

H. 103

BULLETIN INTERNATIONAL  
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE CRACOVIE

---

COMPTES RENDUS

DES

SÉANCES DE L'ANNÉE 1893.

---

NOVEMBRE



CRACOVIE  
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ  
1893.

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE A ÉTÉ FONDÉE EN 1872 PAR  
S. M. L'EMPEREUR FRANÇOIS JOSEPH I.

---

PROTECTEUR DE L'ACADÉMIE:

S. A. I. L'ARCHIDUC CHARLES LOUIS.

VICE-PROTECTEUR: S. E. M. JULIEN DE DUNAJEWSKI.

---

PRÉSIDENT: M. LE COMTE STANISLAS TARNOWSKI.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL: M. STANISLAS SMOLKA.

---

EXTRAIT DES STATUTS DE L'ACADÉMIE:

(§. 2). L'Académie est placée sous l'auguste patronage de Sa Majesté Impériale Royale Apostolique. Le protecteur et le Vice-Protecteur sont nommés par S. M. l'Empereur.

(§. 4). L'Académie est divisée en trois classes:

- a) classe de philologie,
- b) classe d'histoire et de philosophie,
- c) classe des Sciences mathématiques et naturelles.

(§. 12). La langue officielle de l'Académie est le polonais; c'est dans cette langue que paraissent ses publications.

---

*Le Bulletin international paraît tous les mois, à l'exception des mois de vacances (août, septembre), et se compose de deux parties, dont la première contient l'extrait des procès verbaux des séances (en français), la deuxième les résumés des mémoires et communications (en français ou en allemand, au choix des auteurs).*

Le prix de l'abonnement est 3 fl. = 8 fr.

Séparément les livraisons se vendent à 40 kr. = 90 centimes.

---

Nakładem Akademii Umiejętności  
pod redakcją Sekretarza generalnego Dr. Stanisława Smolki.

Kraków, 1893. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządą A. M. Kosterkiewicza.

003

BULLETIN INTERNATIONAL  
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES  
DE CRACOVIE.

---

N<sup>o</sup> 9.

Novembre.

1893.

---

**Sommaire:** Séances du 6, 13, 20 et 21 novembre 1893. — Résumés:  
64 Bibliothèque des écrivains polonais du XVI<sup>e</sup> siècle, 26<sup>e</sup> livraison. —  
65. J. NIEDŹWIEDZKI. Contributions à la géologie de la pente des Carpa-  
thes, dans la Galicie occidentale. — 66. L. WACHHOLZ. Sur la détermi-  
nation de l'âge d'après l'état d'ossification de la tête d'humérus. — 67. L.  
GOSIEWSKI. Sur la transformation la plus probable d'un corps matériel.

---

Séances

---

Séance de l'Académie  
du 21 novembre 1893

---

**Présidence de M. le Comte Stanislas Tarnowski.**

L'Académie procède, aux termes de l'art. XX des Statuts, à l'élection du Président, pour les années 1894—1896.

M. le comte STANISLAS TARNOWSKI est réélu Président.

Le Secrétaire général annonce que le Conseil de l'Académie, réuni immédiatement avant cette séance, a procédé, aux termes de l'art. XXII des Statuts, à l'élection du Vice-Président de l'Académie: M. FRÉDÉRIC ZOLL est réélu Vice-Président, pour les années 1894—1896.

Les procès-verbaux de ces élections seront présentés à SON ALTESSE IMPÉRIALE MONSEIGNEUR L'ARCHIDUC CHARLES-LOUIS, Protecteur de l'Académie, avec la prière de les soumettre à la confirmation de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR.

Le Secrétaire général fait connaître les noms des candidats aux fauteuils de l'Académie, choisis dans les trois Classes et dont l'élection définitive, aux termes de l'art. XVIII des Statuts,

doit avoir lieu à la réunion de l'Académie du 2 mai 1894. Sont présentés: par la Classe de Philologie, trois membres correspondants; par la Classe d'Histoire et de Philosophie, un membre titulaire et deux correspondants; par la Classe des Sciences mathématiques et naturelles, six membres correspondants.

L'assemblée vote le budget de l'Académie pour l'année 1894. Les revenus s'élèvent à 49,000 florins, à savoir: la dotation du gouvernement: 16,000 florins, la dotation de la Diète de Galicie: 25,000 florins, la subvention de la ville de Cracovie: 500 florins, rentes: 5481 florins, vente des publications etc.: 2019 florins. L'Académie vote: pour les frais de l'administration: 11,650 florins, pour les publications et les subventions de l'Académie (Bulletin, Annuaire, Bibliothèque des écrivains polonais, Dictionnaire de la langue polonaise): 8,850 florins, pour les publications de la Classe de Philologie et de la Classe d'Histoire et de Philosophie: 14,250 florins, pour les publications de la Classe des Sciences mathématiques et naturelles: 14,250 florins. Les prix de l'Académie, ayant leurs fonds séparés, ne sont pas compris dans ce budget.

---

### Classe de Philologie

Séance du 13 novembre 1893

#### Présidence de M. C. Morawski

Le Secrétaire dépose sur le bureau la dernière livraison de *la Bibliothèque des écrivains polonais du XVI<sup>me</sup> siècle* contenant les poésies religieuses de Sébastien Grabowiecki<sup>1)</sup>.

M. JEAN BAUDOIN DE COURTENAY, membre titulaire, rend compte de ses deux ouvrages, récemment parus, à savoir: »Изъ лекцій по латинской фонетикѣ«. Woroneż, 1893 et „*Vermenschlichung der Sprache*“. Hambourg, 1893.

1) Voir ci-dessous aux Résumés p. 303.

M. LUCIEN MALINOWSKI, m. t., donne lecture de son travail: *Sur la langue des comédies de François Bohomolec (1720—1784)*.

---

## Classe d'Histoire et de Philosophie

---

Séance du 20 novembre 1893

### Présidence de M. F. Zoll

Hommage est rendu à la mémoire de M. RICHARD RÜPELL, membre titulaire, professeur à l'Université de Breslau, décédé le 4 novembre 1893.

Le Secrétaire dépose sur le bureau le travail de M. JOSEPH BRZEZIŃSKI, récemment paru dans les Mémoires (in 8°, XXX<sup>e</sup> vol., p. 263—292) »Konkordaty Stolicy Apostolskiej z Polską w wieku XVI«. (*Les concordats du Saint-Siège avec la Pologne au XVI<sup>e</sup> siècle*)<sup>1)</sup>, et rend compte des travaux des Commissions.

Dans la séance de la Commission d'Histoire du 16 novembre 1893, M. CASIMIR KROTOSKI a présenté un rapport sur les archives du couvent des Carmes déchaussés, à Czerna, près de Cracovie, en relevant l'importance des matériaux concernant l'administration des biens du couvent ainsi que d'une chronique renfermant des détails inconnus sur la guerre avec Charles Gustave de Suède, en 1655 et 1656. Ensuite M. l'abbé JULIEN BUKOWSKI a fait une communication sur une chronique du couvent des Frères Observantins, à Kalwarya Zebrzydowska, provenant du commencement du XVI<sup>e</sup> siècle, et surtout sur les chapitres de cet ouvrage, concernant le soulèvement de Nicolas Zebrzydowski, palatin de Cracovie, en 1606.

M. FÉLIX KONECZNY donne lecture d'une communication: *Sur la jeunesse de Sigismond III, d'après des documents des Archives du Vatican*.

1) Le résumé de ce travail sera donné dans le prochain N<sup>o</sup>. du Bulletin.

Le Secrétaire présente le mémoire de M. OSWALD BALZER, m. corr., intitulé: *La lutte des prétendants au Grand-Duché de Cracovie, 1202—1211.*

---

## Classe des Sciences mathématiques et naturelles

---

Séance du 6 novembre 1893

---

### Présidence de M. E. Janczewski

Le Secrétaire présente le mémoire de M. JULIEN NIEDZWIEDZKI, m. t., *Contributions à la géologie de la pente des Carpathes, dans la Galicie occidentale*<sup>1)</sup>.

M. Napoléon Cybulski, m. t., rend compte du travail de M. LÉON WACHHOLZ: *Sur la détermination de l'âge d'après l'état d'ossification de la tête d'humérus*<sup>2)</sup>.

M. LADISLAS GOSIEWSKI, m. corr., donne lecture de son mémoire: *Sur la transformation la plus probable d'un corps matériel*<sup>3)</sup>.

1) Voir ci-dessous aux Résumés p. 307. — 2) ib. p. 307. — 3) ib. p. 311.

---

## Résumés

---

64. — **Biblioteka pisarzy polskich.** (*Bibliothèque des écrivains polonais* du 16<sup>me</sup> siècle. 26<sup>me</sup> livraison). **Sebastjana Grabowieckiego Rymy Duchowne** 1590, wydał J. KORZENIOWSKI. (*Rimes religieuses de Sébastien Grabowiecki 1590*). Cracovie 1893, 8<sup>o</sup> pag. XVI et 197.

La collection des réimpressions des anciens écrivains polonais, publiée par l'Académie sous le titre de „Bibliothèque des auteurs polonais“ vient de s'enrichir d'une oeuvre très remarquable, due à un poète de la fin du seizième siècle. Son nom est resté oublié et son ouvrage ignoré jusqu'à nos jours. Sébastien Grabowiecki — soit à cause de l'excessive rareté de son livre, dont l'unique exemplaire complet se trouve à la Bibliothèque Czartoryski à Cracovie, soit pour toute autre raison — n'a pas laissé de trace dans l'histoire littéraire de son pays. On ne rencontre quelques mentions sur l'auteur des Rimes Religieuses que dans les recueils bibliographiques de Juszyński, Maciejowski et Estreicher, et encore sont-elles vagues et en partie erronées. Ses contemporains, paraît-il, ne l'ont point connu davantage. Le célèbre Barthélémy Paprocki, le chroniqueur de la vieille noblesse polonaise du XVI<sup>e</sup> siècle,

est le seul à donner quelques renseignements sur sa personne. Voilà pourquoi l'éditeur n'a pas pu fournir des détails précis et exacts sur la vie du poète. Il émet seulement des hypothèses, basées sur les quelques documents cités dans l'ouvrage de Paprocki ou puisées aux autres sources soit manuscrites soit imprimées. Voici le résumé de ses recherches.

Grabowiecki naquit vers 1540, d'une famille noble, établie depuis longtemps dans la Grande Pologne. Son père se nommait Stanislas; son oncle, Gabriel, est connu dans l'histoire comme chambellan de Catherine d'Autriche, reine de Pologne, femme du roi Sigismond Auguste. La situation particulière de ce dernier lui permit de faire entrer son neveu au service du roi. Paprocki nous apprend que ce neveu fit ses études à l'étranger; il suivit sans doute les cours d'une université italienne ou allemande. De retour en Pologne, il épousa une demoiselle d'honneur de l'infante Anna, soeur du roi Sigismond-Auguste et reine ensuite par son mariage avec Etienne, roi de Pologne. Il est à présumer, qu'après son mariage, Grabowiecki se retira en province et y mena l'existence d'un paisible gentilhomme campagnard. Mais il ne jouit pas longtemps du bonheur de la vie de famille. La perte de sa femme et de ses enfants, jointe sans doute à l'insuffisance de ses revenus, le ramena en 1581 à la Cour, où il occupa le poste de secrétaire du Roi Etienne. Sigismond III qui succéda au Roi Etienne, conserva à Grabowiecki la même fonction à laquelle était attachée une pension annuelle de 415 florins. C'est probablement vers cette époque que Grabowiecki entra dans les ordres; il publia dès 1585 un opuscule théologique sous le titre de „*Martinus Lauter eiusque levitas*“. Ce livre de polémique religieuse, plutôt conciliant qu'agressif, ce qui le distingue d'autres opuscules contemporains sur cette matière, dénote une érudition peu commune. L'auteur y attaque Luther, Calvin et les autres réformateurs religieux du XVI<sup>e</sup> siècle, et signale beaucoup d'assertions contradictoires dans leurs ouvrages. Avant 1590 Grabowiecki porte déjà le titre de curé de Lemsal (en Livonie, diocèse de Wenda); deux ans plus tard



il est nommé abbé de Bledzew, un des anciens et très riches monastères de Citeaux en Grande Pologne. C'est là qu'il meurt en 1607, après avoir rebâti l'ancienne église détruite par un incendie.

En 1590 Grabowiecki avait publié le deuxième et dernier ouvrage connu de lui: les Rimes Religieuses. C'est une oeuvre de grande valeur au point de vue de l'art. Elle est divisée en deux parties, dont chacune porte en sous-titre „Centurie de Rimes Religieuses“ (Setnik Rymów Duchownych). L'ensemble se compose de 204 poésies, généralement assez courtes, en moyenne de 24 à 40 vers, quoique il y en ait quelques-unes de 80 à 100 vers. L'auteur a dédié son livre à Mlle Sophie Myszkowska, soeur de Pierre Myszkowski, protecteur du poète, et membre d'une des grandes familles de Pologne. Sa dédicace nous apprend que Grabowiecki avait en publiant ses poésies un double but: d'abord d'exprimer sa reconnaissance à Pierre Myszkowski, ce dont il s'acquitte du reste en s'adressant à la fin du volume directement à lui, dans quelques-uns des plus beaux tercets qui aient été écrits en polonais, et, ensuite, d'exhorter Mlle Myszkowska, qui était peut-être sa pénitente, à persévérer dans la piété chrétienne.

Il est assez difficile de mettre le lecteur à même de saisir la pensée dominante de ces poésies. Les idées d'un caractère très abstrait y abondent, les images poétiques et les comparaisons, à peine indiquées et presque jamais développées, se suivent et se perdent dans des considérations générales. Mais ce qui occupe surtout le poète, c'est le péché, le mal éternel de l'humanité, dans toute son étendue, avec toutes ses conséquences directes: remords et tourments de l'âme contrite, incertitude du sort futur, terreur de la justice divine et espoir en Dieu de l'âme pieuse. Ses méditations poétiques ont pour objet de sauvegarder l'homme contre le péché, contre les entreprises de Satan, son implacable ennemi, au moyen de la grâce divine, du Très-Saint Sacrement de l'Eucharistie et de la médiation du Christ. L'auteur est certainement un homme d'une foi robuste et profonde; s'il a quelques doutes, il y é-

chappe, soit par un brusque retour à ses convictions primordiales, soit par un raisonnement naïf sur la nécessité du salut éternel. Il est passé maître dans la description de l'état d'une âme qui, tout en se souvenant du péché dans lequel elle est plongée, s'attache avec une ferme espérance à la miséricorde plutôt qu'à la justice de Dieu.

C'est là le caractère général de l'oeuvre poétique de Grabowiecki. Il faut ajouter que tout en affirmant son espoir dans la miséricorde divine, conformément au dogme chrétien, ce fervent croyant laisse échapper quelques paroles d'un pessimisme profond. Cette nuance fait le charme de ce recueil qui échappe à la monotonie, grâce à la vigueur et à l'harmonie du vers, à la virilité du style et à l'originalité heureuse des comparaisons. Mais c'est la diversité des formes poétiques surtout qui révèle dans Grabowiecki un artiste de premier ordre. Avant lui, un de ses contemporains, Kochanowski, avait le premier introduit dans la poésie polonaise les formes variées du sonnet et du tercet italien, mais Grabowiecki les développa et en dota la plus souple et la plus harmonieuse langue de la grande famille des idiomes slaves. Dans les Rimes Religieuses de Grabowiecki nous trouvons quelques-unes des formes poétiques les plus rares qu'on puisse rencontrer dans la littérature polonaise, avant le XIX<sup>e</sup> siècle. Ce sont les strophes de trois rimes, les strophes de cinq vers à deux ou trois rimes, celles de six et sept vers, l'*ottava rima*, la *canzona* italienne de neuf vers etc. Voilà ce qui mérite au recueil de poésies religieuses de Grabowiecki, non seulement d'avoir été réédité et sauvé d'un oubli de trois siècles, mais encore d'être lu et étudié, même aujourd'hui, aussi bien au point de vue de la valeur intrinsèque du fond, que de l'art exquis de la forme.

65. — J. NIEDŹWIEDZKI. *Przyczynek do geologii brzegu karpackiego w Galicyi zachodniej. (Beitrag zur Geologie des Karpatenrandes in Westgalizien).*

Den hauptsächlichlichen Inhalt der Abhandlung bildet die nähere Bestimmung des Altershorizontes der Kreideschichten, welche den Karpatenrand südlich von Swoszowice, Wieliczka und Bochnia zusammensetzen.

Der Verfasser erweist auf Grund neuerer Petrefactenfunde sowie petrographischer Vergleichen 1), dass die Gesteinsbildungen, welche den Mietniower Rücken bei Wieliczka bis nach Sułów hin zusammensetzen, den schlesisch-karpatischen Wernsdorfer-Schichten, Stufe: Barremien, entsprechen, und 2), dass die massigen Sandsteine mit eisenschüssigen Conglomeraten, welche im altkarpatischen Randrücken bei Tomaszkowice im Osten von Wieliczka, westlich davon bei Lusina an der Wilga und dann bei Pogwizdów südlich von Bochnia auftreten, mit den Neokomfossilien-führenden Schichten von Garbatki zu vereinigen und mit dem „Grodischer“ Sandstein Hoheneggers, Stufe Hauterivien, zu parallelisieren sind.

Schliesslich berichtet der Verfasser, dass eine miocäne Buchtausfüllung analog derjenigen, wie sie aus der Gegend südlich von Swoszowice bei Zielona bekannt war, auch bei Gaj (NW von Mogilany) und zwar in sehr ansehnlicher Ausdehnung, vorhanden ist.

66. — L. WACHHOLZ. *O oznaczaniu wieku na zwłokach z przebiegu kostnienia główki kości ramieniowej. (Ueber die Altersbestimmung an Leichen auf Grund des Ossificationsprocesses im oberen Humerusende).* Mit 4 Abbildungen.

Die sichersten anatomischen Merkmale, auf Grund deren die Altersbestimmung an Leichen möglich wird, bietet uns das Skelett dar. Während des Ossificationsverlaufes erscheinen im oberen Humerusende einzelne Merkmale, die vollkommen geeignet sind, die Altersbestimmung zu ermöglichen.

Es ist eine wohlbekannte Thatsache, dass die so genannten Knorpelfugen, welche die Epiphysen von Diaphysen in langen Knochen trennen, in einem gewissen Alter verschwinden; was nun dieses Alter anbelangt, so wird es sehr verschieden von einzelnen Autoren angegeben, und zwar aus diesem Grunde, wie das zuerst Hofmann hervorhebt, weil alle Autoren so wichtige Einflüsse wie das Geschlecht, die Nationalität und die Körperlänge in ihren Untersuchungen ausser Acht liessen.

Verfasser unternahm in dieser Richtung Untersuchungen, die er theils im Wiener Institut für gerichtliche Medicin (an 124 oberen Humerusenden aus ebensoviel Leichen) theils im anatomisch-pathologischen Institut in Krakau (an 76 Humerusenden) ausführte. Verfasser überzeugte sich, dass das Geschlecht den meisten Einfluss auf das zeitliche Vorkommen einzelner anatomischen Merkmale im oberen Humerusende ausübt.

Der Schwund des Knorpelbelages am äusseren Rande des Epiphysendurchschnittes kennzeichnet bei der Wiener Bevölkerung und zwar im weiblichen Geschlechte die Lebensperiode bis zu 14 Jahren, im männlichen Geschlechte bis 16 Jahren; der vollständige Schwund der Knorpelfuge wird bei Frauen zwischen 17 und 18 Jahren, bei Männern zwischen 20 und 21 Jahren beobachtet (bei der Krakauer Bevölkerung etwas später, und zwar bei Frauen um das 19-te, bei Männern um das 23-ste Lebensjahr); das Epiphysengefüge wechselt zwar im Laufe der Zeit, bleibt aber bei beiden Geschlechtern immer gleich.

Zwischen 15 und 20 Jahren ist dasselbe weich, locker mit überaus feinen Markräumen; das Diaphysengefüge ist um dieselbe Zeit fest mit regelmässigen durch starke Knochenbälkchen gebildeten Markräumen. Jenseits der 20-er Jahre wird das Epiphysengefüge allmählig hart, spongiös und dem Diaphysengefüge ähnlich; zuerst geschieht diese Umänderung im äusseren, im mittleren, zuletzt im inneren Durchschnittsdritheil. Um das 20-ste bis 25-ste Lebensjahr zeigen die Epiphysendurchschnitte zumeist einen mehr oder weniger genauen radiären Bau. Um das 17-te Jahr bei Männern, und das 15-te bei Frauen

gelangt im mittleren Drittheil des Epiphysendurchschnittes eine  $1\frac{1}{2}$  mm. breite, über der Knorpelfuge gelegene Knochenleiste zum Vorschein. Diese Knochenleiste erhält sich noch längere Zeit, nachdem die Knorpelfuge schon längst verschwunden ist, und bildet die Grenze, wo Epiphyse mit Diaphyse sich vereinigen. Sie verschwindet in verschiedenen Zeitaltern bei Menschen desselben Geschlechtes, derselben Nationalität u. s. w.; zumeist aber verschwindet sie um das 30-ste Lebensjahr.

Ein genauer Farbenunterschied zwischen Epiphyse (hellgelb) und Diaphyse (kirschroth) wird am öftesten zwischen 20 und 30 Jahren wahrgenommen; man begegnet ihm aber sowohl diesseits der 20-er Jahre als auch jenseits der 30-er Jahre. Dieser Farbenunterschied wird günstig beeinflusst durch das Vorhandensein der Knorpel-respective der Knochenleiste, welche die gefäss- und somit blutarmer Epiphyse von der markhaltigen und blutreichen Diaphyse trennen. Die allmähliche Erweiterung der Markhöhle vom Diaphysenmittelstücke gegen die Epiphyse bildet ein gut verwertbares Merkmal für die Altersbestimmung. Zwischen 30 und 35 Jahren bei Männern, bei Frauen vom 28. Lebensjahre angefangen, sieht man die Markhöhle bis an's Ende des chirurgischen Humerushalses ragen; vom 35. Jahre aufwärts bei Männern, etwas früher bei Frauen, ragt dieselbe bis zur Grenze, wo Epiphyse mit Diaphyse verschmolzen sind. Zahlreiche Messungen der stärksten Epiphysenbreite und Höhe, die an frischen Knochen beider Geschlechter ausgeführt waren, ergaben, dass das obere Humerusende bis ins späte Alter an Breite zunimmt, an Höhe aber nur zum Zeitpunkte, in welchem die Knorpelleisten dem Verknöcherungsprocesse unterliegen. Das Verhältnis zwischen der stärksten Epiphysenbreite und Höhe ist jenseits der 35 Jahre maximal 3.66 ctm., minimal 2.77 ctm zu 1 ctm., diesseits der 35-er Jahre maximal 2.75 ctm. zu 1. ctm. Diese Messungen, sowie die oben erwähnten Verhältnisse, bilden bei Vornahme der Altersbestimmungen, nur ein Hilfsmoment; man ist aber in keinem Fall berechtigt auf Grund dieser Messungen allein das Alter festzustellen.

Obige Endschlüsse, deren diagnostischer Wert an zahlreichen Beispielen erprobt wurde, stützen sich auf genaue Untersuchungen von Humerusknochen, die Verf. Menschenleichen mit normal entwickelten Geschlechtsorganen, Skelett und von mittlerer Körperlänge entnommen hatte.

Von besonders wichtigen Factoren, die auf den Verknöcherungsprocess Einfluss üben, werden hervorgehoben:

1) Das Geschlecht. Naturgemäss erreicht das weibliche Skelett früher als das männliche den Höhepunkt seiner Entwicklung.

2) Die Nationalität; bei den Einwohnern Wiens schreitet die Skelettentwicklung schneller vor, als bei den Einwohnern der Stadt Krakau.

3) Die Körperlänge; früherer Entwicklungsabschluss bei mittlerer Körperlänge (168 ctm. bei Männern) als bei grosser Statur (mehr als 170 ctm. bei Männern).

4) Hemmung der Skelettentwicklung, der Zwergwuchs; bei der ersten Zwergkategorie von Kundrat ist der Verknöcherungsprocess normal oder etwas beschleunigt; bei der zweiten Kategorie ist die Skelettentwicklung aus unbekanntem Ursachen gehemmt und zwar so, dass auf Grund der oben erwähnten Merkmale die Altersbestimmung unmöglich wird; (bei Zwergen dieser Gruppe bleiben die Knochenfugen durch das ganze Leben offen).

5) Gehemmte Entwicklung der Sexualorgane; sowohl bei Männern, wie auch bei Frauen mit Hypoplasie der Geschlechtsorgane ist der Ossificationsprocess verlangsamt; bei Personen, die zur Pubertätszeit castrirt wurden, ist die Skelettentwicklung stark gehemmt.

6) Lang andauernde und schwächende Krankheiten; analoges Verhalten der Nagelwachsthumsstörung bei schwer erkrankten Personen.

---

67. — W. GOSIEWSKI. „0 przekształceniu najprawdopodobniejszym ciała materyalnego.“ (*Sur la transformation la plus probable d'un corps matériel.*)

§. 1. Parmi les rapports, dit l'auteur, qui déterminent un phénomène quelconque, il faut considérer en général des rapports constants et d'autres variables avec le temps. Si ces rapports étaient tous constants, nous appellerions le phénomène „un corps“; tant qu'ils sont variables, nous l'appellerons „un corps, qui se transforme“.

Notre problème consistera dans l'établissement des lois suivant lesquelles un corps se transforme, la transformation du corps étant conçue dans le sens précité.

La possibilité d'une telle recherche dépend évidemment de la possibilité de former une notion quantitative sur l'état du corps, et ce sont les rapports essentiellement variables qui s'y présentent avant tout. Nous les appellerons „paramètres“ et désignerons par  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , en général  $x_i$ .

Un état du corps n'est intelligible qu'en tant que ses rapports internes et externes (avec les états des autres corps) sont des „qualités“ susceptibles d'être assimilées à des notions quantitatives; dans le cas contraire l'état du corps sera inintelligible.

Mais entre l'intelligibilité et l'inintelligibilité on peut envisager une suite de possibilités intermédiaires, et par conséquent on peut concevoir la probabilité pourvu que la notion quantitative de l'état considéré du corps reproduise en effet cet état. C'est cette probabilité que nous appellerons „la probabilité d'un état du corps“ et désignerons par  $\varphi$ , qui nous servira de point de départ dans nos recherches.

Supposons que le corps se transforme infiniment peu, c'est-à-dire, qu'il passe de l'état  $x_i$  à celui  $x + dx_i$ .

Alors  $lg\varphi$  acquiert un accroissement  $d\varphi/\varphi$ , qui en général est égal à une fonction des paramètres et de leurs accroissements correspondants. Ces accroissements étant infiniment petits, la susdite fonction se réduit à l'expression différen-

tielle  $\sum w_i dx_i - ds$ , où  $ds$  désigne la différentielle exacte d'une certaine fonction  $s$  dépendante d'un état du corps et les coefficients  $w_i$  en sont des fonctions uniformes.

Nous avons donc  $d\varphi/\varphi = \sum w_i dx_i - ds$ , d'où il vient par intégration

$$(1) \quad \varphi_b = \varphi_a e^{\int_a^b \sum w_i dx_i - (s_b - s_a)}$$

$a$  et  $b$  désignant symboliquement deux états du corps qui ne se succèdent pas immédiatement, et  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  ainsi que  $s_a$  et  $s_b$  étant les valeurs correspondant à ces états de la probabilité  $\varphi$  et de la fonction  $s$ .

En supposant que l'état initial  $a$  soit sûr, le rapport  $\varphi_b/\varphi_a$  exprime la probabilité d'un état variable  $b$ , et comme cette probabilité ne doit pas dépasser l'unité on aura l'inégalité suivante:

$$(2) \quad \int_a^b \sum w_i dx_i - (s_b - s_a) \leq 0.$$

De la formule (1) il vient évidemment que la probabilité de l'état  $b$  dépend en général: 1) de l'état  $a$ , au moyen de  $\varphi_a s_a$ ; 2) de l'état  $b$ , au moyen de  $s_b$ ; et 3) de la transformation du corps d'après un certain contour de  $a$  à  $b$ , au moyen de l'intégrale  $\int_a^b \sum w_i dx_i$ . Cette intégrale représente donc la valeur de la transformation finie du corps, tandis que l'expression différentielle  $\sum w_i dx_i$  représente celle de la transformation infiniment petite.

Nous allons considérer la transformation  $\sum w_i dx_i$  comme composée des transformations partielles:  $\sum u_i^{(\varepsilon)} dx_i$ , ( $\varepsilon = 1, 2, \dots, n$ ), de la manière suivante:

$$(3) \quad \sum_i w_i dx_i = \sum_{\varepsilon} \sum_i u_i^{(\varepsilon)} dx_i = \sum_i dx_i \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)},$$

$u_i^{(\varepsilon)}$  étant le coefficient de la transformation partielle  $\varepsilon$ .

Conformément à cette supposition, les formules (1) et (2) deviennent:



$$\varphi_b = \varphi_a e^{\int_a^b \sum_i dx_i \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - (s_b - s_a)} \quad (4)$$

$$\int_a^b \sum_i dx_i \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - (s_b - s_a) \leq 0. \quad (5)$$

§. 2. En même temps que le corps éprouve des transformations partielles  $\varepsilon$ , il produit une quantité infiniment petite d'énergie  $dQ$  qui dépend en général de l'état actuel du corps et des valeurs de ses transformations partielles.

Ces valeurs étant infiniment petites et  $dQ$  s'annulant avec elles, on a évidemment

$$dQ = \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} \sum_i u_i^{(\varepsilon)} dx_i, \quad (6)$$

$T^{(\varepsilon)}$  étant des fonctions uniformes de l'état du corps.

Pour fixer le signe de  $dQ$ , nous conviendrons que la valeur de la transformation partielle et celle de l'énergie correspondante soient toujours du même signe. Si donc nous posons

$$dQ^{(\varepsilon)} = T^{(\varepsilon)} \sum_i u_i^{(\varepsilon)} dx_i, \quad (7)$$

$$(\varepsilon = 1, 2, \dots, n)$$

et

$$dQ = \sum_{\varepsilon} dQ^{(\varepsilon)},$$

on aura  $T^{(\varepsilon)} > 0$ .

En introduisant la notation (7) dans l'inégalité (5) on aura

$$\int_a^b \sum_{\varepsilon} \frac{dQ^{(\varepsilon)}}{T^{(\varepsilon)}} - (s_b - s_a) \leq 0 \quad (9)$$

ce qui avec les équations (7) nous rappelle la forme des lois fondamentales de la thermostatique. En effet, si nous convenons d'appeler:  $Q^{(\varepsilon)}$  — la chaleur,  $T^{(\varepsilon)}$  — la température  $T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)}$  — le coefficient thermique, et  $s$  — l'entropie, les équations (7) reproduiront la loi d'équivalence, tandis que l'inégalité (9) reproduira celle de l'entropie.

§. 3. Avant d'aller plus loin, nous changerons les notations précédentes par l'introduction du temps. En supposant notamment que l'état  $a$  réponde au moment initial  $t_0$  et

l'état  $b$  au moment courant  $t$ , désignons par  $\varphi_0$  et  $\varphi$  les valeurs de la probabilité  $\varphi$  qui correspondent aux moments  $t_0$  et  $t$ , et par  $s$  la valeur de la différence  $s_b - s_a$  au moment  $t$ . Les équations (6) et (4) ainsi que l'inégalité (5) s'exprimeront alors de la manière suivante :

$$(10) \quad dQ = dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)}$$

$$(11) \quad \varphi = \varphi_0 e^{\int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - s}$$

$$(12) \quad \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - s \leq 0$$

§. 4. De l'équation (10) on déduit

$$(13) \quad Q - Q_0 = \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)},$$

$Q$  étant une fonction de l'état du corps et du temps, et  $Q_0$  étant une constante.

Différentions l'équation (13) par rapport à  $t$ , nous trouverons l'équation

$$(14) \quad \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left( \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

qui n'établit qu'une seule relation entre les paramètres et le temps. Nous établirons les autres relations nécessaires comme celles qui sont les plus probables, ce qui constitue le but principal de nos recherches.

Remarquons que toute l'étendue du temps, depuis  $t=t_0$  jusqu'à  $t=t_1 > t_0$ , est remplie d'états correspondants du corps, et que l'ensemble de ces états constitue ce que nous appellerons „un être“. A chaque état correspond la probabilité  $\varphi$ , par conséquent la probabilité d'un être (désignons cette probabilité par  $P$ ) sera le produit de toutes les probabilités  $\varphi$ , prises dans le même ordre, d'après lequel les états qui leur correspondent se succèdent dans l'être. Nous basant sur la formule (11) nous aurons donc :

$$P = \varphi_0 \frac{t_1 - t_0}{e} \frac{1}{dt} \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - s \right\} \quad (15)$$

Or l'être le plus probable répond évidemment à la condition  $P = \text{maximum}$ , qui amène à son tour la condition suivante :

$$G = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - s \right\} = \text{maximum}. \quad (16)$$

Nous appelons le principe par lequel nous avons obtenu la condition (16) „principe de l'être le plus probable“; ce principe permet de résoudre plusieurs problèmes du même genre que celui que nous traitons.

§. 5. L'intégrale  $G$  se prête à une transformation facile. Posons à cet effet

$$k = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)}.$$

En effectuant l'intégration par parties, nous trouvons d'abord :

$$k = \int_{t_0}^{t_1} t \int_{t_0}^t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - \int_{t_0}^{t_1} t dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)},$$

et ensuite :

$$k = \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)}.$$

On voit ainsi que la condition (16) peut être exprimée de la manière suivante :

$$G = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ (t_1 - t) \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - s \right\} = \text{maximum} \quad (17)$$

ce qui est plus simple que la formule (16).

§. 6. Prenons la variation de l'intégrale  $G$ , (17), par rapport aux paramètres  $x_i$ ; nous trouvons d'abord :

$$(18) \quad \delta G = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ (t_1 - t) \sum_i \frac{d\delta x_i}{dt} \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} + \right. \\ \left. + (t_1 - t) \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} \delta u_i^{(\varepsilon)} - \delta s \right\}.$$

D'autre part, en intégrant par parties, nous aurons :

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)} \frac{d\delta x_i}{dt} dt = \left|_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)} \delta x_i \right. \\ \left. - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)}}{dt} \delta x_i \cdot dt \right.$$

L'état initial du corps étant donné, les variations  $\delta x_i$ , s'annulent au moment  $t=t_0$ , par conséquent

$$\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)} \frac{d\delta x_i}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)}}{dt} \delta x_i \cdot dt,$$

d'où il vient que la variation  $\delta G$ , (18), peut s'exprimer ainsi :

$$(19) \quad \delta G = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ (t_1 - t) \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_{\varepsilon} \delta u_i^{(\varepsilon)} - \right. \\ \left. - \sum_i \sum_{\varepsilon} \frac{d(t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)}}{dt} \delta x_i - \delta s \right\};$$

dans cette expression

$$\delta u_i^{(\varepsilon)} = \sum_j \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \delta x_j,$$

$$\frac{d(t_1 - t) u_i^{(\varepsilon)}}{dt} = -u_i^{(\varepsilon)} + (t_1 - t) \sum_j \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt},$$

$$\delta s = \sum_i \frac{\partial s}{\partial x_i} dx_i,$$

$$(j = 1, 2, \dots, m) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Tenant compte de tout ceci et considérant l'identité

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \frac{dx_i}{dt} \delta x_j = \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} \frac{dx_j}{dt} \delta x_i,$$

la variation  $\delta G$ , (19), s'exprimera de la manière suivante :

$$\delta G = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \left\{ (t_1 - t) \sum_j \frac{dx_j}{dt} \sum_{\varepsilon} \left( \frac{\partial u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) + \right. \quad (20)$$

$$\left. + \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial s}{\partial x_i} \right\} \delta x_i.$$

L'intégrale  $G$ , (17), passant par un maximum relatif à la condition (14), nous devons prendre cette condition en considération.

§. 7. Soit  $\psi$  une fonction du temps, indéterminée pour le moment. Multiplions l'équation (14) par  $\psi dt$ , et prenons l'intégrale entre les limites  $t=t_0$  et  $t=t_1$ ; nous aurons

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \psi dt \left\{ \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left( \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} = 0. \quad (21)$$

En suivant du reste les indications du §. 6, nous trouvons sans difficulté

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \left\{ \psi \sum_j \frac{dx_j}{dt} \sum_{\varepsilon} \left( \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) - \right. \quad (22)$$

$$\left. - \frac{d\psi}{dt} \left( \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) \right\} \delta x_i + \psi_1 \sum_i \left( \sum_{\varepsilon} T_1^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_i} \right) \delta x_{i1},$$

ou le dernier terme se rapporte au moment  $t = t_1$ .

En vertu de l'équation (21), la variation  $\delta H$  est nulle, indépendamment de la nature de la fonction  $\psi$ . Donc au lieu de la variation  $\delta G$ , (20), il est permis de considérer la variation  $\delta G + \delta H$ ; alors, dans l'équation

$$\delta G + \delta H = 0,$$

les variations  $\delta x_i$  seront arbitraires, au dépens de l'indétermination de la fonction  $\psi$ .

Nous obtenons ainsi les équations suivantes :

$$\sum_j \frac{dx_j}{dt} \sum_{\varepsilon} \left\{ \psi \left( \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) + (t_1 - t) \left( \frac{\partial u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (23)$$

$$+ \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{d\psi}{dt} \left( \sum_{\varepsilon} T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial s}{\partial x_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

ainsi que

$$(24) \quad \psi_1 = 0.$$

Les équations (23), avec la condition (14), sont en nombre suffisant pour déterminer tous les paramètres  $x_i$  et l'inconnue  $\psi$ , en fonction de  $t$ ; et pour déterminer les constantes d'intégration qui sont en nombre  $m+1$  nous avons les valeurs initiales des paramètres et la condition (24).

§. 8. Substituons, dans les équations (23),  $t = t_1$ ; ayant égard à la condition (24), nous trouverons

$$(25) \quad \sum_{\varepsilon} \left( 1 - \frac{d\psi_1}{dt_1} T_1^{(\varepsilon)} \right) u_i^{(\varepsilon)} + \frac{d\psi_1}{dt_1} \frac{\partial Q_1}{\partial x_i} - \frac{\partial s_1}{\partial x_i} = 0,$$

$$(i=1, 2, \dots, m)$$

$T_1^{(\varepsilon)}$ ,  $d\psi_1/dt_1$ ,  $u_i^{(\varepsilon)}$ ,  $\partial Q_1/\partial x_i$ , et  $\partial s_1/\partial x_i$ , étant les valeurs correspondantes de  $T^{(\varepsilon)}$ ,  $d\psi/dt$ ,  $u_i^{(\varepsilon)}$ ,  $\partial Q/\partial x_i$  et  $\partial s/\partial x_i$  au moment  $t=t_1$ .

Mais en posant, dans les équations (23),  $dx_i/dt=0$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ), nous obtenons des équations de la même forme que (25). De là nous concluons qu'au moment  $t=t_1$  l'équilibre est établi, c'est-à-dire qu'à ce moment la transformation du corps est achevée.

Ainsi la durée de la transformation tout entière du corps est égale à  $t_1 - t_0$ ; et de la manière dont la constante  $t_1$  entre dans les équations (23), on voit bien que cette durée ne peut en général être infiniment grande.

Comme

$$dQ = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial Q}{\partial t} dt,$$

et au moment  $t=t_1$  on a évidemment  $dQ_1=0$  et  $dx_i=0$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ), on doit y avoir aussi  $\partial Q_1/\partial t_1 = 0$ . C'est la condition qui sert à déterminer la valeur de la constante  $t_1$ .

§. 9. En multipliant respectivement les équations (23) par

$$dx_i = \frac{dx_i}{dt} dt,$$

et en les ajoutant, il vient

$$dt \sum_i \sum_j \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \sum_\epsilon \left\{ \psi \left( \frac{\partial T^{(\epsilon)}}{\partial x_i} u_j^{(\epsilon)} - \frac{\partial T^{(\epsilon)}}{\partial x_j} u_i^{(\epsilon)} \right) + \right. \\ \left. + (t_1 - t) \left( \frac{\partial u_j^{(\epsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{(\epsilon)}}{\partial x_j} \right) \right\} + dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_\epsilon u_i^{(\epsilon)} - \\ - dt \frac{d\psi}{dt} \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left( \sum_\epsilon T^{(\epsilon)} u_i^{(\epsilon)} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) - ds = 0.$$

Ayant égard à l'identité évidente

$$\sum_i \sum_j \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

ainsi qu'à la relation (14), l'équation précédente prend la forme

$$dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_\epsilon u_i^{(\epsilon)} - \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial Q}{\partial t} dt - ds = 0. \tag{26}$$

En l'intégrant par rapport à  $t$ , depuis  $t = t_0$  jusqu'à  $t = t_1$ , il vient

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \frac{dx_i}{dt} \sum_\epsilon u_i^{(\epsilon)} = s - r, \tag{27}$$

où

$$-r = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial Q}{\partial t} dt \leq 0, \tag{28}$$

ce qui est évident par l'inégalité (12).

Il ne faut pas oublier, ce qui résulte du reste de la nature des choses, que tous les éléments de l'intégrale  $-r$ , (28), sont négatifs; cette intégrale diminue donc avec l'écoulement du temps et au moment  $t = t_1$  elle atteint son minimum.

Constatons enfin une différence essentielle qui a lieu entre  $s$  et  $-r$  et qui consiste en ce que  $s$  est une fonction de l'état du corps, tandis que  $-r$  ne l'est point. Cette différence et d'autres encore, que nous allons reconnaître par la suite, nous décident à appeler  $s$  „entropie“,  $-r$  „anentropie“.

Mettons maintenant l'équation (26) sous la forme

$$\sum_i dx_i \sum_\epsilon u_i^{(\epsilon)} = ds - dr, \tag{29}$$

où

$$(30) \quad dr = -\frac{d\psi}{dt} \frac{\partial Q}{\partial t} dt \geq 0,$$

et exprimons l'énergie  $dQ$  par

$$(31) \quad dQ = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial Q}{\partial t} dt.$$

En vertu de la formule (29), la transformation  $\sum_i dx_i \sum_{\xi} u_i^{(\xi)}$ ,

est décomposée en  $ds$  et en  $-dr$ , et en vertu de la formule (31), l'énergie  $dQ$  est décomposée d'une manière analogue. Par conséquent,

$$T = \frac{1}{ds} \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_i \quad \text{et} \quad 1 \left/ \frac{d\psi}{dt} \right. = -\frac{1}{dr} \frac{\partial Q}{\partial t} dt$$

doivent être positifs, et l'on a

$$(32) \quad dQ = T ds - dr \left/ \frac{d\psi}{dt} \right.$$

où

$$T > 0, \quad \frac{d\psi}{dt} > 0.$$

Ainsi les coefficients  $T$  et  $1 \left/ \frac{d\psi}{dt} \right.$  étant positifs et ayant en outre les dimensions des coefficients  $T^{(2)}$ , on peut leur attribuer une signification analogue à celle de  $T^{(2)}$ , et par conséquent appeler:  $T$  „température entropique“,  $1 \left/ \frac{d\psi}{dt} \right.$  „température anentropique“.

Passons maintenant aux cas particuliers.

§. 10. Considérons, en premier lieu, un corps dit „isolé“, dans lequel  $dQ = 0$ , et par conséquent, (13):

$$(33) \quad Q = Q_0.$$

Dans ce cas, au lieu de l'identité  $\delta G + \delta H = 0$ , on aura

$$\delta G + \delta H - \int_{t_0}^{t_1} \lambda \delta Q dt = 0$$

$\lambda$  étant une nouvelle inconnue, et



$$\delta Q = \sum_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \delta x_i.$$

De là il vient

$$\sum_j \frac{dx_j}{dt} \sum_{\varepsilon} \left\{ \psi \left( \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial T^{(\varepsilon)} u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) + (t_1 - t) \left( \frac{\partial u_j^{(\varepsilon)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{(\varepsilon)}}{\partial x_j} \right) \right\} + \sum_{\varepsilon} \left( 1 - \frac{d\psi}{dt} T^{(\varepsilon)} \right) u_i^{(\varepsilon)} + \left( \frac{d\psi}{dt} - \lambda \right) \frac{\partial Q}{\partial x_i} - \frac{\partial s}{\partial x_i} = 0 \quad (34)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ )

et aussi

$$\psi_1 = 0. \quad (35)$$

$Q_0$  étant une constante arbitraire, nous pouvons la choisir de manière, qu'on ait  $\lambda_i = d\psi_1 / dt_1$  au moment  $t = t_1$ . Alors les équations de l'équilibre prendront la forme suivante:

$$\sum_{(\varepsilon)} \left( 1 - \frac{d\psi_1}{dt_1} T_i^{(\varepsilon)} \right) u_{i\varepsilon}^{(\varepsilon)} - \frac{\partial s_1}{\partial x_{i1}} = 0. \quad (36)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ ).

En partant des équations (34), et en suivant les indications du §. 9, il est facile de trouver, vu la condition  $dQ = 0$ ,

$$dQ = T ds - dr / \left( \frac{d\psi}{dt} - \lambda \right) = 0$$

où

$$T > 0, \quad \frac{d\psi}{dt} - \lambda > 0,$$

$1 / \left( \frac{d\psi}{dt} - \lambda \right)$  étant, dans ce cas, la température anentropique.

De là il vient que l'entropie augmente. En augmentant, elle atteint enfin, au moment  $t = t_1$ , son maximum  $s_1$  et, vu les équations (36), on a alors simultanément

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_{i1}} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad T_i^{(\varepsilon)} = 1 / \frac{d\psi_1}{dt_1}, \quad (\varepsilon=1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

En résumant donc les résultats ainsi obtenus, l'on voit que la transformation du corps isolé obéit aux lois suivantes:

1) l'entropie augmente, l'anentropie diminue, mais l'une et l'autre tendent vers des valeurs finies;

2) la température anentropique va en augmentant à l'infini; et

3) les températures  $T^{(\varepsilon)}$  tendent à s'égaliser et finissent par parvenir à une valeur commune qui en même temps est celle de la température entropique.

§. 11. Considérons, en second lieu, le cas dans lequel on a

$$(38) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0,$$

ce qui, vu que les  $x_i$  dépendent de  $t$ , ne signifie pas que la variable  $t$  n'entre point explicitement dans la fonction  $Q$ .

En vertu des équations (30) et (32) nous aurons alors

$$(39) \quad dQ = T ds,$$

et par suite les équations (14) et (29) se réduiront aux suivantes:

$$(40) \quad \sum_i \frac{dx_i}{dt} \left( T \frac{\partial s}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$(41) \quad \sum_{\varepsilon} u_i^{(\varepsilon)} = \frac{\partial s}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Par ces relations les équations (23) se transformeront ainsi:

$$(42) \quad \psi \sum_j \frac{dx_j}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) - \frac{d\psi}{dt} \left( T \frac{\partial s}{\partial x_i} - \frac{\partial Q}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

et l'on a aussi

$$(43) \quad \psi_i = 0.$$

Les équations (42) multipliées par  $dx_i$  et ajoutées donnent identiquement  $0 = 0$ . Par conséquent, pour déterminer les  $m+1$  inconnues  $x_i$  et  $\psi$ , on a autant d'équations (38), (40) et (42).

Les équations (42) ne dépendant point de la constante  $t_1$ , et l'équation  $\partial Q_1 / \partial t_1 = 0$ , vu la condition (38), ayant lieu pour toute valeur  $t_1$ , cette valeur est indéterminée, et même nous pourrions supposer  $t_1 = \infty$ .

Il est évident que dans le cas considéré le corps se transforme perpétuellement, tandis que dans le cas général il ne se transforme que temporellement.

Mais il faut remarquer ici une autre différence importante entre le cas actuel et le cas général, savoir que les équations (42) sont réversibles (on peut y mettre  $-dt$  au lieu de  $dt$  sans changer les équations), tandis que les équations (23) ne le sont pas. De là il résulte la notion de „réversibilité“ de la transformation et celle de son „irréversibilité“. Ainsi la transformation du corps dans le cas actuel est réversible, et dans le cas général elle est irréversible.

Pour imaginer le cas le plus compliqué de la transformation d'un corps remarquons que la continuité des fonctions  $\sum u_i^{(\varepsilon)}$  par rapport aux paramètres  $x_i$  ne nécessite nullement comme conséquence que les fonctions  $\sum (\partial u_j^{(\varepsilon)} / \partial x_i - \partial u_i^{(\varepsilon)} / \partial x_j)$  soient aussi continues. On peut donc supposer que dans le cas général l'équilibre ne s'établit pas au moment  $t = t_1$ , mais que les fonctions  $\sum (\partial u_j^{(\varepsilon)} / \partial x_i - \partial u_i^{(\varepsilon)} / \partial x_j)$  s'annulent subitement à ce moment. Les équations (23) se transforment alors en équations (42) et la transformation du corps se prolonge depuis  $t = t_1$  en devenant réversible.

Il y a donc cette différence dans la transformation du corps avant le moment  $t_1$  et après, que depuis  $t = t_0$  jusqu'à  $t = t_1$ , la transformation est irréversible, tandis que du moment  $t = t_1$  elle est réversible.

Ainsi le moment  $t = t_1$  est celui qui termine la transformation irréversible, et l'on voit que la transformation irréversible tend à devenir réversible et le devient en effet dans un délai fini.

§. 12. Il nous reste encore à expliquer le rôle que joue la probabilité  $\varphi$  dans notre problème.

Dans ce but substituons (27) dans la formule (11); on aura

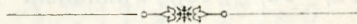
$$\varphi = \varphi_0 e^{-r}. \quad (44)$$

Comme l'on sait,  $\varphi$  est au fond la probabilité de l'intelligibilité de l'état du corps pendant qu'il se transforme. Cette probabilité décroît avec l'écoulement du temps, mais elle atteint son minimum  $\varphi_1 = e^{-r}$  précisément au moment  $t = t_1$ ,

quand la transformation irréversible se change en réversible. Depuis ce moment  $\varphi$  conserve sa valeur  $\varphi_1$  jusqu'à l'infini.

Or si  $\varphi$  décroissait sans cesse, il arriverait un moment où l'état du corps deviendrait inintelligible. Mais cela est impossible, car la probabilité  $\varphi$  atteint son minimum  $\varphi_1$  ce qui favorise l'intelligibilité de l'état du corps.

Ainsi donc tout phénomène irréversible finit en général par se changer en réversible à un moment déterminé, sous la condition de devenir inintelligible.



Nakładem Akademii Umiejętności

pod redakcją Sekretarza generalnego Stanisława Smolki.

Kraków, 1893. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządkiem A. M. Kosterkiewicza.

14 grudnia 1893.

# PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE

1873—1892

Librairie de la Société anonyme polonaise  
(Spółka wydawnicza polska)  
à Cracovie.

## Philologie. — Sciences morales et politiques.

»Pamiętnik Wydz. filolog. i hist. filozof.« (*Classe de philologie, Classe d'histoire et de philosophie. Mémoires*), in 4-to, vol. II—VIII (38 planches, vol. I épuisé). — 30 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. filolog.« (*Classe de philologie. Séances et travaux*), in 8-vo, volumes II—XVII (5 planches, vol. I épuisé). — 43 fl. 50 kr.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Wydz. hist. filozof.« (*Classe d'histoire et de philosophie. Séances et travaux*), in 8-vo, vol. III—XIII, XV—XXIX (60 pl.) — 65 fl.

»Sprawozdania komisji do badania historii sztuki w Polsce.« (*Comptes rendus de la Commission de l'histoire de l'art en Pologne*), in 4-to, 4 volumes (81 planches, 115 gravures dans le texte). — 20 fl.

»Sprawozdania komisji językowej.« (*Comptes rendus de la Commission de linguistique*), in 8-vo, 4 volumes. — 10'50 fl.

»Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce.« (*Documents pour servir à l'histoire de la littérature en Pologne*), in 8-vo, 7 vol. — 20 fl. 50 kr.

Corpus antiquissimorum poetarum Poloniae latinorum usque ad Joannem Cochanovium, in 8-vo, 2 volumes.

Vol. II, Pauli Crosnensis atque Joannis Visliciensis carmina, ed. B. Kruczkiewicz. 2 fl. — Vol. III, Andreae Cricii carmina ed. C. Morawski. 3 fl.

»Biblioteka pisarzy polskich.« (*Bibliothèque des auteurs polonais du XVI siècle*), in 8-vo, 24 livr. — 14 fl.

Monumenta mediæ aevi historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 16 volumes. — 62 fl.

Vol. I, VIII, Cod. dipl. eccl. cathedr. Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. II, XII Cod. epistol. saec. XV ed. A. Sokółowski et J. Szujski; A. Lewicki 11 fl. — Vol. III, IX, X, Cod. dipl. Minoris Poloniae, ed. Piekosiński. 15 fl. — Vol. IV, Libri antiquissimi civitatis Cracov. ed. Piekosiński et Szujski. 5 fl. — Vol. V, VII, Cod. diplom. civitatis Cracov. ed. Piekosiński. 10 fl. — Vol. VI, Cod. diplom. Vitoldi ed. Prochaska. 10 fl. Vol. XI, Index actorum saec. XV ad res publ. Poloniae spect. ed. Lewicki. — 5 fl.

Scriptores rerum Polonicarum, in 8-vo, 9 (I—IV, VI—VIII, X, XI.) volumes. — 27 fl.

Vol. I, Diaria Comitiorum Poloniae 1548, 1553, 1570. ed. Szujski. 3 fl. — Vol. II, Chronicorum Bernardi Vapovii pars posterior ed. Szujski. 3 fl. — Vol. III, Stephani Medeksa commentarii 1654—1668 ed. Seredyński. 3 fl. — Vol. VII, X, XIV Annales Domus professae S. J. Cracoviensis ed. Chotkowski. 7 fl. — Vol. XI, Diaria Comitiorum R. Polon. 1587 ed. A. Sokółowski. 2 fl.

Collectanea ex archivo Collegii historici, in 8-vo, 6 vol.—18 fl.

Acta historica res gestas Poloniae illustrantia, in 8-vo imp., 12 volumes. — 78 fl.

Vol. I, Andr. Zbrzydowski, episcopi Vladisl. et Cracov. epistolae ed. Wistocki 1546—1553. 5 fl. — Vol. II, (pars 1. et 2.) Acta Joannis Sobieski 1629—1674, ed. Kluczycki. 10 fl. — Vol. III, V, VII, Acta Regis Joannis III (ex archivo Ministerii rerum exterarum Galliae) 1674—1683 ed. Waliszewski. 15 fl. — Vol. IV, IX, Crad. Stanislaw Hosii epistolae 1525—1558 ed. Zakrzewski et Hipler. 15 fl. — Vol. VI, Acta Regis Joannis III ad res expeditionis Viennensis a. 1683 illustrandas ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. VIII (pars 1. et 2.), XII (pars 1 et 2), Leges, privilegia et statuta civitatis Cracoviensis 1507—1795 ed. Piekosiński. 20 fl. — Vol. X, Lauda conventuum particularium terrae Dobrniensis ed. Kluczycki. 5 fl. — Vol. XI, Acta Stephani Regis 1576—1586 ed. Polkowski. 3 fl.

Monumenta Poloniae historica, in 8-vo imp., vol. III—VI. — 51 fl.  
Acta rectoralia almae universitatis Studii Cracoviensis inde ab anno  
MCCCCLXIX, editionem curavit Dr. W. Wisłocki. Tomi I. fasciculus I. 1893  
in 8-vo. — 1 fl. 50 kr.

»Starodawne prawa polskiego pomniki.« (*Anciens monuments du droit  
polonais*) in 4-to, vol. II—X. — 36 fl.

Vol. II, Libri iudic. terrae Cracov. saec. XV, ed. Helcel. 6 fl. — Vol. III,  
Correctura statutorum et consuetudinum regni Poloniae a. 1532, ed. Bobrzyński. 3 fl. —  
Vol. IV, Statuta synodalia saec. XIV et XV, ed. Heyzmann. 3 fl. — Vol. V, Monu-  
menta literar. rerum publicarum saec. XV, ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VI, Decreta  
in iudiciis regalibus a. 1507—1531 ed. Bobrzyński. 3 fl. — Vol. VII, Acta expedition.  
bellic. ed. Bobrzyński, Inscriptiones clendiales ed. Ulanowski. 6 fl. — Vol. VIII, An-  
tiquissimi libri iudiciales terrae Cracov. 1374—1400 ed. Ulanowski. 8 fl. — Vol. IX,  
Acta iudicii feodalis superioris in castro Golez 1405—1546. Acta iudicii criminalis Mu-  
szynensis 1647—1765. 3 fl. — Vol. X, p. 1. Libri formularum saec. XV ed. Ula-  
nowski. 1 fl.

Volumina Legum. T. IX. 8-vo, 1889. — 4 fl.

### Sciences mathématiques et naturelles.

»Pamiętnik.« (*Mémoires*), in 4-to, 16 volumes (II—XVII, 151 planches,  
vol. I épuisé). — 80 fl.

»Rozprawy i sprawozdania z posiedzezi.« (*Séances et travaux*), in 8-vo,  
25 volumes (172 planches). — 89 fl. 50 kr.

»Sprawozdania komisji fizyograficznej.« (*Comptes rendus de la Commis-  
sion de physiographie*), in 8-vo, 23 volumes (III, IV—XXVII, 46 planches, vol.  
I, II, IV, V épuisés). — 98 fl.

»Atlas geologiczny Galicji.« (*Atlas géologique de la Galicie*), in fol.,  
3 livraisons (1, 2, et 4.), (15 planches) (à suivre). — 12 fl.

»Zbiór wiadomości do antropologii krajowej.« (*Comptes rendus de la Com-  
mission d'anthropologie*), in 8-vo, 16 vol. II—XVI (96 pl., vol. I épuisé). —  
53 fl. 50 kr.

Kowalczyk J., »O sposobach wyznaczania biegu ciał niebieskich.«  
(*Methodes pour déterminer le cours des corps célestes*), in 8-vo, 1889. — 5 fl.

Mars A., »Przekrój zamrożonego ciała osoby zmarłej podczas porodu skutkiem  
pęknięcia macicy.« (*Coupe du cadavre gelé d'une personne morte pendant l'accou-  
chement par suite de la rupture de la matrice*), 4 planches in folio avec texte,  
1890. — 6 fl.

Kotula B., »Rozmieszczenie roślin naczyniowych w Tatrach.«  
(*Distributio plantarum vasculosarum in montibus Tatricis*), 8-vo, 1891. — 5 fl.

Morawski C., »Andrzej Patrycy Nidecki, jego życie i dzieła.« (*André Patri-  
cius Nidecki, humaniste polonais sa vie et ses oeuvres*), 8-vo, 1892. — 3 fl.

Fin-  
8el L., »Bibliografia historii polskiej.« (*Bibliographie de l'histoire de Pologne*),  
/vo, 1891. — 6 fl.

Matlakowski V., »Budownictwo ludowe na Podhalu.«  
(*Construction des maisons rurales dans la contrée de Podhale*), 23 planches in  
cz-to, texte explicatif in 8-vo imp. 1892. 7 fl. 50 kr.

Teichmann L., »Naf-  
foynia limfatyczne w słoniowacinie.« (*Elephantiasis arabum*), 5 planches in  
nlio avec texte. 1892. — 3 fl.

Hryniewicz J., »Zarys leczenia ludowego  
ca Rusi południowej.« (*La médecine populaire dans la Ruthénie méridionale*),  
in 8-vo 1893. 3 fl.

»Rocznik Akademii.« (*Annuaire de l'Académie*), in 16-o, 1874—1892  
18 vol. (1873 épuisé) — 10 fl. 80 kr.

»Pamiętnik 15-letniej działalności Akademii.« (*Mémoire sur les travaux  
de l'Académie 1873—1888*), 8-vo, 1889. — 2 fl.

