196.

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

[From the *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Terquem and Gerono), t. XVI. (1857), pp. 161—165.]

EULER a donné dans le Mémoire: *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite solvendi* (*Comment. Arith. Coll.*, t. II., p. 263) la solution que voici de l'équation indéterminée

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \theta; \tag{1}$$

en supposant que l'on ait la solution $x = a$, $y = b$ de manière que

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = \zeta b^2 + \eta b + \theta,$$

et en posant

$$s = \sqrt{\alpha r^2 + 1},$$

où r est une quantité quelconque, l'équation sera satisfaite par les valeurs

$$x = sa + \zeta rb + \frac{(s-1)\beta}{2\alpha} + \tfrac{1}{2} r\eta,$$

$$y = \alpha ra + sb + \frac{(s-1)\eta}{2\zeta} + \tfrac{1}{2} r\beta;$$

en effet, on voit sans peine que ces valeurs donnent identiquement

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\zeta y^2 + \eta y + \theta) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma - (\zeta b^2 + \eta b + \theta) = 0. \tag{2}$$

En supposant de plus que les coefficients α, β, γ, ζ, η, θ soient des nombres entiers tels que $\alpha\zeta$ soit un entier positif non carré, on peut toujours déterminer le nombre entier r de manière que s soit un nombre entier; cela étant, et en supposant que a, b soient des entiers, il est évident que x, y seront des nombres rationnels. Euler a de plus remarqué que l'on peut toujours faire en sorte que x, y soient des nombres entiers. En effet, si les formules donnent $x = a'$, $y = b'$ des valeurs non entières, en substituant dans les formules au lieu de a, b les valeurs a', b', on obtiendra pour x, y des valeurs entières; cela se vérifie sans peine.

L'équation indéterminée (2) rentre dans celle-ci

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between x',\ y',\ z')^2 = (a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between x,\ y,\ z)^2\,; \tag{3}$$

en supposant que la forme ternaire

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between x,\ y,\ z)^2$$

se transforme en elle-même au moyen d'une substitution linéaire quelconque, on peut supposer que cette substitution soit telle que l'on ait $z' = z$; cela étant, en écrivant $z' = z = 1$ et en mettant de plus $h = 0$, l'équation (3) se réduit évidemment à une forme telle que l'équation (2). Or on peut trouver par la méthode générale de M. Hermite la solution convenable de l'équation (3). En supposant, comme à l'ordinaire,

$$\mathfrak{A} = bc - f^2 \ldots \qquad \mathfrak{F} = gh - af \ldots$$

$$K = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh,$$

il faut pour cela écrire

$$x' = 2\xi - x,\ \ y' = 2\eta - y,\ \ z' = 2\zeta - z,$$

et

$$\begin{aligned} ax + hy + gz &= a\xi + h\eta + g\zeta \phantom{+ q\mathfrak{C}\xi} - q\mathfrak{C}\eta + q\mathfrak{F}\zeta, \\ hx + bx + fz &= h\xi + b\eta + f\zeta + q\mathfrak{C}\xi \phantom{- q\mathfrak{C}\eta} - q\mathfrak{G}\zeta, \\ gx + fy + cz &= g\xi + f\eta + c\zeta - q\mathfrak{F}\xi + q\mathfrak{G}\eta. \end{aligned}$$

où q est une quantité arbitraire. En effet, en multipliant ces équations par ξ, η, ζ et en ajoutant, on obtient

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between \xi,\ \eta,\ \zeta \between x,\ y,\ z) = (a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between \xi,\ \eta,\ \zeta)^2$$

et, au moyen de cette équation et des valeurs

$$x' = 2\xi - x,\ y' = 2\eta - y,\ z' = 2\zeta - z,$$

on forme tout de suite l'équation (3). De plus, en multipliant les trois équations par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et en ajoutant, on obtient $Kz = K\zeta$, c'est-à-dire $z = \zeta$ et de là $z' = z$.

Cela étant, les deux équations donnent, en remplaçant ζ par z,

$$\begin{aligned} a\xi + (h - q\mathfrak{C})\,\eta &= ax + hy + (g - q\mathfrak{F})\,z, \\ (h + q\mathfrak{C})\,\xi \phantom{(h - q\mathfrak{C})} + b\eta &= hx + by + (f + q\mathfrak{G})\,z, \end{aligned}$$

et de là, en remarquant que

$$ab - (h - q\mathfrak{C})\,(h + q\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + q^2\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}\,(1 + q^2\mathfrak{C}),$$

on obtient très-facilement, éliminant successivement η et ξ,

$$(1+q^2\mathfrak{C})\,\xi=(1+qh)\,x+qby+(\ qf+q^2\mathfrak{G})\,z,$$
$$(1+q^2\mathfrak{C})\,\eta=-qax+(1-qh)\,y+(-qg+q^2\mathfrak{F})\,z$$

et ensuite

$$(1+q^2\mathfrak{C})\,x'=(1+2qh-q^2\mathfrak{G})\,x+2qby+2\,(\ qf+q^2\mathfrak{G})\,z,$$
$$(1+q^2\mathfrak{C})\,y'=-2qax+(1-2qh-q^2\mathfrak{C})\,y+2\,(-qg+q^2\mathfrak{F}\,)\,z,$$

c'est-à-dire, en écrivant $z=z'=1$, les valeurs

$$\left.\begin{aligned}(1+q^2\mathfrak{C})\,x'&=(1+2qh-q^2\mathfrak{C})\,x+2qby+2\,(\ qf+q^2\mathfrak{G})\\(1+q^2\mathfrak{C})\,y'&=-2qax+(1-2qh-q^2\mathfrak{C})\,y+2\,(-qg+q^2\mathfrak{F}\,)\end{aligned}\right\}\quad(4),$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h\between x',\ y',\ 1)^2=(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h\between x,\ y,\ 1)^2\quad(5).$$

En prenant $h=0$, on a

$$\mathfrak{C}=ab,\quad \mathfrak{F}=-af,\quad \mathfrak{G}=-bg,$$

et les formules deviennent

$$\left.\begin{aligned}(1+q^2ab)\,x'&=(1-q^2ab)\,x+2qby+2q\,(f-qbg)\\(1+q^2ab)\,y'&=-2qax+(1-q^2ab)\,y-2q\,(g+qaf)\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation

$$(ax'^2+2gx'+l)+(by'^2+2fy'+m)=(ax^2+2gx+l)+(by^2+2fy+m)\quad(7),$$

[où pour c j'ai mis $l+m$] et en y écrivant

$$\frac{1-q^2ab}{1+q^2ab}=s=\sqrt{1-abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour x, y en termes de a, b.

Londres, 10 *Mars*, 1857.