Sur le théorème intégral de Cauchy.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

[Communiqué à la Soc. Pol. de Math. le 21. II. 1933].

Une généralisation du théorème bien connu de Cauchy sur les conditions pourqu'une expression de la forme

$$pdx + qdy$$

représente dans un domaine donné la différentielle totale d'une fonction à deux variables indépendentes, a été ennoncé sans démonstration par M. Paul Montel en 1913 dans les Comptes Rendus de l'Académie de Paris.

En généralisant encore les conditions de M. Montel sous lesquelles le théorème devrait être vrai, M. Looman dans un travail inséré dans les „Göttingen Nachrichten" (1924) a essayé d'en donner une démonstration fort intéressante. Malheuresement il y a là une grave lacune [1]) et le théorème, aussi important en lui-même que par ses applications, surtout au problème des équations de Cauchy-Riemann est resté sans preuve rigoureuse.

Pendant le Congrés International de Zurich (1932) on m'a raconté que M. Menchoff (Moscou) possède une démonstration du théorème de M. Montel qui ne fût pas encore publiée et dont je ne possède pas la connaissance. Je me propose de ma part de prouver le théorème en question en me servant des considérations que j'ai developpé dans mon travail lu devant la Société Mathématique Polonaise sous le titre „Les applications de la théorie de la totali-

[1]) v. Ridder, Math. Annalen Bd. 102.

sation à la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles du type élliptique" pendans les séances des 22. I et 29. I, 1927 [1]) à Cracovie. Je me suis aperçu que les resultats que j'ai obtenu suffisent pour rectifier la démonstration de M. Looman et cela de la manière suivante:

Théorème: Soient $p(xy)$ et $q(xy)$ deux fonctions continues dans le rectangle R et ayant à son intérieur des dérivées partielles $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ *finies.* Supposons la relation:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

remplie *presque partout* dans R.

Dans ce cas

$$p(xy)\,dx + q(xy)\,dy$$

représente la différentielle totale d'une fonction $V(xy)$ définie dans le rectangle R.

Démonstration. 1. Il suffit, comme le fait M. Looman, de prouver que, pour chaque rectangle $r\left\{\begin{smallmatrix} a, & b \\ c, & d\end{smallmatrix}\right\}$ contenu dans R, l'intégrale:

$$I_r = \int_{(r)} p\,dx + q\,dy$$

s'évanouit.

Il suffit même de savoir que $I(r) = 0$ pour chaque *carré* r contenu dans R. Cela résulte du fait que $I(\varrho)$ varie continument lorsque on fait varier d'une manière continue son contour et que

$$\int_{r} p\,dx + q\,dy = \int_{r_1} p\,dx + q\,dy + \int_{r_2} p\,dx + q\,dy$$

lorsq'on partage le rectangle r en deux autres contigus r_1 et r_2.

2. M. Looman considère l'ensemble M de tous les points tels que dans la proximité arbitraire du chacun d'eux se trouvent des rectangles ϱ pour lesquels $I(\varrho)$ est différent de zéro.

Il faut démontrer que l'ensemble M est *vide.* En tous cas l'ensemble M est *parfait.*

[1]) v. le résumé dans les Annales de la Soc. Pol. de Math. v. VI p. 118.

3. Voici un lemme dont la démonstration *exacte* se trouve dans le travail de M. Looman:

Lemme: Lorsque dans un rectangle r la partie de l'ensemble M qui y est contenue, soit $\sigma(r)$, n'est pas *vide*, il existe dans r un autre rectangle (même un carré) $\overline{r}$ possédant les propriétés suivantes:

1° l'ensemble $\sigma(\overline{r})$ n'est pas vide,

2° les accroissements:

$$\frac{p(x, y') - p(x, y'')}{y' - y''}$$

$$\frac{q(x', y) - q(x'', y)}{x' - x''}$$

considérés dans le rectangle $\overline{r}$ mais soumis à la condition que l'un au moins des points (x', y) et (x'', y) et l'un des points (x, y') et (x, y'') appartiennent à l'ensemble M (ou $\sigma(\overline{r})$), sont bornées en valeur absolue dans $\overline{r}$.

4. Considérons un tel rectangle r et supposons donc que:

$$\left|\frac{p(x, y'') - p(x, y')}{y'' - y'}\right| \leqq A$$

$$\left|\frac{q(x'', y) - q(x', y)}{x'' - x'}\right| \leqq A$$

(avec des restrictions citées plus haut) et que l'ensemble $\sigma(r)$ *n'est pas vide.* Il est clair, que:

$$\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \leqq A, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| \leqq A$$

pour les points de l'ensemble $\sigma(r)$. M. Looman nous propose dans son travail l'évaluation suivante de l'intégrale $I(r)$:

$$|I(r)| \leqq 2\,A.\text{mesure } \{r - \sigma(r)\}.$$

Or c'est le point défectueux de son travail. Nous alons remplacer son évaluation par une autre:

$$|I(r)| \leqq 8\,A.\text{mesure } \{r - \sigma(r)\} \qquad (\omega')$$

et cela *seulement* pour les *carrés* r satisfaisants aux conditions précédentes.

5. Soit donc r le carré $r\left\{\begin{smallmatrix} m, & n \\ m, & n \end{smallmatrix}\right\}$ c'est à dire formé par des points:

$$(m, m), \quad (m, n), \quad (n, m), \quad (n, n) \qquad (m < n)$$

remplissant les conditions demandées. On peut, en transportant les côtés du carré r vers son intérieur, trouver un rectangle $\bar{r}\left\{\begin{smallmatrix} a, & b \\ c, & d \end{smallmatrix}\right\}$ contenu dans r et tel que:

1° l'ensemble $r - \bar{r}$ ne possède pas à son intérieur de points de M, donc

$$\sigma(r) = \sigma(\bar{r}) + W$$

$$\text{mes.}\,(W) = 0, \quad (W \text{ situé sur les côtés du rectangle } \bar{r}),$$

2° sur *chaque* côté du rectangle $\bar{r}$ soit situé *au moins un point de l'ensemble* M.

En remarquant avec M. Looman, que pour un rectangle ϱ dépourvu à son intérieur de points de l'ensemble M on a toujours

$$I(\varrho) = 0$$

on peut en conclure facilement, que:

$$I(r) = I(\bar{r}).$$

Désignons par E la projection de l'ensemble $\sigma(\bar{r})$ sur l'axe des x et soient:

(1) $\sigma_{\bar{x}}$ l'intersection de $\sigma(\bar{r})$ par la droite $x = \bar{x}$, lorsque $\bar{x}$ appartient à E;

(2) $\gamma_i(\bar{x})$, $\delta_i(\bar{x})$ les ordonnées des extrémités des intervalles complémentaires déterminés par $\sigma_{\bar{x}}$ sur le segment:

$$c \leqq y \leqq d \quad x = \bar{x}.$$

On a:

$$I(r) = I(\bar{r}) = \int_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\}\,dx + \int_c^d \{q(a, y) - q(b, y)\}\,dy.$$

Envisageons l'intégrale:

$$I_1 = \int_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\}\,dx =$$

$$= \int_E \{p(x, d) - p(x, c)\}\,dx + \int_{(a,b)-E} \{p(x, d) - p(x, c)\}\,dx.$$

Or pour les x appartenant à l'ensemble E on a:

$$p(x, d) - p(x, c) = \int_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \sum_{(i)} \{p(x, \delta_i(x) - p(x, \gamma_i(x))\}$$

grâce à un théorème de M. Denjoy et aux conditions auquelles est soumis le rectangle r [1]).

L'un au moins des points $(x, \gamma_i(x))$, $(x, \delta_i(x))$ appartenant à l'ensemble $\sigma(r)$ on aura donc:

$$\left| \{p(x, d) - p(x, c)\} - \int_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right| \leqq A \sum_i [\delta_i(x) - \gamma_i(x)].$$

Pour les x appartenant à l'ensemble $(ab) - A$ on a maintenant une sérieuse difficulté. Elle consiste en ce que les points (x, d) et (x, c) n'appartenant pas à l'ensemble $\sigma(r)$, on n'a pas y droit de poser:

$$|p(x, d) - p(x, c)| \leqq A(d - c).$$

Nous alons lever cette difficulté par l'artifice suivant:

Choisissons deux points:

$$(x_1, c) \quad \text{et} \quad (x_2, d)$$

appartenant a l'ensemble $\sigma(\bar{r})$ et situés sur les côtés du rectangle $\bar{r}$.

On aura:

$$\begin{aligned} p(x, d) - p(x, c) = p(x, d) & - p(x_2, d) \\ & + p(x_2, d) - p(x_2, c) \\ & + p(x_2, c) - p(x_1, c) \\ & + p(x_1, c) - p(x, c). \end{aligned}$$

L'une au moins des extrémitées des segments considérés étant toujours un point de M, on a:

$$|p(x, d) - p(x, c)| \leqq A(c - d) + 3A(b - a).$$

En résumé on aura l'évaluation suivante:

$$\left| \int_a^b \{p(x, d) - p(x, c)\} - \int_E dx \int_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right| \leqq A \operatorname{mes} \{\bar{r} - \sigma(\bar{r})\} +$$

$$+ 3A \operatorname{mes} (ab) - E\} \cdot (b - a).$$

---

[1]) v. Looman loc. cit.

Symétriquement on aura:

$$\left| \int_c^d \{q(a, y) - q(b, y)\} dy + \int_{\bar{E}} dy \int_{\sigma_y} \frac{\partial q}{\partial x} dx \right| \leqq A \operatorname{mes} \{\bar{r} - \sigma(\bar{r})\} +$$

$$+ 3A \operatorname{mes} \{(c, d) - \bar{E}\} (d - c)$$

[$\bar{E}$ et σ_y désignent les ensembles analogues aux ensembles E et σ_x].

Les dérivées $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ étant bornées sur $\sigma(\bar{r})$ on peut appliquer le théorème de Fabini:

$$\iint_{\sigma(\bar{r})} \frac{\partial p}{\partial y} dx dy = \int_E dx \int_{\sigma_x} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$\iint_{\sigma(\bar{r})} \frac{\partial q}{\partial x} dx dy = \int_{\bar{E}} dy \int_{\sigma_y} \frac{\partial q}{\partial x} dx.$$

D'autre part on a presque partout

$$p'_y = q'_x$$

les intégrales ont alors la même valeur. En faisant la somme, nous obtenons:

$$\begin{aligned} |I(\bar{r})| &\leqq 2A . \operatorname{mes} \{\bar{r} - \sigma(\bar{r})\} \\ &+ 3A . \operatorname{mes} \{(a, b) - E\} \cdot (b - a) \\ &+ 3A . \operatorname{mes} \{(c, d) - \bar{E}\} \cdot (d - c). \end{aligned}$$

Heuresement on a:

$$I(r) = I(\bar{r}), \quad \operatorname{mes} . \sigma(r) = \operatorname{mes} . \sigma(\bar{r})$$

$$n - m \geqq b - a, \quad n - m \geqq d - c$$

donc:

$$\begin{aligned} |I(r)| &\leqq 2A . \operatorname{mes} (r - \sigma(r)) \\ &+ 3A . \operatorname{mes} \{(m, n) - \varepsilon\} \cdot (n, m) \\ &+ 3A . \operatorname{mes} \{(m, n) - \bar{\varepsilon}\} \cdot (n, m) \\ &\leqq 8A . \operatorname{mes} \{r - \sigma(r)\}. \end{aligned} \qquad (\omega')$$

ou encore:

$$\frac{I|(r)|}{\operatorname{mes}(r)} \leqq 8A \frac{\operatorname{mes}\{\sigma(r)\}}{\operatorname{mes}(r)} \qquad (\omega'')$$

L'évaluation (ω') ou (ω'') reste évidemment valable pour chaque carré ϱ contenu entièrement dans r.

Soit $P(x, y)$ un point quelconque du carré r et désignons par $\sigma(x, y)$ la limite:

$$s(x, y) = \limsup \frac{I(\varrho)}{\text{mes}\,(\varrho)}$$

lorsque le carré ϱ est contenu dans r en contenant le point P et lorsque la longeur de son coté tend vers zéro.

On voit immédiatemment que:

(1) $s(x, y) = 0$ pour chaque point de l'ensemble $r - \sigma(r)$.

(2) $s(x, y) = 0$ pour chaque point de densité de l'ensemble $\sigma(r)$ (donc presque partout dans cet ensemble!) grâce à l'évaluation (ω'').

(3) $|s(x, y) \leqq 8A$ pour tous les autres points qui ne faissent d'ailleurs qu'un ensemble de mesure nulle.

Divisons avec M. Looman le carré r en $4, 16, \ldots, 4^n \ldots$ carrées partie égaux et posons:

$$s_n(x, y) = \frac{I(\varrho)}{m(\varrho)}$$

lorsque (x, y) est situé dans le carré ϱ de la n ième division.

On voit que:

(1) $$s_n(x, y) \to s(x, y) = 0$$

presque partout dans r,

(2) les fonctions

$$s, s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$$

sont bornées dans leurs ensemble

(3) $$I(r) = \iint_r s_n(x, y)\,dx dy$$

donc

$$I(r) = \lim \iint_r s_n(x, y)\,dx dy = \iint_r s(x, y)\,dx dy = 0. \qquad (\omega''')$$

L'égalité (ω''') étant vraie aussi pour chaque carré contenu dans le carré r nous montre enfin que l'existence de l'ensemble M conduit à une contradiction.

La démonstration du théorème de M. Montel et M. Looman est achévé. Je repète ici pour la commodité du lecteur la démonstration du lemme M. Looman mentioné dans le texte.

Hypothèse: r est un rectangle contenu dans le rectangle R et $\sigma(r) \neq 0$.

Thèse. Il existe un carré ϱ contenu dans r tel que $\sigma(\varrho) \neq 0$ et que

$$\lambda(\varrho) = \text{borne sup} \left| \frac{p(x, y+\lambda) - p(x, y)}{\lambda} \right|$$

[(x, y) point de l'ensemble $\sigma(\varrho)$, $(x, y+\lambda)$ point du carré ϱ]

soit finie.

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe alors un point

(x_1, y_1) de l'ensemble $\sigma(r)$ et un autre

$(x_1, y_1+\lambda_1)$ du rectangle r tels que:

$$\left| \frac{p(x_1, y_1+\lambda_1) - p(x_1, y_1)}{\lambda_1} \right| > 1.$$

Autour du point (x_1, y_1) traçons un petit carré r_1 contenu dans r et tel que l'on ait

$$\left| \frac{p(x, y+\lambda_1) - p(x, y)}{\lambda_1} \right| > 1$$

le point (x, y) étant un point arbitraire du carré r, ce qui est évidemment possible grâce à la continuité de la fonction $p(x, y)$.

Remarquons que $\sigma(r_1)$ n'est pas vide. La borne supérieure $\lambda(r_1)$ n'étant pas finie il existe:

$(x_2 y_2)$ point de $\sigma(r_1)$

et $(x_2, y_2+\lambda_2)$ point de r_1

tels que

$$\left| \frac{p(x_2, y_2+\lambda_2) - p(x_2, y_2)}{\lambda_2} \right| > 2.$$

Autour du point $(x_2 y_2)$ traçons encore un petit carré r_2 contenu dans r_1 et tel que l'on ait:

$$\left| \frac{p(x, y+\lambda_2) - p(x, y)}{\lambda_2} \right| > 2$$

pour tous les points (x, y) du carré r_2. On a encore $\sigma(r_2) \neq 0$.

Nous obtenons ainsi les suites:

(1) $\qquad r_1 \qquad r_2 \qquad r_3 \quad \dots$

(2) $\qquad (x_1 y_1) \quad (x_2 y_2) \quad (x_3 y_3) \quad \dots$

(3) $\qquad \lambda_1 \qquad \lambda_2 \qquad \lambda_3 \quad \dots,$ et l'on aura

(4) $$\left|\frac{p(x_n, y_n + \lambda_n) - p(x_n y_n)}{\lambda_n}\right| > n.$$

On peut s'arranger de manière que l'on ait:

$$\lim_{n/\infty} \lambda_n = 0$$

et que les dimensions de carrés $r_1, r_2, r_3, \dots$ tendent vers zéro.

Le point $(x_n y_n)$ converge alors vers un point (ξ, η) et l'on aura:

$$\left|\frac{p(\xi, \eta + \lambda_n) - p(\xi, \eta)}{\lambda_n}\right| > n \qquad\qquad n = 1, 2, \dots$$

donc da dérivée $\dfrac{\partial p}{\partial y}$ ne pourrait être finie au point (ξ, η).

C. Q. F. D.