1.11 — Równania różniczkowe
6.61 — Matematyczne podstawy
mechaniki płynów.
Przepływy idealne

Wojciech Zajączkowski

ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ PROBLEMÓW MIESZANYCH DLA HYDRODYNAMICZNYCH RÓWNAŃ EULERA

25/1983

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1983 r.

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 180 egz. Ark.wyd. 1 . Ark. druk. 1,75
Oddano do drukarni w czerwcu 1983 r.
Nr zamówienia 446/83 M-13 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Wojciech Zajączkowski

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ PROBLEMÓW MIESZANYCH DLA HYDRODYNAMICZNYCH RÓWNAŃ EULERA

1. Wprowadzenie

Niniejsza praca jest streszczeniem rozprawy habilitacyjnej pt."Rozwiązalność problemu przepływu dla hydrodynamicznych równań Eulera w przestrzeniach Sobolewa" [Za,5].Celem rozprawy jest analiza problemów mieszanych dla równań Eulera.W rozdziale 3-cim rozprawy habilitacyjnej sformułowano dobrze postawione problemy przepływu dla cieczy nieściśliwej,które są wyróżnione w następujący sposób zadanymi warunkami brzegowymi:

1) wirowość na wpływie,spełniającą pewne równanie różniczkowe oraz normalną składową prędkości na brzegu;

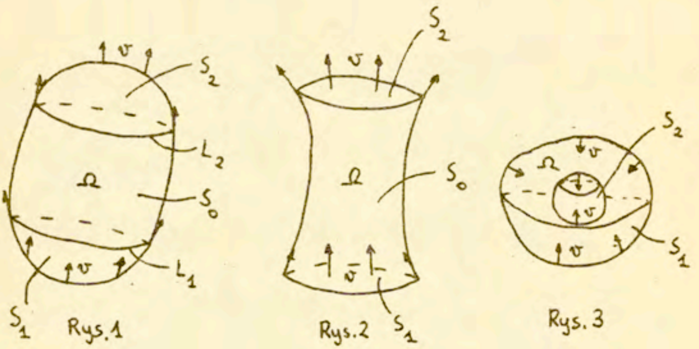
2) prędkość na wpływie i ciśnienie na wypływie;

3) prędkość na wpływie i normalna składowa prędkości na wypływie.

W przypadku cieczy ściśliwej,w rozdziale 7-mym rozprawy habilitacyjnej,został rozważony problem mieszany ze znikającą składową normalną prędkości na brzegu.Następnie w pracy rozpatrzono zagadnienie istnienia i gładkości rozwiązań problemów 1),2),3) z uwagi na:dwu i trójwymiarowość przepływu,gładkość granicy obszaru (obszar z kątami lub bez),jednospójność i niejednospójność.Okazało się,że w przestrzeniach Sobolewa udało się pokazać istnienie rozwiązań tylko problemu 2) oraz 1) przy dodatkowym założeniu,że normalna składowa wirowości zeruje się.Istnienie rozwiązań problemów 1),2),3) można jednak pokazać w przestrzeniach Höldera [Każ,1,2,3,4].Wybór przestrzeni Sobolewa był podyktowany tym,że powyższe problemy były rozpatrzywane w obszarach z kątami.Pozwoliło to wykorzystać teorię Kondratiewa [Kon,1,2] i Mazji-Płamieniewskiego [M,1,2,3].Rozpatrywane w rozdziale 3 problemy prowadzą do zagadnień Dirichleta i Neumanna dla równania Laplace'a z kątami.Z prac [Kon,1,2] i [M,1,2,3] wynikają ograniczenia na wielkość dopuszczalnych kątów w zależności od żądanej gładkości rozwiązań (relacje (4.1)÷(4.4)) .Praca niniejsza jest podzielona na następujące części.W punkcie 2 wprowadzono użyte w pracy oznaczenia.W punkcie 3 sformułowano dobrze postawione problemy przepływu.W punkcie 4 sformułowano twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i regularności jak i o nieistnieniu rozwiązań problemów wymienionych w punkcie 3.

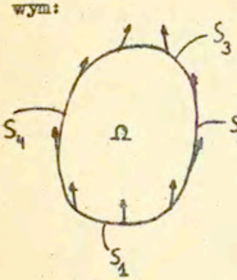
2. Notacje

W pracy rozpatrujemy obszary ograniczone dwu i trójwymiarowe,jak również jednospójne i niejednospójne oraz z gładką granicą i z kątami.Przykłady obszarów trójwymiarowych rozpatrywanych w pracy podane są poniżej:

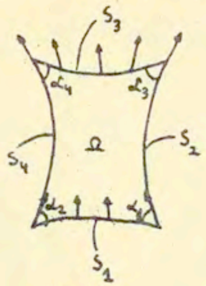


Rys.1 Rys.2 Rys.3

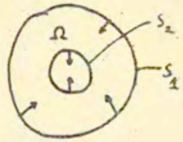
Analogiczne typy obszarów rozpatrujemy w przypadku dwuwymiarowym:



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

W przypadku obszarów dwuwymiarowych $\partial\Omega = \bigcup_{\nu=1}^{4} S_\nu$, $S_1 \cap S_3 = \phi$, $S_2 \cap S_4 = \phi$ oraz $\alpha_0 = \max_k \alpha_k$, α_k, $k=1,\ldots,4$, są kątami określonymi na Rys.5.

W przypadku trójwymiarowym dla obszarów jednospójnych przyjmujemy, że $\partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, gdzie S_ν, $\nu=0,1,2$, są odpowiednio gładkie. Oznaczamy $L_i = S_i \cap S_0$, $i=1,2$, oraz $S_1 \cap S_2 = \phi$. Dla obszarów z kątami (Rys.2), L_i, $i=1,2$, są krawędziami oraz między S_i i S_0 są dwuścienne kąty równe $\alpha_i(x)$, $x \in L_i$, $i=1,2$, oraz $\alpha_0 = \max_{i=1,2} \max_{x \in L_i} \alpha_i(x)$.

W otoczeniu $U(p)$ dowolnego punktu $p \in S_\nu$, $\nu=0,\ldots,4$, wprowadzamy ortogonalny krzywoliniowy układ współrzędnych $(\tau_1(x),\ldots,\tau_{n-1}(x),n(x))$, $n=2,3$, taki, że rozmaitość S_ν jest opisana równaniem $n(x)=0$ a $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$ są na niej współrzędnymi. Z tymi współrzędnymi związujemy układ ortonormalny wektorów taki, że wektory $\bar{\tau}_1(x),\ldots,\bar{\tau}_{n-1}(x)$, $x \in S_\nu$ są styczne do S_ν w punkcie x, a $\bar{n}(x)$ jest wektorem zewnętrzym normalnym do S_ν. Współrzędne $(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},n)$ i wektory $\bar{\tau}_1,\ldots,\bar{\tau}_{n-1},\bar{n}$ związane są ze sobą następującymi relacjami: $\frac{\partial}{\partial\tau_i} = H_i \bar{\tau}_i \cdot \nabla$, $\frac{\partial}{\partial n} = H_n \bar{n} \cdot \nabla$ gdzie H_i, H_n są współczynnikami Lamego, $i=1,\ldots,n-1$. Wówczas wektory $\frac{\partial}{\partial\tau_i}$, $i=1,\ldots,n-1$, $\frac{\partial}{\partial n}$, komutują ze sobą [Ko, 3].

W pracy użyte są przestrzenie Sobolewa $W_p^l(\Omega)$ oraz przestrzenie funkcji całkowalnym $L_p(\Omega)$ z normami oznaczanymi przez $\| \|_{l,p,\Omega}$ i $\| \|_{p,\Omega}$, odpowiednio. Ponadto wprowadzamy przestrzenie Słobodeckiego-Besowa z normami oznaczanymi przez $\| \|_{l-1/p,p,\partial\Omega}$.

Niech B będzie przestrzenią Banacha, k-nieujemna całkowita liczba i T-dodatnia stała. Przez $L_r^k(0,T;B)$ oznaczamy przestrzeń Banacha funkcji $f(t)$ na $[0,T]$ o wartościach w B dla każdego $t\in[0,T]$ i których B-norma k-tej pochodnej względem czasu jest całkowalna z r-tą potęgą względem $t\in[0,T]$, czyli

$$\|u\|_{L_r^k(0,T;B)}=\Big(\int_0^T\Big\|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u\Big\|_B^r\,dt\Big)^{1/r}.$$

Wprowadzamy ponadto przestrzenie: $\Pi_{k,p,q}^l(\Omega^T)=\bigcap_{i=k}^{l}L_p^{l-i}(0,T;W_q^i(\Omega))$

z normą

$$\|u\|_{\Pi_{k,p,q}^l(\Omega^T)}\equiv|u|_{l,k,p,q,\Omega^T}=\sum_{i=k}^{l}\Big(\int_0^T\|D_t^{l-i}u\|_{i,q,\Omega}^p\,dt\Big)^{1/p}\ ;\ \Omega^T=\Omega\times[0,T],$$

przestrzeń $\Pi_{k,p,q}^{l-1/q}(\partial\Omega^T)=\bigcap_{i=k}^{l}L_p^{l-i}(0,T;W_q^{i-1/q}(\partial\Omega))$,

z normą

$$\|u\|_{\Pi_{k,p,q}^{l-1/q}(\partial\Omega^T)}\equiv|u|_{l-1/q,k,p,q,\partial\Omega^T}=\sum_{i=k}^{l}\Big(\int_0^T\|D_t^{l-i}u\|_{i-1/q,q,\partial\Omega}^p\,dt\Big)^{1/p},$$

$\partial\Omega^T=\partial\Omega\times[0,T]$,

gdzie $k\geqslant 1$, ostatecznie wprowadzamy przestrzenie $\Gamma_{k,p}^l(\Omega)$, $\Gamma_k^{l-1/p}(\partial\Omega)$

z normami: $\Gamma_{k,p}^l(\Omega)$, $\Gamma_k^{l-1/p}(\partial\Omega)$

$$\|u\|_{\Gamma_{k,p}^l(\Omega)}\equiv|u|_{l,k,p,\Omega}=\sum_{i=k}^{l}\|D_t^{l-i}u\|_{i,p,\Omega},$$

$$\|u\|_{\Gamma_{k,p}^{l-1/p}(\partial\Omega)}\equiv|u|_{l-1/p,k,p,\partial\Omega}=\sum_{i=k}^{l}\|D_t^{l-i}u\|_{i-1/p,p,\partial\Omega},\quad k\geqslant 1.$$

3. Dobrze postawione problemy przepływu dla cieczy nieściśliwej

W przypadku cieczy nieściśliwej równania Eulera przyjmują postać

$$(3.1) \qquad v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = f,$$

$$(3.2) \qquad \operatorname{div} v = 0 \ ,$$

gdzie v -wektor prędkości,p-ciśnienie,f-siły zewnętrzne oraz jako warunki początkowe mamy

$$(3.3) \qquad v|_{t=0} = a(x).$$

Na mocy (3.2) mamy następujący warunek

$$(3.4) \qquad \operatorname{div} a = 0.$$

Problem przepływu dla równań Eulera charakteryzuje się warunkiem

$$(3.5) \qquad v_n|_{\partial\Omega} = v \cdot \bar{n}|_{\partial\Omega} \neq 0 \quad \text{lub} \quad v_n|_{S_1} < 0, \ v_n|_{S_0} = 0, \ v_n|_{S_2} > 0 .$$

Powstaje pytanie: Jakie problemy początkowo-brzegowe dla równań (3.1), (3.2) można sformułować,które byłyby dobrze postawione. W ogólności problem taki nie został rozwiązany,ale po prostu znaleziono kilka dobrze postawionach problemów przepływu. Prace Giuntera [Gü,1,2],Judowicza [Yu,2],Ładyżeńskiej [La,1],Koczina [Ko,1] Wolibnera [Wo,1],Kato [Ka,1],sugerują poprzez metodę dowodzenia następujące warunki brzegowe:

$$(3.6) \qquad \omega|_{S_1} = \chi,$$

(3.7) $$v_n|_{\partial\Omega} = b,$$

gdzie ω =rot$v$,jest wirowością pola prędkości. Z równań (3.3), (3.6), (3.7) mamy następujące warunki zgodności

(3.8) $$\mathrm{rot}\, a|_{S_1} = \chi|_{t=0}, \quad a_n|_{\partial\Omega} = b|_{t=0},$$

oraz wykorzystując (3.2) mamy

(3.9) $$\int_{\partial\Omega} b(s)ds = 0.$$

Podczas,gdy prace Bourguignona,Brezisa [Bo,1] i Temama [T,1] sugerują warunek brzegowy:

(3.10) $$v|_{S_1} = \eta.$$

Okazuje się,że można sformulować następujący rezultat:

Lemat 3.1 [Za,5]

Problem (3.1), (3.2), (3.3), (3.5), (3.10) będzie dobrze postawiony jeśli ponadto przyjmiemy następujące warunki brzegowe na S_2: albo

(3.11) $$v_n|_{S_2} = b,$$

albo

(3.12) $$p|_{S_2} = \pi.$$

Oczywiście muszą być spełnione warunki zgodności

$$(3.13) \qquad \eta\big|_{t=0} = a\big|_{S_1}, \quad a_n\big|_{S_0} = 0,$$

a w przypadku warunku (3.11) dodatkowo

$$(3.14) \qquad b\big|_{t=0} = a_n\big|_{S_2}$$

W celu pokazania, że powyższe problemy są dobrze postawione, zastępujemy je układami problemów dla których umiemy postawić warunki brzegowe i początkowe tak, aby były dobrze postawione.

Problem (3.1), (3.2), (3.3), (3.6), (3.7).

Zgodnie z pracami [Gü, 1, 2], [Yu, 2], [Ko, 1], [La, 1], zamiast tego problemu rozpatrujemy układ dwóch problemów:

$$(3.15) \qquad \omega_t + v^k \omega_{x^k} - \omega^k v_{x^k} = F \equiv \operatorname{rot} f,$$

$$(A) \quad (3.16) \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0 \equiv \operatorname{rot} a,$$

$$(3.6) \qquad \omega\big|_{S_1} = \chi,$$

gdzie (3.15) jest otrzymane z (3.1) poprzez zastosowanie operatora rotacji oraz v jest przyjęte jako znana funkcja;

$$(B) \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} v &= \omega, \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ v_n\big|_{\partial\Omega} &= b, \end{aligned}$$

gdzie ω jest daną funkcją. Jeśli (ω, v) jest rozwiązaniem problemu

(A,B) wówczas istnieje p, że (p,v) jest rozwiązaniem wyjściowego problemu. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy problem (A,B) jest dobrze postawiony, wprowadzamy krzywe określone równaniami

$$\frac{dy}{ds} = v(y(x,t;s),s),$$
$$(3.17)\qquad y(x,t;t) = x,$$

gdzie $0 \le s \le t$. Krzywe (3.17) dzielimy na dwie rozłączne rodziny:

(a) dla każdego $s \in [0,t]$, $y(x,t;s) \in \Omega$,

(b) istnieje taki moment $t_*(x,t) \in [0,t)$, że $y(x,t;t_*(x,t)) \in S_1$.

Równanie (3.15) na krzywych (3.17) staje się układem równań różniczkowych zwyczajnych

$$(3.18)\qquad \frac{d}{ds}\omega(y(x,t;s),s) - \omega^k(y(x,t;s),s)\, v_{y^k}(y(x,t;s),s) = F(y(x,t;s),s),$$

dla których warunki (3.16) lub (3.6) są warunkami początkowymi na krzywych rodziny (a) lub (b), odpowiednio. Czyli problem (A) jest dobrze postawiony, co wynika z teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Aby problemy (A) i (B) były wzajemnie zgodne, z problemu (A) musi wynikać, że $\operatorname{div}\omega = 0$, co zachodzi tylko na krzywych rodziny (a). Spełnienie tego równania na krzywych rodziny (b) prowadzi do warunku

$$(3.19)\qquad \operatorname{div}\omega|_{S_1} = 0.$$

Wykorzystując współrzędne krzywoliniowe (§ 2) oraz przyjmując

(3.20) $\chi = \eta + \pi \bar{n}, \quad \eta \in TS_1,$

równanie (3.19) prowadzi do następującego równania na π :

(3.21) $$\pi_t + \sum_{\mu=1}^{2} \left[\frac{1}{H_\mu} v_\mu \pi_{,\tau_\mu} + \pi \left(\frac{1}{H_\mu} v_{\mu,\tau_\mu} + v_\mu \operatorname{rot}_n (\bar{n} \times \bar{\tau}_\mu) \right) \right] = \varphi(x',t), \; x' \in S_1$$

gdzie $\eta_\mu = \eta \cdot \bar{\tau}_\mu$, $F_n = F \cdot \bar{n}$, $v_\mu = v \cdot \bar{\tau}_\mu$ oraz

(3.22) $$\varphi(x',t) = \sum_{\mu=1}^{2} \left[\frac{1}{H_\mu} (\eta_\mu b)_{,\tau_\mu} + b \eta_\mu \operatorname{rot}_n (\bar{n} \times \bar{\tau}_\mu) \right] + F_n, \quad x' \in S_1.$$

Ponadto warunki początkowe na π wyprowadzimy z (3.16)

(3.23) $$\pi \big|_{t=0} = \bar{n} \cdot \omega_0 \big|_{S_1}.$$

Kładąc $\pi = 0$ w (3.21) otrzymujemy następujące ograniczenie na η

(3.24) $$\varphi(x',t) = 0.$$

W celu stwierdzenia, czy problem (3.21), (3.23) jest dobrze postawiony, rozpatrujemy krzywe generowane przez styczne składowe wektora prędkości zrzutowanego na S_1 $\tilde{v} = \sum_{\mu=1}^{2} v_\mu \bar{\tau}_\mu \big|_{S_1}$ określone równaniami

(3.25) $$\frac{d\tilde{\tau}_\mu}{ds} = v_\mu (\tilde{\tau}_1(\tau,t;s), \tilde{\tau}_2(\tau,t;s); s),$$
$$\tilde{\tau}_\mu(\tau_1,\tau_2,t;t) = \tau_\mu, \quad \mu = 1,2.$$

Na krzywych (3.25) równanie (3.21) przyjmie postać

$$(3.26)\qquad \frac{d\Pi}{ds} + \sum_{\mu=1}^{2}\Big(\frac{1}{H_\mu} v_{\mu,\tau_\mu} + v_\mu \operatorname{rot}_m(\bar{n}\times\bar{\tau}_\mu)\Big)\Pi = \varphi(x',t),\ x'\in S_1 .$$

Niech $\partial S_1 = S_1 \cap S_0 = L_1$ oraz $\bar{\sigma}\in TS_1$ będzie wektorem zewnętrznym normalnym do L_1. Analogicznie jak w przypadku równania (3.15) o konieczności dodatkowego warunku dla problemu (3.21), (3.23), będzie decydować znak wyrażenia $\bar{v}\cdot\bar{\sigma}|_{L_1}$, który zależy od geometrii obszaru Ω. Jeśli kąt między powierzchniami S_1 i S_0 jest w przedziale $[\pi/2,\pi]$, to problem (3.21), (3.23) jest dobrze postawiony, a jeśli ten kąt jest mniejszy od $\frac{\pi}{2}$ to trzeba dodatkowo założyć

$$(3.27)\qquad \Pi|_{L_1} = \varrho(x'',t),\ x''\in L_1 .$$

Problem (3.21), (3.23), lub (3.21), (3.23), (3.27) będzie oznaczony jako problem (C).

Problem (3.1), (3.2), (3.3), (3.5), (3.10), (3.12).

W tym wypadku opierając się na pracach [Bo, 1], [T, 1] problem ten jest równoważny układowi dwóch następujących problemów [Za, 5]: problemu na prędkość, gdzie p jest daną funkcją

$$(3.28)\qquad v_t + v\cdot\nabla v = -\nabla p + f,$$

$$(D)\qquad (3.29)\qquad v|_{t=0} = a(x),$$

$$(3.30)\qquad v|_{S_1} = \eta,\ v_n|_{S_0} = 0,\ v_n|_{S_2} \geq 0,$$

oraz problemu na ciśnienie, gdzie v jest daną funkcją

$$(3.31)\qquad \Delta p = \operatorname{div} f - v^k_{x_i} v^i_{x_k},$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_1} = -\eta_{n,t} + f_n\Big|_{S_1} + \sum_{\mu=1}\Big(\frac{1}{H_\mu}\eta_n \eta_{\mu,\tau_\mu} + \eta_n \eta_\mu \operatorname{div}\bar{\tau}_\mu - \frac{\eta_\mu}{H_\mu}\eta_{n,\tau_\mu} \tag{3.32}$$

$$(E)\qquad + \sum_{\nu=1}^{2} \frac{1}{H_\mu}\eta_\mu \eta_\nu \bar{\tau}_\nu \cdot \bar{n}_{,\tau_\mu} + \eta_n H_n^{-1} \eta_\mu \bar{\tau}_\mu \cdot \bar{n}_{,n}\Big) + \eta_n^2 \operatorname{div}\bar{n} \equiv g(\eta, \bar{\tau}, \bar{n}),$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_0} = -v^k v \cdot \bar{n}_{,x^k} + f \cdot \bar{n}\Big|_{S_0}, \tag{3.33}$$

$$p\big|_{S_2} = \pi(x', t), \quad x' \in S_2 . \tag{3.34}$$

Problem (3.1), (3.2), (3.3), (3.5), (3.10), (3.11).

Zgodnie z pracą [Kaz, 4] problem ten jest równoważny następującemu układowi problemów:

problem na v, gdzie dana jest ω:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{rot} v = \omega, \\ &\operatorname{div} v = 0, \\ &v_n\big|_{S_1} = \eta \cdot \bar{n}, \quad v_n\big|_{S_2} = b, \quad v_n\big|_{S_0} = 0; \end{aligned}$$

problem na ciśnienie, gdzie dana jest prędkość v:

$$\Delta p = \operatorname{div} f - v^k_{,x^i} v^i_{,x^k},$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_0} = f \cdot \bar{n}\Big|_{S_0} + \sum_{\nu=1}^{2} H_\nu^{-1} v_\nu v \cdot \bar{n}_{,\tau_\nu}\Big|_{S_0},$$

$$(\beta)\qquad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_2} = f \cdot \bar{n}\Big|_{S_2} - b_t + \sum_{\mu=1}^{2}\Big(-\frac{v_\mu}{H_\mu} b_{,\tau_\mu} + \frac{v_\mu}{H_\mu} v \cdot \bar{n}_{,\tau_\mu} + b\frac{v_{\mu,\tau_\mu}}{H_\mu} + b v_\mu \operatorname{div}\bar{\tau}_\mu +$$

$$+ b v_\mu \alpha_\mu\Big)\Big|_{S_2} + b^2 \operatorname{div}\bar{n},$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_1} = -\eta_t + \sum_{\mu=1}^{2}\Big(-\frac{\eta_\mu}{H_\mu}\eta_{,\tau_\mu} \cdot \bar{n} + \frac{\eta_n}{H_\mu}\eta_{\mu,\tau_\mu} + \eta_n \eta_\mu \operatorname{div}\bar{\tau}_\mu + \eta_n \eta_\mu \alpha_\mu\Big|_{S_1}\Big) +$$

$$+\eta_n^2 \operatorname{div}\bar{n} + f\cdot\bar{n}\big|_{S_1},$$

gdzie $\alpha_\mu = \bar{n}\cdot\nabla\bar{n}\cdot\bar{\tau}_\mu$, $\mu = 1,2$;

oraz problem na ω ,przy danym v i p:

$$\omega_t + v^k\omega_{x^k} - \omega^k v_{x^k} = F \equiv \operatorname{rot} f,$$

$$(\gamma) \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0 \equiv \operatorname{rot} a,$$

$$\omega\big|_{S_1} = \chi,$$

gdzie styczne do S_1 składowe wektora χ obliczamy z równania Lamba zrzutowanego na S_1,następująco [Ko,3],[Za,5]:

$$\omega\cdot\bar{\tau}_1\big|_{S_1} = \omega_1\big|_{S_1} = \chi_1 = \eta_n^{-1}\Big[\eta_{2,t} + \frac{1}{H_2}\Big(\frac{\eta^2}{2}+p\Big)_{,\tau_2} + \eta_1\omega_3\big|_{S_1} - f_2\big|_{S_1}\Big],$$

(3.35)

$$\omega\cdot\bar{\tau}_2\big|_{S_1} = \omega_2\big|_{S_1} = \chi_2 = \eta_n^{-1}\Big[-\eta_{1,t} - \frac{1}{H_1}\Big(\frac{\eta^2}{2}+p\Big)_{,\tau_1} + \eta_2\omega_3\big|_{S_1} + f_1\big|_{S_1}\Big],$$

gdzie H_1, H_2 są współczynniki Lamego oraz

$$(3.36) \qquad \omega\cdot\bar{n}\big|_{S_1} = \omega_3\big|_{S_1} = \frac{1}{H_1H_2}\Big[\frac{\partial(H_2\eta_2)}{\partial\tau_1} - \frac{\partial(H_1\eta_1)}{\partial\tau_2}\Big] = \chi_3 .$$

W przypadku dwuwymiarowym,zamiast problemu (B) mamy problem

$$\Delta\varphi = \omega,$$

$$(B') \qquad \varphi\big|_{\partial\Omega} = \beta$$

gdzie $v_1 = -\varphi_{,x^2}$, $v_2 = \varphi_{,x^1}$.

W przypadku cieczy ściśliwej barotropowej równania Eulera są postaci

$$(3.37)\qquad \varrho(v_t + v\cdot\nabla v - f) = -\nabla p(\varrho),$$

$$(3.38)\qquad \varrho_t + \operatorname{div}(\varrho v) = 0,$$

gdzie $p = A\varrho^{\gamma}$, $0<A$-stała i $1 \leq \gamma \leq 2$, oraz mamy warunki początkowe postaci

$$(3.39)\qquad v|_{t=0} = a(x),$$

$$(3.40)\qquad \varrho|_{t=0} = \varrho_0(x).$$

W tym przypadku jako warunek brzegowy przyjmujemy

$$(3.41)\qquad v_n|_{\partial\Omega} = 0,$$

oraz dla prostoty rozpatrujemy obszar jednospójny tylko. Problem (3.37) ÷ (3.41) był rozpatrzony w pracy [Ve, 1], gdzie przedstawiony tam dowód istnienia rozwiązania tego problemu metodą Leray'a-Schaudera jest skomplikowany i zagmatwany. Dlatego też, przeprowadzamy dowód istnienia rozwiązań tego problemu stosując metodę kolejnych przybliżeń, analogicznie jak w przypadku cieczy nieściśliwej. W tym celu zastępujemy problem (3.37) ÷ (3.41) następującym układem problemów:

problem określający gęstość przy zadanej prędkości:

$$(3.42)\qquad Q^2 g - \operatorname{div}(h(g)\nabla g) = F = \operatorname{div} f - v^k_{x_i} v^i_{x_k},$$

$$(F)\quad (3.43)\qquad g|_{t=0} = g_0,\quad g_t|_{t=0} = -a\cdot\nabla g_0 - \operatorname{div} a,$$

$$(3.44) \quad \left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{n^i_{,x^j} v^i v^j + f_n}{h(g)}\right|_{\partial\Omega},$$

gdzie $g = \ln \varrho$, $g_0 = \ln \varrho_0$, $Q = \partial_t + v \cdot \nabla$, $h(g) = p'(\exp g)$, $p'(\varrho) = \frac{dp}{d\varrho} = a_s^2$, a_s jest prędkością dzwięku; równanie (3.42) jest równaniem silnie hiperbolicznym, drugi z warunków początkowych (3.43) jest otrzymany z równania ciągłości (3.38) obliczonego w chwili t=0, warunek brzegowy (3.44) jest otrzymany z normalnej składowej równania (3.37) zrzutowanej na $\partial\Omega$ przy wykorzystaniu warunku brzegowego (3.41);

problem na wirowość przy zadanej prędkości

$$\text{(G)} \quad \begin{aligned} &(3.45) \quad \omega_t + v^k \omega_{x^k} - \omega^k v_{x^k} + \operatorname{div} v\, \omega = \operatorname{rot} f, \\ &\left.\omega\right|_{t=0} = \omega_0 \equiv \operatorname{rot} a, \end{aligned}$$

gdzie równanie (3.45) zostało otrzymane z równania (3.37) po zadziałaniu na nie operatorem rotacji;

w końcu problem na prędkość przy zadanej gęstości, wirowości oraz prędkości, jak gdyby z poprzedniego kroku

$$\text{(H)} \quad \begin{aligned} &\operatorname{div} v = -Qg, \\ &\operatorname{rot} v = \omega, \\ &\left.v_n\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

gdzie v po prawej stronie jest rozumiane jako dana funkcja.

Ponadto muszą być spełnione następujące warunki zgodności [Ve, 1]:

(3.46) $\quad a\cdot\bar{n}\big|_{\partial\Omega}=0,$

(3.47) $\quad \dfrac{p'(\varrho_0)}{\varrho_0}\dfrac{\partial\varrho_0}{\partial n}=n^j_{,x^i}a^ia^j+f\big|_{t=0}\cdot\bar{n}\quad$ na $\partial\Omega$,

(3.48) $\quad -n^j_{,x^i}(\dot{a}^ia^j+a^i\dot{a}^j)+f_{,t}\big|_{t=0}\cdot\bar{n}+\dfrac{\partial}{\partial n}\Big[\Big(a\cdot\dfrac{\nabla\varrho_0}{\varrho_0}+\operatorname{div}a\Big)p'(\varrho_0)\Big]=0\quad$ na $\partial\Omega$,

gdzie $\quad \dot{a}=-a\cdot\nabla a+f\big|_{t=0}-p'(\varrho_0)\dfrac{\nabla\varrho_0}{\varrho_0}\qquad$ oraz

(3.49) $\quad \varrho_0(x)\geqslant m_0>0\quad$ w Ω.

4. Istnienie, jednoznaczność i regularność rozwiązań w przestrzeniach Sobolewa problemów przepływu

W części tej przeprowadzimy analizę istnienia jednoznaczności oraz regularności rozwiązań problemów przepływu wyszczególnionych w §3 z punktu widzenia własności rozpatrywanego obszaru.

W przypadku obszaru jednospójnego z gładką granicą umiemy dowieść istnienia rozwiązań tylko dla problemu (A, B), gdy w warunku (3.6) mamy $\chi=\eta\in TS_1$. Wówczas możemy sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 4.1. [Za, 5], [Za, 1].

Niech $r>n$, $n=2,3$, r - liczba rzeczywista, $\partial\Omega\in C^3$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$,

$a\in W^2_r(\Omega)$, $\operatorname{div}a=0$,

$b\in L_\infty(0,T;W_r^{2-1/r}(\partial\Omega))\cap L^1_\infty(0,T;W_r^{1-1/r}(\partial\Omega))$, $\displaystyle\int_{\partial\Omega}b(s)\,ds=0$, $d=-b|_{S_1}\geqslant 0$,

$\displaystyle\max_{t\in[0,T]}\max_{S_1}d\leq B_1$, $\displaystyle\max_{t\in[0,T]}\int_{S_1}d^{1-r}(|\eta|^r+|\eta_t|^r+|\eta_{,\tau}|^r)\,ds\leq B_2$,

$$\max_{t\in[0,T]} \int_{S_1} d^{1-r}|F|\,ds \le B_3,$$

gdzie B_i, i=1,2,3 są stałymi, $F\in \Pi^1_{0,\infty,r}(\Omega^T)$,

wtedy dla $t\in[0,T]$, gdzie

$$T < t^* = \frac{1}{C(B_1,B_2,B_3)\left(\|a\|^{2r}_{2,r} + \|F(0)\|^r_r + 1\right)},$$

problem (A,B) ma jednoznaczne rozwiązanie takie, że

$$v\in \Pi^2_{1,\infty,r}(\Omega^T),\quad w\in \Pi^1_{0,\infty,r}(\Omega^T).$$

W przypadku obszarów jednospójnych z gładką granicą koniecznym jest spełnienie warunku: $d|_{L_1}=0$, który na mocy założeń Tw.4.1 wpływa na zachowanie się funkcji η i F w otoczeniu L_1 (muszą odpowiednio zbiegać do zera, gdy argumenty zbiegają do punktu należącego do L_1). Na mocy Tw.4.1 widać, że $v_x, v_t\in C^{\alpha}(\Omega)$, gdzie $\alpha=\frac{r-1}{r}$, czyli równania Eulera spełnione są w sposób klasyczny.

W przypadku obrzarów niejednospójnych albo z kątami dwuściennymi pomiędzy S_1 i S_0 (rozpatrujemy przypadek trójwymiarowy) możemy przyjąć, że normalna składowa prędkości na S_1 jest niezerowa, czyli $-b=d\geq d_0>0$, d_0-stała. Zatem możemy sformułować twierdzenie

Twierdzenie 4.2 [Za,5], [Za,3].

Niech $r\geq 1$, $r>\frac{3}{l}$, $l\geq 1$, l-liczba naturalna, r-rzeczywista, S_ν, $\nu=0,1,2$, są klasy C^{l+2}, $\partial\Omega=S_0\cup S_1\cup S_2$,

$a\in W^{l+1}_r(\Omega)$, $\operatorname{div} a=0$,

$\eta\in \Pi^l_{0,\infty,r}(S_1^T)$, $b\in \Pi^{l+1-1/r}_{1,\infty,r}(\partial\Omega^T)$,

$$-b|_{S_1} = d \geqslant d_0 > 0,\ b|_{S_0} = 0,\ b|_{S_2} \geqslant 0,\ \int_{\partial\Omega} b(s)\,ds = 0,$$

$$F \in \Pi^{l}_{0,\infty,r}(\Omega^T).$$

W przypadku obszarów z dowolnymi dwuściennymi kątami dodatkowo musi być spełniony warunek (co wynika z rezultatów Kondratiewa [Kon,1,2])

$$(4.1) \qquad \frac{\pi}{\alpha_0} > l+2, \quad r=2,\ l \geqslant 2,$$

gdzie α_0 jest maksymalnym dwuściennym kątem w obszarze Ω. Ponadto zakładamy spełnienie wszystkich warunków zgodności.

Wówczas dla czasów $t \in [0,T]$, gdzie T jest dostatecznie małe, istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu (A,B) gdy warunek (3.6) ma postać $\chi = \eta \in TS_1$ takie, że

$$v \in \Pi^{l+1}_{1,\infty,r}(\Omega^T),\ \omega \in \Pi^{l}_{0,\infty,r}(\Omega^T).$$

Tylko w obszarach niejednospójnych albo z kątami dwuściennymi między S_i i S_0, $i=1,2$ (rozpatrujemy przypadek trójwymiarowy) możemy dowodzić istnienia rozwiązań problemu (D,E). Wówczas możemy sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 4.3 [Za,5], [Za,2]

Niech $r > \frac{3}{l-1}$, $l \geqslant 2$, $S_\nu \in C^{l+2}$, $\nu=0,1,2$,

$$a \in W^{l}_{r}(\Omega),\ \operatorname{div} a = 0,\ a\cdot\bar{n}|_{S_2} \geqslant a_0 > 0,$$

$$\eta \in \Pi^{l+1-1/r}_{1,r}(S_1^T),\ f \in \Pi^{l}_{1,r}(\Omega^T),\ \pi \in \Pi^{l+1-1/r}_{2,r}(S_2^T),$$

$$-\eta\cdot\bar{n} = d \geqslant d_0 > 0.$$

Ponadto w przypadku dowolnych kątów dwuściennych zakładamy dodatkowo

$$(4.2) \qquad \frac{\pi}{\alpha_0} > l \;,\; r=2,\; l \geqslant 3,$$

gdzie α_0 jest maksymalnym dwuściennym kątem w obszarze Ω.

Wówczas dla $t \in [0,T]$, gdzie T jest dostatecznie małe istnieje rozwiązanie problemu (D,E) takie, że

$$v \in \Pi^{l}_{1,\infty,r}(\Omega^T),\; p \in \Pi^{l+1}_{2,\infty,r}(\Omega^T).$$

Opierając się na rezultatach w [Za,5] sformułujemy

Twierdzenie 4.

Nie można udowodnić istnienia rozwiązań problemu (A,B,C) i (α,β,γ) w przestrzeniach Sobolewa, metodą użytą w dowodach twierdzeń 1,2,3.

W przypadku przepływów ze zmienną gęstością pokazano istnienia rozwiązań zagadnienia (F,G,H) dla obszarów jednospójnych. Dla takego przypadku udowodniono twierdzenie:

Twierdzenie 5. [Za,5]

Niech $\partial\Omega \in C^5$, $a, \varrho_0 \in H^3(\Omega)$, $f \in \Pi^3_{1,2}(\Omega^T)$.

Wówczas dla $t \in [0,T]$, $T < t_0$, gdzie t_0 jak i warunki początkowe a i ϱ_0 są dostatecznie małe, istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu (F,G,H) takie, że

$$\varrho \in \Pi^3_{0,\infty,2}(\Omega^T),\; \omega \in \Pi^2_{0,\infty,2}(\Omega^T),\; v \in \Pi^3_{1,\infty,2}(\Omega^T).$$

Ponadto przyjęto, że warunki zgodności (3.46) ÷ (3.48) są spełnione.

W przypadku dwuwymiarowym dla obszaru niejednospójnego lub z kątami można udowodnić istnienie i jednoznaczność problemów (A,B') i (D,E), co sformułujemy w postaci następujących dwóch twierdzeń:

Twierdzenie 6 [Za,5], [Za,4]

Niech $r>\frac{2}{l}$, $l\geq 1$, $-v\cdot\bar{n}|_{S_1}=d\geq d_0>0$, d_0-stała, l-liczba naturalna, r-liczba rzeczywista, $S_\nu\in C^{l+2}$, $\nu=1,2,3,4$.

$$a\in W_r^{l+1}(\Omega),\ \operatorname{div} a=0,$$

$$\eta\in\Pi_{0,\infty,r}^{l}(\Omega^T),\ \operatorname{rot} f\in\Pi_{0,\infty,r}^{l}(\Omega^T),\ \beta\in\Pi_{2,\infty,r}^{l+2-1/r}(\partial\Omega^T),$$

oraz $T\leq \max_{\varsigma} t'(\varsigma)$, gdzie $t'(\varsigma)=\frac{1}{\gamma(\varsigma y_0)}\ln\frac{\varsigma y_0+1}{y_0+1}$, $\varsigma>1$, γ jest wielomianem stopnia l względem swojego argumentu oraz

$$y_0=\sum_{s=0}^{l}\|D_t^s\omega(0)\|_{l-s,r}^{r}.$$

W przypadku dowolnych kątów musi być spełniony dodatkowo warunek

$$\frac{\pi}{\alpha_0}>2+l-\frac{2}{r}, \tag{4.3}$$

gdzie α_0 jest maksymalnym kątem w obszarze Ω. Wówczas istnieje jedno rozwiązanie problemu (A,B), takie, że

$$v\in\Pi_{1,\infty,r}^{l+1}(\Omega^T),\ \omega\in\Pi_{0,\infty,r}^{l}(\Omega^T).$$

Twierdzenie 7 [Za,5], [Za,4]

Niech $r>\frac{2}{l-1}$, $l\geq 2$, $-v\cdot\bar{n}|_{S_1}=d\geq d_0>0$, d_0-stała, l-liczba naturalna, r-liczba rzeczywista, $S_\nu\in C^{l+2}$, $\nu=1,\dots,4$,

$$a\in W_r^{l}(\Omega),\ \operatorname{div} a=0,\ a\cdot\bar{n}|_{S_3}\geq a_0>0,\ a_0\text{-stała},$$

$$\eta \in \Pi^{l+1-1/r}_{1,\infty,r}(S_1^T),\ \pi \in \Pi^{l+1-1/r}_{1,\infty,r}(S_3^T),\ f \in \Pi^{l}_{0,\infty,r}(\Omega^T),$$

oraz $T \leq \max_{g} \min\left(\frac{a_0}{(gy_0)^{1/r}}, t'(g)\right)$, gdzie $y_0 = \sum_{s=0}^{l-1} \| D_t^s v(0) \|^r_{l-s,r}$,
$t'(g) = \frac{1}{\gamma(gy_0)} \ln \frac{gy_0+1}{y_0+1}$, $g>1$, γ jest wielomianem stopnia 1.

Wprzypadku dowolnych kątów zakładamy dodatkowo

$$\frac{\pi}{\alpha_0} > 1 + l - \frac{3}{r} , \tag{4.4}$$

α_0 jest maksymalnym kątem w obszarze Ω . Wówczas istnieje jedno rozwiązanie problemu (D, E) takie, że

$$v \in \Pi^{l-1}_{0,\infty,r}(\Omega^T),\quad p \in \Pi^{l}_{1,\infty,r}(\Omega^T) .$$

Literatura

[Bo, 1] Bourguignon, J.P., Brezis, H.: Remarks on the Euler equations, J.Funct.Anal. 15 (1974) 341-363.

[Gü, 1] Günter, N.M.: About the fundamental problem of hydrodynamics, Izv.Phys.Mat.Inst.Steclov 2 (1927) 1-168 (ros.)

[Gü, 2] Günter, N.M.: About fluid motion in moving domain, Izv.Akad. Nauk SSSR part 1- (1926) 1323-1348, part 2- (1926) 1503-1532, part 3- (1927) 621-650, part 4- (1927) 735-756, part 5- (1927) 1139-1162, part 6- (1928) 9-30 (ros.)

[Ka, 1] Kato, T.: On classical solutions of twodimensional nonstationary Euler equations, Arch.Rat.Mech.Anal. 3 (25) (1967) 188-200

[Kaz, 1] Kazhihov, A.V., Ragulin, V.V.: On a problem of flow of an ideal fluid, Zap.Nauch.Sem.LOMI 92 (1980) 84-97 (ros.)

[Kaz. 2] Kazhihov, A.V., Ragulin, V.V.: Nonstationary leakage problem for an ideal fluid in a bounded domain, Dokl.Akad. Nauk SSSR 250 (6) (1980) 1344-1347 (ros.)

[Kaz, 3] Kazhihov, A.V.: Remark about formulation of leakage problem for the equations of ideal fluid, Prikl.Mat. Mekh. 5 (44) (1980) 947-950 (ros.)

[Kaz, 4] Kazhihov, A.V.: A well posed leakage problem for an ideal fluid through a given domain, Mat.probl.mech.spl. sred 47 (1980) 37-56 (ros.)

[Ko, 1] Kochin, N.E.: About the existence theorem for hydrodynamics, Prikl.Mat.Mekh. 2 (20) (1956) 153-172 (ros.)

[Ko,2] Kochin,N.E.: Vectorial calculations and introduction to the tensor calculation, Moscow 1965 (ros.)

[Ko,3] Kochin,N.E.: Kibel,I.A., Rose,N.V.: Theoretical hydrodynamics, Moscow 1963 (ros.)

[Kon,1] Kondratiev,V.A.: Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical points, Trudy Mosk.Mat Obsch.16 (1967) 209-292 (ros.)

[Kon,2] Kondratiev,V.A.: About smoothness of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations of second order in domains with sectionally smooth boundary, Diff.Uravn.6 (1970) (ros.)

[La,1] Ladyzhenskaya,O.A.: About local solvability of nonstationary problem for incompressible ideal and viscous fluid and vanishing viscosity, Zap.Nauch. Sem.LOMI 21 (1971) 65-78 (ros.)

[M,1] Mazya,V.G., Plamenevsky,B.A.: L_p-estimates for elliptic boundary value problems, Trudy Mat.Inst.Steklov 37 (1978) 49-93 (ros.)

[M,2] Mazya,V.G., Plamenevsky,B.A.: Estimates for the Green function and the Schauders estimates for solutions of elliptic boundary value problems in a dihedral angle, Sib.Mat.Z.19 (1978) (ros.)

[M,3] Mazya,V.G., Plamenevsky,B.A.: Estimates in L_p and the Hölder spaces and the Miranda-Agmon maximum Principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary, Math.Nachr.81 (1978) 25-82 (ros.)

[T,1] Teman,R.: On the Euler equations of incompressible perfect fluids, J.Funct.Anal.1 (20) (1975) 32-43

[Ve,1] H.Beirão da Veiga: On the barotropic motion of compressible perfect fluids, Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa 8 (1981) 317-351

[W,1] Wolibner,W.: Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogéne, incompressible, pendant un temps infiniment longue, Math.Z.37 (1933) 698-726

[Y,1] Yudovich,V.I.: Twodimensional nonstationary leakage problem of ideal incompressible fluid in given domain, Mat.Sb.4(64) (1964) 562-588 (ros.)

[Za,1] Zajączkowski,W.M.: Local solvability of nonstationary leakage problem for an ideal incompressible fluid, 1, Zap.Nauch.Sem.LOMI 92 (1980) 39-56 (ros.)

[Za,2] Zajączkowski,W.M.: Local solvability of nonstationary leakage problem for ideal incompressible fluid, 2, (oddane do druku w Pacific J.Math.)

[Za,3] Zajączkowski,W.M.: Local solvability of nonstationary leakage problem for ideal incompressible fluid, 3, Math.Meth.in the Appl.Sc.4 (1982) 1-14

[Za,4] Zajączkowski,W.M.: Solvability of initial boundary value problem for the Euler equations in twodimensional domain with corners, Math.Meth.in the Appl. Sc.5 (1983)

[Za,5] Zajączkowski,W.M.: Solvability of the leakage problem for the hydrodynamics Euler equations in Sobolev spaces, Prace IPPT (1983)