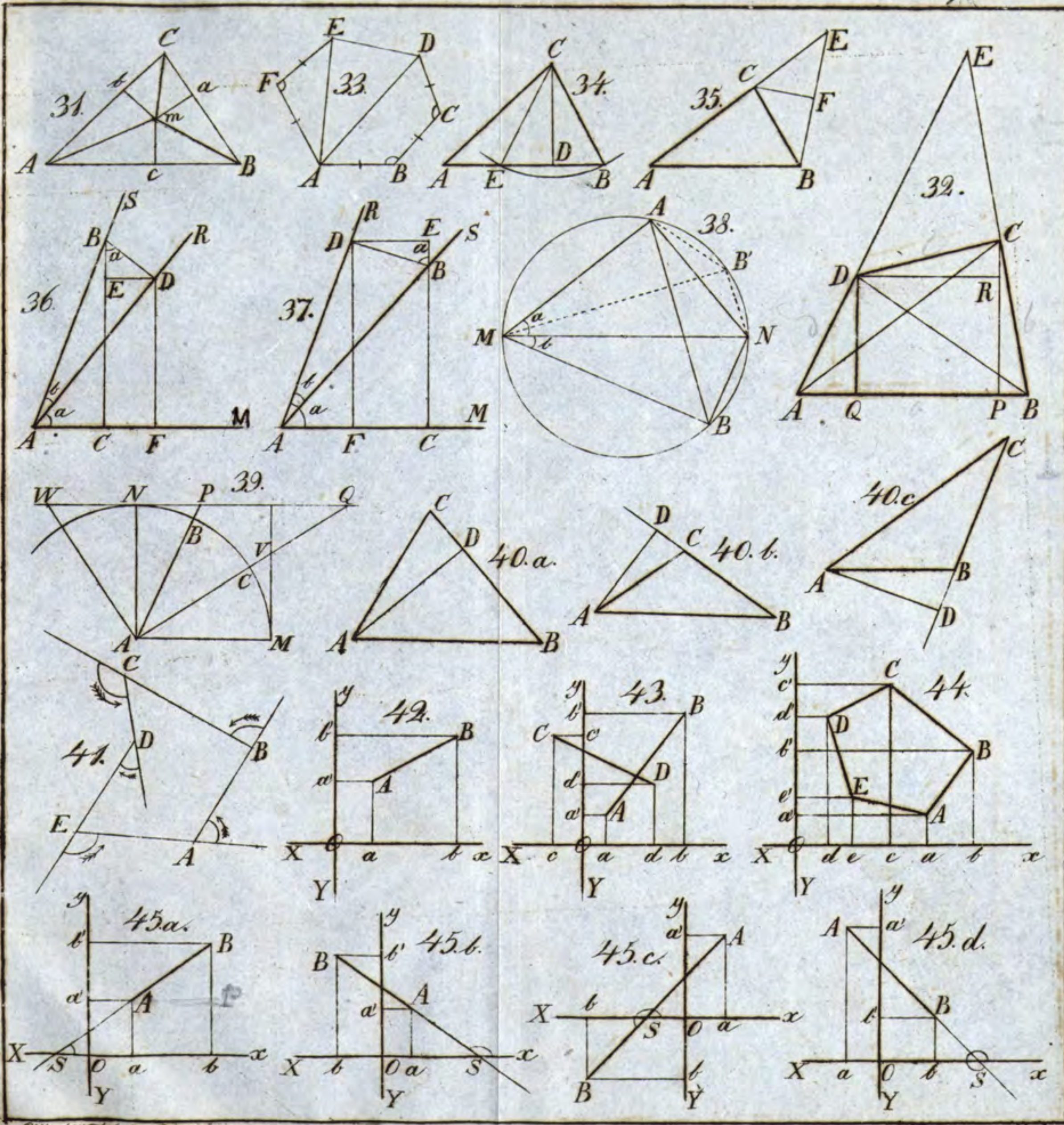
Im ersten Bande ist noch Folgendes zu verbessern:

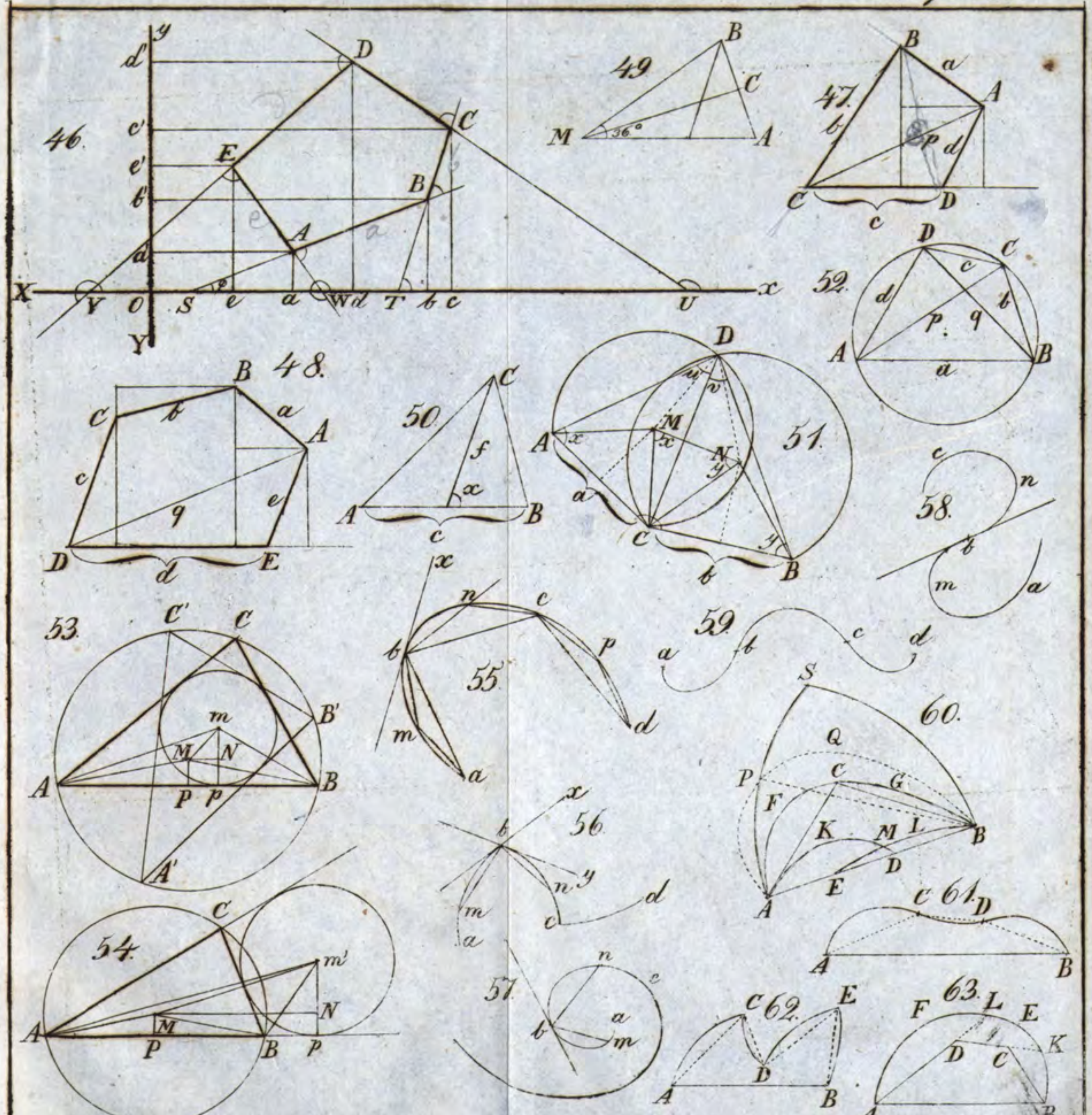
S. 36. Z. 15. Statt zwei Seiten s. zwei einander gegenüber liegende Seiten.
S. 60. Z. 10. Statt maximum s. minimum.
S. 179. Z. 8. Statt IA′A″ s. AI′I″.


1.
2. a.
2. b.
3.
4.
5.
6. a.
6. b.
6. c.
7.
8.
9. a.
9. b.
10. a.
10. b.
11.
12.
13.
14.
15.
16.

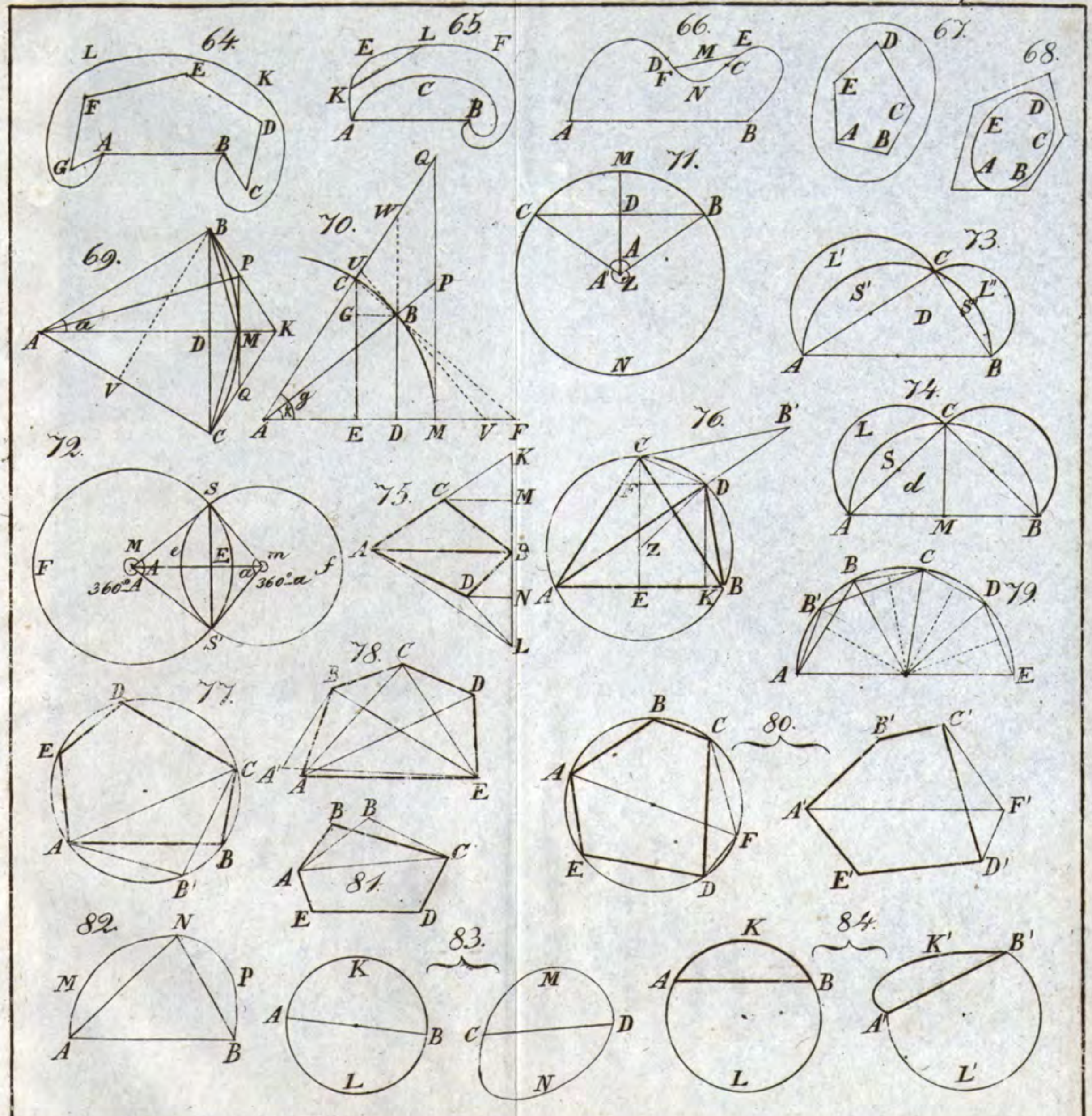


Lith. v. Wedel in Danzig

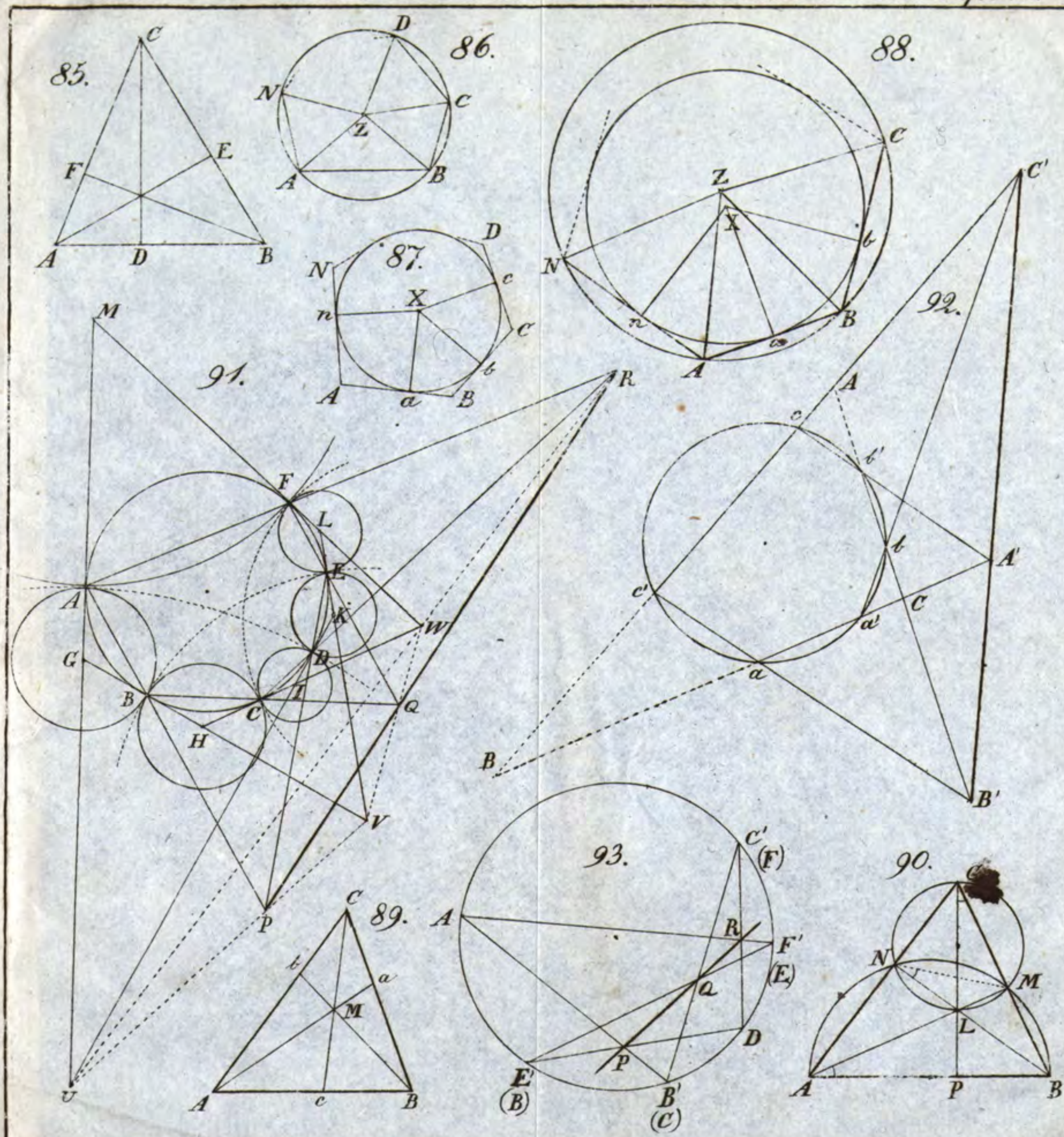

31.
33.
34.
35.
32.
36.
37.
38.
39.
40.a.
40.b.
40.c.
41.
42.
43.
44.
45.a.
45.b.
45.c.
45.d.



Lith. b. Wedel in Danzig.



Lith. b. Wedel in Danzig.



Lith. b. Wedel in Danzig
von Ed. Hufeland

LEHRBUCH
Der
Geometrie,
Förstemann.

2.