

## XVII.

## SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI.

« Rend. Acc. Lincei », Ser. 5<sup>a</sup>, vol. XVIII<sub>1</sub>, 1909<sub>1</sub>, pp. 167-174.

1. Nello studio generale di varie classi di problemi d'isteresi, che si può affrontare partendo dai concetti di *funzioni dipendenti da altre funzioni* (1), si è condotti ad equazioni che hanno un tipo misto, cioè in parte quello delle equazioni differenziali a derivate parziali ed in parte quello delle equazioni integrali. Mi permetto perciò di chiamarle *equazioni integro-differenziali*. La natura dei problemi d'isteresi porta ad equazioni ricollegantisi con equazioni integrali con limiti variabili, ma l'analisi stessa potrebbe anche essere estesa ad altri casi.

In questa Nota non mi occuperò che di una equazione integro-differenziale che può assumersi come il tipo delle equazioni stesse nel caso ellittico e la cui trattazione insegna la via da seguire in altri casi più complessi, come appunto le ricerche sulla equazione di LAPLACE insegnarono ad integrare le equazioni di tipo ellittico più complicato. Mi riservo in lavori successivi di trattare casi di equazioni integro-differenziali di tipo iperbolico e parabolico, e quelli in cui una stessa variabile comparisce come variabile di derivazione e fra le variabili d'integrazione.

2. L'equazione che considererò sarà la seguente:

$$(I) \quad \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0,$$

che si potrà anche scrivere per semplicità:

$$(I) \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0,$$

in cui  $u$  denota una funzione monodroma finita e continua ed avente le derivate prime e seconde rispetto ad  $x, y, z$  monodrome finite e continue in

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314].



un campo  $S$  a tre dimensioni i cui punti hanno le coordinate  $x, y, z$  e per tutti i valori di  $t$  compresi fra  $0$  e  $T > 0$ , mentre  $f(t, \tau), \varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)$  sono funzioni finite e continue delle variabili  $t, \tau$  per valori compresi fra  $0$  e  $T$ .

3. Cominciamo dal dimostrare che, se al contorno  $\sigma$  di  $S$ ,  $u$  è nota per tutti i valori di  $t$  compresi fra  $0$  e  $T$ , la  $u$  è nota, entro  $S$ , per tutti i valori di  $t$ , compresi fra gli stessi limiti.

Infatti se  $u$  è nulla lungo  $\sigma$  per i valori di  $t$  compresi fra  $0$  e  $T$ , dalla (I) segue

$$(II) \quad \int_S \Delta u(t) dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS = 0,$$

ove

$$\Delta u(t) = \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \right)^2.$$

Sia  $M$  una quantità maggiore del limite superiore di

$$\int_S \Delta u(t) dS$$

per tutti i valori di  $t$  compresi fra  $0$  e  $T$ ; poichè

$$\int_S \left( \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

avremo evidentemente

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < M$$

ed in modo analogo

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M, \quad \int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M.$$

Quindi se  $|f(t, \tau)| < N/3$  e così pure  $|\varphi(t, \tau)| < N/3, |\psi(t, \tau)| < N/3$ , in virtù della (II) sarà

$$(I) \quad \int_S \Delta u(t) dS < MNt$$

e per conseguenza

$$(I') \quad \int_S \Delta u(\tau) dS < MN\tau.$$

Ma

$$\int_S \left( \sqrt{\tau} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$



in cui  $\xi$  rappresenta una qualunque delle tre variabili  $x, y, z$ . Perciò a cagione delle (I) e (I') segue

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} - \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < MN t^{1/2} \tau^{1/2},$$

onde, tenendo presente la (II), risulta

$$\int_S \Delta u(t) dS < \frac{2}{3} MN^2 t^2.$$

Così procedendo ed osservando in generale che

$$\int_S \left( \tau^{n/2} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \tau^{n/2} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$

si trova facilmente che

$$\int_S \Delta u(t) dS < \frac{M(2Nt)^{n-1}}{n!}$$

qualunque sia il numero intero  $n$ . Ne segue che  $u(x, y, z, t)$  è sempre nulla. Da questa proprietà discende immediatamente il teorema enunciato al principio di questo paragrafo.

4. Chiameremo *equazione aggiunta* della (I) l'equazione

$$(I') \quad \Delta^2 v(t) + \int_t^\theta \left( \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right) d\tau = 0$$

in cui  $\theta$  è compresa fra  $t$  e  $T$ .

Poniamo

$$\begin{aligned} H_\sigma &= \int_0^\theta dt \int_\sigma \left( v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma \\ &+ \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left\{ \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx \right. \\ &\quad + \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny \\ &\quad \left. + \left( v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma \end{aligned}$$

ove  $n$  denota la normale al contorno  $\sigma$  diretta verso l'esterno dello spazio  $S$ .

La  $H_\sigma$  dipenderà dalle due funzioni  $u$  e  $v$  e sarà una funzione nel senso ordinario della variabile  $\theta$ . Per mettere in evidenza questo scriveremo

$$H_\sigma([u, v], \theta).$$



Dalle equazioni (I) e (I') segue facilmente la relazione

$$(III) \quad H_{\sigma}([u, v], \theta) = 0$$

che corrisponde al lemma di GREEN e vale se anche  $v$  e le sue derivate prime e seconde rispetto a  $x, y, z$ , sono monodrome finite e continue.

Chiamando  $H'_{\sigma}([u, v], \theta)$  il primo termine di  $H_{\sigma}$  cioè

$$\int_{\sigma}^{\theta} dt \int_{\sigma} \left( v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma$$

e chiamando  $H''_{\sigma}([u, v], \theta)$  la parte residua avremo evidentemente

$$H_{\sigma}([u, v], \theta) = H'_{\sigma}([u, v], \theta) + H''_{\sigma}([u, v], \theta).$$

5. È ora possibile costruire una soluzione della equazione aggiunta (I') la quale in un punto (che può supporre essere l'origine) diviene infinita dello stesso ordine della inversa della distanza da questo punto.

Poniamo

$$f(t, \tau) = F_{i,0,0}(t, \tau), \quad \varphi(t, \tau) = F_{0,i,0}(t, \tau), \quad \psi(t, \tau) = F_{0,0,i}(t, \tau)$$

$$F_{h,k,l}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \sum_{i+j+g=\rho} F_{h-i,k-j,l-g}(t, \xi) F_{i,j,g}(\xi, \tau) d\xi$$

in cui la somma  $\sum_{i+j+g=\rho}$  si intende estesa a tutti i valori interi di  $i, j, g$  la cui somma è costante ed uguale a  $\rho$ , mentre si suppone che una  $F$  con indici negativi sia nulla. Si vede facilmente che, se  $i \leq \rho < h + k + l$ ,  $F_{h,k,l}$  è indipendente da  $\rho$ .

Pongasi inoltre

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \mid \tau, t\right) \\ &= \sum_n \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} \sum_{h+k+l=n} F_{h,k,l}(\tau, t) \sum_{\alpha}^h \sum_{\beta}^k \sum_{\gamma}^l (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \\ & \times \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{(2h)!(2k)!(2l)! \left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!(2\beta)!(2\gamma)!(h-\alpha)!(k-\beta)!(l-\gamma)!} \end{aligned}$$

supponendo  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

La serie precedente è uniformemente convergente, derivabile rispetto a  $x, y, z$ ; e la funzione

$$(2) \quad V(x, y, z) \mid t, \theta) = \frac{1}{r} \left( 1 + \int_t^{\theta} \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \mid \tau, t\right) d\tau \right)$$

sarà la funzione cercata, come può direttamente verificarsi.



6. Se l'origine è esterna al campo S si potrà applicare la (III) sostituendo V a  $v$ , altrimenti se l'origine è interna, bisogna escludere l'origine stessa con un contorno e chiamandolo  $\omega$  la (III) si scriverà

$$(III') \quad H_{\sigma}([u, V], \theta) + H_{\omega}([u, V], \theta) = 0.$$

Preso il contorno  $\omega$  sferico con raggio evanescente avremo al limite

$$\lim H'_{\omega}([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^{\theta} u_0(t) \left[ 1 + \int_t^{\theta} S(\tau, t) d\tau \right] dt$$

$$\lim H''_{\omega}([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^{\theta} u_0(t) dt \int_t^{\theta} T(\tau, t) d\tau,$$

avendo posto per semplicità

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Ora

$$S(\tau, t) = -T(\tau, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} (-1)^n \sum_{h+k+l=n} \frac{(2h)!(2k)!(2l)!}{h!k!l!} F_{h,k,l}(\tau, t),$$

quindi

$$(3) \quad \lim H_{\omega}([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^{\theta} u_0(t) dt.$$

Si può ottenere questo risultato anche in altro modo ricorrendo alla seguente formula, di cui tralascio la dimostrazione

$$\int_{\sigma} \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_t^{\theta} d\tau \int_{\sigma} \left( \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\sigma = -4\pi.$$

Dalle (III') e (3) si deduce

$$(A) \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} H_{\sigma}([u, V], \theta).$$

7. Se  $w$  è una soluzione della (I'), regolare entro S, sarà, per la (III),

$$H_{\sigma}([u, w], \theta) = 0,$$

quindi

$$(A') \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} H_{\sigma}([u, V + w], \theta)$$

e se  $V + w$  sarà nulla lungo  $\sigma$ , nel secondo membro della equazione (A') compariranno i soli valori di  $u(t)$  lungo  $\sigma$  per i valori di  $t$  compresi fra 0 e  $\theta$ , onde la (A') risolverà il problema di *determinare  $u_0(\theta)$  quando si conosce  $u(t)$  lungo  $\sigma$  per  $t$  compreso fra 0 e  $\theta$ .*

Nel caso, per esempio, in cui  $\sigma$  fosse un piano,  $w$  si otterrebbe immediatamente col metodo delle immagini.



La formula (A) corrisponde invece al teorema di GREEN, giacchè esprime  $u_0(\theta)$  per mezzo dei valori di  $u(t)$  e delle sue derivate prime lungo  $\sigma$  per  $t$  compreso fra 0 e  $\theta$ .

8. Se, anziché avere la (I), si avesse l'equazione

$$(I_a) \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = \chi(x, y, z, t)$$

poniamo

$$\int_0^\theta dt \int_S v(t) \chi(x, y, z, t) dS = K([\chi, v], \theta),$$

allora le (A) e (A') dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle

$$(B) \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ H_\sigma([u, V], \theta) - K([\chi, V], \theta) \}$$

$$(B') \quad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ H_\sigma([u, V + w], \theta) - K([\chi, V + w], \theta) \}.$$

Sarebbe facile ricavare da queste formule un teorema analogo a quello del POISSON.

9. Prima di chiudere questa Nota mi permetto di aggiungere alcune osservazioni.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali simultanee

$$\Delta^2 u_1 = 0$$

$$a_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0$$

$$a_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0$$

.....

L'equazione (I) può considerarsi come il caso limite del sistema precedente quando il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente (2).

Il sistema aggiunto del precedente sarà

$$\begin{aligned} \Delta^2 v_1 + a_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ + a_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \dots = 0 \\ \Delta^2 v_2 + a_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \dots = 0 \\ \dots \end{aligned}$$

(2) Cfr. la prima mia Memoria: *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 3, « Atti della R. Accademia di Torino », 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216-225].



e la soluzione fondamentale è facile a calcolarsi ed al limite conduce alla (2).

10. Poniamo

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) f(t, \tau) d\tau = U(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) \varphi(t, \tau) d\tau = V(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) \psi(t, \tau) d\tau = W(x, y, z, t).$$

Invertendo, con i metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali, le formule precedenti, si ha

$$\begin{aligned} (4) \quad u(x, y, z, t) &= U(x, y, z, t) + \int_0^t U(x, y, z, \tau) f'(t, \tau) d\tau \\ &= V(x, y, z, t) + \int_0^t V(x, y, z, \tau) \varphi'(t, \tau) d\tau \\ &= W(x, y, z, t) + \int_0^t W(x, y, z, \tau) \psi'(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

mentre la (I) si potrà scrivere

$$(5) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0;$$

quindi la (I) può ricondursi ad un sistema simultaneo di due equazioni integrali (4) e della equazione differenziale (5) colle tre incognite  $U, V, W$ .

È bene a questo proposito osservare che le equazioni stesse in generale non possono separarsi, e che il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali costituisce in generale un problema essenzialmente distinto dai problemi delle equazioni differenziali e da quelli ordinari delle equazioni integrali.