3.31 — pobudzanie i propagacja fal elektromagnetycznych
3.32 — plazma

Krzysztof Żuchowski

NIELINIOWE ODDZIAŁYWANIE FAL I CZĄSTECZEK W PLAZMIE SŁABO SPRZĘŻONEJ

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 201

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 stycznia 1983 r.

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk.1,25
Oddano do drukarni w czerwcu 1983 r.
Nr zamówienia 443/83 M-13 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Krzysztof Żuchowski
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

NIELINIOWE ODDZIAŁYWANIE FAL I CZĄSTECZEK W PLAZMIE SŁABO SPRZĘŻONEJ

Streszczenie

W pracy rozważano nieliniowe oddziaływania fal a także fal i cząsteczek, rozróżniając oddziaływania koherentne i niekoherentne. Omówiono kilka zagadnień, które mają zastosowanie także do badania magnetosfery: nieliniowa modulacja fal, efekt ponderomotoryczny. Ograniczono się w zasadzie do plazmy słabo sprzężonej, to znaczy nie omówiono zjawisk, gdzie decydującą rolę odgrywają zderzenia kulombowskie.

Wstęp

Liniowa teoria fal rozchodzących się w plazmie (to znaczy spełniających związek dyspersyjny $D(\underline{k},\omega)=0$ wynikający z układu równań Maxwella i równań liniowych opisujących dynamikę plazmy) nie opisuje wyczerpująco rozwoju w czasie nawet małego odchylenia od równowagi. Falom o skończonych amplitudach towarzyszą zjawiska, w których iloczyny amplitud odgrywają ważną rolę. Na przykład można tu wymienić [1], [2], [3]; dudnienie fal, rozpraszenie fal przez rozkład cząsteczek, czy też rezonansowe oddziaływanie fal (rozpraszenie fal na falach) i efekt ponderomotoryczny.

Teoria zaburzeń rozszerza liniową teorię fal plazmowych i niestabilności, wkraczając w obszar nieliniowy. Ta perturbacyjna teoria nieliniowych fal plazmowych o małych, lecz skończonych amplitudach i ich oddziaływaniach doczekała się już wielu opracowań [4] , [5] . W dwóch przypadkach granicznych ta słabo nieliniowa teoria jest względnie prosta. W pierwszym przypadku, gdy jest niewiele fal o skończonych amplitudach, można każdą z nich rozpatrzyć oddzielnie. Jest to teoria słabych fal koherentnych [6] . W drugim mamy tak wiele fal, że można do nich zastosować opis statystyczny, otrzymując te właściwości rozwoju w czasie stanu plazmowego, które nie zależą od szczegółów faz początkowych fal. Teoria ta nosi nazwę teorii słabej turbulencji lub teorii quasi-liniowej. Często jednak do teorii quasi-liniowej zalicza się jedynie zjawiska uwzględniające oddziaływanie fal z rozkładem cząsteczek, gdy zaś wchodzą w grę także oddziaływania fal to mamy do czynienia ze słabą turbulencją. W obydwu powyższych przypadkach iterujemy równanie Własowa. Podejście to musi zawieść, gdy amplitudy fal stają się tak duże, że zachodzi jedna z możliwości:

1. Rachunek zaburzeń jest rozbieżny
2. Orbity cząsteczek zmieniają się na tyle na skutek oddziaływania z polami, że nie można już zakładać $f \approx f_0$ przy dokładnym obliczaniu liniowych właściwości falowych plazmy. Teorie quasi-liniową i słabej turbulencji opisaliśmy dokładniej w [7] .

Wiele ważnych zjawisk nieliniowych w plazmie można zbadać rozpatrując układy plazmowe zawierające ograniczoną liczbę fal plazmowych. Na przykład nieliniowe "zawalenie się" teorii tłumienia landauowskiego pojedynczej bardzo długiej fali Langmuira [1] .

Rozpatrzmy fale elektrostatyczną:

$$\underline{E} = \hat{\underline{x}} E_k \sin(kx - \omega_{pe} t) \quad , \qquad k\lambda_{De} \ll 1 \tag{1}$$

przenikającą jednorodną plazmę maxwellowską bez pola (nie licząc (1)). Teoria landauowska mówi nam, że fala ta będzie tłumiona w skali czasowej:

$$\tau_L = \left[\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{(k\lambda_{De})^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2} - \frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \qquad (2)$$

W (1) i (2) mamy: $\hat{x}$ - wersor wzdłuż osi x, ω_{pe} - elektronowa częstość plazmowa, λ_{De} - promień Debye'a dla elektronów, k - liczba falowa. Liniowa teoria własowowska która prowadziła do tłumienia Landaua zakładała, że orbity cząsteczek plazmy doznawały jedynie nieznacznych odkształceń na skutek występowania pola fali. Ale elektron poruszający się z prędkością zbliżoną do prędkości fali widzi jamę potencjału, w której drga z okresem:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{eE_k k}} \equiv \frac{\tau_T}{2\pi} \qquad (3)$$

m - masa elektronu, e - ładunek elementarny, τ_T - czas wychwytywania cząsteczek. Tak więc, jak wynika z równania:

$$m\ddot{x} = -eE_k \sin kx \approx -eE_k kx \qquad (4)$$

otrzymaliśmy ruch harmoniczny w jamie wytworzonej przez falę plazmową. Daje to duże zaburzenie orbit i rachunki liniowe, do których wchodzi rozkład tych właśnie schwytanych cząsteczek, stają się nieważne dla czasów $\tau > \tau_T$. Właśnie teoria tłumienia Landaua zależy od rozkładu cząsteczek poruszających się z prędkościami niewiele różniącymi się od prędkości fali. Cząsteczki te zostaną schwytane w pierwszej kolejności i teoria landauowska będzie ważna jedynie dla $\tau \ll \tau_T$. Rozważania powyższe dotyczą także teorii quasi-liniowej, która zawiera jako szczególny przypadek teorie landauowska [7].

W przypadku plazmy spokojnej (quiscent plasma) fluktuacje mają charakter termodynamiczny i ich poziom jest określony przez temperaturę ośrodka. Stosunek energii fluktuacji do energii kinetycznej cząsteczek plazmy jest rzędu parametru plazmowego $q = 1/n\lambda_D^3$, gdzie n - koncentracja cząsteczek. Wobec tego w celu uzyskania równania na funkcję korelacyjną należy dokonać rozwinięcia hierarchii BBGKY w szereg względem parametru plazmowego. Jeżeli poziom fluktuacji znacznie przewyższa ich poziom dla plazmy znajdującej się w pobliżu równowagi termodynamicznej wówczas, choć hierarchia BBGKY nadal obowiązuje, jednak nie można tu zastosować sposobu jej obcięcia charakterystycznego dla spokojnej plazmy i opartego na rozwinięciu w szereg względem parametru plazmowego. Załamuje się tu rachunek zaburzeń i nie można już wykorzystać iteracji rozwiązania równania Własowa, która okazała się skuteczna w przypadku stanu słabej turbulencji. Teoria opisująca plazmę o wysokim poziomie energii fluktuacji nosi nazwę teorii silnej turbulencji. W przypadku silnej turbulencji plazmy charakterystyczne jest widmo energetyczne $\varepsilon_{\underline{k}}$ drgań plazmy o wektorze falowym $\underline{k}$. Dla tego stanu plazmy możliwe są fluktuacje i korelacje fluktuacji o makroskopowych natężeniach. Ponadto w ośrodku plazmowym turbulentnym, gdzie istnieje stałe źródło zewnętrzne utrzymujące ośrodek w stanie niestabilności, na przykład zewnętrzne pole elektryczne, może wytworzyć się turbulentny stan stacjonarny ośrodka scharakteryzowany przez stacjonarny przepływ strumienia gęstości energii.

Przy rozpatrywaniu stacjonarnej plazmy silnie turbulentnej należy już w stanie wyjściowym /zagadnienie początkowe/ uwzględnić istnienie makroskopowych korelacji i fluktuacji. Ponieważ znajomość funkcji korelacji obok jednocząsteczkowej funkcji rozkładu stanowi docelowy punkt teorii, więc mamy tu do czynienia z zagadnieniem samouzgodnionym. Pomocnym etapem do rozwiązania tego zagadnienia jest wykorzystanie teorii liniowej odpowiedzi na zaburzenie zewnętrzne dla plazmy znajdującej się w stanie stacjonarnej turbulentności.

Innym podejściem do plazmy silnie turbulentnej jest zastosowanie hierarchii BBGKY w celu wyprowadzenia równań dla funkcji korelacyjnej, jednak w tym przypadku wielocząsteczkowe funkcje rozkładu pozostają skończone w granicy $q \longrightarrow 0$ i należy inaczej dokonać obcięcia hierarchii nit dla spokojnej plazmy.

Nieliniowe koherentne i niekoherentne oddziaływanie fal

W przypadku liniowym jedynym możliwym kolektywnym oddziaływaniem w plazmie bezzderzeniowej jest rezonansowe oddziaływanie cząsteczek plazmy z falą, która wymaga spełnienia zależności

(5) $$\omega_{\underline{k}} - \underline{k} \cdot \underline{v} \approx 0 \quad ,$$

gdzie: $\omega_{\underline{k}}$ - częstość fali, $\underline{k}$ - wektor falowy, $\underline{v}$ - prędkość cząsteczki. Zjawisko to nosi nazwę tłumienia Landaua, ewentualnie prowadzi do niestabilności, w zależności od początkowego rozkładu cząsteczek w przestrzeni prędkości. Natomiast w przypadku nieliniowym kolektywnie oddziaływają z cząsteczkami plazmy przynajmniej dwie fale i najprostszy warunek oddziaływania przybiera postać:

(6) $$\omega_{\underline{k}} - \omega_{\underline{k}'} - (\underline{k} - \underline{k}')\underline{v} = 0 \quad ,$$

zaś zjawisko z nim związane nosi nazwę nieliniowego tłumienia Landaua i może odgrywać ważną rolę zarówno w opisie ewolucji amplitud fal, jak i rozkładu cząsteczek w przestrzeni prędkości.

Gdy sprzężenia pomiędzy falami i cząsteczkami są słabe, tak, że związki (5) i (6) na ogół nie zachodzą, to decydującym mechanizmem opisującym ewolucje układu może być oddziaływanie fal. W przypadku oddziaływania trzech fal nieliniowe zjawisko jest szczególnie istotne przy spełnieniu warunku rezonansowego:

(7) $$\omega_{\underline{k}} = \omega_{\underline{k}'} + \omega_{\underline{k}''} \quad , \qquad \underline{k} = \underline{k}' + \underline{k}'' \quad .$$

Gdy rozważany jest makroskopowy model ośrodka, to na ogół w przypadku ograniczenia się do słabej nieliniowości i dyspersji, można go przedstawić równaniem postaci [4] .

$$(8) \qquad i\frac{\partial}{\partial t}\underline{\Psi}(\underline{x},t)=\underline{\underline{L}}\{\underline{\Psi}(\underline{x},t)\}+\underline{\underline{B}}\{\underline{\Psi}(\underline{x},t),\underline{\Psi}(\underline{x},t)\}$$

gdzie $\underline{\Psi}$ jest skończenie wymiarowym wektorem kolumnowym, którego elementami są wybrane wielkości fizyczne, opisujące w wystarczający sposób badany ośrodek z przyjętego punktu widzenia:

$$(9) \qquad \underline{\Psi}(\underline{x},t)=\begin{bmatrix}\Psi_1(\underline{x},t)\\ \Psi_2(\underline{x},t)\\ \vdots\end{bmatrix} .$$

W równaniu (9) $\underline{\underline{L}}$ oraz $\underline{\underline{B}}$ są operatorami różniczkowymi względem $\underline{x}$. Ponadto $\underline{\underline{L}}\{\underline{\Psi}\}$ jest liniowe względem $\underline{\Psi}$ zaś $\underline{\underline{B}}\{\underline{\Psi},\underline{\Psi}\}$ kwadratowe względem $\underline{\Psi}$.

Równanie Korterego - de Vriesa [3] , [4] , [8] , które jest najprostszym równaniem opisującym nieliniowość i dyspersję, jest szczególnym przypadkiem (8). Także układ równań Maxwella wraz z dołączonymi równaniami plazmy wieloskładnikowej oraz równania magnetohydrodynamiki opisujące zimną plazmę w polu magnetycznym, nieliniowo zaburzoną względem stanu jednorodnego, też mają postać (8). W tym ostatnim przypadku wektor $\underline{\Psi}$ ma 7 składowych: perturbacja gęstości , prędkość płynu i perturbacja pola magnetycznego.

Po przejściu do reprezentacji **fourierowskiej** względem zmiennych przestrzennych i wykorzystaniu jako bazy wektorów własnych amplitud **fourierowskich** części zlinearyzowanej układu (8):

$$(10) \qquad \underline{\Psi}(\underline{x},t)=\sum_{\underline{k}}\exp(i\underline{k}\cdot\underline{x})\underline{\Psi}_{\underline{k}}(t) \quad ,$$

$$(11) \quad \Psi_k(t) = \sum_{\alpha} A_{\underline{k}}^{\alpha}(t) \exp(-i\omega_{\underline{k}}^{\alpha} t) u_{\alpha}(\underline{k})$$

można otrzymać równanie:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} A_{\underline{k}}^{\alpha} = \sum_{\beta,\gamma} \sum_{\underline{k}',\underline{k}''} K_{\underline{k},\underline{k}',\underline{k}''}^{\alpha\beta\gamma} A_{\underline{k}'}^{\beta} A_{\underline{k}''}^{\gamma} \exp\left[i(\omega_{\underline{k}}^{\alpha} - \omega_{\underline{k}'}^{\beta} - \omega_{\underline{k}''}^{\gamma})t\right],$$

gdzie $K_{\underline{k},\underline{k}',\underline{k}''}^{\alpha\beta\gamma}$ zależy od dokładnej postaci operatorów $\underline{L}$ i $\underline{B}$. Postać równania (12) dla plazmy własowowskiej przy założeniu słabego sprzężenia fal i cząsteczek została wyprowadzona w 4 przy użyciu metody wielu skal względem czasu.

Jeżeli nie zachodzi warunek (7), to rozwiązania (12) mają charakter oscylacyjny. Przy spełnieniu (7) rozwiązania (12) posiadają część systematyczną.

Równania (12) mogą być wykorzystane zarówno w przypadku koherentnym, gdy mamy do czynienia z niewielką ilością fal, jak w przypadku słabej turbulencji (stan niekoherentny). W tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z wielką ilością fal o chaotycznie rozłożonych fazach. Informacja o fazach poszczególnych fal jest w tym przypadku nieistotna i dokonuje się uśrednienie względem faz ("random phase approximations").

Przedstawiona powyżej metoda badania oddziaływania fal w plazmie została nieco uproszczona i przedstawiona w bardziej intuicyjnej formie jako metoda fal sprzężonych [6].

W celu zademonstrowania powyższej metody przytoczymy tu wyprowadzenie równań dla fal sprzężonych, opisujących oddziaływanie dwóch fal elektromagnetycznych poprzecznych i podłużnej fali plazmowej.

Układ równań opisujących dynamikę plazmy ma postać:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&\partial n/\partial t + N_0 \underline{\nabla}\cdot\underline{v} = -\underline{\nabla}(n\underline{v})\ ;\\
&\partial\underline{B}/\partial t + \underline{\nabla}\times\underline{E} = 0\ ;\\
&\partial\underline{v}/\partial t + e\underline{E}/m + (u^2/N_0)\underline{\nabla}n = -(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} - (e/m)\underline{v}\times\underline{B} - (u^2/N_0^2)\,n\,\underline{\nabla}n\ ;\\
&\varepsilon_0\,\partial\underline{E}/\partial t - (1/\mu_0)\underline{\nabla}\times\underline{B} - eN_0\underline{v} = en\underline{v}\ ,
\end{aligned}
$$

gdzie: $-e$ i m - odpowiednio ładunek i masa elektronu; N_0, n i $\underline{v}$ - równowagowa gęstość plazmy, zaburzenie gęstości elektronów i zaburzenie prędkości elektronów; $\underline{E}$ i $\underline{B}$ - natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna; u - prędkość cieplna elektronów; ε_0, μ_0 - przenikalności odnoszące się do próżni. Układ równań (13) został napisany przy założeniu, że plazma jest jednorodna w stanie niezaburzonym i ruch jonów można zaniedbać. zaniedbanie pewnych stron układu (13) jest równoważne linearyzacji i poszukiwanie jego rozwiązania w postaci fali płaskiej $A\exp[i(\omega t - \underline{k}\underline{x})]$ prowadzi do związku dyspersyjnego pomiędzy częstością ω i wektorem falowym $\underline{k}$:

$$
(14)\qquad (\omega^2 - \omega_p^2 - k^2u^2)(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2) = 0\ .
$$

Równanie (14) separuje się na związek dyspersyjny dla fal podłużnych (langmuirowskich):

$$
(15)\qquad \omega^2 = \omega_p^2 + k^2u^2
$$

i związek dyspersyjny dla fal poprzecznych (elektromagnetycznych):

$$
(16)\qquad \omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2\ ,
$$

gdzie $\omega_p = (N_0e^2/m\varepsilon_0)^{1/2}$ - elektronowa częstość plazmowa, c - prędkość światła.

Jeżeli zostaną uwzględnione człony nieliniowe występujące po prawej stronie układu (13), to fala płaska nie będzie już rozwiązaniem tego układu. Zajmiemy się teraz ewolucją wielkości α, która jest kombinacją liniową fourierowskich składowych przestrzennych zmiennych dynamicznych opisujących dany ośrodek plazmowy modelowany przez układ (13). Wielkość α ma spełniać równanie:

(17) $\partial\alpha/\partial t = i\omega\alpha$.

Podstawiając wspomnianą kombinację do równania (17) i mając pochodne względem czasu przy pomocy liniowej części układu (13) po uwzględnieniu w nich harmonicznej zależności względem zmiennych przestrzennych $(\partial/\partial x \rightarrow -ik)$ i wykorzystaniu związków dyspersyjnych można otrzymać

(18) $a_T = \bar{v}_y + (i\omega_T \varepsilon_0/eN_0)\bar{E}_y + (ik_T/\mu_0 eN_0)\bar{B}_z$,

gdzie ω_T i k_T spełniają związek dyspersyjny (16). Ponadto:

(19) $v_y = (1/2)(\bar{v}_y + \bar{v}_y^*)$

i podobnie dla pozostałych wielkości: E_y, B_z . Przy uzyskaniu (18) wykorzystano założenie, że fala poprzeczna jest spolaryzowana w kierunku y . Różniczkując (18) względem czasu, przy wyeliminowaniu pochodnej względem czasu przy pomocy pełnego układu (13) z wyeliminowanymi pochodnymi względem zmiennych przestrzennych w części liniowej $(\partial/\partial x \rightarrow -ik_T)$ można otrzymać:

(20) $$\frac{\partial a_T}{\partial t} - i\omega_T a_T = \left(\frac{e}{m} v_x B_z + \frac{i\omega_T}{N_0} n v_y - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_{k_T} ,$$

gdzie indeks k_T wskazuje, że przy zapisie prawej części należy przyjąć zależność od zmiennych przestrzennych postaci $\exp(-ik_T x)$.

Analogiczne rozważania dla fal podłużnych prowadzą do zależności:

$$a_L = \bar{n} + (N_o \omega_L / k_L u^2)\bar{v}_x + (ieN_o/mk_L u^2)\bar{E}_x \ , \tag{21}$$

$$\frac{\partial a_L}{\partial t} - i\omega_L a_L = \Big[-\frac{\partial}{\partial x}(nv_x) + \frac{ie^2 N_o}{mk_L u^2 \varepsilon_o} nv_x - \frac{\omega_L N_o}{k_L u^2}\Big(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{e}{m} v_y B_z - \frac{u^2}{N_o^2} n \frac{\partial n}{\partial x}\Big)\Big]_{k_L} \tag{22}$$

Rozważmy teraz oddziaływanie trzech fal i dwu poprzecznych (z częstotliwościami ω_{T_o} i ω_{T_1} oraz liczbami falowymi k_{T_o} i k_{T_1} z jedną falą podłużną (z częstością ω_L i liczbą falową k_L). Wyjściowymi równaniami dla tych rozważań są dwa równania typu (20) i jedno równanie (21).

Przedstawienie pól falowych jako przestrzennych składowych fourierowskich prowadzi do warunku:

$$k_{T_o} = k_{T_1} + k_L \ , \tag{23}$$

przy wypełnieniu którego po obu stronach równań (20), (22) mamy taką samą zależność od zmiennych przestrzennych.

W celu znalezienia nieliniowych równań dla drgań normalnych wyrażonych przez wielkości a należy wyrazić wielkości dynamiczne przez a i podstawić je do prawych stron równań (20), (22). Otrzymany układ ma postać:

$$\begin{aligned} &\partial a_{T_o}/\partial t - i\omega_{T_o} a_{T_o} = c_{1L} a_{T_1} a_L \\ &\partial a_{T_1}/\partial t - i\omega_{T_1} a_{T_1} = c_{0L} a_{T_o} a_L^* \\ &\partial a_L/\partial t - i\omega_L a_L = c_{01} a_{T_o} a_{T_1}^* \ , \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie:

$$c_{1L} = \frac{i\omega_{T_o} k_L^2 u^2 \omega_p^2}{4N_o \omega_L^2 \omega_{T_1}^2} \ , \quad c_{01} = \frac{iN_o \omega_L \omega_p^4}{4u^2 \omega_{T_1}^2 \omega_{T_o}^2} \ , \quad c_{0L} = \frac{i\omega_{T_1} k_L^2 u^2 \omega_p^2}{4N_o \omega_L^2 \omega_{T_o}^2} \ . \tag{25}$$

Oczywiście rozważania tego typu można uogólniać na oddziaływanie większej ilości fal i różne kierunki rozchodzenia się.

Równania typu (24) także mogą reprezentować niekoherentne oddziaływanie fal, gdy już zostało wykonane uśrednienie względem chaotycznych faz i przedstawiają zależności pomiędzy amplitudami fal.

Metoda drgań normalnych daje się także wykorzystać w podejściu kinetycznym, przy badaniu oddziaływania fal [6].

Analiza układu równań typu (24) przedstawiona w [3], [6] dopuszcza dla takich układów niestabilność eksplozyjną, gdy wszystkie amplitudy fal narastają do nieskończoności $\sim(t_\infty - t)^{-1}$ w skończonym czasie t_∞ .

Oddziaływanie fal (modów) w magnetosferze zostało omówione w [9] , przedstawiono tam także wykorzystanie nieliniowego tłumienia Landaua do wytłumaczenia pewnych zjawisk w magnetosferze.

Modulacja fali w nieliniowym dyspersyjnym ośrodku

Jeżeli fala o dostatecznie dużej amplitudzie (pobudzona zewnętrznie lub samowzbudzająca się) rozchodzi się w nieliniowym dyspersyjnym ośrodku, wtedy jednym z najważniejszych skutków jest pojawienie się amplitudowej zależności w związku dyspersyjnym, co powoduje modulację fazową fali [10] , [11] . W [12] przedstawiono analitycznie modulację fali jako wynik oddziaływania trzech fal. Natomiast w [13] przedstawiono związek pomiędzy modulacją amplitudy i modulacją fazy jako konsekwencje nieliniowości.

Dla zmodulowanej fali można napisać:

$$F(x,t) = a(x,t)\cos[k_0 x - \omega_0 t + \Phi(x,t)] , \tag{26}$$

gdzie: $a(x,t) = a_0 + a_m(x,t)$; $a_m(x,t)$ i $\Phi(x,t)$ są powoli zmieniającymi się amplitudową i fazową modulacją fali nośnej o liczbie falowej k_0 i częstości ω_0 . To znaczy obowiązują założenia:

(27) $\left|\frac{1}{a_m}\frac{\partial a_m}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right| < k_o$

(28) $\left|\frac{1}{a_m}\frac{\partial a_m}{\partial t}\right| \left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right| < \omega_o$.

Częstość chwilową zaburzenia $F(x,t)$ można określić jako:

(29) $$\omega = \omega_o - \frac{\partial \partial \Phi(x,t)}{\partial t} .$$

Tak więc chwilowe odchylenie od wartości częstotliwości fali nośnej ma postać:

(30) $$\delta\omega = \omega - \omega_o = -\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} .$$

Jedną z konsekwencji nieliniowości jest występowanie amplitudy w zależności dyspersyjnej:

(31) $$\omega = \omega(k, a^2) .$$

Przy założeniu, że modulacja amplitudy a_m jest bardzo mała, możemy dokonać rozwinięcia (31) względem a_m :

(32) $$\omega = \omega(k) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a_o} a_m^2 + \dots ,$$

gdzie indeks a_o oznacza obliczenie pochodnej przy $a = a_o$. Jeżeli będziemy rozumieć $\omega(k)$ jako zaburzenie częstości zanim nieliniowe efekty staną się istotne, wtedy możemy wprowadzić wielkość:

(33) $$\delta\omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_{a_o} a_m^2$$

jako odchylenie częstości spowodowane nieliniowością.

Jeżeli nieliniowość jest przyczyną modulacji fali nośnej, to można napisać (30), (32):

$$(34)\qquad \frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a_0} a_m^2(x,t).$$

Związek (34) ustanawia zależność pomiędzy modulacją amplitudy $[a_m(x,t)]$ i modulacją fazy $\Phi(x,t)$ spowodowany nieliniowością. Równanie (34) implikuje, że modulacja amplitudy indukuje modulacje fazy i na odwrót.

Załóżmy teraz, że cała amplituda a jest mała i dokonajmy rozłożenia wokół wartości: częstości ω_0, liczby falowej k_0 fali nośnej:

$$(35)\qquad \omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_0 (k-k_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)(k-k_0)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)a^2 ,$$

gdzie tym razem $(\partial\omega/\partial k)_0$, $(\partial^2\omega/\partial k^2)_0$ i $(\partial\omega/\partial a^2)$ są wartościami wziętymi w granicy $a=0$ i $k=k_0$.

Z drugiej strony modulacja fazy Φ jest przyczyną pewnej niestacjonarności fali:

$$(36)\qquad \omega(x,t) = \omega_0 - \frac{\partial\Phi}{\partial t} ,$$

$$(37)\qquad k(x,t) = k_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x} .$$

Równanie zachowania energii można napisać w postaci [10] :

$$(38)\qquad \frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \frac{\partial(U_E a^2)}{\partial x} = 0 ,$$

gdzie:

$$(39)\qquad U_E(k,a^2) = v_g + \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_0 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) .$$

Wprowadzimy teraz zespoloną amplitudę:

$$(40)\qquad \Psi(x,t) = a(x,t)\exp[i\Phi(x,t)] ,$$

która może opisywać, na przykład modulację gęstości cząsteczek plazmy:

(41) $$\frac{\delta n}{n} = \Psi(x,t)\exp[i(kx-\omega_0 t)].$$

Podstawiając do (35) związki (36), (37) mnożymy otrzymane równanie przez czynnik $ia\exp[i\Phi(x,t)]$ i dodając stronami równanie (38) po uprzednim podzieleniu stronami tego ostatniego przez a.

W wyniku otrzymujemy nieliniowe równanie Schrödingera

(42) $$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + p\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + q|\Psi|^2\Psi = 0 ,$$

gdzie nowe zmienne niezależne mają postać:

(43) $$\xi = x - v_g t \quad , \quad \tau = t \ .$$

Przy wyprowadzeniu (42) wykorzystaliśmy zależności:

(44) $$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}v_g + \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}$$

oraz oznaczenia

(45) $$p = (1/2)(\partial^2\omega/\partial k^2)_0 \quad , \quad q = -(\partial\omega/\partial a^2)_0 = (\partial\omega/\partial|\Psi|^2)_0$$

(46) $$v_g = (\partial\omega/\partial k)_0 \ .$$

Ponadto przy wyprowadzeniu równania (42) został pominięty czynnik $p(1/a)(\partial^2 a/\partial x^2)$, co jest usprawiedliwione przy małej modulacji, to jest powolnych zmianach w przestrzeni i czasie amplitudy a.

Równanie (42) zostało omówione w [8], [10] tam także zostało ono wyprowadzone dla zagadnień dotyczących nieliniowej modulacji fali w ośrodku dyspersyjnym na drodze rachunku wariacyjnego. Dokładne rozważania dotyczące rozwiązania równania (42) zależą od postaci nieliniowego związku dyspersyjnego, który implikuje wartości p i q, zaś przy szczególnym ich doborze dopuszcza rozwiązania solitonowe.

Natomiast w pracy [14] rozważano zjawisko samomodulacji fal Bernsteina na podstawie równania Własowa, które przy pomocy metody wielu skal zostało sprowadzone do zmodyfikowanego nieliniowego równania Schrödingera. Praca ta ma zastosowanie do badania fal elektrostatycznych o dużej amplitudzie w pobliżu jonowej częstości cyklotronowej i może mieć zastosowanie do badania magnetosfery.

Siła Millera i efekt ponderomotoryczny

W związku z zastosowaniem fal o dużych natężeniach do badania przestrzeni kosmicznej a także występowaniu w magnetosferze fal plazmowych, o dużych natężeniach pola elektrycznego, wydaje się celowe omówienie kierunku badań, gdzie dominującą rolę odgrywają siły występujące przy obecności skończonych pól elektrycznych i magnetycznych. Przykładem takim może być siła Millera, która jest w stanie wywołać efekt obniżenia koncentracji cząsteczek i efekty jonizacyjne. W tym przypadku przenikalność dielektryczna jest zależna od amplitudy fali.

Wychodząc z równań typu hydrodynamicznego i równań Maxwella uzyskano równania dla pól uwzględniające wspomniane efekty [15]:

$$\frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} + \omega_p^2 E_L - 3u^2 \frac{\partial^2 E_L}{\partial x^2} - f(\alpha |E_L|^2 + \beta |E_t|^2) E_L = 0 \ , \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} + \omega_p^2 E_t - c\frac{\partial^2 E_t}{\partial x^2} - f(\alpha |E_L|^2 + \beta |E_t|^2) E_t = 0 \ , \tag{48}$$

gdzie:

$$f = -\omega_p^2 \left\{ \exp\left[\frac{|E_L|^2 + |E_t|^2}{16\pi n T_e}\right] - 1 \right\} \ , \tag{49}$$

E_L i E_t podłużne i poprzeczne pole elektryczne.

W przypadku wysokich temperatur elektronowych $T_e \gg \frac{|E|^2}{16\pi n}$ siła Millera przybiera prostszą postać:

(50) $$f = \frac{\omega_p^2}{16\pi n T_e} \{|E_L|^2 + |E_t|^2\} .$$

Podstawiając do układu (47), (48) rozwiązanie w postaci fal płaskich:

(51) $$E_{L,t} = E_{L,t}^{(0)} \exp[i(k_{L,t}x - \omega_{L,t}t)]$$

można otrzymać, jako warunek istnienia nietrywialnego rozwiązania postaci (51), nieliniowe równanie dyspersyjne:

(52) $$\omega_{L,t} = \sqrt{\omega_p^2 + c_{L,t}^2 + k_{L,t}^2 - f(\alpha|E_L^{(0)}|^2 + \beta|E_t^{(0)}|^2)} ,$$

gdzie $c_L^2 = 3v_{T_e}^2$, $c_t^2 = c$, v_{T_e} -średnia prędkość cieplna elektronów. Tu także wskaźnik L odnosi się do fal podłużnych, zaś t do fal poprzecznych.

Mamy tu przykład nieliniowego związku dyspersyjnego, który może służyć do rozważania nieliniowej modulacji fal, która była rozważana w poprzedniej części pracy.

Jeżeli nieliniowość jest wywołana działaniem siły Millera, to w obszarze niskich temperatur częstośći fal mają postać:

(53) $$\omega_L = \omega_p \exp\left\{-\frac{|E_L^{(0)}|^2 + |E_t^{(0)}|^2}{32\pi n T_e}\right\} ,$$

(54) $$\omega_t = \sqrt{\omega_L^2 + c^2 k_L^2} .$$

Ogólnie równania (47),(48) wraz z wyrażeniem na siłę Millera (49) lub (50), stanowią kwaziliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych, co stanowi pewne ułatwienie, z powodu istnienia metod rachunkowych dla tych równań [16] .

Innym źródłem efektów nieliniowych występujących w słabo sprzężonej plazmie jest efekt ponderomotoryczny, którego idea opiera się na efekcie oddziaływania na siebie elementów z prądem elektrycznym za pośrednictwem pól magnetycznych wytworzonych przez te prądy. Wyprowadzone wyrażenia na siłę działającą na element objętości plazmy [17], [18] porządkuje bardzo skomplikowane nieliniowe efekty w plazmie. Chociaż pełne wyrażenia na siłę ponderomotoryczną są bardzo obszerne [17], to jednak wyrażenia uwzględniające tylko pewne oddziaływania np. dla fal elektrostatycznych mogą być stosunkowo proste:

$$\underline{f}_\alpha = -\left(\underline{x}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2-\omega_{B\alpha}^2}\frac{|E_x|^2}{8\pi} + \left(\frac{\omega_{p\alpha}}{\omega}\right)\frac{|E_z|^2}{8\pi}\right], \tag{55}$$

gdzie $\underline{x}, \underline{z}$ - wersory osi, ω_B - częstość cyklotronowa, zaś wskaźnik α odróżnia wskaźniki plazmy. Zastosowanie wzoru (55) łącznie z równaniami płynowymi opisującymi dynamikę plazmy i równaniami Maxwella pozwala uwzględnić pewne efekty nieliniowe trudne do wydzielenia przy bezpośrednim użyciu nieliniowego układu Własowa-Maxwella.

Jednak cały układ równań dynamiki plazmy (równania ruchu dwupłynowego i równania Maxwella), łącznie z wyrażeniem na siłę ponderomotoryczną, nie jest już w żadnym wypadku układem równań różniczkowych kwaziliniowych. Jest to widoczne już w postaci wzoru (55) w porównaniu z wzorem (50) na siłę Millera. Okoliczność ta bardzo utrudnia wszelkie numeryczne rozważania efektu ponderomotorycznego.

LITERATURA

1 N.A.KRALL, W.TRIVELPIECE, Fizyka plazmy, PWN, Warszawa 1979.

2 S.ICHIMARU, Basic principles of plasma physics, Benjamin, Massachussetts 1973.

3 B.B.KADOMCEW, Kollektiwnyje jowlenija w płazmie, Nauka, Moskwa 1976.

4 R.C.DAVIDSON, Methods in nonlinear theory, Academic Press, 1972.

5 Elektrodynamika plazmy - pod redakcją A.I.Achieziera, Nauka, Moskwa 1974.

6 J.WEILAND, H.WILHELMSSON, Coherent non-linear interaction of waves in plasmas, Pergamon Press, 1977.

7 B.ATAMANIUK, K.ŻUCHOWSKI, Analiza wpływu efektów nieliniowych i dysypotywnych w plazmie magnetosferycznej, Prace IPPT, 26/1982 (w druku).

8 P.L.BHATNAGAR, Nonlinear wares in one-dimensional dispersive systems, Clarendon Press, 1979.

9 K.SCHINDLER, J.BIRN, Magnetospheric physics Reports, 47, 111 /1978/.

10 G.B.WHITHAM, Linear and nonlinear waves, J.Wiley, 1974.

11 B.B.KADOMTSEW, V.I.KARPMAN, Usp.Fiz.Nauk. 103,193 / /1971/.

12 A.S.BAKAI, Nud.Fusion 10, 53 /1970/.

13 Y.C.KIM, L.KHADRA, E.J.POWERS, Phys. Fluids 23, 2251 /1980/.

14 J.R.MYRA, C.S.LIU, Phys. Fluids 23, 2258 /1980/.

15 F.G.BASS, J.A.SINICYN, Fizika płazmi, 6, 1085 /1980/.

16 B.L.ROŻDIESTWIENSKIJ, N.I.JANIENKO, Sistiemy kwaziliniejnych urawnienij, Nauka, Moskwa 1978.

17 K.KOGISO, S.UEDA, N.YAJIMA, J.Phys.Soc.Jpn. 51, 269 /1982/.

18 V.I.KARPMAN, R.N.KAUFMAN, J. Plasma Phys. 27, 225 /1982/.