Sur le premier théorème fondamental dans la théorie des déformations continues.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

§ 1.

L'ensemble des formules:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

où l'on suppose les fonctions f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) varier d'une manière continue dans un domaine déterminé (D), représente au point de vue mathématique, une déformation finie d'un milieu continu plongé dans l'espace à n dimensions.

Depuis les recherches de MM. F. et E. Cosserat [1]) on introduit dans l'étude analytique des déformations continues la forme quadratique différentielle:

$$(2) \qquad d s'^2 = \sum_{p/1}^{n} d y_p^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

les coeffitients a_{ik} étant donnés par:

$$(3) \qquad a_{ik} = \sum_{p/1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k}.$$

[1]) Annales de Toulouse I sér. v. X.

A vrai dire, la forme (2) ne représente pas toujours le carré de l'élément linéaire d'une courbe lorsque l'on suppose seulement les fonctions f_i douées de dérivées partielles du premier ordre existant en tout point du domaine (D). Il ne serait pas difficile de montrer que la condition nécessaire et suffisante en question devrait supposer la *différentiabilité* (totale) des fonctions f_i au sens de Stolz-Fréchet. Mais, cette question ne nous occupe pas dans ce moment.

Dans les traités on démontre sous le nom du *premier théorème fondamental de la théorie des déformations continues* le théorème suivant:

Supposons les coeffitients a_{ik} satisfaire les relations:

$$a_{ik}(x_1,\ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

et cela *identiquement* dans le domaine (D). Dans ce cas les fonctions f_i doivent se réduire à des *polynomes* du 1^er^ degré des variables $(x_1, \ldots, x_n)$. Les dérivées $\dfrac{\partial f_p}{\partial x_k}$ se réduiront donc à des constantes. Leur tableau $\left\|\dfrac{\partial f_p}{\partial x_k}\right\|$ étant, grâce aux relations (4), orthogonal la déformation (1) représentera donc un *mouvement* du milieu suivi éventuellement *d'une symétrie*.

Or, les démonstrations habituelles de ce théorème supposent en général les fonctions f_i douées des dérivées partielles *continues* au moins du prémier ordre (quoique les auteurs ne précisent pas leurs hypothèses). Le but du présent travail consiste à démontrer ce 1^er^ théorème fondamental en *ne supposant* que la *seule existence* des *dérivées* partielles du premier ordre et cela en *tout point* du domaine considéré.

§ 2.

Il est d'abord clair qu'il suffit d'établir la justesse du notre théorème dans le voisinage d'un point arbitraire du domaine. En effet, les dérivées étant constantes *localement* elles le resteront dans le domaine tout *entier*.

Ensuite, la démonstration que je me propose de fournir sera telle que, à des difficultés seules d'écriture près, il suffit de la donner dans le cas du plan.

Précisons donc encore une fois nos hypothèses:

Nous allons envisager la déformation donnée par:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

et nous supposons:

1° les fonctions f et g détérminées dans un domaine (ensemble ouvert connexe) (D);

2° douées des dérivées partielles:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

finies en tout point du domaine;

3° les relations:

$$(\beta)\qquad \left|\begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 1 \end{array}\right.$$

satisfaites dans le domaine (D).

§ 3.

1. La première et la dernière des relations (β) nous montre que les fonctions f et g sont *continues* par rapport à (x, y) dans le domaine.

2. Les dérivées du 1er ordre supposées existant *en tout* point du domaine, elles représentent dans ce domaine d'autant fonctions de la 1ère *classe* de Baire.

Il s'en suit qu'étant donné un ensemble parfait M contenu dans le domaine, les derivées sont *pantachiquement* continues dans l'ensemble M et par rapport à M. Cela veut dire que pour chacune d'elles l'ensemble des points où elle est *continue*, lorsque on la considère seulement aux point de l'ensemble M, constitue un ensemble *partout-dense* dans M. C'est là une propriété bien connue des fonctions de la 1ère classe. L'ensemble des points où la dérivée est continue est un ensemble *résiduel* c'est-à-dire complémentaire à un ensemble de la première catégorie de Baire. La partie commune d'un nombre fini de tels ensembles étant aussi un ensemble résiduel, il s'en suit que pour chaque M parfait les quatre dérivées sont *simultanèment continues* par rapport à M dans un sous-ensemble partout-dense dans M.

3. Introduisons la notation $I(x, y)$ pour désigner le jacobien:

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},$$

Les hypothèses (β) nous permettent d'affirmer que l'on aura

$$I^2(x, y) = 1$$

en tout point du domaine (D).

4. Nous aurons besoin d'un lemme qui généralise un peu les théorèmes classiques sur l'inversion d'un système de fonctions et qui aura peut-être son importance indépendente de nos considerations particulières.

Voici ce lemme:

Supposons dans la transformation

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned}$$

1° les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$$

existantes dans le voisinage d'un point particulier $P_0(x_0, y_0)$ et *continues* au point P_0 lui-même.

2° le jacobien $I(x, y)$ *différent* de zéro *au point* P_0.

Dans ce cas j'affirme que la transformation (α) sera *biunivoque dans le voisinage du point* P_0.

Démonstration: Supposons le contraire. On pourrait donc trouver deux suites de points

$$(x'_k, y'_k); \; (x''_k, y''_k)$$
$$k = 1, 2, 3, \dots$$

telles que:

1° $$x'_k \mp x''_k \quad \text{ou} \quad y'_k \mp y''_k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

2° $$\lim x'_k = \lim x''_k = x_0$$
$$\lim y'_k = \lim y''_k = y_0.$$

3° $$x_0 - \varepsilon < x'_k < x_0 + \varepsilon, \quad x_0 - \varepsilon < x''_k < x_0 + \varepsilon$$
$$y_0 - \varepsilon < y'_k < y_0 + \varepsilon, \quad y_0 - \varepsilon < y''_k < y_0 + \varepsilon$$
$$\varepsilon > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

4° les hypothèses du lemme soient satisfaites dans le voisinage

$$\begin{Bmatrix} x_0 - \varepsilon, & x_0 + \varepsilon \\ y_0 - \varepsilon, & y_0 + \varepsilon \end{Bmatrix}$$

5° $$f(x'_k\, y'_k) = f(x''_k, y''_k)$$
$$g(x'_k, y'_k) = g(x''_k, y''_k)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Écrivons les dernières équations (5) sous la forme:

$$0 = [f(x'_k, y'_k) - f(x''_k \cdot y'_k)] + [f(x''_k, y'_k) - f(x''_k, y''_k)]$$
$$0 = [g(x'_k, y'_k) - g(x''_k, y'_k)] + [g(x''_k, y'_k) - g(x''_k, y''_k)]$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

et appliquons le théorème des accroissements finis. Il vient:

$$0 = (x'_k - x''_k) f'_x(\xi_k, y'_k) + (y'_k - y''_k) f'_y(x''_k, \eta_k)$$
$$0 = (x'_k - x''_k)\, g'_x(\overline{\xi}_k, y'_k) + (y'_k - y''_k)\, g'_y(x''_k, \overline{\eta}_k)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

avec ξ_k, $\overline{\xi}_k$ compris entre x'_k et x''_k et de même η_k, $\overline{\eta}_k$ entre y'_k et y''_k.

Les différences: $x'_k - x''_k$, $y'_k - y''_k$ n'étant pas toutes les deux nulles on aurait:

$$\begin{vmatrix} f'_x(\xi_k, y'_k), & f'_y(x''_k, \eta_k) \\ g'_x(\overline{\xi}_k, y'_k), & g_y(x''_k, \overline{\eta}_k) \end{vmatrix} = 0.$$

En passant à la limite avec k, on obtiendrait (grâce à la continuité des dérivées au point P_0).

$$I(x_0, y_0) = 0$$

contrairement à l'hypothèse du lemme.

5. Passons maintenant à la démonstration du lemme principal dans nos considérations.

Supposons que dans un domaine (Δ) contenu dans le domaine (D):

1º la transformation

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$$

satisfasse aux hypothèses 1º 2º et 3º du *théorème* fondamental;

2º qu'elle soit *biunivoque*;

3º que le jacobien $I(x, y)$ conserve constamment la valeur $+1$ (ou -1) en tout point du domaine.

Je dis que dans ce cas la transformation (α) représente un *déplacement* suivi éventuellement d'une *symétrie*.

Démonstration. Remarquons d'abord que, les derivées f'_x, f'_y, g'_x, g'_y étant *bornées*, la transformation appartient à la classe des transformations „à condition de Lipschitz" considérées par M. Rademacher dans son travail [1]) inseré dans les Math. Annalen t. 79. Les resultats de son travail nous assurent que:

(1) les fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ sont *différentiables* au sens de Stolz-Fréchet *presque-partout* dans le domaine (Δ);

(2) la mesure superficielle de l'ensemble M' correspondant par la transformation (α) à un ensemble *mesurable* et *borné* M contenu dans le domaine (Δ) sera donnée par la formule:

$$\text{mes} \cdot M' = \iint_M |I(x, y)|\, dx\, dy.$$

Donc dans notre cas

$$\text{mes} \cdot M' = \text{mes} \cdot M$$

et la transformation (α) „*conserve les mesures*" [2]).

Soit $P_0(x_0, y_0)$ un point particulier du domaine (Δ). Traçons une *cironférence* $\overline{C}$ ayant ce point comme centre et de rayon R, contenue avec son intérieur dans le domaine. Considérons toutes les circonférences concentriques avec $\overline{C}$ et contenues dans (Δ), ainsi que tous leurs rayons. Introduisons des coordonées polaires dans l'intérieur de $\overline{C}$ par les formules:

$$(\sigma) \qquad \begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

---

[1]) M. Rademacher: Über totale und partielle Differenzierbarkeit.

[2]) v. Rademacher travail cité.

Considérons les fonctions transformées par (σ):

$$u = F(r, \varphi) = f(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)$$
$$v = G(r, \varphi) = g(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi).$$

La transformation (σ) ayant la propriété de transformer en des ensembles de *mesure nulle seulement* les ensembles de *mesure nulle* et étant régulière, nous en concluons que les fonctions

$$F(r, \varphi), \quad G(r, \varphi)$$

sont *presque-partout totalement différentiables* dans l'ensemble:

$$0 \leqslant r \leqslant R$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

On obtient les courbes transformées par (α) des *circonférences* concentriques avec $\overline{C}$ et des *rayons issus* du point P_0 en faisant respectivement $r =$ const. ou $\varphi =$ const. dans les formules

$$(\tau) \qquad \begin{cases} u = F(r, \varphi) \\ v = G(r, \varphi) \end{cases}$$

On voit donc que: pour *presque* chaque valeur constante φ_0 et pour *presque* chaque valeur r_0 les courbes transformées par (τ) sont *différentiables* pour *presque* chaque valeur de r ou respectivement pour *presque* chaque valeur de φ et que les dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial r}, \ \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \ \frac{\partial G}{\partial r}, \ \frac{\partial G}{\partial \varphi}$$

s'y calculent par des formules classiques:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi \ldots \quad \text{etc.}$$

Prenons une telle valeur φ_0 ou r_0. Considérons p. ex. le rapport:

$$\frac{F(r+k, \varphi_0) - F(r, \varphi_0)}{k} =$$

$$= \frac{1}{k}\,[f(x_0 + (r+k)\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0) -$$
$$- f(x_0 + r\cos\varphi_0,\ y_0 + r\sin\varphi_0)]$$
$$= \frac{1}{k}\,[f(x_0 + (r+k)\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0) -$$
$$- f(x_0 + r\cos\varphi_0,\ y_0 + (r+k)\sin\varphi_0)] +$$

$$+\frac{1}{k}\left[f(x_0+r\cos\varphi_0,\; y_0+(r+k)\sin\varphi_0)-\right.$$
$$\left.-f(x_0+r\cos\varphi_0,\; y_0+r\sin\varphi_0)\right]$$
$$=\cos\varphi_0 f'_x(x_0+(r+\theta k)\cos\varphi_0,\; y_0+(r+k)\sin\varphi_0)$$
$$+\sin\varphi_0\cdot f'_y(x_0+r\cos\varphi_0,\; y_0+(r+\theta' k)\sin\varphi_0).$$

Donc:

$$\left|\frac{F(r+k,\varphi_0)-F(r,\varphi_0)}{k}\right|\leqq|f'_x|+|f'_y|\leqq 2$$

et on voit que les nombres dérivées de Dini de la fonction $F(r,\varphi)$ par rapport à r sont *bornés*.

Les autres nombres dérivés tant pour la fonction $F(r,\varphi)$ que pour $G(r,\varphi)$ possèdent la même propriété.

Les courbes transformées

$$\left.\begin{aligned} u &= F(r_0,\varphi)\\ v &= G(r_0,\varphi)\end{aligned}\right\}\ \text{et}\ \left.\begin{aligned} u &= F(r,\varphi_0)\\ v &= G(r,\varphi_0)\end{aligned}\right\}$$

sont donc *rectifiables* et *absolument continues*.

En calculant leur longueur par la formule de M. Lebesgue

$$\int_0^r \sqrt{F_r'^2+G_r'^2}\,dr,\qquad \int_0^\pi \sqrt{F_\varphi'^2+G_\varphi'^2}\,d\varphi$$

(les dérivées ayant presque partout un sens et pouvant être calculées par les formules mentionnées), nous vérifierons sans difficulté que les *longueurs se conservent*, et cela grâce aux relations (β).

Donc: Dans la transformation en question *presque* chaque circonférence considérée et presque chaque *rayon* issu du point P_0 conserve sa longueur.

Considérons une telle circonférence C_0 de rayon r_0, ainsi que ses rayons. La transformation (α) étant *biunivoque* et *continue* on a grâce au théorème de Jürgens[1]) les faits suivants: Le domaine (Δ) se transforme en un autre, (Δ') — la circonférence C_0, en une courbe C_0' de Jordan fermée, l'intérieur de C_0 en l'intérieur de C_0', le point P_0, en un point déterminé P' situé à l'intérieur de C_0', les

[1]) v. p. ex. mon fasc. XLV du Mémorial des Sciences Mathématiques: Les propriétés topologiques du plan euclidien, p. 44.

rayons de C_0, en des arcs simples joignant le point P'_0 aux divers points de la courbe C'_0 et se trouvant à l'intérieur de C'_0. Traçons la circonférence $\overline{C}_0$ de centre P'_0 et de rayon r_0 dans le plan (u, v).

Presque tous les rayons de C_0 étant transformés en des arcs simples de longueur r_0 issus du point P_0, on voit que la courbe *continue* $\overline{C}_0$ a tous ses points à l'intérieur de la circonférence $\overline{C}_0$ ou sur cette circonférence elle-même.

D'autre part la mesure superficielle de l'intérieur de la courbe C'_0 doit être égale à

$$r_0^2\pi$$

(la transformation (α) conserve les mesures superficielles) donc *égale* à la surface du *cercle* $\overline{C}_0$.

La courbe C'_0 *coïncide donc exactement* avec *la circonférence* $\overline{C}_0$. Presque tous ses rayons coïncident avec des rayons de $\overline{C}_0$ — donc en raison de la continuité, *tous* les rayons de la circonférence C_0 se transforment en des rayons de la circonférence $\overline{C}_0$ $(\equiv C'_0)$.

Presque toutes les circonférences autour du point C se transforment de cette manière — donc, en raison de la continuité, *toutes* les *circonférences* du centre P_0 le font aussi. Le point P_0 étant arbitraire, nous avons enfin grâce à nos hypothèses la proposition suivante: Toutes les circonférences tracées dans le domaine (Δ) se transforment avec leurs centres en circonférences de même rayon. Tous les segments traçés dans (Δ) se transforment en des segments de même longeur passant par (Δ'). Donc les angles et les longeurs se conservent dans la transformation (α). D'où on en conclut sans aucune difficulté que la transformation représente un *déplacement* suivi *éventuellement* d'une symétrie. C. Q. F. D.

6. Les points de continuité des quatre dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$$

étant pantachiquement dissemés dans le domaine (D) nous nous trouvons autour du chacun d'eux dans les conditions du nr^0 4 et 5, nous avons donc autour de lui un voisinage dans lequel la transformation (α) représente un déplacement suivi ou non d'une symètrie. [Nous dirons: une *isomérie*].

Dans un tel voisinage-domaine les fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$ auront la forme:

$$f(x,y) \equiv Ax + By + L$$
$$g(x,y) \equiv Cx + Dy + M.$$

Les constantes A, B, C, D coïncident avec des valeurs constantes des respectives dérivées:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y},$$

on aura:

$$\begin{vmatrix} A, B \\ C, D \end{vmatrix} = 1 \text{ ou } -1.$$

Il-y-a donc dans le domaine (D) des domaines partiels pantachiquement disposés où la transformation (α) représente une *isomérie*.

Lorsque deux domaines de ce genre, Δ_1 et Δ_2 se recouvrent partiellement, on a dans leur réunion $\Delta_1 + \Delta_2$ les mêmes valeurs des constantes A, B, C, D, L, M.

En réunissant tous les domaines pareils en un domaine unique, on arrive à former les domaines partiels *saturés connexes* avec leurs valeurs respectives des constantes.

Ils seront en nombre fini ou ils constitueront une infinité *dénombrable* de domaines:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

Dans chacun d'eux la transformations (α) aura la forme:

$$\begin{cases} u = A_i x + B_i y + L_i \\ v = C_i x + D_i y + M_i. \end{cases}$$

Les domaines Δ_i seront d'ailleurs sans points communs deux à deux.

Il faut démontrer qu'il n-y-aura qu'*un seul* domaine de ce genre.

Pour faciliter la démonstration de ce lemme, prouvons le seulement pour l'intérieur d'un rectangle R contenu avec sa frontière dans le domaine D; ce sera évidemment suffisant pour nous convaincre de la vérité du lemme.

Supposons donc que c'est le rectangle R qui se compose des domaines:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$$

saturés.

Soit F_i la frontière du domaine Δ_i et F la différence:

$$F = R - \Sigma \Delta_i$$

c'est-à-dire la frontière de la somme

$$\Sigma \Delta_i.$$

On a dans l'intérieur du domaine Δ_i:

$$(\omega) \qquad \begin{cases} u = f(x, y) = A_i x + B_i y + L_i \\ v = g(x, y) = C_i x + D_i y + M_i \end{cases}$$

et grâce à la continuité des fonctions f et g dans le domaine D, les formules (ω) seront aussi valables *sur la frontière* F_i.

Chacun des ensembles F_i est un ensemble fermé — il est même *parfait*. En effet, supposons que P_0 soit un point *isolé* de la frontière F_i. *Autour* du point P_0 et *en ce point lui-même* les formules (ω) seraient valables, donc, le point P_0 étant un point de continuité des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ appartiendrait necéssairement à l'intérieur du domaine Δ_i.

Quoique les formules (ω) soient valables pour la frontière F_i du domaine Δ_i on ne peut pas encore être certain que les valeurs des dérivées:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

soient données par les constantes A_i, B_i, C_i, D_i pour les points de *cette frontière.*

Il en sera ainsi pour une certaine éspèce des points-frontières que nous allons définir à l'instant.

Définition: Un point Q situé sur la frontière F_i sera appellé point-(a) du domaine Δ_i lorsque le fait suivant se fera remarquer:

Traçons par le point Q la croix des axes orthogonaux parallèles aux axes $\overline{O}x$ et $\overline{O}y$. La croix aura donc quatre branches différentes. Sur *deux* au moins entre elles et cela pour *deux ortogonales* entre elles, le point Q doit être un *point d'accumulation* de l'ensemble $\Delta_i + F_i$.

Supposons que Q soit un point-(α) du domaine Δ_i. Les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

existent en tout cas au point Q, mais grâce aux propriétés des points-(a) elles peuvent être calculées en n'utilisant que des valeurs de l'ensemble $\Delta_i + F_i$ où les formules (ω) sont valables.

C'est ce qui nous donne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_i, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = B_i, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = C_i, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = D_i$$

pour les valeurs des dérivées au point Q.

Je vais montrer maintenant que les points-(a) du domaine Δ_i sont distribués *pantachiquement* sur sa frontière F_i. En effet, soit Q_0 un point quelconque appartenant à la frontière F_i et traçons autour de lui une circonférence C si petite que l'on veut. À l'intérieur de cette circonférence il y a des points du domaine Δ_i. — Soit P_0 l'un d'eux. Joignons le avec Q_0 par le segment $\overline{P_0 Q_0}$ et choisissons un carré avec P_0 comme centre, dont les côtés sont parallèles aux axes $\overline{0x}$ et $\overline{0y}$, contenu avec sa frontière entièrement dans cette circonfèrence et dans le domaine Δ_i.

Faisons-le assez petit pour qu'il reste toujours à l'intérieur de la circonférence C, quand on le déplace parallèlement à lui-même en faisant décrire à son centre le segment $\overline{P_0 Q_0}$. Pendant ce mouvement, à un certain moment des points de la frontière F_i apparaîssent pour la première fois sur sa périphérie. Soit M_0 un tel point-frontière. Il est clair que M_0 sera un point-(a) pour le domaine Δ_i. Les points-(a) se trouvent alors dans tout voisinage de chaque point de l'ensemble F_i.

Supposons maintenant qu'il-y-ait plusieurs domaines

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$$

Dans ce cas, l'ensemble F introduit plus haut ne peut pas être constitué par les seuls points de la frontière du rectangle R mais il y aura des points de l'ensemble F à l'intérieur de ce rectangle.

L'ensemble F est fermé — il est encore *parfait*. En effet son point *isolé* serait aussi un point isolé de la frontière de quelque domaine Δ_i, ce que nous avons reconnu impossible.

L'ensemble des points où les quatre dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

sont simultanément continues par rapport à l'ensemble F étant dissémé *pantachiquement* sur F et l'ensemble F étant *parfait* il-y-aura de tels points à l'intérieur du rectangle R. Soit K_0 un tel point. Les dérivées sont alors continues au point K_0 par rapport à l'ensemble des valeurs qu'elles possèdent sur l'ensemble F. Or, dans tout voisinage du point K_0, s'il y a des points appartenant au domaine Δ_i on trouvera aussi des points de l'ensemble F_i et par conséquant les points-(a) du domaine Δ_i. Donc l'ensemble des valeurs que prennent les dérivées sur *la partie de l'ensemble* F contenue dans ce voisinage sera le même que l'ensemble qu'elles prennent dans ce voisinage *tout entier*. Le point K_0 sera donc un point de continuité des derivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

par rapport au domaine (D). Mais, dans ce cas nous nous trouvons à l'intérieur d'un certain domaine Δ_s ce qui évidamment n'est pas possible.

La démonstration, un peu longue, du 1[er] théorème fondamental est ainsi finalement achevée.