Sur un théorème de Mr J. L. Walsh.

Par

M. Jules Rudnicki à Wilno.

Monsieur Walsh a demontré le théorème suivant (Annales of Mathematics (2), t. 25, an 1924):

„Toutes les racines de l'équation de degré n

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

sont contenues dans le cercle décrit de l'origine avec le rayon

$$R = |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a^3|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|} \text{“}.$$

Si donc z_k est une racine quelconque de l'équation précédente, on a

$$|z_k| \leqslant R.$$

J'ai trouvé une démonstration élémentaire de cette proposition. Comme elle est extrêmement simple et très courte, je crois, qu'elle peut intéresser les mathématiciens et c'est pourquoi je la publie.

Notations. Posons: $P_1(z) = a_0 z + a_1$, $P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, $P_k(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z + a_k$. On a alors

$$(1) \qquad P_k(z) = z P_{k-1}(z) + a_k.$$

Considérons l'équation

$$(2) \qquad P_{k-1}(z) = 0$$

et soient $z_j^{(k-1)}$ les zéros $(j = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$ de cette équation. Soit D_{k-1} un domaine convexe contenant l'origine et toutes les racines $z_j^{(k-1)}$ de l'équation (2); ces points peuvent être situés sur la frontière du domaine D_{k-1}.

Soit encore l'équation

$$P'_{k-1}(z) = 0, \tag{3}$$

et ζ_s les zéros $(s = 1, 2, 3, \ldots, k-2)$ de cette équation.

On sait que tous ces pts ζ_s appartiennent au domaine D_{k-1}. Soit enfin z_k un zéro quelconque de l'équation

$$P_k(z) = 0 \tag{4}$$

situé en dehors de D_{k-1}, s'il y en a. En vertu de (1) on a:

$$P_{k-1}(z_k) = -\frac{a_k}{z_k}. \tag{5}$$

Considérons la distance minima du pt z_k au domaine fermé D_{k-1} et désignons la par δ_k. De la définition de δ_k il résulte, que l'on a $|z_k - z| \geqslant \delta_k$ toutes les fois que z appartient à D_{k-1}. En particulier on aura:

$$|z_k - z_j^{(k-1)}| \geqslant \delta_k \quad \text{et} \quad |z_k - \zeta_s| \geqslant \delta_k \tag{6}$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ et $s = 1, 2, 3, \ldots, k-2$.

Passons à la démonstration. Pour cela partons de la dérivée logarithmique:

$$v(z) = \frac{P'_{k-1}(z)}{P_{k-1}(z)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z - z_j^{(k-1)}}; \tag{7}$$

substituons dans cette formule z_k, racine de (4), à la place de z, remplaçons $P'_{k-1}(z_k)$, par le produit $(k-1)\, a_0 \prod_{s=1}^{k-2} (z_k - \zeta_s)$ et $P_{k-1}(z_k)$, par son expression (5). Il vient:

$$v(z_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z_k - z_j^{(k-1)}} \quad \text{et} \quad v(z_k) = -\frac{a_0}{a_k} \cdot z_k (k-1) \prod_{s=1}^{k-2} (z_k - \zeta_s).$$

Evaluons le module de $v(z_k)$. D'un part on a

$$|v(z_k)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{|z_k - z_j^{(k-1)}|} \leqslant \frac{k-1}{\delta_k}, \tag{8}$$

et d'autre part

$$(9) \qquad |v(z_k)| = (k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| \prod_{s=1}^{k-2} |z_k - \zeta_s| \cdot |z_k| \geqslant (k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| (\delta_k)^{k-1};$$

de la comparaison de (8) et (9) il résulte que

$$(k-1)\left|\frac{a_0}{a_k}\right| (\delta_k)^{k-1} \leqslant \frac{k-1}{\delta_k}, \quad \text{d'où}$$

$$(10) \qquad \delta_k \leqslant \sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

Ce résultat exprime, que la distance minima de toute racine (extérieur à D_{k-1}) de l'équation (4) au domaine D_{k-1} est inférieur ou tout au plus égale à $\sqrt[k]{|a_k|}$ en supposant $a_0 = 1$.

Si donc on considère le domaine D_k contenant D_{k-1} et formé par l'enveloppe des cercles de rayon $\sqrt[k]{|a_k|}$ dont les centres sont situées sur le contour de D_{k-1}, toutes les racines z_k de l'équation (4) appartiendront au domaine D_k, qui sera aussi convexe.

La démonstration se termine par induction. Si $k = 1$, on a l'équation $P_2(z) = 0$ et son unique racine est $-\frac{a_1}{a_0}$ c. à. d. $-a_1$ si $a_0 = 1$, et on peut prendre pour D_1 le cercle de rayon $|a_1|$. Il résulte de ce qui précéde, que l'on peut prendre comme D_2 l'enveloppe des cercles de rayon $\sqrt{|a_2|}$ dont les centres sont situés sur le cercle D_1. C'est un cercle de rayon $|a_1| + \sqrt{|a_2|}$ et de centre origine et toute les racines de $P_2(z) = 0$ appartiennent à ce cercle. De proche en proche on arrive à conclure que toutes les racines de l'équation $P_n(z) = 0$ sont (pour $a_0 = 1$) à l'intérieur ou sur le contour du cercle de rayon $|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}$ et de centre origine. C'est le téorème de Mr Walsh.

Remarque I. On peut obtenir sur la situation des racines de l'équation $P_n(z) = 0$ une indication plus précise en prenant pour D_1 le segment, joignant l'origine au pt. $-\frac{a_1}{a_0}$. Alors le domaine D_2 est formé par un rectangle conjointement avec deux demi-cercles est ne constitue qu'une partie du domaine en cercle de Mr Walsh.

De même D_n sera un domaine dont la frontière est formée par des segments de droites et des demi-cercles et ne constituera qu'une partie du cercle de rayon R, a moins que $a_1 = 0$.

Remarque II. Nos considérations concernaient le cas où $a_n \neq 0$. Il est facile de les étendre pour le cas $a_n = 0$. En effet, on a alors $P_n(z) \equiv z \cdot P_{n-1}(z)$, c. à. d. que les racines des deux équations $P_n(z) = 0$ et $P_{n-1}(z) = 0$ sont les mêmes à la racine $z = 0$ près. Si donc la limite de Mr Walsh pour l'équation $P_{n-1}(z) = 0$ est $|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}$, elle sera la même pour l'équation $P_n(z) = 0$, c. à. d. $|a_1| + \sqrt{|a_1|} + \ldots + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \sqrt[n]{|a_n|}$, puisque $a_n = 0$.

Remarque III. La limite de Mr Walsh est effectivement atteinte quand le polynôme $P_n(z)$ se reduit à 2 termes, c. à. d. quand $P_n(z) \equiv z^n + a_k z^{n-k}$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Il est facile de démontrer que c'est le seul cas où la limite soit effectivement atteinte. Pour plus de généralité supposons que tous les $a_{k+p} = 0$, $(p = 1, 2, \ldots, n - k)$, mais $a_k \neq 0$. Nous avons obtenu les relations:

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & \frac{k-1}{\delta_k} \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\left|z_n - z_j^{(k-1)}\right|} \geqslant \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{z_n - z_j^{(k-1)}} \right| = \\
& = \frac{|z_n|}{|a_k|} \prod_{s=1}^{n-2} |z_n - \zeta_s| \cdot (n-1) \geqslant \frac{k-1}{|a_k|} (\delta_k)^{k-1},
\end{aligned}
$$

où z_n est une racine de $P_n(z) = 0$ différente de zéro, c. à. d. aussi une racine de $P_k(z) = 0$, puisque $P_n(z) = z^{n-k} \cdot P_k(z)$. Pour que la limite soit atteinte, c. à. d. pour que $|z_n| = R$ il est nécessaire que les termes extrêmes des relations (10) soient égaux, ce qui entraine à son tour l'égalité de tous les autres termes de (10). On en tire une série de conséquences, à savoir: 1° le point z_n et tous les $k - 1$ points $z_j^{(k-1)}$ sont situés sur une même droite, 2° $|z_n - z_j^{(k-1)}| = \delta_k$ pour $j = 1, 2, \ldots, k - 1$, et aussi $|z_n| = \delta_k$, c. à. d. que les pts $z_j^{(k-1)}$ et l'origine sont à la même distance du pt. z_n. Comme z_n doit être situé plus loin de l'origine que les pts $z_j^{(k-1)}$, il en résulte que toutes les racines de $P_{k-1}(z) = 0$ sont en un seul pt., c. à. d. que $P_{k-1}(z) \equiv$ $\equiv (z - \lambda)^{k-1}$ en posant $z_j^{(k-1)} = \lambda$ pour $j = 1, 2, \ldots, k - 1$. Alors $P_k(z) = z(z - \lambda)^{k-1} + a_k$. La limite de Mr Walsh ne peut être atteinte pour $P_n(z) = 0$ que si elle est atteinte aussi pour tous les polynômes précédents, elle doit donc être atteinte pour $P_{k-1}(z)$; si donc $\lambda \neq 0$, on peut appliquer les considérations précédentes au polynôme $P_{k-1}(z)$ et on a $P_{k-1}(z) \equiv z(z-\mu)^{k-2} + a_{k-1} \equiv (z-\lambda)^{k-1}$; en dérivant, on voit que $\mu = \lambda$, c. à. d. $(z-\lambda)^{k-1} \equiv z(z-\lambda)^{k-2} + (-\lambda)^{k-1}$ ou bien

$$(-\lambda)\{(z-\lambda)^{k-2} - (-\lambda)\} \equiv 0,$$

ce qui est impossible pour $k > 2$, a moins que $\lambda = 0$. Supposons donc $k > 2$, alors $\lambda = 0$ et

$$P_k(z) \equiv z^k + a_k, \quad \text{tandis que} \quad P_n(z) \equiv z^{n-k} \cdot P_k(z) \equiv z^n + a_k z^{n-k}.$$

Le polynôme $P_n(z)$ a donc la forme voulue. Le cas de $k = 2$ ne fait pas exception, comme on s'en rend compte directement par la considération du trinôme du 2-me degré.
