# 162.

## TWO LETTERS ON CUBIC FORMS.

[From the *Quarterly Mathematical Journal*, vol. I. (1857), pp. 85—87 and 90—91.]

CHER MONS. HERMITE,

Il y a longtemps que j'ai voulu vous écrire, mais j'en ai été empêché je ne sais comment; j'ai assez à vous dire par rapport aux covariants, mais à présent je vais vous parler des formes cubiques à deux indéterminées. Il me semble que l'on peut simplifier la théorie de Eisenstein, et l'étendre au cas d'un déterminant négatif quelconque, de la manière que voici.

Soit $(a, b, c, d \between x, y)^3$ une forme cubique, je représente par Hessn. $(a, b, c, d \between x, y)^3$ la forme quadratique dérivée $(ac-b^2, \frac{1}{2}(ad-bc), bd-c^2 \between x, y)^2$. Cela étant, soit $(A, B, C)$ une forme représentative (réduite et proprement primitive) au déterminant $-D$; à moins que $(A, B, C)^2 = (A, -B, C)$, c'est-à-dire, à moins que $(A, B, C)$ ne soit une forme laquelle par sa triplication produit la forme principale, il n'existe pas de forme cubique $(a, b, c, d)$ telle que $-$ Hessn. $(a, b, c, d \between x, y)^3 = (A, B, C \between x, y)^2$, ou, si l'on veut, telle que $b^2-ac=A$, $bc-ad=2B$, $c^2-bd=C$; mais en supposant que l'on ait $(A, B, C)^2 = (A, -B, C)$ on peut trouver une seule forme cubique qui satisfait à l'équation dont il s'agit. J'écarte, cela va sans dire, l'une ou l'autre des deux formes $(a, b, c, d)$ et $(-a, -b, -c, -d)$.

En effet on a identiquement

$$(b^2-ac, -\tfrac{1}{2}(bc-ad), c^2-bd \between bxx'+cxy'+cx'y+dyy', axx'+bxy'+bx'y+cyy')^2$$
$$= (b^2-ac, \tfrac{1}{2}(bc-ad), c^2-bd \between x, y)^2 \times (b^2-ac, \tfrac{1}{2}(bc-ad), c^2-bd \between x', y')^2,$$

donc, en supposant que $b^2-ac=A$, $bc-ad=2B$, $c^2-bd=C$, il s'ensuit que $(A, B, C)^2 = (A, -B, C)$.

Je suppose donc $(A, B, C)^2 = (A, -B, C)$, et je dis qu'il ne peut pas y avoir deux formes cubiques, $(a, b, c, d)$ et $(a_{,}, b_{,}, c_{,}, d_{,})$, qui aient la propriété dont il s'agit; car, en écrivant

$$\left.\begin{aligned}\xi &= bxx' + cxy' + cx'y + dyy',\\ \eta &= axx' + bxy' + bx'y + cyy',\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\xi_{,} &= b_{,}xx' + c_{,}xy' + c_{,}x'y + d_{,}yy',\\ \eta_{,} &= a_{,}xx' + b_{,}xy' + b_{,}x'y + c_{,}yy',\end{aligned}\right\}$$

on trouverait

$$(A, -B, C)(\xi, \eta)^2 = (A, -B, C)(\xi_{,}, \eta_{,})^2,$$

ce qui implique d'abord que $\xi_{,}, \eta_{,}$ soient des fonctions linéaires de $\xi, \eta$. Mais $(A, -B, C)$ étant une forme réduite et proprement primitive au déterminant $-D$, il n'existe pas de transformation de la forme quadratique en elle-même, hormis $\xi_{,} = \xi$, $\eta_{,} = \eta$. Le cas $D = 1$ doit se traiter à part; dans ce cas particulier il n'y a que la forme cubique $(0, 1, 0, 1)$. Donc &c. Enfin, si $(A, B, C)^2 = (A, -B, C)$, il existe une forme cubique $(a, b, c, d)$ telle que $b^2 - ac = A$, &c.; car en cherchant par la méthode de Gauss les valeurs des coefficients $p, p', p'', p'''$ et $q, q', q'', q'''$ qui donnent cette transformation, on obtient d'abord $p' = p''$, $q' = q''$. On peut donc représenter ces coefficients par $b_{,}, c_{,}, c_{,}, d_{,}$; $a, b, b, c$; savoir, on peut trouver $a, b, c, b_{,}, c_{,}, d_{,}$ de manière que

$$(A, -B, C)(b_{,}xx' + c_{,}xy' + c_{,}x'y + d_{,}yy',\ \ axx' + bxy' + bx'y + cyy')^2$$
$$= (A, B, C)(x, y)^2 \cdot (A, B, C)(x', y')^2.$$

Cela étant, les équations de Gauss donnent

$$\begin{aligned} A &= bb_{,} - ac_{,}, & A &= b^2 - ac,\\ 2B &= cb_{,} - ad_{,}, & -2B &= cb_{,} + ad_{,} - 2bc_{,},\\ C &= cc_{,} - bd_{,}, & C &= c_{,}^2 - b_{,}d_{,}, \end{aligned}$$

et de là on obtient

$$\begin{aligned} b\,(b - b_{,}) - a\,(c - c_{,}) &= 0,\\ c\,(b - b_{,}) - b\,(c - c') &= 0,\\ c_{,}(b - b_{,}) - b_{,}(c - c_{,}) &= 0,\\ d_{,}(b - b_{,}) - c_{,}(c - c_{,}) &= 0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, ou $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{b_{,}}{c_{,}} = \frac{c_{,}}{d_{,}}$, ce qui n'est pas vrai (car cela donnerait $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$), ou $b - b_{,} = 0$, $c - c_{,} = 0$. Donc $b_{,} = b$, $c_{,} = c$; et en écrivant $d$ au lieu de $d_{,}$, on voit que l'équation de transformation devient

$$(A, -B, C)(bxx' + cxy' + cx'y + dyy',\ \ axx' + bxy' + bx'y + cyy')^2$$
$$= (A, B, C)(x, y)^2 \cdot (A, B, C)(x, y')^2,$$

où

$$A = b^2 - ac, \quad 2B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd. \quad \text{C. q. f. à d.}$$

Je ne sais pas si je vous ai mentionné que j'ai calculé les formes quadratiques pour les treize numéros $-307$, &c. aux déterminants irréguliers. Pour $D=-307$ ces formes sont:

Ordre P. P., 1 genre, 9 classes, c'est-à-dire:

$$\begin{array}{ccc|c|l}
\multicolumn{3}{l}{\text{Composition.}} & & \\
1 & \delta & \delta^2 & \dfrac{m}{307} & (1,\ 0,\ 307),\ (7,\ 1,\ 44),\ (7,\ -1,\ 44), \\
\delta_{,} & \delta\delta_{,} & \delta^2\delta_{,} & & (4,\ 1,\ 77),\ (11,\ -1,\ 28),\ (17,\ 4,\ 19), \\
\delta_{,}^2 & \delta\delta_{,}^2 & \delta^2\delta_{,}^2 & + & (4,\ -1,\ 77),\ (17,\ -4,\ 19),\ (11,\ 1,\ 28),
\end{array}$$

où $\delta^3=1$, $\delta_{,}^3=1$.

Ordre I. P., 1 genre, 3 classes, c'est-à-dire:

$$\sigma,\quad \sigma\delta,\quad \sigma\delta^2 \quad | \quad + \quad | \ (2,\ 1,\ 154),\quad (14,\ 1,\ 22),\quad (14,\ -1,\ 22).$$

A chaque forme de l'ordre P. P. il corresponde donc une forme et une seule forme cubique au déterminant $-1228$. Ces formes sont

$$\begin{aligned}
&(0,\ 1,\ \ 0,\ -307),\ (1,\ \ 1,\ -6,\ 8),\ (1,\ -1,\ -6,\ -8),\\
&(0,\ 2,\ \ 1,\ -\ \ 38),\ (1,\ -3,\ -2,\ 8),\ (4,\ \ 1,\ -4,\ -3),\\
&(0,\ 2,\ -1,\ -\ \ 38),\ (4,\ -1,\ -4,\ 3),\ (1,\ \ 3,\ -2,\ \ 8).
\end{aligned}$$

Je serai bien aise d'avoir de vos nouvelles, et je vous prie de me croire votre très-dévoué

A. Cayley.

Cher Mons. Hermite,

On démontre sans peine la proposition avancée dans ma dernière lettre, savoir qu'en supposant

$$\begin{aligned}
\xi &= b\,xx' + c\,xy' + c\,x'y + d\,yy',\\
\eta &= a\,xx' + b\,xy' + b\,x'y + c\,yy',\\
\xi_{,} &= b_{,}xx' + c_{,}xy' + c_{,}x'y + d_{,}yy',\\
\eta_{,} &= a_{,}xx' + b_{,}xy' + c_{,}x'y + d_{,}yy',
\end{aligned}$$

$$(A,\ -B,\ C\between\xi,\ \eta)^2 = (A,\ -B,\ C\between\xi,\ \eta)^2,$$

on doit avoir

$$\begin{aligned}
\xi_{,} &= \alpha\xi + \beta\eta,\\
\eta_{,} &= \gamma\xi + \delta\eta,
\end{aligned}$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des entiers. En effet en trouve d'abord en éliminant par ex. $xy'$ et $x'y$,

$$\xi_{,} = \alpha\xi + \beta\eta + \lambda xx' + \mu yy',$$
$$\eta_{,} = \gamma\xi + \delta\eta + \nu xx' + \rho yy',$$

où $\alpha$, $\beta$, &c., $\lambda$, $\mu$, &c., sont des quantités rationnelles. En substituant ces valeurs de $\xi$, $\eta$, on aura $(A, -B, C)\ (\lambda, \nu)^2 = 0$, $(A, -B, C)\ (\mu, \rho)^2 = 0$. Donc le déterminant n'étant pas un carré, $\lambda = 0$, $\nu = 0$, $\mu = 0$, $\rho = 0$ et

$$\xi_{,} = \alpha\xi + \beta\eta,$$
$$\eta_{,} = \gamma\xi + \delta\eta,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des quantités rationnelles. Donc

$$b_{,} = \alpha b + \beta a, \quad a_{,} = \gamma b + \delta a,$$
$$c_{,} = \alpha c + \beta b, \quad b_{,} = \gamma c + \delta b,$$
$$d_{,} = \alpha d + \beta c, \quad c_{,} = \gamma d + \delta c,$$

donc $\alpha$, $\beta$ seront des quantités rationnelles ayant pour dénominateur l'une quelconque à volonté des trois quantités $b^2 - ac$, $c^2 - bd$, $ad - bc$, c'est-à-dire, des quantités $A$, $B$, $C$; et, puisque $(A, B, C)$ est une forme P. P., cela ne peut arriver à moins que $\alpha$, $\beta$ ne soient des entiers; de même, $\gamma$, $\delta$ seront des entiers. Je remarque de plus les équations

$$a\beta + b(\alpha - \delta) - c\gamma = 0,$$
$$b\beta + c(\alpha - \delta) - d\gamma = 0,$$

lesquelles donnent

$$\beta : \alpha - \delta : -\gamma = bd - c^2 : bc - ad : ac - b^2$$
$$= \quad C : -2B : A,$$

cela fait voir que la transformation en elle-même de la forme $(A, -B, C)(\xi, \eta)^2$ à moyen de $\xi_{,} = \alpha\xi + \beta\eta$, $\eta_{,} = \gamma\xi + \delta\eta$ est une transformation propre. J'aime cependant mieux la manière dont vous vous êtes servi pour déduire d'une forme cubique donnée toutes les autres formes cubiques qui correspondent à la même forme quadratique. Il serait facile de la même manière, étant donnée une transformation quelconque d'une forme quadratique dans le produit de deux autres formes quadratiques, d'en déduire toutes les autres transformations; car il y a pour la fonction $axx'x'' +$ &c ... un covariant qui corresponde au cubicovariant de la fonction $ax^3 +$ &c.... Je suis votre très-dévoué

A. CAYLEY,

2, Stone Buildings, Lincoln's Inn, 6 Mars, 1855.