Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Par

W. Wilkosz (Cracovie).

Nous allons démontrer dans le présent travail quelques théorèmes de caractère intégral concernant l'existence de l'intégrale première de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ ainsi que celle de l'intégrale fondamentale de l'équation aux dérivées partielles associée à la précédente: $\frac{\partial z}{\partial x} + f\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. En même temps la question de l'existence du facteur intégrant de l'équation:

$$f(xy)\,dx - dy = 0$$

se trouve immédiatement résolue.

Les équations ci-dessus sont considérées dans un ensemble ouvert et borné, d'ailleurs quelconque, qui n'est pas supposé simplement connexe ni même connexe, ce qui constitue la différence essentielle entre les résultats importants de M. Kamke, faisant l'objet de son memoire inséré dans les Mathem. Annalen [1]) et les nôtres. Nous allons garder dans l'énoncé des théorèmes la plus grande analogie possible avec les résultats de M. Kamke, la méthode de notre travail étant cependant entièrement différente.

§ 1.

Voici le premier théorème, que nous nous proposons de démontrer.

---

[1]) Kamke, Zur Theorie der Differentialgleichungen. Mathem. Annalen Bd. 99, p. 602.

Théorème I. Supposons que ω et Ω soient deux ensembles ouverts plans et bornés et que tout point d'accumulation de l'ensemble ω appartienne à Ω.

Supposons encore les fonctions $f(xy)$ et $f'_y(xy)$ continues dans l'ensemble Ω.

Nous affirmons dans ce cas, qu'il existe une fonction $\psi(xy)$ jouissant des propriétés suivantes:

a) Elle est définie dans l'ensemble ω.

b) Elle est constante le long de toute intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = f(xy). \tag{1}$$

c) Elle possède dans ω des dérivées partielles du premier ordre continues et satisfaisant dans cet ensemble aux relations suivantes:

$$\psi'_y(xy) > 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + f(xy)\frac{\partial \psi}{dy} = 0. \tag{3}$$

d) L'ensemble T des valeurs de la fonction $\psi(xy)$ constitue un ensemble ouvert; il est même un intervalle (ouvert) lorsque nous supposons l'ensemble ω connexe.

e) Pour un t fixe, appartenant à l'ensemble T, l'équation:

$$\psi(xy) = t \tag{4}$$

représente une famille au plus dénombrable d'intégrales de l'équation (1), dont chacune est définie dans un intervalle ouvert. Les intégrales de la famille sont juxtaposées, c'est-à-dire les intervalles correspondants sont disjoints.

f) Lorsque t prend successivement toutes les valeurs de l'ensemble T, l'équation (4) fournit toutes les intégrales de l'équation (1), situées dans l'ensemble ω.

Voici l'idée directrice de la démonstration:

Nous enfermons d'abord l'ensemble ω dans une bande limitée par deux droites parallèles à l'axe des y.

Nous remplaçons ensuite le deuxième membre de l'équation (1) par une fonction $F(xy)$, définie dans cette bande et coïncidant dans l'ensemble ω avec la fonction $f(xy)$. Or la construction d'une fonction $F(xy)$ possédant dans la bande des propriétés analogues à celles de la fonction $f(xy)$ dans Ω donne lieu à quelques difficultés. Nous la construirons dans le § 3 de façon, qu'elle remplisse dans la bande les conditions, dans lesquelles s'applique la théorie des équations différentielles généralisées de M. Carathéodory [1].

§ 2.

Quelques considérations auxiliaires nous seront indispensables dans la suite.

Soient $l, m, L, M, \lambda, \mu,$ six nombres quelconques ($l < m$).

Il existe un polynome unique du troisième degré

$$P(x;\ l, m, L, M, \lambda, \mu) \tag{5}$$

qui prend aux points $l, m,$ respectivement les valeurs $L, M,$ et dont la dérivée (par rapport a x) y prends les valeurs λ et μ.

Voici ce polynome ainsi que sa dérivée:

$$P = L + \lambda(x - l) + (m - l)\left[\alpha\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^2 + \beta\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^3\right]$$

$$P' = \lambda + 2\alpha\frac{x - l}{m - l} + 3\beta\left(\frac{x - l}{m - l}\right)^2$$

avec $\quad \alpha = 3\dfrac{M - L}{m - l} - 2\lambda - \mu, \quad \beta = \mu + \lambda - 2\dfrac{M - L}{m - l}.$

On vérifie facilement l'inégalité:

$$|P'| \leqslant 8|\lambda| + 5|\mu| + 12\left|\frac{M - L}{m - l}\right|$$

lorsque $l \leqslant x \leqslant m$.

Par conséquent lorsque

$$|P'(l)| \leqslant N, \qquad |P'(m)| \leqslant N$$

$$\left|\frac{P(m) - P(l)}{m - l}\right| \leqslant N, \qquad l \leqslant x \leqslant m$$

on aura

$$|P'(x)| \leqslant 25\,N.$$

Observons encore que l'expression (5) est une fonction continue du point $(x, l, m, L, M, \lambda, \mu)$ lorsqu'on se borne au cas $l \neq m$.

---

[1]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (cité dans la suite V. R. F.) 1-e édition 1918 ou 2-e 1927, p. 665 ss.

§ 3.

Lemme. Nous affirmons que dans l'hypothèse du théorème I il existe deux nombres a et b $(-\infty < a < b < +\infty)$ et une fonction $F(xy)$ jouissant des propriétés suivantes:

I. L'ensemble ω est contenu dans la bande:

$$a < x < b, \quad y \text{ arbitraire}, \quad (\text{bande } B)$$

II. $F(xy) = f(xy)$ dans ω.

III. La dérivée $F'_y(xy)$ existe en tout point de la bande B.

IV. Pour un x constant $(a < x < b)$ les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont continues par rapport à y dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

V. Les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont bornées dans la bande B c.-à-d. on a

$$|F(xy)| \leqslant N \quad |F_y(xy)| \leqslant N$$

N étant une constante finie.

Pour un y fixe $(-\infty < y < +\infty)$ les fonctions F et F'_y sont mesurables par rapport à x dans l'intervalle (a, b) et admettent dans (ab) une majorante sommable (notamment la constante N).

VI. La fonction F satisfait dans B à la condition de L i p s c h i t z avec la constante que nous pouvons supposer être égale à N.

Démonstration. Ajoutons à l'ensemble ω tous ses points d'accumulation. Nous obtenons ainsi un ensemble borné et fermé $\overline{\omega}$, contenu dans l'ensemble ouvert Ω. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que les carrés [1]) empiétant sur $\overline{\omega}$, ayant leurs cotés parallèles aux axes et ne surpassant pas en longueurs le nombre δ, sont entièrement englobés par l'ensemble Ω. Par conséquent il existe un ensemble G, contenu dans Ω, contenant $\overline{\omega}$ et composé d'un nombre fini de carrés de tel genre. Faisons le choix de la bande B de telle façon, qu'elle contienne l'ensemble G. Celui-ci étant contenu aussi dans une bande:

$$x \text{ arbitraire}, \quad c < y < d,$$

désignons par H l'ensemble des points (xy) tels que:

$$a < x < b, \quad y \leqslant c - 1$$

où

$$a < x < b, \quad y \geqslant d + 1$$

[1]) Nous entendons toujours par carré son intérieur avec sa frontière.

et posons:

$$F(xy) = 0 \qquad \text{dans } H$$
$$F(xy) = f(xy) \ \text{dans } G.$$

La condition II du notre lemme se trouve ainsi satisfaite.

Les fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ sont évidemment continues et bornées dans l'ensemble $G+H$.

Nous affirmons que $F(xy)$ satisfait aussi à la condition de Lipschitz c.-à-d.

$$|F(xy_2) - F(xy_1)| \leqslant N |y_2 - y_1|$$

avec un nombre N fini lorsque (xy_1) et (xy_2) appartiennent à l'ensemble $G+H$. Pour la démonstration supposons le contraire. On pourrait dans ce cas construire deux suites:

$$(x_1 y_1)\ (x_2 y_2) \ldots$$
$$(x_1 z_1)\ (x_2 z_2) \ldots$$

telles que

$$\lim x_n = x_0, \qquad \lim y_n = \lim z_n = y_0$$
$$\lim \left| \frac{f(x_n z_n) - f(x_n y_n)}{z_n - y_n} \right| = +\infty.$$

Le point $(x_0 y_0)$ serait évidemment situé dans l'ensemble fermé G, donc il serait un point intérieur de l'ensemble Ω.

Pour les indices n assez grands le segment joignant le point $(x_n y_n)$ avec $(x_n z_n)$, serait entièrement contenu dans Ω et on pourrait appliquer le théorème de la moyenne. Il nous serait donc possible de poser: $\dfrac{f(x_n z_n) - f(x_n y_n)}{z_n - y_n} = f'_y(x_n \xi_n)$ ce qui nous donnerait d'autre part

$$\lim |f'_y(x_n \xi_n)| = +\infty,$$

relation incompatible avec l'existence et la continuité de la derivée $f'_y(xy)$ au point $(x_0 y_0)$.

Nous allons définir F pour les points de l'ensemble $B - G - H$. Remarquons pour ce but, que la droite: $x = x_0$ découpe sur $B - G - H$ un nombre fini d'intervalles:

$$(l_1, m_1),\ (l_2, m_2) \ldots (l_n, m_n) \qquad (x = x_0)$$

où:

$$l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \ldots < l_n < m_n.$$

Considérons un de ces intervalles: $(l, m) \quad (x = x_0)$.

Posons:

$$L = F(x_0 l), \qquad M = F(x_0 m)$$
$$\lambda = F'_y(x_0 l), \qquad \mu = F'_y(x_0 m).$$

Nous définissons $F(x_0 y)$ pour $l < y < m$ en posant:

$$F(x_0 y) = P(y; l, m, L, M, \lambda, \mu),$$

P étant l'expression considérée dans le § 2.

Il en résulte facilement (voir les considérations du § 2) que la fonction $F(xy)$, définie maintenant dans toute la bande B, y jouit des propriétés, I, II, III, IV ainsi que de la première partie de la propriété V. Il nous reste seulement à démontrer la mesurabilité des fonctions $F(xy)$ et $F'_y(xy)$ par rapport à x dans l'intervalle (ab) pour un y fixe mais d'ailleurs arbitraire.

Considérons la fonction

$$F(x, y_0).$$

Désignons par X la classe des x tels, que (xy_0) appartient à l'ensemble $G + H$. Les fonctions F et F'_y y étant continues et par consequent mesurables par rapport à x dans l'ensemble X, il nous reste à prouver leurs mesurabilité par rapport à cette variable dans l'ensemble $(ab) - X$.

Soit ξ un point de cet ensemble.

Sur la droite $x = \xi$, il existe un segment contenu dans $B - G - H$, qui renferme le point (ξ, y_0) et dont les extrémités appartiennent à $G + H$. Désignons par $l(\xi)$ et $m(\xi)$ les extremités d'un tel intervalle $\{l(\xi) < m(\xi)\}$.

Nous observons d'abord, que $l(\xi)$ et $m(\xi)$ sont sémicontinues supérieurement resp. inférieurement par rapport à x dans $(ab) - X$. Ceci résulte immédiatement du fait, que la partie commune de l'ensemble $G + H$ avec la bande

$$a + \varepsilon \leqslant x \leqslant b - \varepsilon \qquad (y \text{ arbitraire})$$

est f e r m é e pour les ε positifs et suffisamment petits.

Les fonctions $l(\xi)$ et $m(\xi)$ sont par conséquent mesurables.

D'autre part, les fonctions F et F'_y étant continues dans $G + H$ les fonctions:

$$L(\xi) = F[\xi, \; l(\xi)],$$
$$M(\xi) = F[\xi, m(\xi)],$$

$$\lambda(\xi) = F[\xi,\ l(\xi)],$$
$$\mu(\xi) = F[\xi, m(\xi)]$$

sont mesurables dans $(ab) - X$ [1]), donc enfin la fonction

$$F(\xi, y_0) = P[y_0;\ l(\xi),\quad m(\xi),\quad L(\xi),\quad M(\xi),\quad \lambda(\xi),\quad \mu(\xi)]$$

est aussi mesurable dans cet ensemble (v. la remarque finale du § 2).

La mesurabilité par rapport à x de la fonction $F(xy)$ étant ainsi établie, celle de la dérivée $F'_y(xy)$ en résulte du fait, que cette dérivée est la limite de la fonction mesurable

$$\frac{F(x, y_0 + \lambda) - F(x y_0)}{\lambda}.$$

La démonstration de notre lemme est ainsi terminée.

§ 4.

Rappelons quelques points de la théorie des équations différentielles généralisées de M. Carathéodory et en particulier les rapports de cette théorie avec la théorie classique.

α) On dit, qu'une fonction $y(x)$ représente dans l'intervalle I une intégrale de l'équation

(6) $$\frac{dy}{dx} = \lambda(xy)$$

lorsque $y(x)$ satisfait à cette équation en chaque point de l'intervalle I. On dit, qu'une fonction $y(x)$ est dans l'intervalle I intégrale de l'équation généralisée

(7) $$\frac{dy}{dx} \sim \lambda(xy)$$

lorsque

1° elle est absolument continue dans I,

2° elle remplit la relation

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(xy)$$

presque partout dans I.

---

[1]) on le voit facilement par le raisonement de V. R. F., § 576, p. 665.

β) Si l'on se borne à un ensemble ouvert dans lequel $\lambda(xy)$ est continue, les équations (6) et (7) sont équivalentes [1]).

γ) Supposons la fonction $k(x)$ sommable dans l'intervalle (ab) et envisageons l'équation linéaire

$$\frac{du}{dx} \sim k(x)u. \tag{8}$$

D'après la théorie de M. Carathéodory il passe par tout point de la bande B $\{a < x < b,\ y \text{ arbitraire}\}$ une seule intégrale de l'équation (8) et cette intégrale est définie dans l'intervalle (ab) [2]).

Or $u = 0$ étant une intégrale particulière de l'équation (8), il en résulte, que toute intégrale de (8), positive en un point de l'intervalle (ab) reste supérieure à zéro en tout point de l'intervalle considéré.

δ) Envisageons maintenant l'équation

$$\frac{dy}{dx} \sim F(xy) \tag{9}$$

dans la bande B où $F(xy)$ désigne la fonction définie dans le § 3. Choisissons un nombre fixe c de façon que l'on ait:

$$a < c < b.$$

Afin de nous rapprocher des considérations de M. Carathéodory qui vont nous servir dans la suite, rappelons que la recherche des intégrales de l'équation (9), passant par le point:

$$(c, t), \quad (t \text{ arbitraire}) \tag{10}$$

est équivalente à la recherche des solutions de l'équation intégrale

$$y = t + \int_c^x F(xy)\,dx. \tag{11}$$

ε) Nous affirmons, que:

P_1) Par tout point (10) il passe une intégrale unique

$$y(x, t)$$

de l'équation (9) et cette intégrale est définie dans l'intervalle (ab);

P_2) La fonction $y(x, t)$ est une fonction continue du point (x, t) dans toute la bande B;

---

[1]) V. R. F. la fin du § 578, p. 667.

[2]) V. R. F. Satz 2, p. 672 et Satz 4, p. 675.

P_3) La dérivée $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ existe en tout point de la bande et y remplit l'équation suivante:

$$u = 1 + \int_c^x F'_y\{x, y(x,t)\}\, u\, dx, \tag{12}$$

donc $u = y'_t(x,t)$ passe par le point (x,t) et peut être considérée comme l'intégrale de l'équation linéaire généralisée:

$$\frac{du}{dx} \sim F'_y\{x, y(x,t)\}\, u; \tag{13}$$

P_4) On a $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} > 0$ dans la bande B;

P_5) La dérivée $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ est continue par rapport à (x,t) en tout point de la bande B;

P_6) Lorsque le point (x_0, y_0) avec

$$y_0 = y(x_0\, t_0) \tag{14}$$

appartient à l'ensemble ouvert ω {§ 1 et § 3} la fonction

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

est continue par rapport à (x,t) dans le voisinage du point $(x_0\, t_0)$.

Les propriétés P_1, P_2, P_3 résultent immédiatement de la théorie de M. Carathéodory [1]) lorsqu'on tient compte des propositions IV, V, VI du lemme précédent (§ 3). Passons à la démonstration des propriétés P_4 et P_5.

Soit

$$\sigma(x,t) = F'_y[x, y(x,t)].$$

La fonction $F'_y(x,y)$ est bornée dans la bande B, elle y est continue par rapport à y pour x fixe dans (ab), et mesurable par rapport à x avec y fixe d'ailleurs arbitraire. D'autre part la fonction $y(x,t)$ est continue par rapport à (x,t) dans la bande B (P_2). Il en résulte que la fonction $\sigma(x,t)$ est bornée dans B et mesurable [2]) par rapport à x dans l'intervalle (ab).

---

[1]) En particulier: pour P_1 cf. V. R. F. Satz 2, p. 672 et Satz 4, p. 675; pour P_2 Satz 5, p. 678; pour P_3 Satz 7, p. 682 et 683 ss.

[2]) V. R. F. Satz 1, p. 665.

L'équation (13) et en même temps l'équation (12) possède en vertu de (γ) (v. plus haut) une solution unique passant par le point (c, t) et ceci quelque soit t.

D'autre part $\dfrac{\partial y(x\,t)}{\partial t}$ représente déjà une telle solution se réduisant à l'unité pour $x = c$. En vertu de, γ) on a donc $\dfrac{\partial y}{\partial t} > 0$ pour $a < x < b$ et t arbitraire.

En s'appuyant sur la propriété de la fonction $\sigma(x, t)$ démontrée tout-à-l'heure et sur l'unicité des solutions de l'équation (12) on démontre immédiatement la propriété P_5 [1]).

Il reste à prouver la propriété P_6.

Supposons, que le point (14) appartient à l'ensemble ouvert ω. En vertu de la continuité de la fonction $y(x, t)$ (v. P_2) le point

$$x, y(x, t)$$

se trouve dans ω, lorsque x et t appartiennent à un voisinage convenablement petit du point $(x_0\, t_0)$.

La fonction F étant continue dans ω et $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ satisfaisant à l'équation (13) nous obtenons (v. β) l'identité

$$\frac{\partial y(x t)}{\partial x} = F(x, y(xt)) = f(x, y(xt)) \tag{15}$$

valable dans le voisinage du point (xt).

Le second membre de cette identité étant continu, la propriété P_6 se trouve démontrée.

§ 5.

Passons enfin à la démonstration du théorème I (§ 1). Nous prouverons d'abord l'existence d'une fonction $\psi(xy)$ définie dans toute la bande B et telle que les équations

$$y = y(x, t) \tag{16}$$

et

$$t = \psi(xy) \tag{17}$$

soient équivalentes dans l'ensemble des points (x, y, t):

$$a < x < b; \quad y, t \quad \text{arbitraires.}$$

[1]) V. R. F. Satz 5, p. 678.

En effet, soit $(x_0 y_0)$ un point quelconque de la bande B; par ce point il passe une seule intégrale de l'équation (9).

Cette intégrale, définie dans l'intervalle (ab), prend pour $x = c$ une valeur déterminée, soit t_0.

On a

$$y_0 = y(x_0 t_0)$$

et cette valeur t_0 de t nous donne la solution unique en t de l'équation

$$y_0 = y(x_0 t).$$

Posons par définition

$$\psi(x_0 y_0) = t_0.$$

Il est clair, que la fonction $\psi(xy)$ ainsi définie dans la bande B, rend les équations (16) et (17) équivalentes.

Nous affirmons, que la fonction $\psi(xy)$ envisagée seulement pour les points de l'ensemble ouvert ω possède les propriétés a, b, c, d, e, f considérées dans l'énoncé du théorème I.

a) La propriété a est évidente parce que ω est contenu dans la bande B.

b) La fonction ψ est par définition constante, le long de toute intégrale de l'équation (9) et cette équation est équivalente (cf. § 4 β et § 3 II) dans ω à l'équation (1) de la page 95.

c) Soit $(x_0 y_0)$ un point de l'ensemble ouvert ω et soit $t_0 = \psi(x_0 y_0)$. On aura

$$y_0 = y(x_0 t_0).$$

Or {cf. § 4, P_4 P_5 P_6} la fonction $y(xt)$ posséde dans le voisinage de $(x_0 t_0)$ des dérivées partielles continues du premier ordre et en outre $\dfrac{\partial y}{\partial t} > 0$ au point consideré. Nous pouvons donc obtenir la fonction $\psi(xy)$ dans le voisinage du point $(x_0 y_0)$ par les procédés de la théorie classique des fonctions implicites, ce qui nous assure la continuité des dérivées partielles du premier ordre de cette fonction. Nous aurons aussi l'identité

$$y[x, \psi(x, y)] = y \tag{18}$$

valable dans le voisinage du point $(x_0 y_0)$.

En différentiant cette indentité nous obtenons:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \tag{19}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad t = \psi(xy)$$

d'où, en vertu des relations (15) et (18),

$$f(xy)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0.$$

La relation (19) nous donne (cf. § 4, P_4)

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}>0.$$

d) La propriété d résulte immédiatement de l'inégalité précédente lorsqu'on se rend compte du fait, que ω est un ensemble ouvert.

e) Pour démontrer la propriéte e, supposons que t appartient à l'ensemble T. En vertu de l'équivalence des équations (16) et (17) la courbe (4) découpe de l'ensemble ouvert ω une famille au plus dénombrable d'arcs juxtaposés, dont chacun représente une intégrale de l'équation (1) {cf. § 4 α et P_1 et § 3 II}.

f) Il reste à prouver seulement la dernière propriété.

Soit I une intégrale de l'équation (1) contenue dans ω. Soit $(x_0 y_0)$ un point de cette intégrale et désignons par y l'intégrale de l'équation (9) passant par $(x_0 y_0)$. Cette intégrale contient évidemment l'intégrale I (§ 4 β et P_1, § 3 II). Elle coupe la droite $x=c$ en (c, t_0). L'intégrale y étant identique à l'intégrale:

$$y=y(x, t_0);$$

les points de cette intégrale et à fortiori ceux de l'intégrale I satisfont donc à l'équation

$$t_0=\psi(x, y).$$

Le nombre t_0 étant un élément de l'ensemble T, la propriété f se trouve démontrée.

§ 6.

Voici deux conséquences immédiates du théorème I.

Théorème II. Dans les hypothèses du théorème I, l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}+f(xy)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

possède dans ω une intégrale fondamentale [1]) $\psi(xy)$ pour laquelle on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}>0 \quad \text{dans } \omega.$$

---

[1]) Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, p. 312 pour la définition du „Hauptintegral".

Théorème III. Dans les mêmes hypothèses l'équation

$$f(xy)\,dx - dy = 0,$$

admet dans l'ensemble ω un facteur intégrant continu et non nul dans ω.

En effet, grâce au théorème I (v. (2) et (3)) l'équation précédente étant équivalente dans ω à l'équation:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = 0,$$

la fonction

$$u(xy) = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

représente dans l'ensemble ω le facteur intégrant démandé.

En retournant à la fonction $y = y(x, t)$ considérée au § 4 ε on voit qu'elle représente ce que nous pouvons appeler l'intégrale générale à un paramètre de l'équation (1) dans l'ensemble ω, dans un sens, il est vrai, un peu généralisé. Elle fournit notamment pour un t donné non nécessairement une intégrale de l'équation (1) mais parfois une famille (au plus dénombrable) d'intégrales juxtaposées c.-à-d. appartenant à des intervalles disjoints de la variable x. D'autre part elle nous fournit toutes les intégrales de la dite équation qui passent par ω.

La deuxième partie (déjà rédigée) de la présente note contiendra des considérations relatives à l'existence de l'intégrale fondamentale dans toute l'étendue de l'ensemble Ω (v. § 1) et cela sous certaines conditions nécessairement restrictives.

J'adresse mes vifs remerciments à M. T. Ważewski auquel je dois plusieurs remarques importantes au cours du présent travail.

Cracovie, mai 1931.