XVI.

SULL'APPLICAZIONE DEL METODO DELLE IMMAGINI ALLE EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO

« Atti del IV Congresso int. dei Mat. », Roma, 1908, vol. II, pp. 90–93.

1. In una Nota pubblicata nei « Proceedings of the London Mathematical Society » (1904) (*) e nelle *Lezioni* che ho svolte nel 1906 all'Università di Stoccolma (**), ho mostrato come il principio delle immagini potesse applicarsi alla equazione fondamentale a tre variabili di tipo iperbolico, cioè alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

ma tale applicazione venne limitata al caso di immagini rispetto a piani paralleli all'asse z. Ora è interessante osservare che per la equazione di tipo iperbolico si può stabilire un principio il quale ha un grado di generalità equivalente a quello delle immagini nel caso dell'equazione di tipo ellitico. Ciò si ottiene mediante una semplice osservazione geometrica che esporrò in questa Nota, rimandando ad una Memoria estesa che sto preparando lo svolgimento della teoria.

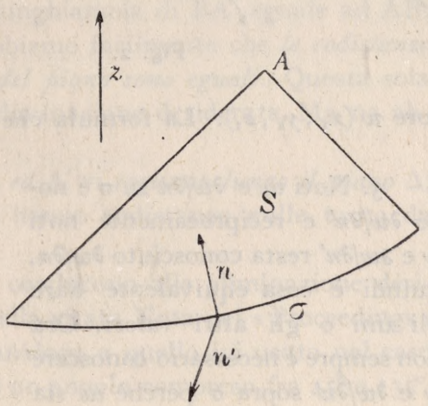

Fig. 1.

2. Già da varî anni in alcune Note pubblicate nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » (1), i cui risultati vennero sviluppati in una Memoria inserita negli « Acta Mathematica » (2), ho introdotto la nozione dei coni caratteristici relativi alle equazioni (1) e ad altre equazioni di tipo iperbolico. Per le (1) essi sono i coni di rivoluzione aventi l'asse parallelo all'asse z ed una apertura di 90°. Conduciamo per un punto A il cono caratteristico e sia σ una superficie la quale limiti una porzione di spazio S interna ad una falda del cono ed adiacente al vertice.

(*) In questo vol.: VIII, pp. 55–58.

(**) In questo vol.: X, pp. 63–141.

(1) « Rend. Acc. Lincei », 1892 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXIV, XXXV, pp. 559–579].

(2) « Acta Mathematica », tomo XVIII, 1894 [in queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19–73].

www.rcin.org.pl

Ho dato una formula mediante la quale si può esprimere il valore $w(x_1, y_1, z_1)$ al vertice A del cono (vedi fig. 1) mediante i valori di w e della derivata normale interna $\partial w/\partial n$ nei punti $x\,y\,z$ della superficie σ. La formula è la seguente:

$$(2) \qquad w(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - r^2}}\left(\cos nz - \frac{z_1 - z}{r}\cos nr\right) w\, d\sigma$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - r^2}}\, \mathrm{W}\, d\sigma\,,$$

in cui

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}\,, \qquad \mathrm{W} = -\frac{\partial w}{\partial z}\cos nz + \frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\,.$$

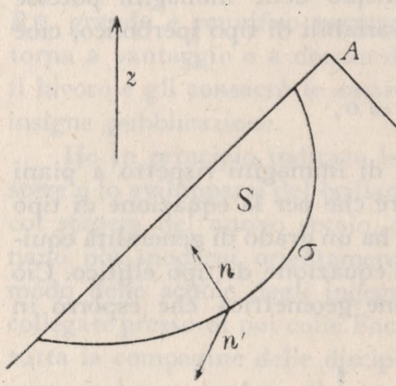

Fig. 2.

Se n' forma cogli assi angoli i cui coseni sono $-\cos nx$, $\cos ny$, si dice, secondo il sig. D'ADHÉMAR che n' è la *conormale*; quindi $\mathrm{W} = \partial w/\partial n'$.

Se lo spazio S compreso fra la superficie σ ed il cono non è adiacente al vertice (vedi fig. 2), oppure se lo spazio S è esterno al cono (vedi fig. 3), allora nel primo membro della formula (2) deve sostituirsi 0 al valore $w(x_1, y_1, z_1)$. La formula che così si ottiene la denoteremo con (2').

3. Noti w e $\partial w/\partial n$ su σ è noto $\partial w/\partial n'$ e reciprocamente noti w e $\partial w/\partial n'$ resta conosciuto $\partial w/\partial n$, quindi è cosa equivalente dare gli uni o gli altri valori. Ora non sempre è necessario conoscere w e $\partial w/\partial n'$ sopra σ perchè w sia determinato in A. Si possono infatti dimostrare i teoremi seguenti:

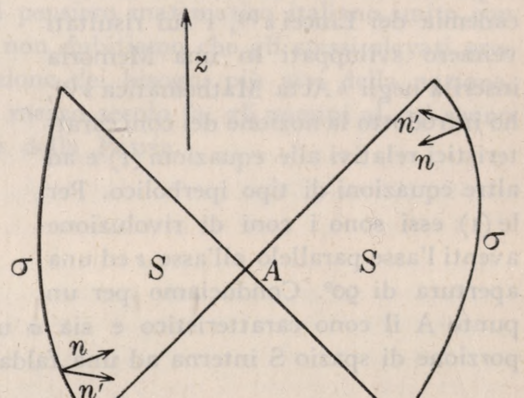

Fig. 3.

1° *Sia nota w sopra σ. Per determinare w al vertice* A *del cono non è necessario conoscere $\partial w/\partial n'$ in quelle parti di σ la cui normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 90°, ammesso che nelle parti rimanenti di σ la derivata $\partial w/\partial n'$ sia conosciuta.*

www.rcin.org.pl

2° *Sia* M *un punto regolare di* σ *in cui la normale interna forma con* z *un angolo compreso fra* 45° *e* 135°, *si potrà prendere un intorno* μ *di* M *appartenente a* σ *tale che conoscendo* w *su* μ, *e* w *e* $\partial w/\partial n$ *sulla parte rimanente di* σ, w *sia determinato in* A.

Tralasceremo di dare la dimostrazione di questi teoremi. Da essi si ricava facilmente che, se una parte connessa σ' di σ è costituita da un piano o da una iperboloide equilatera avente per asse z, ed in σ' la normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 135°, basta la conoscenza di w sopra σ' (purché nella parte rimanente di σ si conoscano w e $\partial w/\partial n$) affinché w risulti determinato al vertice A.

Bisogna dunque cercare di eliminare $\partial w/\partial n$ su σ' nella formula (2). Questo risultato si ottiene impiegando il metodo delle immagini.

4. Usando una denominazione analoga a quella di *conormale*, chiameremo *codistanza* dei punti (x_1, y_1, z_1), (x, y, z) la quantità

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2}$$

supposta reale e presa positivamente. In altri termini la *conormale* e la *codistanza* corrispondono alla *normale* e alla *distanza* nella metrica individuata dal quadrato dell'elemento lineare

$$dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Preso un piano Δ conduciamo da un punto A la conormale al piano. Se questa lo incontra in un punto B prolunghiamola di BA' eguale ad AB; A' si dirà la *coimmagine* di A. Ora noi abbiamo facilmente che *le codistanze di* A *ed* A' *da uno stesso punto qualsiasi del piano sono eguali*. Questa sola proprietà non basterebbe ad ottenere la eliminazione desiderata. Ma ne abbiamo ancora un'altra, cioè:

I coni caratteristici relativi ai punti A *ed* A' *si tagliano lungo il piano* Δ; ed infatti i punti di questa intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A'.

Le due proprietà combinate insieme conducono alla eliminazione desiderata in casi analoghi a quelli trattati nella citata Nota dei « Proceedings » di Londra impiegando un procedimento analogo a quello ivi usato nel caso di piani la cui normale interna formi con z un angolo compreso fra 45° e 135°.

5. Similmente supponiamo di avere una iperboloide equilatera

$$x^2 + y^2 - z^2 = \pm a^2. \tag{3}$$

Preso un punto A di coordinate x_1, y_1, z_1 si dirà *coimmagine* di A il punto A' di coordinate

$$x_1' = \frac{\pm a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}, \quad y_1' = \frac{\pm a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}, \quad z_1' = \frac{\pm a^2 z_1}{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}.$$

È facile vedere come si può costruire il punto A' quando sia noto A e questo sia esterno o interno al cono assintotico della iperboloide (3).

www.rcin.org.pl

Per i punti A ed A′ valgono le due proprietà seguenti:

Le codistanze di A *ed* A′ *dai punti della iperboloide* (3) *stanno in un rapporto costante.*

I coni caratteristici di A *ed* A′ *si tagliano lungo l'iperboloide* (3).

Anche in questo caso i punti della intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A′.

Giovandosi di questi due teoremi e delle formule (2) e (2′) è possibile estendere le precedenti eliminazioni dal caso del piano a quello dell'iperboloide equilatera, il cui asse sia parallelo a z.

6. Nella Memoria citata dei « Proceedings » di Londra, ho applicato il metodo delle immagini successive nel caso di più piani paralleli a z. Si comprende come tale procedimento possa estendersi anche al caso in cui si abbiano piani non paralleli a z, o si abbiano più iperboloidi equilateri coll'asse parallelo a z, o piani ed iperboloidi.

Ho osservato nella citata Memoria quale semplificazione si abbia nel caso iperbolico per rapporto al caso ellittico allorché si hanno infinite immagini, giacché non è necessario tener conto nelle formule che di un numero finito di esse. Le stesse osservazioni sono estensibili ai casi generali che abbiamo preso in esame.

Non vi è il tempo in una breve Comunicazione di una sezione del Congresso di sviluppare tutte le conseguenze che possono trarsi dal principio che abbiamo stabilito sia per rapporto alla equazione di tipo iperbolico che abbiamo considerata, sia per rapporto ad altre equazioni dello stesso tipo più complesse; ci basti di aver posto il principio che spero di avere agio presto di sviluppare.

www.rcin.org.pl