

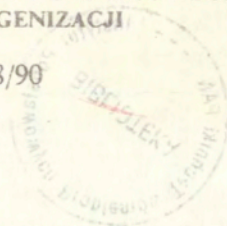
- 7.70 — zagadnienia ogólne i varia  
7.73 — ośrodki niejednorodne, kompozyty  
4.40 — zagadnienia ogólne i varia  
4.44 — tarcze, płyty, powłoki

Praca habilitacyjna

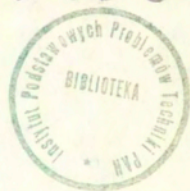
Józef Joachim Telega

METODY WARIACYJNE  
I ANALIZA WYPUKŁA  
W ZAGADNIENIACH KONTAKTOWYCH  
I HOMOGENIZACJI

38/90



P. 269a



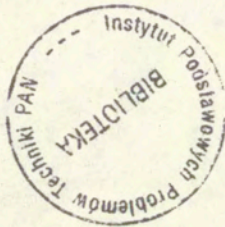
WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 sierpnia 1990 r.

P r a c a   h a b i l i t a c y j n a

recenzent - Dr Andrzej Gałka



56735



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.10,5 Ark.druk 13,1

Oddano do drukarni we wrześniu 1990 r.

Nr zamówienia 298/90

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa  
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Józef Joachim Telega  
Zakład Teorii Konstrukcji  
IPPT PAN

METODY WARIACYJNE I ANALIZA WYPUKŁA  
W ZAGADNIENIACH KONTAKTOWYCH I HOMOGENIZACJI

Streszczenie

W pracy przedstawiono oryginalne wyniki autora z zakresu zagadnień kontaktowych i homogenizacji. Zagadnienia te badano przy pomocy metod wariacyjnych w powiązaniu z metodami analizy wypukłej.

Rozpatrzone zagadnienia kontaktowe dzielą się na dwie grupy. Pierwsza z nich obejmuje zagadnienia dualności przy uwzględnieniu warunków Signoriniego z tarcie. Zbadano przypadek statyczny i kwasi-statyczny dla ośrodka liniowo sprężystego będącego w kontakcie ze sztywnym podłożem, jak i kontakt dwóch takich ciał. Przedstawiono również teorię dualności dla niejawnych nierówności wariacyjnych oraz dla układu złożonego z niejawnej nierówności wariacyjnej sprzężonej z nierównością wariacyjną. Druga grupa zagadnień dotyczy rozszerzenia twierdzeń o nośności granicznej na przypadek nieklasycznych warunków brzegowych, którymi są warunki kontaktowe. Należą do nich: warunki Signoriniego bez tarcia i z tarcie oraz warunki kontaktu z podłożem sztywno-idealnie plastycznym. Zaproponowano parę zasad ekstremalnych w przypadku kontaktu z podłożem nieliniowo lepkiem. Zaproponowana teoria nośności granicznej uwzględniająca warunki brzegowe z tarcie jest taka, że podejście kinematyczne jest zawsze sprzężone z podejściem statycznym poprzez normalne naprężenia kontaktowe.

Zakładając periodyczny rozkład szczelin i stosując metodę epi-zbieżności rozpatrzono zagadnienie homogenizacji ośrodków i płyt sprężystych przy uwzględnieniu warunków typu Signoriniego na szczelinach. Zbadano modele efektywne i własności makroskopowych potencjałów sprężystych. Oprócz homogenizacji bezpośrednio, w której punktem wyjścia jest funkcjonal całkowitej energii potencjalnej, rozpatrzono homogenizację dualną i wprowadzono dopełniający potencjał makroskopowy. Przedstawiono rezultaty dotyczące samej epi-zbieżności. Uwzględniając tarcie na mikroszczelinach w spēkany ośrodku liniowo sprężystym zbudowano modele efektywne w przypadku statycznym i kwasi-statycznym. Zarówno dla zagadnień kontaktowych jak i w przypadku homogeni-



zacji przyjęto subróżniczkowe prawo tarcia, niekoniecznie izotropowe. Ostatnia klasa zagadnień dotyczy homogenizacji płyt sprężysto-idealnie plastycznych z materiału Hencky-Nadaia-Iliuszyna. Problem ten wiąże się ściśle z nośnością graniczną płyt idealnie plastycznych. Zbudowano modele efektywne takich płyt. Jeśli część  $\Gamma_1$  brzegu płyty jest obciążona momentami zginającymi to oprócz homogenizacji w obszarze płyty należy dodatkowo rozwiązać zadanie homogenizacji na tej części brzegu.



## WPROWADZENIE

Niniejsza rozprawa stanowi część wieloletnich badań autora nad metodami wariacyjnymi w mechanice ośrodków i konstrukcji sprężystych i niesprężystych. Pojęcie "metody wariacyjne" jest obecnie bardzo szerokie, a silny impuls do ich rozwoju wniosła analiza wypukła. Rozprawa stawia sobie za cel prezentację wyników badań podstawowych, dlatego też nie będzie w niej mowy o metodach numerycznych. Warto jednakże przypomnieć znany skądinąd fakt, że metody wariacyjne stanowią podstawę dla wielu istniejących już - jak i rozwijania nowych - metod numerycznych. Z drugiej strony metody wariacyjne są niezbędne do analizy szerokiej klasy zagadnień, dotyczących problemów istnienia rozwiązań.

Rozprawa składa się z dwóch obszernych rozdziałów; w pierwszym rozpatrywane są zagadnienia kontaktowe, natomiast drugi poświęcony jest homogenizacji (uśrednianiu) ośrodków i płyt o strukturze periodycznej. Przejdźmy do omówienia treści obydwu rozdziałów.

### Rozdział I

Prezentację wyników rozpoczyna podrozdział drugi, w którym rozpatrzono warunki i prawa tarcia. Mając na uwadze analizę zagadnień kontaktowych z tarciami i homogenizację ośrodków spękanych przy uwzględnieniu tarcia na mikroszczelinach, główną uwagę poświęcono subróżniczkowym prawom tarcia. Prawa takie wymagają założenia o wypukłości warunku tarcia jedynie w przestrzeni kontaktowych naprężeń stycznych. Przyjęty opis uwzględnia anizotropowe prawa tarcia, które znajdują potwierdzenie doświadczalne, por. [59,152,173]. Warto podkreślić, że rozpatrywane prawa tarcia nie są stowarzyszone z warunkiem tarcia. Jest to fakt znany z klasycznego prawa tarcia Coulomba, które stanowi przypadek szczególny izotropowego prawa tarcia.

W podrozdziale trzecim przedstawiono wariacyjne sformułowania statycznego zagadnienia Signoriniego dla ośrodka liniowo sprężystego, przy uwzględnieniu subróżniczkowego prawa tarcia. Sformułowanie przemieszczeniowe przyjmuje postać niejawną nierówności wariacyjnej (N.N.W.), a ściśle nierówności wariacyjnej (N.W.) drugiego rodzaju. Natomiast podejście naprężeniowe prowadzi do

nierówności kwasi-wariacyjnej (N.K.W.). Otrzymanych sformułowań wariacyjnych nie można niestety przedstawić w postaci zasad ekstremalnych. Wynika to z niestowarzyszonego charakteru prawa tarcia. Mogłoby się więc wydawać, że w przypadku zagadnień kontaktowych z tarcie trudno mówić o dualności, tak bardzo użytecznej w wielu zagadnieniach mechaniki ciała stałego i konstrukcji. Capuzzo Dolcetta i Matzeu [32] zbudowali ogólną teorię dualności dla szerokiej klasy niejawnych zagadnień wariacyjnych, ale w ramach refleksywnych przestrzeni Banacha. Teorię tę będziemy nazywać teorią dualności w sensie M-CD-M. Ponieważ w pracy oryginalnej [32] pominięto wiele istotnych szczegółów, dlatego też w podrozdziale czwartym przedstawimy jasny, naszym zdaniem, wykład tej teorii rozszerzony na przypadek przestrzeni nierefleksywnych, co daje większe możliwości ewentualnych zastosowań.

Mając do dyspozycji teorię dualności w sensie M-CD-M można było w podrozdziale piątym wyprowadzić zadania dualne do zadań sformułowanych w podrozdziale trzecim. Istotnie nowe jest zadanie  $P_D^*$ , przyjmujące po rozpisaniu postać nierówności wariacyjnej (5.26) sprzężnej z N.K.W. (5.27). Układ tych dwu nierówności może stanowić podstawę do wyznaczania kontaktowych naprężeń normalnych i stycznych. Reultaty te w punkcie 5.2 zostały rozszerzone na przypadek kontaktu z tarcie dwóch ciał sprężystych.

Użyte w rozważaniach statycznych prawo tarcia jest prawem typu deformacyjnej teorii plastyczności. W przypadku kwasi-statycznym i prawie tarcia typu prawa płynięcia powstaje dodatkowa trudność w otrzymaniu sformułowania wariacyjnego. Bierze się ona stąd, że w warunkach Signoriniego występuje "przemieszczenie (normalne), zaś w prawie tarcia - prędkość przemieszczenia (stycznego). Dlatego też trudno oczekiwać aby sformułowanie wariacyjne można było uzyskać w postaci jednej nierówności. Sformułowanie wariacyjne można uzyskać w prosty sposób, ale w postaci dwóch sprzężonych nierówności wariacyjnych, uzupełnionych warunkiem początkowym. Jedna z nich przedstawia globalną postać warunków Signoriniego. W przypadku podejścia przemieszczeniowego druga z nich jest niejawną nierównością wariacyjną, natomiast w podejściu naprężeniowym - nierównością kwasi-wariacyjną. W niejawnej nierówności wariacyjnej polem wirtualnym jest pole prędkości przemieszczeń, natomiast we wspomnianej nierówności kwasi-wariacyjnej - pole



naprężeń, a nie prędkości naprężeń. Ten brak "symetrii" znajduje swoje odbicie przy rozpatrywaniu zadań dualnych.

Teorii dualności w sensie M-CD-M, w postaci przedstawionej w podrozdziale czwartym, nie można stosować do układu nierówności. Rozszerzenie tej teorii na układ złożony z N.N.W. sprzężonej z N.W. zaproponowano w podrozdziale siódmym. Mając taką teorię dualności można było w podrozdziale ósmym wyprowadzić zadanie dualne do zadania opisującego kwasi-statyczne zagadnienie Signoriniego z tarcie. W ten sposób dochodzimy do istotnie nowego zadania  $Q_D^*$ , mającego postać parabolicznej nierówności kwasi-wariacyjnej (8.12) sprzężonej z nierównością wariacyjną (8.13), do których dochodzi warunek początkowy (8.14). Podobnie jak w przypadku statycznym układ ten pozwala wyznaczyć normalne i styczne naprężenia na powierzchni kontaktu, zależne tym razem od czasu.

Ostatni podrozdział poświęcony jest rozszerzeniu klasycznych twierdzeń o nośności granicznej na nieklasyczne warunki brzegowe, którymi są warunki kontaktowe. Ale nawet wtedy gdy nie ma tego rodzaju warunków ( $\Gamma_2 = \emptyset$ ) otrzymane przez nas twierdzenia o dolnej i górnej granicy obciążenia różnią się od istniejących w literaturze tym, że mnożnik obciążenia jest związany tylko z siłami powierzchniowymi, a nie masowymi, co jest sensowniejsze fizycznie. Dostyc bezpośrednio jest uogólnienie twierdzeń o nośności granicznej na przypadek warunków Signoriniego bez tarcia (podpunkt 9.1). W podpunkcie 9.2 rozszerzono twierdzenia o nośności granicznej na warunki kontaktowe z tarcie przy założeniu, że naprężenia normalne są znane.

Wykorzystując ideę, że dla znanego rozkładu normalnych naprężeń kontaktowych można sformułować twierdzenia o nośności granicznej, w podpunkcie 9.3 zaproponowano teorię nośności granicznej przy uwzględnieniu warunków Signoriniego z tarcie. Otrzymano analogony twierdzeń o dolnej i górnej granicy obciążenia. Przy takim podejściu zadanie kinematyczne jest zawsze sprzężone z zadaniem statycznym właśnie poprzez naprężenia normalne na powierzchni kontaktu  $\Gamma_2$ . Istotną zaletą zaproponowanego podejścia polega na tym, że statyczny mnożnik obciążenia nigdy nie może być większy od kinematycznego, co może się zdarzyć jeśli stosować podejście klasyczne do zadań z tarcie, por. [130].



Stosując podstawowe metody analizy wypukłej w podpunkcie 9.4 zbudowano teorię nośności granicznej dla idealnie plastycznego ośrodka będącego w kontakcie bez tarcia na części  $\Gamma_2$  brzegu z podłożem sztywno-idealnie plastycznym. Podłoże może być niejednorodne i przenosić lub nie naprężenia rozciągające.

Ostatnie zagadnienie rozpatrzone w rozdziale pierwszym dotyczy kontaktu ośrodka sztywno-idealnie plastycznego z niekoniecz- nie liniowym podłożem lepkiem. Dopuszczalne jest odrywanie się ośrodka od podłoża. Dla takiego zagadnienia sformułowano parę zasad ekstremalnych.

## Rozdział II

W rozdziale drugim przedstawiona została część oryginalnych rezultatów autora dotyczących wyznaczania własności makroskopowych ośrodków i płyt. Rozpatrzone zostały zagadnienia homogenizacji liniowo sprężystych ośrodków i płyt spękanych a także płyt idealnie plastycznych o strukturze periodycznej. Otwieranie się i zamykanie szczelin można modelować warunkami typu Signoriniego, które oczywiście są warunkami nieliniowymi. Wszystkie rozpatrzone zagadnienia, podobnie jak i w rozdziale poprzednim należą więc do nieliniowych. Nie uwzględniając tarcia zobaczymy, iż wygodnym i precyzyjnym narzędziem do wyznaczania modeli makroskopowych jest metoda  $\Gamma$ -zbieżności, a ściślej epi-zbieżności. Podstawowe i niezbędne do rozważań pojęcia i własności dotyczące epi-zbieżności zostały zebrane w podpunkcie 2.1. W naszym przypadku epi-granicą będzie, na przykład, funkcjonał całkowitej energii potencjalnej ośrodka lub płyty zhomogenizowanej. Oprócz podejścia bezpośredniego, przemieszczeniowego, interesować nas będzie podejście dualne czyli naprężeniowe. Podstawowe informacje dotyczące związków pomiędzy epi-zbieżnością a dualnością zawiera podpunkt 2.2. Podrozdział drugi zawiera również komentarze ułatwiające, jak sądzę, przynajmniej wstępne osadzenie tych dość ogólnych pojęć w kontekście interesujących nas zagadnień homogenizacji.

Rezultaty oryginalne zawierają podrozdziały 3-7. Podrozdział trzeci poświęcony jest zagadnieniu homogenizacji trójwymiarowego, liniowego ośrodka sprężystego osłabionego periodycznie rozłożonymi mikroszczelinami, na których przyjęto warunki Signori-

niego bez tarcia. Rozmycie szczelin, czyli homogenizacja, daje ośrodek makroskopowy bez szczelin, ale fizycznie nieliniowy. Podano podstawowe własności makroskopowego potencjału sprężystego. Potencjał ten jest jedynie klasy  $C^1$ . Istotna trudność w dowodzie zbieżności ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) polega na tym, że obszar spękany  $\Omega^\epsilon$  jest bardzo nieregularny, a więc nie można do niego stosować nierówności Korna w znanej postaci. Pokazano w jaki sposób otrzymać odpowiednik nierówności Korna dla takiego obszaru. Oprócz podejścia przemieszczeniowego rozważono sformułowanie naprężeniowe i podano postać dopełniającego potencjału sprężystego ośrodka makroskopowego.

Kolejny podrozdział, czyli czwarty, zawiera rezultaty homogenizacji spękanego ośrodka sprężystego przy uwzględnieniu tarcia na mikroszczelinach w przypadku statycznym. Ośrodek efektywny jest niestandardowym ośrodkiem plastycznym typu Hencky-Nadaia-Illuszyna. Potencjał makroskopowy zależy nie tylko od odkształceń makroskopowych ale i od parametru wewnętrznego, którym jest niesprężysta część skoku przemieszczeń stycznych na lokalnej szczelinie  $F$ . Przeanalizowane również zostało podejście naprężeniowe, co pozwoliło wyprowadzić postać potencjału dopełniającego. To ostatnie zadanie rozwiązano w dwóch etapach; najpierw założono, że naprężenia normalne na szczelinie w zadaniu lokalnym są znane. Wówczas zadanie lokalne ma postać zadania minimalizacyjnego, przy zadanych odkształceniach makroskopowych i zadanym parametrze wewnętrznym. W przypadku ogólnym - gdy naprężenia normalne na szczelinie  $F$  nie są znane - to zadanie lokalne w sformułowaniu naprężeniowym ma postać nierówności kwasi-wariacyjnej, z której wyznaczamy pole naprężeń mikroskopowych.

Z analizy kwasi-statycznego zagadnienia Signoriniego z tarciami wiemy, że sformułowanie wariacyjne ma postać N.N.W. sprzężonej z N.W. Podobny problem powstaje w przypadku kwasi-statycznego zagadnienia homogenizacji, przy czym mamy dodatkową komplikację polegającą na zależności spękanego obszaru  $\Omega^\epsilon$  od parametru  $\epsilon > 0$  (podrozdział 5). Zadanie lokalne, z którego wyznaczamy mikroskopowe pole przemieszczeń ma również postać N.N.W. sprzężonej z N.W. Zbudowano model ośrodka efektywnego, który jest ośrodkiem sprężysto-plastycznym o niestowarzyszonej prawie płynięcia.



W podrozdziale szóstym przeprowadzono szczegółową analizę homogenizacji pewnego modelu płyt spękanych, o częściowo penetrujących szczelinach. Rozpatrzone zadanie można potraktować jako modelowe, bowiem zastosowane podejście nadaje się do uogólnień, modyfikacji i innych zastosowań, np. do tarcz trójwarstwowych. Ograniczyliśmy się do stosunkowo prostego modelu, co ułatwi nam prezentację podstawowych idei. Przyjęto, że płyta o grubości  $h$  wykonana jest z jednorodnego materiału liniowo sprężystego. Dzieląc formalnie płytę na warstwy o grubościach odpowiednio  $a$  i  $b$  ( $a+b=h$ ) zbudowano tzw. model dwuwarstwowy. Zakładając następnie, że warstwa dolna o grubości  $b$  jest osłabiona szczeliną o tejże grubości, rozpatrzone podejście wariacyjne przy założeniu, że na szczelinie mamy warunki typu Signoriniego bez tarcia. Dla takiego zadania sformułowanie wariacyjne ma postać nierówności wariacyjnej i jest równoważne zadaniu minimalizacji funkcjonału całkowitej energii potencjalnej płyty osłabionej szczeliną. Zakładając następnie, że warstwa dolna płyty jest osłabiona periodycznie rozłożonymi szczelinami o głębokości  $b$ , skonstruowano model efektywny korzystając z teorii  $\Gamma$ -zbieżności. Płyta efektywna (zhomogenizowana) jest fizycznie nieliniowa o ściśle wypukłym potencjale sprężystym klasy  $C^1$ . Podano podstawowe własności tego potencjału. Zagadnieniu zbieżności poświęcono oddzielny punkt (p.6.4). Szczegółowy dowód epi-zbieżności został podany w pracy [158]; tutaj ograniczyłem się do podania istotnych jego etapów. Przeprowadzono również homogenizację dualną, czyli zbadano zagadnienie epi-zbieżności ciągu funkcjonałów całkowitej energii dopełniającej, wyrażonej oczywiście w terminach naprężeń uogólnionych (p.6.5). Ze względu na warunki typu Signoriniego istotny i nietrywialny okazuje się tutaj problem wyznaczenia jednostkowego potencjału dopełniającego płyty zhomogenizowanej. W rezultacie otrzymuje się również dualne sformułowanie zadania lokalnego (na komórce bazowej).

W ostatnim punkcie podrozdziału szóstego podano przykład ilustrujący zagadnienie wyznaczania potencjału sprężystego płyty zhomogenizowanej. Płyta wyjściowa - spękana - jest osłabiona periodycznie rozłożonymi prostoliniowymi, równoległymi szczelinami. Założenie o tym, że szczeliny nie przecinają brzegu płyty i brzegu komórki bazowej nie jest wówczas spełnione. Jednakże można



stosować wyprowadzone wzory pozwalające wyznaczyć potencjał sprężysty płyty efektywnej, a zadanie to udaje się rozwiązać analitycznie. Okazuje się przy tym, iż niespełnienie wspomnianego założenia prowadzi do potencjału makroskopowego, który jest wypukły, ale nie jest ściśle wypukły.

W ostatnim podrozdziale pracy rozwiązane zostało zagadnienie zbudowania efektywnych modeli płyt sprężysto-idealnie plastycznych z materiału Hencky-Nadaia-Iliuszyna i płyt sztywno-idealnie plastycznych (nośność graniczna). Pierwsze zagadnienie jest zresztą związane z drugim poprzez założenie o obciążeniach bezpiecznych. Z punktu widzenia mechaniki ciał plastycznych model idealnie plastyczny należy do modeli najprostszych, natomiast ścisła analiza zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych jest bardzo trudna. Wynika to z nieciągłości pól przemieszczeń i prędkości przemieszczeń oraz stąd, iż potencjał sprężysty i gęstość dysypacji są funkcjami o wzroście liniowym (subliniowymi). Ta ostatnia własność prowadzi do tego, że nie mamy tak wygodnego narzędzia jak nierówność Korn'a [162]. Z kolei ze względu na wspomniane nieciągłości musiano rozszerzyć pojęcie funkcji takich jak gęstość dysypacji i wprowadzić pojęcie funkcji wypukłej miary [22, 72, 50, 162]. Ponadto podejście kinematyczne prowadzi w naturalny sposób do poszukiwania pól ugięć i pól prędkości ugięć w przestrzeni nierefleksywnej  $HB(\Omega)$  [46, 162]. Dlatego też dla ułatwienia zrozumienia procesu homogenizacji płyt idealnie plastycznych o strukturze periodycznej w punktach 7.1 i 7.2 podaliśmy niezbędne wiadomości matematyczne. Sam proces homogenizacji takich płyt różni się od odpowiednich (i znacznie prostszych) zagadnień dla płyt sprężystych. O ile w tym ostatnim przypadku obciążenie brzegu płyty momentami zginającymi nie wpływa na proces homogenizacji, gdyż funkcjonał obciążenia możemy traktować jako funkcjonał perturbacji, to nie jest tak (niestety!) w przypadku płyt idealnie plastycznych. Do tego ogólnego przypadku dochodzimy stopniowo, począwszy od rozwiązania zagadnienia epi-zbieżności na przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  ciągu funkcjonałów o wzroście liniowym (p.7.3.1), a następnie uwzględniając warunki Dirichleta na części  $\Gamma_0$  brzegu. Uwzględnienie takich warunków związane jest z relaksacją jednego z nich, związanego z pochodną normalną na brzegu (p.7.3.2). Z punktu widzenia mechaniki płyt plastycznych

jest to zrozumiałe, ponieważ w utwierdzeniu może pojawić się linia przegubów plastycznych. Dysponując takimi rezultatami można rozwiązać problem homogenizacji płyt idealnie plastycznych przy założeniu, że brzeg płyty nie jest obciążony momentami zginającymi (p.7.3.3). Przypadek ogólny, gdy część  $\Gamma_1$  brzegu płyty jest obciążona dodatkowo momentami zginającymi, rozpatrzono w punkcie 7.4. Chcąc rozwiązać takie zagadnienie homogenizacji musimy wprowadzić funkcjonalną relaksację również na  $\Gamma_1$ , związany z momentami zginającymi. Czysto matematyczna analiza prowadzi do interesującego fizycznie wniosku: oprócz homogenizacji w obszarze płyty musimy rozpatrywać homogenizację brzegową (na  $\Gamma_1$ ). Wpływa to na wartość granicznego mnożnika obciążenia płyty zhomogenizowanej. Zależy on nie tylko od rozkładu materiału w obszarze płyty ale i od jego rozkładu na brzegu  $\Gamma_1$ .

Niniejsza rozprawa jest głównie oparta na pracach autora - bądź to opublikowanych bądź to znajdujących się w druku. Dlatego też literatura została ograniczona do podania niezbędnych do rozważań pozycji.

## ROZDZIAŁ I

### DUALNOŚĆ DLA ZAGADNIEN KONTAKTOWYCH Z TARCIEM, ROZSZERZENIE TWIERDZEŃ O NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

#### 1. WSTĘP

Po ukazaniu się pracy Fichery [62] oraz książki Duvaut i Lionsa [53] nastąpił ogromny rozwój badań zagadnień kontaktowych mechaniki ośrodków i konstrukcji przy pomocy metod wariacyjnych. Dotyczy to zarówno problemów podstawowych takich jak istnienie i jednoznaczność rozwiązań, jak i analizy numerycznej. Specyfika zadań kontaktowych polega na tym, iż są to zazwyczaj zadania • tzw. swobodnej powierzchni, gdyż -na przykład- a priori nie znamy powierzchni rzeczywistego kontaktu.

Obszerne prace autora [151,152,153] przedstawiają różnorakie zastosowania metod wariacyjnych do analizy zagadnień kontaktowych, por. również [1,44,45,77,114,115,127,169]. Są to głównie metody nierówności wariacyjnych, stanowiące podstawę do numerycznej analizy różnorodnych zagadnień brzegowych.

Cel niniejszego rozdziału jest dwojaki. Po pierwsze, bazując na pracach [152,156] przedstawimy oryginalne wyniki dotyczące dualności dla zagadnienia Signoriniego z tarcielem zarówno w przypadku statycznym jak i kwasi-statycznym. Rozważania te poprzedzone zostały fenomenologicznym opisem praw tarcia przy wykorzystaniu podstawowych pojęć analizy wypukłej.

Druga klasa zagadnień to rozszerzenie twierdzeń o nośności granicznej na przypadek nieklasycznych warunków brzegowych. Są nimi warunki kontaktowe, o których bardziej szczegółowo mówimy we wprowadzeniu.



## 2. WARUNKI TARCIA I PRAWA TARCIA

Celem niniejszego podrozdziału jest związane przedstawienie fenomenologicznego opisu zjawiska tarcia przy wykorzystaniu podstawowych pojęć analizy wypukłej. Zastosowany opis jest bardzo wygodny z punktu widzenia wariacyjnego opisu kontaktowych zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych. W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z prac [149,151,152].

Obszerną literaturę z zakresu trybologicznych i fizycznych aspektów tarcia zawiera monografia Buckleya [28], materiały konferencyjne [165] i prace [107,122,138,152,173].

### 2.1. Warunki tarcia i subróżniczkowe prawa tarcia

Niech  $\mathcal{P}$  będzie ciałem odkształcalnym zajmującym w konfiguracji nieodkształconej obszar  $\Omega \cup \Gamma$ , gdzie  $\Gamma = \partial\Omega$  oznacza brzeg obszaru  $\Omega$ . Zakładamy, że  $\Gamma$  składa się z trzech rozłącznych części:  $\Gamma_0, \Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , takich, że  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ ; tutaj  $\bar{\Gamma}_0$  oznacza domknięcie zbioru  $\Gamma_0$ , itd. W całym rozdziale będziemy zakładać, że na  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  są zadane "klasyczne" warunki brzegowe, natomiast  $\Gamma_2$  jest powierzchnią potencjalnego kontaktu.

Przez  $\underline{n} = (n_i)$  ( $i=1,2,3$ ) oznaczymy wektor jednostkowy, prostopadły do  $\Gamma$  i skierowany na zewnątrz obszaru  $\Omega$ .

Jeśli  $\underline{u}=(u_i)$  jest polem wektorowym określonym na  $\Gamma$ , a więc w szczególności na  $\Gamma_2$ , to można go rozłożyć następująco

$$(2.1) \quad \underline{u} = u_n \underline{n} + \underline{u}_t,$$

gdzie  $u_n = u_i n_i$  oznacza składową normalną, natomiast  $\underline{u}_t = \underline{u} - u_n \underline{n}$ .

Jeśli  $\underline{s} = (s_{ij})$  jest tensorem naprężenia to podobny rozkład zachodzi dla wektora naprężenia  $(s_{ij} n_j)$ , czyli możemy napisać

$$(2.2) \quad s_{ij} n_j = s_n n_i + s_{ti},$$

gdzie  $s_n = s_{ij} n_i n_j$ ,  $s_{ti} = s_{ij} n_j - s_n n_i$ .

Oznaczmy przez  $\underline{e} = (e_{ij})$  tensor odkształcenia, a przez  $\dot{\underline{e}}_{ij}$  tensor prędkości odkształceń. Zakładając następujące odpowiedniości:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \underline{e}(x) &= \underline{e}^E(x) + \underline{e}^P(x), \quad x \in \Omega \iff \underline{u}(x) = \underline{u}^E(x) + \underline{u}^P(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \underline{\dot{e}}(x) &= \underline{\dot{e}}^E(x) + \underline{\dot{e}}^P(x), \quad x \in \Omega \iff \underline{\dot{u}}(x) = \underline{\dot{u}}^E(x) + \underline{\dot{u}}^P(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \underline{s}(x) &= p(x) \underline{I} + \text{dev } \underline{s}(x), \quad x \in \Omega \iff (\underline{s} \cdot \underline{n})(x) = s_n(x) \underline{n}(x) + \underline{s}_t(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

można sformułować szeroką klasę praw tarcia zwanych inaczej prawami poślizgu. Tym razem  $\underline{\dot{u}}$  oznacza wektor prędkości przemieszczeń, a wskaźniki górne "e" i "p" oznaczają, odpowiednio, część sprężystą i plastyczną (lub ogólniej niesprężystą);  $\underline{I}$  jest macierzą jednostkową.

W dalszym ciągu niniejszego podrozdziału dla prostoty przyjmiemy, że  $\Gamma_2$  jest obszarem płaskim leżącym w płaszczyźnie  $(x_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Wskaźniki greckie przyjmują wartość 1 i 2. W przypadku ogólnym, gdy  $\Gamma_2$  nie jest obszarem płaskim, rozważania w punkcie  $M(x)$  ( $x \in \Gamma_2$ ) należy prowadzić w lokalnym układzie współrzędnych. Wystarczy wówczas przyjąć, że  $\Gamma_2$  jest obrazem pewnego obszaru płaskiego poprzez dostatecznie gładkie odwzorowanie.

Dla dostatecznie małych obciążeń w punkcie  $M$  zachodzą jedynie deformacje sprężyste (sprężyste odkształcenia nierówności). Możemy wówczas przyjąć, że  $u_n^E = u_n = k s_n$ ,  $u_{\alpha\beta}^E = K_{\alpha\beta} s$ , gdzie  $k > 0$  i  $\underline{K} = (K_{\alpha\beta})$  są znanymi stałymi (funkcjami) materiałowymi. W ogólności  $k = k(x)$ ,  $K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(x)$ ,  $x \in \Gamma_2$ . Podobnie jak w liniowej teorii sprężystości przyjmujemy, że istnieje stała  $c > 0$  taka, że

$$(2.4) \quad K_{\alpha\beta}(x) t_\alpha t_\beta \geq c t_\alpha t_\alpha, \quad x \in \Gamma_2, \quad \forall \underline{t} = (t_\alpha).$$

Rozpatrzmy teraz część niesprężystą  $\underline{u}^P$ , która praktycznie odgrywa najistotniejszą rolę. Oczywiście, jeśli rozpatrywane ciało jest ciałem sztywnym to przymiotnik "niesprężyste" nie ma sensu. Jednakże prawa tarcia typu np. praw teorii plastyczności mają sens.

Niech na  $\Gamma_2$  warunek tarcia będzie dany nierównościami

$$(2.5) \quad g_I(s_n, \underline{s}_t) \leq 0, \quad I = 1, \dots, M,$$

przy czym funkcje  $g_I$  mogą być anizotropowe. Anizotropia tarcia jest zjawiskiem potwierdzonym doświadczalnie [28, 59, 152, 173].

Położmy

$$(2.6) \quad K(s_n) = \{ \underline{t} = (t_\alpha) \mid g_I(s_n, \underline{t}) \leq 0, \underline{t} \cdot \underline{n} = 0, I = 1, \dots, M \}.$$

Będziemy zakładać, że dla każdego dopuszczalnego  $s_n$  zbiór  $K(s_n)$  jest wypukły. Wynika stąd, że zbiór

$$(2.7) \quad K = \{(s_n, \underline{s}_t) \mid g_I(s_n, s_t) \leq 0; I = 1, \dots, M\},$$

nie musi być wypukły. Niewypukłe warunki tarcia, na drodze rozważań geometrycznych, otrzymali Michałowski i Mróz [108].

Do dalszych rozważań nie trzeba zakładać, że zbiór  $K(s_n)$  ma postać (2.6). Wystarczy nam znajomość zbioru  $K(s_n)$  dopuszczalnych naprężeń stycznych dla zadanego naprężenia normalnego.

Oznaczmy przez  $I_{K(s_n)}$  funkcję indyktorową zbioru  $K(s_n)$ , czyli [87, 128]

$$(2.8) \quad I_{K(s_n)}(\underline{t}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{t} \in K(s_n), \\ +\infty, & \text{jeśli } \underline{t} \notin K(s_n). \end{cases}$$

Prawo tarcia, będące uogólnieniem prawa tarcia Coulomba, przyjmujemy w postaci

$$(2.9) \quad -\underline{\dot{u}}_t^p \in \partial I_{K(s_n)}(\underline{s}_t).$$

W terminach teorii plastyczności związek ten odpowiada niestowarzyszonemu prawu plastycznego płynięcia materiałów nieściśliwych.

W przypadku zagadnień statycznych będziemy stosować następujące prawo tarcia

$$(2.10) \quad -\underline{u}_t^p \in \partial I_{K(s_n)}(\underline{s}_t).$$

Prawo to odpowiada deformacyjnej teorii plastyczności. Związek (2.9) jest równoważny następującej nierówności

$$(2.11) \quad (\underline{t} - \underline{s}_t) \cdot \underline{\dot{u}}_t^p \geq 0, \quad \forall \underline{t} \in K(s_n).$$

Podobnie zależność (2.10) jest równoważna nierówności

$$(2.12) \quad (\underline{t} - \underline{s}_t) \cdot \underline{u}_t^p \geq 0, \quad \forall \underline{t} \in K(s_n).$$

Funkcja podpierająca  $d(s_n, \cdot)$  zbioru  $K(s_n)$  jest określona następująco

$$(2.13) \quad d(s_n, \underline{s}_t^*) = \sup_{\underline{t}} \{ \underline{s}_t^* \cdot \underline{t} - I_{K(s_n)}(\underline{t}) \} = \sup_{\underline{t} \in K(s_n)} \{ \underline{s}_t^* \cdot \underline{t} \}.$$

Funkcja  $d(s_n, \cdot)$  jest funkcją wypukłą, dolnie półciągłą i dodatnio jednorodną rzędu 1 [128]. Ponieważ funkcja ta jest funkcją sprzężoną (dualną) z funkcją  $I_{K(s_n)}$  przeto zależność odwrotna



do (2.9) ma postać

$$(2.14) \quad \underline{s}_t \in \partial_2 d(s_n, -\dot{u}_t^D),$$

gdzie  $\partial_2 d(s_n, \cdot)$  oznacza subdifferential funkcji  $d(s_n, \cdot)$ . Wnioskuje-  
my stąd, że  $\underline{s}_t^* = -\dot{u}_t^D$ . Równoważne prawa tarcia (2.9) i (2.14)  
są z kolei równoważne następującej zależności

$$(2.15) \quad I_{K(s_n)}(\underline{s}_t) + d(s_n, -\dot{u}_t^D) = \underline{s}_t \cdot (-\dot{u}_t^D).$$

Ponieważ  $\underline{s}_t \in K(s_n)$  więc otrzymujemy

$$(2.16) \quad j(s_n, \dot{u}_t^D) \stackrel{df}{=} d(s_n, -\dot{u}_t^D) = \underline{s}_t \cdot (-\dot{u}_t^D).$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja  $j$  przedstawia gęstość dysypacji  
spowodowanej tarcie.

W przypadku prawa tarcia (2.10) w zależnościach (2.14)-(2.16)  
zamiast  $\dot{u}_t^D$  należy wziąć  $u_t^D$ ; funkcja  $j(s_n, u_t^D)$  przedstawia wów-  
czas jednostkową pracę sił tarcia.

Zwróćmy uwagę na fakt, że funkcja  $j$  zależy jawnie od naprężeń  
normalnych.

Założmy, że zbiór  $K(s_n)$  jest określony jedną funkcją  $g$ . Wów-  
czas, korzystając z twierdzenia 13.5 Rockafellara [128], możemy  
wyznaczyć funkcję  $j$  bezpośrednio, a mianowicie

$$(2.17) \quad j(s_n, \dot{u}_t^D) = \begin{cases} \inf_{\lambda > 0} \lambda g^*(s_n, -\lambda^{-1} \dot{u}_t^D), & \text{jeśli } \dot{u}_t^D \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } \dot{u}_t^D = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$g^*(s_n, v) = \sup_{\underline{t}} \{ \underline{t} \cdot v - g(s_n, \underline{t}) \}.$$

Tak wyznaczona funkcja  $j(s_n, \cdot)$  nosi nazwę funkcji recesji [128,  
162].

Jeśli element zerowy jest punktem wewnętrznym zbioru ograni-  
czonego  $K(s_n)$  to funkcja  $j(s_n, \cdot)$  posiada następującą własność :

$$\left| \begin{array}{l} \exists c_1(s_n) \geq c_0(s_n) > 0 \quad \text{takie, że} \\ c_0(s_n) |\dot{u}_t^D| \leq j(s_n, \dot{u}_t^D) \leq c_1(s_n) |\dot{u}_t^D|. \end{array} \right.$$

Wnioskujemy stąd, że  $j(s_n, 0) = 0$ , oraz  $j(s_n, \dot{u}_t^D) \geq 0$ , por. punkt  
II.7.2.

Przykład 2.1. Załóżmy, że funkcja  $g$  jest symetryczna (izotropowa) w następującym sensie

$$(2.19) \quad g(A_1 s_n, A_2 s_t) = g(s_n, s_t),$$

gdzie  $A_1$  oznacza ortogonalną transformację liniową, która zmienia znak naprężenia normalnego, natomiast  $A_2$  jest transformacją ortogonalną. Wówczas mamy [128]

$$(2.20) \quad g(s_n, s_t) = G(|s_n|, |s_t|).$$

Porównując (2.20) z (2.16) otrzymujemy

$$(2.21) \quad j(s_n, \dot{u}_t^D) = |s_t| |\dot{u}_t^D|.$$

W klasycznym przypadku prawa Coulomba funkcja  $g$  ma postać

$$(2.22) \quad g(s_n, s_t) = |s_t| - \mu |s_n| \leq 0,$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia. Dla tego standardowego przypadku gęstość dysypacji wynika z (2.21) i ma postać

$$(2.23) \quad j(s_n, \dot{u}_t^D) = \mu |s_n| |\dot{u}_t^D|.$$

Przykład 2.2. Jako naturalne i proste uogólnienie warunku tarcia Coulomba na przypadek tarcia anizotropowego można zaproponować następującą postać funkcji  $g$  [149, 152]

$$(2.24) \quad g(s_n, s_t) = \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} s_{t\alpha} s_{t\beta} - H(s_n).$$

Tensor  $\underline{N}$  można nazwać tensorem tarcia anizotropowego. Zakładamy, że  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ . Dla zadanego naprężenia normalnego  $s_n$  zbiór  $K(s_n)$  dopuszczalnych naprężeń stycznych ma postać

$$(2.25) \quad K(s_n) = \{ \underline{t} = (t_{\alpha\beta}) \mid \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} t_{\alpha} t_{\beta} - H(s_n) \leq 0 \}.$$

Zbiór ten jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy macierz  $\underline{N}$  jest dodatnio półokreślona [128]. Prawo tarcia ma postać

$$(2.26) \quad \dot{u}_t^D = -\lambda \underline{N} s_t, \quad \lambda \geq 0,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{(M_{\alpha\beta} \dot{u}_{t\alpha}^D \dot{u}_{t\beta}^D)^{1/2}}{(2H(s_n))^{1/2}}, \quad \underline{M} = \underline{N}^{-1},$$

przy założeniu, że  $\underline{N}$  jest odwracalna a  $H > 0$ .

Gęstość dysypacji spowodowana tarciami wyraża się wzorem

$$(2.27) \quad j(s_n, \dot{u}_t^D) = (2M_{\alpha\beta} \dot{u}_{t\alpha}^D \dot{u}_{t\beta}^D H(s_n))^{1/2}.$$

Prace doświadczalne [86,166,168] wskazują na to, że w wielu przypadkach może być ważny wpływ względnego przemieszczenia stycznego na współczynnik tarcia. Sensowne jest więc rozpatrywanie następujących praw tarcia

$$(2.28) \quad -\dot{\underline{u}}_t^p \in \partial I_{K(s_n, \underline{u}_t)}(\underline{s}_t).$$

Zbiór wypukły może mieć na przykład postać

$$(2.29) \quad K(s_n, \underline{u}_t) = \{ \underline{t} \mid g_I(u_t, s_n, \underline{t}) \leq 0, I = 1, \dots, M; \underline{t} \cdot \underline{n} = 0 \}$$

W przypadku kontaktu dwóch ciał zamiast  $\underline{u}_t$  należy wziąć wektor względnego przemieszczenia stycznego  $[[\underline{u}_t]]$ .

## 2.2. Nielocalne prawa tarcia

Nielocalne prawo tarcia Coulomba zostało wprowadzone na drodze czysto matematycznych rozważań przez Duvaut [52]. W kilku słowach o co chodzi. Jeśli przestrzenią przemieszczeń jest przestrzeń  $H^1(\Omega, R^3)$  to naturalną przestrzenią dla naprężeń jest przestrzeń  $H_s$ , dana zależnością (3.20). Wówczas  $s_{ij}n_j \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ , czyli  $s_n(\underline{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ . Tym samym normalne naprężenie kontaktowe nie jest funkcją, lecz dystrybucją. Prowadzi to do trudności, dotychczas pokonanych jedynie częściowo, w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań, por. [152]. Jedną z dróg pokonania tej trudności jest zastąpienie naprężenia  $s_n$  przez funkcję regularną  $s_n^h$  ( $h > 0$ ). Na przykład  $s_n^h$  można zdefiniować następująco

$$(2.30) \quad s_n^h(x) = \int_{\Gamma_2} \omega_h(|x-y|) s_n(y) d\Gamma(y); \quad x, y \in \Gamma_2.$$

Funkcja  $s_n^h$  gra rolę normalnego naprężenia nielocalnego. Zależy ono od doboru jądra  $\omega_h$ . Pierwotna koncepcja Duvaut była rozwijana przez Odena i jego współpracowników. Odpowiednią literaturę można znaleźć w książce [77] i pracach [151,152].

Jak na to zwrócono uwagę w pracach [151,152] koncepcję Duvaut można rozszerzyć na inne warunki i prawa tarcia, na przykład na rozważone poprzednio.

Wróćmy do jądra regularyzującego  $\omega_h$ . Wygodnie jest przyjąć klasyczną jego postać, czyli założyć, że funkcja  $\omega_h$  jest klasy  $C^\infty$  i posiada następujące własności:



(i)  $\omega_h(r) > 0, \quad r < h,$

(ii)  $\omega_h(r) = 0, \quad r \geq 0,$

(iii)  $\int_{r < h} \omega_h(r) dy = \int_{r < h} \omega_h(r) dx = 1.$

Przykładem takiej funkcji jest funkcja zdefiniowana następująco

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h, \quad c_h = \text{const.} > 0, \\ 0, & r \geq 0. \end{cases}$$

Stała  $c_h$  jest dobrana tak aby zachodziło (iii), czyli

$$c_h = \left( \int_{r < h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dy \right)^{-1}.$$

Zastępując w (2.9) i (2.10) naprężenia normalne  $s_n$  naprężeniami  $s_n^h$  otrzymujemy nielocalne subróżniczkowe prawa tarcia odpowiednio w postaci

(2.31)  $-\underline{\dot{u}}_t^p \in \partial I_{K(s_n^h)}(\underline{s}_t),$

(2.32)  $-\underline{u}_t^p \in \partial I_{K(s_n^h)}(\underline{s}_t).$

### 2.3. Uwagi o prawach tarcia w przypadku braku wypukłości

W prawach tarcia (2.9) i (2.10) występuje subróżniczkowa funkcja wypukłej  $I_{K(s_n)}$ . Można rozpatrywać związki ogólniejsze, stosując na przykład pojęcie subróżniczki w sensie Clarke'a [40,129], por. również [115,123].

Oznaczmy subróżniczkę Clarke'a przez  $\partial^c$ . Jeśli zbiór  $K(s_n)$  nie jest wypukły to zamiast prawa tarcia, powiedzmy (2.9), mamy prawo ogólniejsze

(2.33)  $-\underline{\dot{u}}_t^p \in \partial^c I_{K(s_n)}(\underline{s}_t),$

gdzie

(2.34)  $\partial^c I_{K(s_n)}(\underline{s}_t) = N_{K(s_n)}(\underline{s}_t).$

$N_{K(s_n)}(\underline{s}_t)$  oznacza stożek normalny w punkcie  $\underline{s}_t$  zdefiniowany następująco

$$(2.35) \quad N_{K(s_n)}(\underline{s}_t) = \{ \underline{v} \mid \underline{t} \cdot \underline{v} \leq 0, \quad \forall \underline{t} \in T_{K(s_n)}(\underline{s}_t) \}.$$

Należy teraz określić zbiór  $T_{K(s_n)}(\underline{s}_t)$ , który jest domkniętym i wypukłym stożkiem [40]. W tym celu wprowadźmy funkcję odległości  $d_{K(s_n)}: R^2 \rightarrow R^+$  zdefiniowaną następująco

$$(2.36) \quad d_{K(s_n)}(\underline{t}) = \inf \{ |\underline{t} - \underline{z}| : \underline{z} \in K(s_n) \}.$$

Funkcja  $d_{K(s_n)}$  spełnia globalny warunek Lipschitza, tzn.:

$$(2.37) \quad |d_{K(s_n)}(\underline{t}) - d_{K(s_n)}(\underline{z})| \leq |\underline{t} - \underline{z}|.$$

Oznaczmy przez  $d_{K(s_n)}^0(\underline{s}_t, \underline{t})$  uogólnioną pochodną kierunkową funkcji  $d_{K(s_n)}$  w kierunku  $\underline{t}$  zdefiniowaną następująco

$$(2.38) \quad d_{K(s_n)}^0(\underline{s}_t, \underline{t}) = \limsup_{\substack{\underline{z} \rightarrow \underline{s}_t \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{d_{K(s_n)}(\underline{z} + \varepsilon \underline{t}) - d_{K(s_n)}(\underline{z})}{\varepsilon}$$

Wektor  $\underline{t}$  jest styczny do  $K(s_n)$  w punkcie  $\underline{s}_t$  jeśli  $d_{K(s_n)}^0(\underline{s}_t, \underline{t}) = 0$ . Zbiór wszystkich takich wektorów stycznych stanowi właśnie stożek  $T_{K(s_n)}(\underline{s}_t)$ .

Z powyższych wywodów wnioskujemy, że definicja subróżniczki Clarke'a jest znacznie bardziej skomplikowana niż definicja subróżniczki funkcji wypukłej. Jeśli funkcja jest wypukła to  $\partial = \partial^c$ . W przypadku funkcji niewypukłej i subróżniczki Clarke'a nie mamy zależności "odwrotnej" typu (2.14), przy czym gęstość dysypacji sił tarcia  $d(s_n, \cdot)$  byłaby funkcją niewypukłą. Oczywiście funkcję  $d(s_n, \cdot)$  można wyznaczyć z wzoru (2.13) również i w przypadku gdy zbiór  $K(s_n)$  nie jest wypukły. Wówczas funkcja  $d(s_n, \cdot)$  będzie wypukła i w ten sposób gubimy istotne informacje fizyczne.

Zwróćmy jeszcze uwagę na pracę [43], w której zostało wprowadzone pojęcie funkcji  $(p, q)$  - wypukłych jako pewnej klasy funkcji niewypukłych. Wprowadzone tam pojęcie subróżniczki jest mniej ogólne od pojęcia subróżniczki Clarke'a.

Na zakończenie rozważmy jeszcze jedną możliwość formułowania praw tarcia przy wykorzystaniu subrózniczkowości w sensie analizy wypukłej. Można rozpatrywać prawa tarcia w postaci

$$(2.39) \quad -\underline{u}_t^p \in \partial I_{K(s_n)}[A(\underline{s}_t)] ,$$

gdzie  $A$  jest odpowiednio dobranym operatorem, niekoniecznie liniowym. Wówczas mamy

$$I_{K(s_n)}[A(t)] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } A(t) \in K(s_n), \\ +\infty, & \text{jeśli } A(t) \notin K(s_n). \end{cases}$$

Zbiór  $K^1(s_n) = A^{-1}(K(s_n))$  dopuszczalnych naprężeń stycznych - dla ustalonych naprężeń normalnych  $s_n$  - nie musi być wypukły.

W dalszych rozważaniach niniejszego rozdziału - jak i rozdziału drugiego - ograniczymy się do przypadku, gdy zbiór  $K(s_n)$  jest wypukły.

### 3. PRZEMIESZCZENIOWE I NAPRĘŻENIOWE SFORMUŁOWANIA WARIACYJNE ZAGADNIENIA SIGNORINIEGO Z TARCIEM: PRZYPADEK STATYCZNY

Rozpatrzmy obecnie zagadnienie Signoriniego z tarcie dla ośrodka liniowo sprężystego, przy założeniu, że na powierzchni  $\Gamma_2$  potencjalnego kontaktu  $\underline{u}_t^e = 0$  i  $u_n^p = 0$ , czyli  $\underline{u}_t = \underline{u}_t^p$ . Ponieważ rozpatrujemy przypadek statyczny, więc przyjmujemy prawo tarcia w postaci (2.10).  $\Gamma_2$  może być powierzchnią, na przykład obrazem obszaru płaskiego poprzez odwzorowanie klasy  $C^1$ , por. [152].

Silne sformułowanie takiego zagadnienia kontaktowego sformułujemy jako

#### Zadanie P<sub>1</sub>

Znaleźć pole przemieszczeń  $\underline{u} = \underline{u}(x)$  ( $x \in \Omega$ ) takie, że

$$(3.1) \quad s_{ij,j} + B_i = 0, \quad \text{w } \Omega,$$

$$(3.2) \quad s_{ij}(\underline{u}) = a_{ijkl} e_{kl}(\underline{u}),$$



$$(3.3) \quad \underline{u} = 0, \text{ na } \Gamma_0,$$

$$(3.4) \quad s_{ij} n_j = F_i, \text{ na } \Gamma_1,$$

$$(3.5) \quad u_n \leq 0, \quad s_n \leq 0, \quad s_n u_n = 0, \text{ na } \Gamma_2,$$

$$(3.6) \quad -\underline{u}_t \in \partial I_{K(s_n)}(\underline{s}_t), \text{ na } \Gamma_2.$$

Przez  $\underline{B}$  i  $\underline{F}$  oznaczyliśmy odpowiednio, wektor sił masowych i powierzchniowych. Tensor modułów sprężystych  $(a_{ijkl})$  posiada zwykłe warunki symetrii:  $a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$ ; ponadto

$$(3.7) \quad a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \geq c e_{ij} e_{ij}, \quad \forall \underline{e} \in E_S^3,$$

gdzie  $c$  jest stałą dodatnią, a  $E_S^3$  oznacza przestrzeń symetrycznych macierzy  $3 \times 3$ . Zależności (3.5) opisują warunki Signoriniego.

Przejdźmy do sformułowania wariacyjnego, czyli słabego. Przyjmujemy następujące założenie

$$(3.8) \quad a_{ijkl} \in C^\infty(\Omega), \quad (B, F) \in V^*,$$

gdzie

$$(3.9) \quad V = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega, R^3) \mid \underline{v} = 0 \text{ na } \Gamma_0 \},$$

natomiast  $V^*$  oznacza przestrzeń dualną. W szczególności można przyjąć, że  $B_i \in L^2(\Omega)$ ,  $F_i \in L^2(\Gamma_1)$ . Połóżmy

$$(3.10) \quad K_d = \{ \underline{v} \in V \mid v_n \leq 0 \text{ na } \Gamma_2 \},$$

$$(3.11) \quad a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} e_{ij}(\underline{u}) e_{kl}(\underline{v}) dx; \quad \underline{u}, \underline{v} \in V,$$

$$(3.12) \quad J(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma_2} j(s_n(\underline{u}), \underline{v}_t) d\Gamma; \quad \underline{u}, \underline{v} \in V,$$

$$(3.13) \quad \langle \underline{\mathcal{L}}, \underline{v} \rangle = \mathcal{L}(\underline{v}) = \int_{\Omega} B_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} F_i v_i dx, \quad \underline{v} \in V.$$

Pomnóżmy równanie (3.1) skalarnie przez  $(\underline{v} - \underline{u})$ ,  $\underline{v} \in K_d$  i scałkujmy otrzymane wyrażenie przez części. W ten sposób otrzymujemy

$$(3.14) \quad a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + \int_{\Gamma_2} (-\underline{s}_t) \cdot (\underline{v}_t - \underline{u}_t) d\Gamma = \\ = \mathcal{L}(\underline{v} - \underline{u}) + \int_{\Gamma_2} s_n (v_n - u_n) d\Gamma.$$

Zauważmy, że subróżniczkowe prawo tarcia (3.6) jest równoważne

zależności odwrotnej

$$(3.15) \quad \underline{s}_t \in \partial_2 j(s_n, \underline{u}_t),$$

która z kolei jest równoważna nierówności

$$(3.16) \quad j(s_n, \underline{v}_t) - j(s_n, \underline{u}_t) \geq (-\underline{s}_t) \cdot (\underline{v}_t - \underline{u}_t), \quad \forall \underline{v}_t \in T(x), \quad x \in \Gamma_2.$$

Tutaj  $T(x)$  oznacza przestrzeń styczną do  $\Gamma_2$  w punkcie  $x \in \Gamma_2$ . Uwzględniając w (3.14) warunki Signoriniego (3.5) i nierówność (3.16) dochodzimy do następującego sformułowania wariacyjnego.

Zadanie  $P_D$

Znaleźć  $\underline{u} \in K_D$  takie, że

$$(3.17) \quad a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + J(\underline{u}, \underline{v}) - J(\underline{u}, \underline{u}) \geq \mathcal{L}(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in K_D.$$

N.N.W. (3.17) przedstawia zasadę przemieszczeń przygotowanych dla rozpatrywanego zagadnienia Signoriniego z prawem tarcia (3.6).

Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania zadania ( $P_D$ ) przedyskutowałem w pracy [152]. Tutaj warto jedynie podkreślić, że w ogólności problem istnienia nie został dotychczas w pełni rozwiązany, nawet w przypadku prawa tarcia Coulomba.

Przejdźmy do wariacyjnego sformułowania w terminach naprężeń. W tym celu położmy  $\underline{u} = \underline{a}^{-1}$  oraz

$$(3.18) \quad K_S(s_n) = \{ \underline{\sigma} = (\sigma_{ij}) \in V_S \mid \sigma_n \leq 0, \quad \underline{\sigma}_t \in K(s_n), \quad \text{na } \Gamma_2 \},$$

$$(3.19) \quad V_S = \{ \underline{\sigma} \in H_S \mid \sigma_{i,j,j} + B_i = 0, \quad \text{w } \Omega; \quad \sigma_{ij} n_j = F_i, \quad \text{na } \Gamma_1 \},$$

$$(3.20) \quad H_S = \{ \underline{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \underline{\sigma} \in L^2(\Omega, E_S^3), \quad \sigma_{i,j,j} \in L^2(\Omega) \}.$$

Pomnóżmy odwrotne równanie konstytutywne

$$(3.21) \quad b_{ijkl} s_{kl} - e_{ij}(u) = 0$$

przez  $(\underline{\sigma} - \underline{s})$  ( $\underline{s}, \underline{\sigma} \in K_S(s_n)$ ) i scałkujmy po obszarze  $\Omega$ . W ten sposób otrzymujemy

$$(3.22) \quad 0 = b(\underline{s}, \underline{\sigma} - \underline{s}) - \int_{\Gamma_0} (\sigma_{ij} - s_{ij}) n_j u_i d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_2} [(\sigma_n - s_n) u_n + (\sigma_t - s_t) \cdot \underline{u}_t] d\Gamma, \quad \forall \underline{\sigma} \in K_S(s_n),$$

gdzie  $\Gamma_2$

$$(3.23) \quad b(\underline{g}, \underline{s}) = \int_{\Omega} b_{ijkl} s_{ij} g_{kl} dx ; \quad \underline{g}, \underline{s} \in L^2(\Omega, E_s^3) .$$

Przy naszych założeniach mamy  $\underline{u}=0$  na  $\Gamma_0$ . Uwzględniając w (3.22) warunki Signoriniego (3.5) i nierówność (2.12) wnioskujemy, że całka po  $\Gamma_2$  jest nieujemna. Ostatecznie możemy sformułować

Zadanie P<sub>s</sub>

Znaleźć  $\underline{s} \in K_s(s_n)$  takie, że

$$(3.24) \quad b(\underline{s}, \underline{g} - \underline{s}) \geq 0, \quad \forall \underline{g} \in K_s(s_n) .$$

Nierówność kwasi-wariacyjna (3.24) przedstawia zasadę naprężeń przygotowanych. Zauważmy, że jeśli  $\underline{u}=\underline{u}_0$  na  $\Gamma_0$  to zamiast N.K.W.(3.24) mamy

$$(3.25) \quad b(\underline{s}, \underline{g} - \underline{s}) - \int_{\Gamma_0} (g_{ij} n_j - s_{ij} n_j) u_{0i} d\Gamma \geq 0, \quad \forall \underline{g} \in K_s(s_n) .$$

Zadań P<sub>d</sub> i P<sub>s</sub> nie można sformułować w postaci zadań ekstremalnych.

#### 4. TEORIA DUALNOŚCI W SENSIE M-CD-M DLA NIEJAWNYCH NIERÓWNOŚCI WARIACYJNYCH

Mosco [116] zbudował teorię dualności dla nierówności wariacyjnych pierwszego rodzaju. Następny krok uczynili Capuzzo Dolcetta i Matzeu [32], rozszerzając ją na przypadek niejawnych nierówności wariacyjnych, ale jedynie dla refleksywnych przestrzeni Banacha. W niniejszym podrozdziale przedstawimy rozszerzenie tej teorii na przypadek przestrzeni nierefleksywnych, bazując na pracy autora [152]. Rozważania te ułatwią zrozumienie teorii dualności dla układu złożonego z niejawnej nierówności wariacyjnej sprzężonej z nierównością wariacyjną, a przedstawionej w podrozdziale siódmym. Poza tym w pracy [32] brak wielu istotnych szczegółów związanych z wykorzystaniem analizy wypukłej.

Niech  $V$  i  $V^*$  będą lokalnie wypukłymi wektorowymi przestrzeniami topologicznymi zaś  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  formą dwuliniową separującą te przestrzenie, czyli [2,172]



$$\forall v^* \in V^*, v^* \neq 0, \exists v \in V, \langle v^*, v \rangle \neq 0,$$

$$\forall v \in V, v \neq 0, \exists v^* \in V^*, \langle v^*, v \rangle \neq 0.$$

Przestrzenie  $V$  i  $V^*$  wyposażamy w topologie słabe.

Przykładem przestrzeni  $V$  i  $V^*$  mogą być przestrzenie  $V = C_0(\Omega, \mathbb{E}_S^2)$ ,  $V^* = M^1(\Omega, \mathbb{E}_S^2)$ , por. podrozdział II.7.1. Przestrzenie te są oczywiście nierefleksywne.

W będącej poniżej przedmiotem rozważań N.N.W. wystąpią funkcjonały  $\varphi$  i  $g$  określone na  $V \times V$ . Czynimy następujące założenia:

(H<sub>1</sub>) | odwzorowanie  $w \mapsto \varphi(v, w)$  jest, dla każdego  $v \in V$ , funkcją wypukłą i dolnie półciągłą na  $V$ , nie równą identycznie  $+\infty$ .

(H<sub>2</sub>) | Odwzorowanie  $w \mapsto g(v, w)$  jest, dla każdego  $v \in V$ , funkcją wypukłą i ciągłą w punkcie  $w=v$ .

(H<sub>3</sub>) | Odwzorowanie  $w \mapsto g(v, w)$  posiada, dla każdego  $v \in V$ , pochodną Gâteaux  $D_2g(v, w)$  względem drugiej zmiennej w punkcie  $w=v$ , taką że dla każdego  $w^* \in V^*$  zbiór

$$\{v \in V \mid D_2g(v, v) = w^*\},$$

zawiera co najwyżej jeden element  $(D_2g)^{-1}(w^*)$ .

Wzmiankowana pochodna w sensie Gâteaux jest zdefiniowana następująco

$$(4.1) \quad \langle D_2g(v, w), z \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{g(v, w + \lambda z) - g(v, w)}{\lambda}, \quad \forall z \in V.$$

Zgodnie z założeniem (H<sub>3</sub>) zbiór  $(D_2g)^{-1}(w^*)$  może być pusty.

Pierwotną niejawną nierówność wariacyjną, dla której zbudujemy zagadnienie dualne, formułujemy jako

Zadanie P

Znaleźć  $u \in V$  takie, że

$$(4.2) \quad \varphi(u, u) + g(u, u) \leq \varphi(u, w) + g(u, w), \quad \forall w \in V.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że w założeniach (H<sub>1</sub>) i (H<sub>2</sub>) wypukłość dotyczy jedynie drugiego argumentu. Właśnie ten fakt jest bardzo istotny, gdyż pozwala korzystać z analizy wypukłej. Ważną rolę w dalszych rozważaniach odgrywać będą funkcjonały sprzężone w sensie Fenchela (polarne) z funkcjonałami  $\varphi(v, \cdot)$ ,  $g(v, \cdot)$ .

Zgodnie z definicją mamy [33,87]

$$(4.3) \quad \varphi^*(v, w^*) = \sup \{ \langle w^*, w \rangle - \varphi(v, w) \mid w \in V \}, \quad w^* \in V^*,$$

$$(4.4) \quad g^*(v, w^*) = \sup \{ \langle w^*, w \rangle - g(v, w) \mid w \in V \}, \quad w^* \in V^*.$$

Subgraniczna funkcjonału wypukłego  $g(v, \cdot)$  jest określona następująco

$$(4.5) \quad \partial_2 g(v, w) = \{ w^* \in V^* \mid g(v, z) - g(v, w) \geq \langle w^*, z - w \rangle, \quad \forall z \in V \}.$$

Z założenia  $(H_2)$  wynika, że dla  $w=v$  subgraniczna ta jest zbiorem wypukłym i niepustym.

Zadanie dualne brzmi:

$$(P^*) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć } u \in V \text{ i } u^* \in V^* \text{ takie, że} \\ \varphi^*(u, u^*) - \langle u^*, u \rangle \leq \varphi^*(u, w^*) - \langle w^*, u \rangle, \quad \forall w^* \in V^* . \end{array} \right.$$

Zadania  $P$  i  $P^*$  wiąże

**Twierdzenie 4.1.** Niech spełnione będą założenia  $(H_1)$  i  $(H_2)$ . Jeśli  $u$  jest rozwiązaniem zadania  $P$  to istnieje  $u^* \in V^*$  takie, że  $(u, u^*)$  jest rozwiązaniem zadania dualnego  $P^*$ . Na odwrót, jeśli  $(u, u^*)$  jest rozwiązaniem zadania  $P^*$  to wówczas  $u$  jest rozwiązaniem zadania pierwotnego  $P$ . Spełniony jest następujący warunek ekstremalności

$$(4.6) \quad \varphi(u, u) + \varphi^*(u, u^*) = \langle u^*, u \rangle = -[g(u, u) + g^*(u, -u^*)] .$$

Przed przystąpieniem do dowodu powyższego twierdzenia celowe jest podanie niezbędnych rezultatów z zakresu analizy wypukłej [33,87,111,128].

Jak zwykle przez  $\Gamma_0(V)$  oznaczymy zbiór funkcji określonych na  $V$ , które są wypukłe, właściwe i dolnie półciągłe (d.p.), tzn.:

$$\Gamma_0(V) = \{ f \mid f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, f \neq +\infty, f \text{ - d.p.} \}.$$

Sformułujemy teraz kilka pożytecznych w dalszych rozważaniach lematów.

**Lemat 4.1.** Niech  $f \in \Gamma_0(V)$ . Następujące własności są równoważne:

$$(i) \quad f(u) + f^*(u^*) = \langle u^*, u \rangle .$$

$$(ii) \quad u^* \in \partial f(u) .$$

$$(iii) \quad u \in \partial f^*(u^*) .$$

Lemat 4.2. Niech  $f_\alpha \in \Gamma_0(V)$  ( $\alpha=1,2$ ) i załóżmy, że istnieje punkt  $v_0 \in V$ , w którym funkcje  $f_1$  i  $f_2$  przyjmują wartości skończone, przy czym jedna z nich jest ciągła w tym punkcie.

Wówczas mamy

$$(4.7) \quad \partial(f_1+f_2)(v) = \partial f_1(v) + \partial f_2(v), \quad \forall v \in V.$$

Lemat 4.3. Niech  $f: V \rightarrow \bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ . Element  $u \in V$  jest minimizerem funkcji  $f$ , tzn.

$$(4.8) \quad f(u) = \min_{v \in V} f(v) \quad (\text{dla } f(u) \text{ skończonego})$$

wtedy i tylko wtedy gdy  $0 \in \partial f(u)$ .

Ponadto jeśli  $f \in \Gamma_0(V)$  to zbiór minimizerów spełniających (4.8) jest równy subgraniczce  $\partial f^*(0)$ .

Definicja 4.1. Niech  $f_1$  i  $f_2$  będą dwiema funkcjami,  $f_\alpha: V \rightarrow \bar{R}$ . Funkcja

$$(4.9) \quad f(v) = \inf\{f_1(v_1) + f_2(v_2) \mid v_1 + v_2 = v, v_\alpha \in V\} = \\ = \inf\{f_1(v_1) + f_2(v-v_1) \mid v_1 \in V\},$$

nosi nazwę inf-splotu (ang. infimal convolution, inf-convolution). Oznaczana będzie następująco:

$$f = f_1 \square f_2.$$

Należy obecnie omówić istotne własności inf-splotu.

(a) Jeśli funkcje  $f_1$  i  $f_2$  są wypukłe to funkcja  $f_1 \square f_2$  jest też wypukła.

(b) Zakładając, że  $f_\alpha \neq +\infty$  mamy

$$(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*.$$

(c) Niech  $f_\alpha \in \Gamma_0(V)$  ( $\alpha=1,2$ ). Załóżmy, że istnieje punkt  $v_0^*$ , w którym funkcje te są skończone, przy czym jedna z nich jest ciągła w tym punkcie.

Wówczas  $f_1 \square f_2 \in \Gamma_0(V)$ . Ponadto ten inf-splot jest dokładny.

Definicja 4.2. Mówimy, że inf-splot  $f_1 \square f_2$  jest dokładny, jeśli dla każdego  $v \in V$  infimum jest osiągnięte. Oznacza to, że wówczas mamy

$$(f_1 \square f_2)(v) = \min\{f_1(v_1) + f_2(v_2) \mid v_1 + v_2 = v\}.$$



Istnieją więc elementy  $v_1, v_2 \in V$  takie, że  $v = v_1 + v_2$  oraz

$$(f_1 \square f_2)(v) = f_1(v_1) + f_2(v_2).$$

Dokonując oczywistych zmian w powyższej definicji możemy mówić o dokładności inf-splotu w punkcie.

(d) Niech  $f_1, f_2: V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $f_\infty \neq +\infty$ . Jeśli inf-splot  $f_1 \square f_2$  jest dokładny w punkcie  $v = v_1 + v_2$  to

$$\partial(f_1 \square f_2)(v) = \partial f_1(v_1) \cap \partial f_2(v_2).$$

(e) Przy założeniach lematu 4.2. mamy

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* \square f_2^*,$$

a inf-splot  $f_1^* \square f_2^*$  jest dokładny.

Dowód twierdzenia 4.1. Załóżmy, że  $u$  jest rozwiązaniem zadania pierwotnego P. Zapišmy N.N.W. (4.2) w równoważnej postaci

$$\varphi(u, w) + g(u, w) - [\varphi(u, u) + g(u, u)] \geq \langle 0, w - u \rangle, \quad \forall w \in V,$$

gdzie  $0 \in V^*$ . Korzystając z założeń  $(H_1)$  i  $(H_2)$  oraz lematu 4.2 otrzymujemy

$$0 \in \partial_2[\varphi(u, u) + g(u, u)] = \partial_2 \varphi(u, u) + \partial_2 g(u, u).$$

Zauważmy, że zgodnie z lematem 4.3 funkcjonał  $[\varphi(u, w) + g(u, w)]$  osiąga minimum na  $V$  w punkcie  $w = u$  (chodzi oczywiście o minimum względem drugiego argumentu). Stosując lemat 4.1 i biorąc pod uwagę własności inf-splotu otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 \in \partial_2[\varphi(u, \cdot) + g(u, \cdot)](u) &\iff u \in \partial_2[\varphi(u, \cdot) + g(u, \cdot)]^*(0) = \\ &= \partial_2[\varphi^*(u, \cdot) \square g^*(u, \cdot)](0) = \partial_2 \varphi^*(u, u^*) \cap \partial_2 g^*(u, -u^*), \end{aligned}$$

gdź  $0 = u_1^* + u_2^*$ , czyli  $u^* := u_1^* = -u_2^*$ .

Skorzystalismy tutaj z dokładności inf-splotu  $\varphi^*(u, \cdot) \square g^*(u, \cdot)$  w punkcie 0.

Mamy więc zależności

$$(4.10) \quad u \in \partial_2 \varphi^*(u, u^*) \quad \text{i} \quad u \in \partial_2 g^*(u, -u^*),$$

równoważne związkom

$$(4.10) \quad u^* \in \partial_2 \varphi(u, u) \quad \text{i} \quad -u^* \in \partial_2 g(u, u).$$

Dowodzi to niepustości zbioru  $\partial_2 \varphi^*(u, u^*) \cap \partial_2 g^*(u, -u^*)$ .

Korzystając ponownie z lematu 4.1 otrzymujemy

$$(4.11) \quad \varphi(u, u) + \varphi^*(u, u^*) = \langle u^*, u \rangle ,$$

$$(4.12) \quad g(u, u) + g^*(u, -u^*) = \langle -u^*, u \rangle .$$

Uwzględniając założenie  $(H_1)$  mamy

$$(4.13) \quad \varphi(u, u) = \varphi^{**}(u, u) = \sup\{\langle w^*, u \rangle - \varphi^*(u, w^*) \mid w^* \in V^*\} .$$

Przypominamy, że  $\varphi^{**}(u, u) = \varphi^{**}(u, \cdot)(u)$ .

Zależności (4.11) i (4.13) dają nierówność

$$\varphi^*(u, u^*) - \langle u^*, u \rangle \leq \varphi^*(u, w^*) - \langle w^*, u \rangle, \quad \forall w^* \in V^* .$$

Nierówność ta i inkluzja (4.10)<sub>2</sub> pokazują, że para  $(u, u^*)$  stanowi rozwiązanie zadania dualnego  $P^*$ .

Drugą część tezy twierdzenia dowodzi się przez odwrócenie powyższego rozumowania. Warunek ekstremalności (4.6) wynika natychmiast z (4.11) i (4.12). Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

W zadaniu  $P^*$  występuje zmienna prymalna  $u$ , na przykład zmienna kinematyczna. Jeśli spełnione jest założenie  $(H_3)$  to zmienną tę można wyeliminować.

**Twierdzenie 4.2.** Przy założeniach  $(H_1)$ - $(H_3)$  element  $u \in V$  jest rozwiązaniem zadania pierwotnego  $P$  wtedy i tylko wtedy gdy  $u^* = -D_2g(u, u)$  stanowi rozwiązanie następującego zadania dualnego:

$$(P^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{znaleźć } u^* \in V^* \text{ takie, że} \\ \varphi^*[(D_2g)^{-1}(-u^*), u^*] - \langle u^*, (D_2g)^{-1}(-u^*) \rangle \leq \\ \leq \varphi^*[(D_2g)^{-1}(-u^*), w^*] - \langle w^*, (D_2g)^{-1}(-u^*) \rangle, \quad \forall w^* \in V^* . \end{array} \right.$$

Ponadto spełniony jest warunek ekstremalności (4.6).

**Zadanie bidualne.** Traktując ostatnie zadanie dualne jako pierwotne, możemy do niego zastosować operację dualności. W ten sposób otrzymamy zadanie bidualne  $P^{**}$ ; przy założeniu, że warunki  $(H_1)$ - $(H_3)$  pozostają słuszne.

W tym celu położmy

$$(4.15) \quad \tilde{\varphi}(v^*, w^*) = \varphi^*[(D_2g)^{-1}(-v^*), w^*] ,$$

$$(4.16) \quad \tilde{g}(v^*, w^*) = -\langle w^*, (D_2g)^{-1}(-v^*) \rangle ,$$

przy czym  $v^*, w^* \in V^*$ . Zadanie bidualne brzmi:

$$(P^{**}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć } u \in V \text{ takie, że} \\ \tilde{\varphi}^* [(D_2 \tilde{g})^{-1}(-u), u] - \langle (D_2 \tilde{g})^{-1}(-u), u \rangle \leq \\ \leq \tilde{\varphi}^* [(D_2 \tilde{g})^{-1}(-u), w] - \langle (D_2 \tilde{g})^{-1}(-u), w \rangle, \quad \forall w \in V. \end{array} \right.$$

Pomiędzy funkcjami  $g$  i  $\tilde{g}$  oraz  $\varphi$  i  $\tilde{\varphi}$  istnieje związek.

Lemat 4.4. Funkcja  $\tilde{g}$  spełnia warunek  $(H_3)$ . Dla każdego  $v, w \in V$  zachodzą związki

$$(4.17) \quad (D_2 \tilde{g})^{-1}(-w) = -D_2 g(w, w),$$

$$(4.18) \quad \tilde{\varphi}^* [(D_2 \tilde{g})^{-1}(-v), w] = \varphi(v, w).$$

Prosty dowód można znaleźć w pracy [152].

Korzystając z ostatniego lematu możemy zapisać zadanie bi-dualne w prostszej postaci:

$$(P^{**}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć } u \in V \text{ takie, że} \\ \langle D_2 g(u, u), v - u \rangle \geq \varphi(u, u) - \varphi(u, v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

Pomiędzy zadaniami  $P$  i  $P^{**}$  istnieje związek.

Twierdzenie 4.3. Przy założeniach  $(H_1)$ - $(H_3)$  element  $u \in V$  jest rozwiązaniem zadania  $P$  wtedy i tylko wtedy gdy  $u$  jest rozwiązaniem zadania  $P^{**}$ .

Dowód. Z tw.4.2 wynika, że  $u$  jest rozwiązaniem zadania  $P$  wtedy i tylko wtedy gdy  $u^* = -D_2 g(u, u)$  stanowi rozwiązanie zadania  $P^*$ , czyli wtedy i tylko wtedy gdy  $u = -D_2 \tilde{g}(u^*, u^*) = (D_2 g)^{-1}(-u^*)$  rozwiązuje zadanie  $P^{**}$ .

Porównując zadania  $P$  i  $P^{**}$  widzimy, że w ogólności są to zadania różne.

Wniosek 4.1. Zadania wariacyjne  $P$  i  $P^{**}$  pokrywają się wtedy i tylko wtedy gdy

$$(4.19) \quad g(v, w) = \langle (D_2 g)^{-1}(-v), v - w \rangle; \quad v, w \in V.$$

Zauważmy, że wówczas  $g(v, v) = 0$ , dla każdego  $v \in V$ . Korzystając z (4.17) otrzymujemy

$$(4.20) \quad g(v, w) - g(v, v) = \langle -D_2 g(v, v), v - w \rangle.$$

W zastosowaniach zależność (4.20) jest typowa, por. następny podrozdział.



Uwagi

(i) W wyprowadzeniu zadań  $P^*$  i  $P^{**}$  operacja sprzężenia "\*" dotyczy jedynie drugiego argumentu funkcji  $\varphi$  i  $g$ . Pozwala to rozpatrywać ogólniejszą postać zadania  $P$ ; na przykład zamiast funkcji  $\varphi(v, w)$  możemy rozpatrywać funkcję  $\varphi(Av, w)$ , gdzie  $A$  jest operatorem niekoniecznie liniowym,  $A: V \rightarrow Y$ , przy czym  $Y$  jest lokalnie wypukłą przestrzenią topologiczną, w szczególności przestrzenią Banacha.

(ii) Załóżmy, że  $\varphi(v, w)$  nie zależy od  $v$  i  $g(v, w) = \langle N(v), w - v \rangle$ , gdzie  $N: V \rightarrow V^*$  jest operatorem niekoniecznie liniowym. W takim przypadku dualna nierówność wariacyjna została wyprowadzona przez Mosco [116]. Zadania  $P$  i  $P^*$  mają, odpowiednio, postać:

Zadanie P

$$(4.20) \quad u \in D(N): \langle N(u), v - u \rangle \geq \varphi(u) - \varphi(v), \quad \forall v \in V.$$

Zadanie  $P^*$

$$(4.21) \quad u^* \in D(N'): \langle N'(u^*), v^* - u^* \rangle \geq \varphi^*(u^*) - \varphi^*(v^*), \quad \forall v^* \in V^*;$$

gdzie  $D(N)$  jest dziedziną operatora  $N$ , zaś  $N' = -N^{-1}; v^* - N^{-1}(-v^*)$ ,  $D(N') = -R(N)$ ;  $R(N)$  oznacza obraz operatora  $N$ ; funkcja  $\varphi$  jest wypukłą i dolnie półciągłą.

Zadanie dualne (4.21) otrzymuje się w prosty sposób stosując lemat 4.1, który daje następujące równoważności

$$(P) \iff \{u \in D(N): -N(u) \in \partial \varphi(u)\} \iff \{u^* \in D(N'): -N'(u^*) \in \partial \varphi^*(u^*)\}.$$

Warto zauważyć, że sformułowanie dualne w postaci N.W.(4.21) można stosować do zagadnień, w których operator  $N$  jest niepotencjalny w sensie braku symetrii jego pochodnej Gâteaux, por. [147]. W takim przypadku, gdy zadania  $P$  - czyli N.W.(4.20) - nie można sformułować w postaci zadania na minimalizację odpowiedniego funkcjonału, można zawsze rozpatrywać zadanie dualne w postaci (4.21).

## 5. ZASTOSOWANIE TEORII DUALNOŚCI W SENSIE M-CD-M DO ZAGADNIENIA SIGNORINIEGO Z TARCIEM W PRZYPADKU STATYCZNYM

Przedstawiona w poprzednim podrozdziale teoria dualności pozwoli nam na zbadanie zadań dualnych do zadań  $P_d$  i  $P_s$  z podrozdziału trzeciego. Okaże się, że nowe jest tylko zadanie  $P_d^*$ .

### 5.1. Kontakt ciała sprężystego ze sztywnym

Rozważania związane z dualnością zostaną podzielone na kilka etapów.

Etap 1. Wyprowadzenie zadania  $P_d^*$ . Położmy

$$(5.1) \quad g(\underline{u}, \underline{v}) = a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) - \mathcal{L}(\underline{v} - \underline{u}); \underline{u}, \underline{v} \in V,$$

$$(5.2) \quad \varphi(\underline{u}, \underline{v}) = J(\underline{u}, \underline{v}) + I_{K_d}(\underline{v}),$$

gdzie przestrzeń  $V$  jest dana wzorem (3.9).

Założenia  $(H_1)$  i  $(H_2)$  są spełnione, co wynika z (5.1) i (5.2) oraz z faktu, że funkcjonał  $\varphi(\underline{u}, \cdot)$  jest sumą dwóch funkcji wypukłych i dolnie półciągłych. Przypomnijmy, że suma dwóch funkcjonałów dolnie półciągłych jest dolnie półciągła [30, Proposition 1.1.2].

Przejdźmy do warunku  $(H_3)$  i wyprowadzenia odwzorowania  $(D_2g)^{-1}$ . Znajdźmy jednakże najpierw funkcjonały sprzężone  $\varphi^*(v, \cdot)$  i  $g^*(v, \cdot)$ . Następujący lemat będzie użyteczny przy wyprowadzeniu postaci funkcjonału  $\varphi^*(v, \cdot)$ .

Lemat 5.1. [33, 87]. Jeśli  $U$  jest przestrzenią lokalnie wypukłą i  $C \in U$  domkniętym stożkiem wypukłym takim, że  $0 \in C$  to

$$(5.3) \quad (I_C)^*(v^*) = I_{C^*}(v^*),$$

gdzie  $C^*$  jest stożkiem polarnym do  $C$ , tzn.:

$$(5.4) \quad C^* = \{v^* \mid v^* \in U^*, v^* \leq 0\}.$$

Tutaj  $v^* \leq 0$  oznacza, że  $\langle v^*, v \rangle \leq 0, \forall v \in C$ .

Aby zastosować powyższy lemat zauważmy, że

$$(5.5) \quad I_{K_d}(\underline{v}) = I_{K_n}(\underline{v}_n^*) = I_{K_n}(v_n), \underline{v} \in V,$$

gdzie

$$(5.6) \quad K_n = \{z \in V_n \mid z \leq 0, z = (\underline{v}_z)_n|_{\Gamma_2}, z \in V\},$$

przy czym przestrzeń  $V$  jest dana zależnością (3.9), zaś  $\gamma^*$  jest operatorem śladu, tzn.  $\gamma^* \underline{v}$  jest wartością funkcji  $\underline{v}$  na brzegu;  $v_n = \gamma^* \underline{v} = (\gamma^* \underline{v})_n$ . W rozpatrywanym przypadku  $U = V_n = H^{1/2}(\Gamma_2)$ . Jeśli  $s_n \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$  to  $\langle s_n, v_n \rangle_{\Gamma_2}$  należy rozumieć w sensie dualności  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H^{1/2}(\Gamma_2)}$ . Z drugiej strony, jeśli  $s_n \in L^2(\Gamma_2)$  to

$$\langle s_n, v_n \rangle_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} s_n v_n d\Gamma.$$

Wyznamy teraz funkcjonał sprzężony  $\varphi^*(v, \cdot)$ . Mamy

$$\begin{aligned} \varphi^*(\underline{v}, \underline{w}^*) &= \sup \{ \langle \underline{w}^*, \underline{w} \rangle_{\Gamma_2} - J(\underline{v}, \underline{w}) - I_{K_D}(\underline{w}) \mid \underline{w} \in V \} = \\ &= \sup \{ [\langle w_n^*, w_n \rangle_{\Gamma_2} - I_{K_n}(w_n)] + [\langle w_t^*, w_t \rangle_{\Gamma_2} - \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} j[s_n(\underline{v}), w_t] d\Gamma \mid \langle \delta^* \underline{w} \rangle_{\Gamma_2} = \langle w_n, w_t \rangle_{\Gamma_2}, \underline{w} \in V \}. \end{aligned}$$

Uwzględniając lemat 5.1 i definicję funkcji  $j$  otrzymujemy

$$(5.7) \quad \varphi^*(\underline{v}, \underline{w}^*) = I_{K_n^*}(w_n^*) + I_C[s_n(\underline{v})](w_t^*),$$

$$(5.8) \quad K_n^* = \{ z^* \in V_n^* \mid \langle z^*, z \rangle_{\Gamma_2} \leq 0, \forall z \in K_n \},$$

$$(5.9) \quad C[s_n(\underline{v})] = \{ \underline{\theta} \mid \forall w_t = (\delta^* \underline{w})_t, \langle \underline{\theta}, w_t \rangle_{\Gamma_2} \leq J(\underline{v}, \underline{w}) \}.$$

Ostatnia zależność wynika z wniosku 13.2.1 podanego w książce Rockafellara [128]. Autor ten rozważa jedynie przestrzenie skończenie wymiarowe, jednakże wspomniany wniosek można łatwo rozszerzyć na przestrzenie nieskończenie wymiarowe.

Zbiór  $C(s_n)$  jest, dla ustalonego pola naprężeń normalnych na  $\Gamma_2$ , globalnym zbiorem dopuszczalnych naprężeń stycznych (na  $\Gamma_2$ ). W przypadku gdy  $s_n \in L^2(\Gamma_2)$  to  $C(s_n)(x) = K(s_n(x))$ , prawie wszędzie na  $\Gamma_2$ .

Zależność (5.7) możemy jeszcze zapisać inaczej

$$(5.10) \quad \varphi^*(\underline{v}, \underline{w}^*) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } w_n^* \in K_n^* \text{ i } w_t^* \in C[s_n(\underline{v})], \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Aby znaleźć jawną postać funkcjonału  $g^*(v, \cdot)$ , definiujemy operator  $A, A: V \rightarrow V^*$ , w następujący sposób:



$$(5.11) \quad \langle A \underline{v}, \underline{w} \rangle = \int_{\Omega} s_{ij}(\underline{v}) e_{ij}(\underline{w}) dx = a(\underline{v}, \underline{w}); \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Zakładając, że miara powierzchni  $\Gamma_0$ , na której rozpatrywany ośrodek jest utwierdzony, jest dodatnia, mamy [53, 119]

$$(5.12) \quad \langle A \underline{v}, \underline{v} \rangle = a(\underline{v}, \underline{v}) \gg c \|\underline{v}\|_V^2, \quad c > 0, \quad \underline{v} \in V.$$

Jako normę na  $V$  można wziąć którąś z norm równoważnych, na przykład

$$\|\underline{v}\|_V = \int_{\Omega} e_{ij}(\underline{v}) e_{ij}(\underline{v}) dx, \quad \underline{v} \in V.$$

Operator  $A$  jest ciągły, gdyż

$$(5.13) \quad \langle A \underline{v}, \underline{w} \rangle = a(\underline{v}, \underline{w}) \leq c_1 \|\underline{v}\|_V \|\underline{w}\|_V, \quad c_1 > 0.$$

Z (5.12) i (5.13) wnioskujemy, że istnieje liniowy i ciągły operator odwrotny  $G = A^{-1}$ ,  $G: V^* \rightarrow V$ . W tym przypadku jest on po prostu operatorem Greena dla mieszanego zagadnienia brzegowego elastostatyki, przy czym na  $\Gamma_2$  warunek brzegowy ma postać  $s_{ij} n_j = s_{ij} n_j$ . Położmy  $(S_i) = (s_{ij} n_j)|_{\Gamma_2}$ .

Znając operator Greena, przemieszczenia obliczamy z wzoru, (por. [120])

$$(5.14) \quad u_k(x) = [G(\underline{B}, \underline{F}, \underline{S})]_k = \int_{\Omega} B_i(y) G_{ik}(x, y) d\Omega(y) + \int_G F_i(y) G_{ik}(x, y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_2} S_i(y) G_{ik}(x, y) d\Gamma(y).$$

Korzystając z liniowości operatora  $G$  możemy napisać

$$(5.15) \quad \underline{u} = G(\underline{B}, \underline{F}) + G(\underline{S}) = \hat{\underline{u}} + G(\underline{S}),$$

gdzie  $\hat{\underline{u}} = G(\underline{B}, \underline{F})$ . Uwzględniając (5.11) otrzymujemy

$$(5.16) \quad g^*(\underline{v}, \underline{w}^*) = \sup \{ \langle \underline{w}^*, \underline{w} \rangle_{V^* \times V} - a(\underline{v}, \underline{w} - \underline{v}) + \mathcal{L}(\underline{w} - \underline{v}) \mid \underline{w} \in V \} = \\ = a(\underline{v}, \underline{v}) - \mathcal{L}(\underline{v}) + \sup \{ \langle \underline{w}^*, \underline{w} \rangle_{V^* \times V} - a(\underline{v}, \underline{w}) + \mathcal{L}(\underline{w}) \mid \underline{w} \in V \} = \\ = a(\underline{v}, \underline{v}) - \mathcal{L}(\underline{v}) + \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{w}^* = A \underline{v} - \underline{\mathcal{L}}, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie  $\underline{\mathcal{L}} = (\underline{B}, \underline{F})$ .

Wyznamy teraz pochodną  $D_2 g$ . Prosty rachunek daje

$$(5.17) \quad \langle D_2 g(\underline{v}, \underline{w}), \underline{h} \rangle_{V^* \times V} = a(\underline{v}, \underline{h}) - \mathcal{L}(\underline{h}) = \langle A \underline{v} - \underline{\mathcal{L}}, \underline{h} \rangle_{V^* \times V},$$

czyli

$$(5.18) \quad D_2g(\underline{y}, \underline{w}) = \underline{A} \underline{y} - \underline{\mathcal{L}}.$$

Wnioskujemy stąd, że  $D_2g$  nie zależy od drugiego argumentu funkcjonału  $g$ . Z (5.18) wynika, że jeśli  $\underline{u}$  jest rozwiązaniem zadania  $P_d$  to

$$(5.19) \quad D_2g(\underline{u}, \underline{u}) = \underline{A}\underline{u} - \underline{\mathcal{L}} \implies \underline{u} = \underline{G}\underline{A}\underline{u} = \underline{G}(\underline{B}, \underline{F}) + \underline{G}D_2g(\underline{u}, \underline{u}).$$

Porównując prawą stronę implikacji (5.19) z (5.15) wnioskujemy, że

$$(5.20) \quad \underline{S} = D_2g(\underline{u}, \underline{u}), \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Tym samym mamy

$$(5.21) \quad (D_2g)^{-1}(\underline{S}) = \underline{u} = \hat{\underline{u}} + \underline{G}(\underline{S}),$$

co dowodzi własności  $(H_3)$ .

Uwzględniając zależności (5.10) i (5.21) w nierówności (4.14) możemy sformułować zadanie dualne  $P_d^*$ .

Zadanie  $P_d^*$

$$\begin{aligned} & \text{Znaleźć } \underline{S} = (s_{ij}^n)_{\Gamma_2} = (s_n, \underline{s}_t) \in (-K_n^*) \times C(s_n) \text{ takie, że} \\ (5.22) \quad & \langle \underline{I} - \underline{S}, \underline{G}(\underline{S}) + \hat{\underline{u}} \rangle_{\Gamma_2} \geq 0, \quad \forall \underline{I} = (I_n, \underline{I}_t) \in (-K_n^*) \times C(s_n). \end{aligned}$$

Warunek ekstremalności (4.6) przyjmuje postać

$$(5.23) \quad J(\underline{u}, \underline{u}) = -\langle \underline{s}_t, \underline{u}_t \rangle_{\Gamma_2} - \langle s_n, u_n \rangle_{\Gamma_2} = -a(\underline{u}, \underline{u}) + \mathcal{L}(\underline{u}),$$

skąd

$$(5.24) \quad J(\underline{u}, \underline{u}) = -\langle \underline{s}_t, \underline{u}_t \rangle_{\Gamma_2}, \quad \langle s_n, u_n \rangle_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(5.25) \quad a(\underline{u}, \underline{u}) - \mathcal{L}(\underline{u}) - \langle \underline{s}_t, \underline{u}_t \rangle_{\Gamma_2} - \langle s_n, u_n \rangle_{\Gamma_2} = 0.$$

Nierówność kwasi-wariacyjna (5.22) jest nierównością określoną jedynie na  $\Gamma_2$ . Po rozpisaniu przyjmuje ona postać dwóch sprzężonych nierówności. Zachowujemy więc oznaczenie  $P_d^*$ .

Zadanie  $P_d^*$

$$\begin{aligned} & \text{Znaleźć } \underline{S} = (s_n, \underline{s}_t) \in (-K_n^*) \times C(s_n) \text{ takie, że} \\ (5.26) \quad & \langle I_n - s_n, [G(\underline{S})]_n + \hat{\underline{u}} \rangle_{\Gamma_2} \geq 0, \quad \forall I_n \in (-K_n^*), \\ (5.27) \quad & \langle I_t - \underline{s}_t, [G(\underline{S})]_t + \hat{\underline{u}} \rangle_{\Gamma_2} \geq 0, \quad \forall I_t \in C(s_n), \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.28) \quad [G(\underline{s})]_n = \int_{\Gamma_2} s_i(y) G_{ik}(x,y) n_k(x) d\Gamma(y),$$

$$(5.29) \quad [G(\underline{s})]_{ti} = [G(\underline{s})]_i - [G(\underline{s})]_n n_i.$$

Układ sprzężonych nierówności: wariacyjnej (5.26) i kwasi-wariacyjnej (5.27) pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń kontaktowych na  $\Gamma_2$ . Chodzi oczywiście o naprężenia normalne  $s_n$  i styczne  $s_t$ . Praktyczna trudność w stosowaniu sformułowania  $P_d^*$  polega na konieczności znajomości macierzy Greena  $[G_{ik}(x,y)]$ . Stąd w zastosowaniach muszą być zazwyczaj użyte procedury numeryczne. Występujące w (5.26) i (5.27) wyrażenia będą miały praktycznie postać całek, na przykład

$$\langle \underline{I}_t - \underline{s}_t, [G(\underline{s})]_t + \hat{u}_t \rangle_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} (\tau_{ti} - s_{ti}) ([G(\underline{s})]_{ti} + \hat{u}_{ti}) d\Gamma.$$

Etap 2. Udowodnimy, że  $P_d^{**} = P_d$ . Dowód jest prosty i wynika z wniosku 4.1 i lematu 4.4. W naszym przypadku mamy

$$\begin{aligned} g(\underline{v}, \underline{w}) &= a(\underline{v}, \underline{w} - \underline{v}) - \mathcal{L}(\underline{w} - \underline{v}) = \langle A \underline{v} - \underline{\mathcal{L}}, \underline{w} - \underline{v} \rangle_{V^* \times V} = \\ &= \langle D_2 g(\underline{v}, \underline{v}), \underline{w} - \underline{v} \rangle_{V^* \times V} = \langle (D_2 \tilde{g})^{-1}(-\underline{v}), \underline{v} - \underline{w} \rangle_{V^* \times V}. \end{aligned}$$

Etap 3. Polega na wykazaniu, że  $(P_S^*) = (P_d)$ . W tym celu wystarczy położyć, por. (3.24)

$$(5.30) \quad g(\underline{s}, \underline{\xi}) = b(\underline{s}, \underline{\xi} - \underline{s}),$$

$$(5.31) \quad \psi(s_n, \underline{\xi}) = I_{K_S}(s_n)(\underline{\xi})$$

przy czym  $\underline{\xi}, \underline{s} \in L^2(\Omega, E_S^3)$ . Traktując teraz zadanie naprężeniowe  $P_S$  jako zadanie pierwotne i stosując znowu teorię dualności w sensie M-CD-M dowodzimy, że  $(P_S^*) = (P_d)$ . Szczegółowy dowód podałem w pracy [152].

Rozumując podobnie jak na etapie poprzednim wnioskujemy, że  $(P_S^{**}) = (P_S)$ . Z drugiej strony wiemy już, iż  $(P_S^{**}) = (P_d^*)$ . Oznacza to, że  $(P_S^*) = (P_d)$ . W pierwszej chwili rezultat ten wydaje się dziwny, ale oznacza on, że zadanie  $P_d^*$ , określone na  $\Gamma_2$ , jest niczym innym jak alternatywnym sformułowaniem zadania  $P_S$ , możliwym dzięki wprowadzeniu operatora Greena.

Podsumowaniem głównych rezultatów niniejszego podpunktu może być następujący schemat



$$P_S \xrightarrow{(*)} P_d \xrightarrow{(*)} P_d^* \quad , \quad P^{**} = P .$$

gdzie (\*) oznacza operację dualności.

Uwaga

Bazując na rezultatach prac [18,152] Klarbring, Mikelić i Shillor [79,80] rozwiązali problem dualności dla zagadnienia z tarciami przy uwzględnieniu normalnej podatności podłoża.

5.2. Kontakt dwóch ciał sprężystych

Zastępując ciało (podłoże) sztywne ciałem odkształcalnym dochodzimy w naturalny sposób do kontaktu dwóch ciał odkształcalnych. W niniejszym podpunkcie zajmiemy się jednostronnym kontaktem z tarciami dwóch ciał liniowo sprężystych  $\bar{\Omega}_{\infty} (\infty=1,2)$ . Zakładamy, że ciała są utwierdzone na  $\Gamma_2^{(\infty)}$ . W tym przypadku powierzchnią potencjalnego kontaktu jest  $\Gamma_2 = \Gamma_2^{(1)} = \Gamma_2^{(2)}$ , zaś  $\underline{s}_t = \underline{s}_t^{(1)} = -\underline{s}_t^{(2)}$ ,  $[[u_n]] = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} \leq 0$ ,  $s_n = s_n^{(1)} = -s_n^{(2)}$ , przy założeniu, że wektor jednostkowy jest skierowany na zewnątrz obszaru  $\Omega_1$ . Warunki typu Signoriniego mają postać

$$(5.32) \quad s_n \leq 0, \quad [[u_n]] \leq 0, \quad s_n [[u_n]] = 0,$$

zaś subróżniczkowe prawo tarcia zapiszemy następująco

$$(5.33) \quad -[[\underline{u}_t]] \in \partial I_{K(s_n)}(\underline{s}_t), \quad \text{na } \Gamma_2,$$

gdzie

$$[[\underline{u}_t]] = \underline{u}_t^{(1)} - \underline{u}_t^{(2)}.$$

Przeprowadzając odpowiednie modyfikacje łatwo wykazać, że sformułowania wariacyjne są formalnie takie same jak w przypadku wcześniej rozpatrzonego jednostronnego kontaktu ciała sprężystego z ciałem sztywnym. Dla przykładu rozpatrzmy odpowiednik zadania  $P_d$ , który oznaczymy przez  $P_{d2}$ . W tym celu po-

łożmy  $\underline{u} = (\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)})$ ,  $\underline{b} = (\underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)})$ ,  $\underline{f} = (\underline{f}^{(1)}, \underline{f}^{(2)})$  oraz

$$(5.34) \quad a(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{\infty} a^{(\infty)}(\underline{u}^{(\infty)}, \underline{v}^{(\infty)}), \quad \mathcal{L}(\underline{v}) = \sum_{\infty} \mathcal{L}^{(\infty)}(\underline{v}^{(\infty)}),$$

gdzie

$$(5.35) \quad a^{(\alpha)}(\underline{u}^{(\alpha)}, \underline{v}^{(\alpha)}) = \int a_{ijkl}^{(\alpha)} e_{ij}(\underline{u}^{(\alpha)}) e_{kl}(\underline{v}^{(\alpha)}) dx; \quad \underline{u}^{(\alpha)}, \underline{v}^{(\alpha)} \in V_{\alpha}$$

$$(5.36) \quad \mathcal{L}^{(\alpha)}(\underline{v}^{(\alpha)}) = \int_{\Omega_{\alpha}} B_i^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} dx + \int_{\Gamma_1^{(\alpha)}} F_i^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} d\Gamma \quad (\alpha !)$$

Symbol  $(\alpha !)$  oznacza tutaj, że po wskaźniku  $\alpha$  nie ma sumowania. Zbiór kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń określamy następująco

$$(5.37) \quad K_{d2} = \{ \underline{v} = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}) \in V \mid \llbracket v_n \rrbracket \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_2 \},$$

gdzie

$$(5.38) \quad V = V_1 \times V_2 = \{ \underline{v} = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}) \mid \underline{v}^{(\alpha)} \in H^1(\Omega_{\alpha}; R^3), \underline{v}^{(\alpha)} = 0 \text{ na } \Gamma_0^{(\alpha)} \}.$$

Praca wirtualna naprężeń stycznych na  $\Gamma_2$ , związana z tarciem, wyraża się zależnością

$$(5.39) \quad J(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma_2} d(s_n(\underline{u}), - \llbracket v_t \rrbracket) d\Gamma,$$

gdzie

$$s_n(\underline{u}) = s_n(\underline{u}^{(1)}) = - s_n(\underline{u}^{(2)}).$$

Postępując podobnie jak przy wyprowadzaniu zadania  $P_d$  otrzymujemy sformułowanie wariacyjne jednostronnego kontaktu z tarciem dwóch ciał liniowo sprężystych.

Zadanie  $P_{d2}$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć } \underline{u} = (\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}) \in K_{d2} \text{ takie, że} \\ (5.40) \quad a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) + J(\underline{u}, \underline{v}) - J(\underline{u}, \underline{u}) \geq \mathcal{L}(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in K_{d2}. \end{array} \right.$$

Przejdźmy do sformułowania dualnego  $P_{d2}^*$ , gdyż tylko to zadanie jest istotnie nowe. W tym celu definiujemy

$$(5.41) \quad K_n^2 = \{ z \leq 0 \mid z = z^{(1)} - z^{(2)}, \quad z^{(\alpha)} = (\alpha^{\flat} z^{(\alpha)})_n|_{\Gamma_2}, \quad z^{(\alpha)} \in V_{\alpha} \}, \quad (\alpha !),$$

gdzie  $\alpha^{\flat}$  jest operatorem śladu związanym z przestrzenią  $V_{\alpha}$ , tzn.  $\alpha^{\flat} z^{(\alpha)}$  ( $\alpha !$ ) jest wartością funkcji  $z^{(\alpha)} \in V_{\alpha}$  na brzegu  $\Gamma^{(\alpha)} = \partial\Omega_{\alpha}$ . Zbiór  $K_n^2$  jest zbiorem (stożkiem) kinematycznie dopuszczalnych skoków przemieszczeń normalnych na  $\Gamma_2$ . Statycznie dopuszczalne naprężenia normalne na  $\Gamma_2$  należą do stożka polarnego

$$(5.42) \quad (K_n^2)^* = \{ z^* \in V_n^* \mid \langle z^*, z \rangle_{\Gamma_2} \leq 0, \quad \forall z \in K_n^2 \},$$

O przestrzeni  $V_n$  i  $V_n^*$  była mowa w pun.cie 5.1 (etap 1).

Wprowadzając operatory Greena  $G_\alpha$  możemy napisać

$$(5.43) \quad \underline{u}^{(1)} = \hat{\underline{u}}^{(1)} + G_1(\underline{s}), \quad \underline{u}^{(2)} = \hat{\underline{u}}^{(2)} - G_2(\underline{s}),$$

gdzie  $\underline{s} = (s_{ij}n_j) \Big|_{\Gamma_2}$ ,  $\hat{\underline{u}}^{(\alpha)} = G_\alpha(\underline{B}^{(\alpha)}, \underline{F}^{(\alpha)}), (\alpha=1, 2)$ .

Obecnie mamy  $D_2g(\underline{u}, \underline{u}) = (A^{(1)}\underline{u}^{(1)} - \underline{p}^{(1)}, A^{(2)}\underline{u}^{(2)} - \underline{p}^{(2)}) = (\underline{s}, -\underline{s})$ ,  
czyli  $\underline{u}^* = (\underline{s}, -\underline{s})$ ,  $(D_2g)^{-1}(\underline{s}, -\underline{s}) = (\underline{u}^{(1)} + G_1(\underline{s}), \underline{u}^{(2)} - G_2(\underline{s}))$ .

Możemy już teraz skorzystać z ogólnej postaci zadania dualnego, czyli nierówności (4.14).

Zadanie  $P_{d2}^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Znaleźć } S = (s_n, s_t) \in -(K_n^2)^* \times C(s_n) \text{ takie, że} \\ (5.44) \quad \langle \underline{I} - \underline{s}, (G_1 + G_2)(\underline{s}) + \llbracket \hat{\underline{u}} \rrbracket \rangle_{\Gamma_2} \geq 0, \forall \underline{I} \in -(K_n^2)^* \times C(s_n), \end{array} \right.$$

gdzie  $\llbracket \hat{\underline{u}} \rrbracket = \hat{\underline{u}}^{(1)} - \hat{\underline{u}}^{(2)}$ , na  $\Gamma_2$ .

Szczególnie interesujący jest przypadek gdy jeden z obszarów, powiedzmy  $\Gamma_2$ , jest półprzestrzenią,

$$\Omega_2 = R_-^3 = \{x = (x_i) \in R^3 \mid x_3 < 0\},$$

zaś  $\Gamma_0^{(1)} = \emptyset$ ,  $\Gamma^{(2)} = \partial\Omega_2 = R^2 \times \{0\}$ .

Obszar  $\Gamma_2$  potencjalnego kontaktu jest wówczas obszarem płaskim i stanowi oczywiście część płaszczyzny  $\Gamma^{(2)}$ . Również obszar  $\Gamma_1^{(2)}$  zawiera się w tej płaszczyźnie. Ponieważ ciało pierwsze nie jest utwierdzone ( $\Gamma_0^{(1)} = \emptyset$ ), przeto mamy do czynienia z tzw. zagadnieniem semi-koercywnym, por. [74]. Przeanalizujemy wynikające stąd konsekwencje związane z ruchami sztywnymi ciała  $\bar{\Omega}_1$ . Przez  $\mathcal{R}^{(1)}$  oznaczymy przestrzeń ruchów sztywnych tego ciała i równoległych do  $\Gamma^{(2)}$

$$(5.45) \quad \mathcal{R}^{(1)} = \{ \underline{g}^{(1)} \mid \underline{g}^{(1)} = \underline{c} + \underline{c}_0 \wedge x, \quad \underline{c} \text{ i } \underline{c}_0 \text{ są} \\ \text{wektorami stałymi, } c_3 = 0, c_{01} = c_{02} = 0 \}.$$

Pozostawiając na razie na boku kwestię doboru przestrzeni  $V_1$  i  $V_2$ , założmy, że  $\underline{u} = (\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)})$  jest rozwiązaniem N.N.W. (5.40). Weźmy  $\underline{v} = (\underline{u}^{(1)} + \underline{g}^{(1)}, \underline{u}^{(2)})$ , przy czym  $\underline{g}^{(1)} \in \mathcal{R}^{(1)}$ ; widzimy że  $\underline{v} \in K_{d2}$ . Otrzymujemy wówczas

$$(5.46) \quad \int_{\Gamma_2} [d(s_n(\underline{v}), -\llbracket \underline{u}_t \rrbracket - \underline{g}^{(1)}) - d(s_n(\underline{u}), -\llbracket \underline{u}_t \rrbracket)] d\Gamma \geq \mathcal{L}^{(1)}(\underline{g}^{(1)}).$$



Wiemy, że funkcja  $d(s_n, \cdot)$  jest wypukła i dodatnio jednorodna; daje to zależność

$$(5.47) \quad d(s_n(\underline{u}), -\llbracket \underline{u}_t \rrbracket - \underline{g}^{(1)}) = 2d[s_n(\underline{u}), \frac{1}{2}(\llbracket \underline{u}_t \rrbracket) + \frac{1}{2}(-\underline{g}^{(1)})] \leq \\ \leq d(s_n(\underline{u}), -\llbracket \underline{u}_t \rrbracket) + d(s_n(\underline{u}), -\underline{g}^{(1)}).$$

Uwzględniając (5.47) w (5.46) otrzymujemy

$$(5.48) \quad \int_{\Gamma_2} d(s_n(\underline{u}), -\underline{g}^{(1)}) d\Gamma \geq \mathcal{L}^{(1)}(\underline{g}^{(1)}), \quad \forall \underline{g}^{(1)} \in \mathcal{R}^{(1)}.$$

Interpretacja fizyczna nierówności (5.48) jest oczywista: dla każdego przemieszczenia sztywnego  $\underline{g}^{(1)} \in \mathcal{R}^{(1)}$  praca wirtualna sił masowych i powierzchniowych nie może być większa od wirtualnej pracy sił tarcia.

Założmy, że funkcja  $d(s_n, \cdot)$  jest symetryczna względem drugiego argumentu, tzn.  $d(s_n, \underline{z}) = d_1(s_n, |\underline{z}|)$ . W takim przypadku, ponieważ  $\mathcal{R}^{(1)}$  jest przestrzenią, więc nierówność (5.48) implikuje

$$(5.49) \quad \int_{\Gamma_2} d_1(s_n(\underline{u}), |\underline{g}^{(1)}|) d\Gamma \geq \mathcal{L}^{(1)}(\underline{g}^{(1)}), \quad \forall \underline{g}^{(1)} \in \mathcal{R}^{(1)}.$$

Przez  $\Delta^{(1)}$  oznaczmy zbiór ruchów sztywnych pierwszego ciała zgodnych z jednostronnym kontaktem z półprzestrzenią  $R_-^3$

$$(5.50) \quad \Delta^{(1)} = \{ \underline{g}^{(1)} \mid \underline{g}^{(1)} = \underline{c} + \underline{c}_0 \wedge x, \quad \underline{c} \text{ i } \underline{c}_0 \text{ są wektorami} \\ \text{stałymi, takimi że } c_3 + c_{01}x_2 - c_{02}x_1 \leq 0 \text{ dla } (x_1, x_2) \in \Gamma_2 \}.$$

Położmy  $\underline{v} = (\underline{u}^{(1)} + \underline{g}^{(1)}, \underline{u}^{(2)})$  w N.N.W.(5.40), gdzie  $\underline{g}^{(1)} \in \Delta^{(1)}$ . Pole przemieszczeń wirtualnych  $\underline{v} \in K_{d2}$ , a wspomniane podstawienie prowadzi do zależności

$$(5.51) \quad \int_{\Gamma_2} d(s_n(\underline{u}), -\underline{g}^{(1)}) d\Gamma \geq \mathcal{L}^{(1)}(\underline{g}^{(1)}), \quad \forall \underline{g}^{(1)} \in \Delta^{(1)}.$$

Zbiór  $\Delta^{(1)}$  nie jest, w przeciwieństwie do  $\mathcal{R}^{(1)}$ , przestrzenią lecz stożkiem zawierającym  $\mathcal{R}^{(1)}$ .

Z powyższych wywodów wnioskujemy, że warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania zadania  $P_{d2}$ , w przypadku kontaktu z tarcie ciała ograniczonego ( $\Gamma_0^{(1)} = \emptyset$ ) z półprzestrzenią jest spełnienie nierówności (5.51).

Na zakończenie przejdźmy do doboru przestrzeni, do których należą przemieszczenia. Ponieważ obszar  $\Omega_1$  jest ograniczony więc  $V_1 = H^1(\Omega, R^3)$ . Jako przestrzeń  $V_2$  można wziąć przestrzeń wprowadzoną przez Barros-Neto [14], por. również [19, 20,

151,152]. W naszym przypadku mamy

$$(5.52) \quad V_2 = \{ \underline{v}^{(2)} | \underline{v}^{(2)} \in L^6(R_-^3, R^3), v_{i,j}^{(2)} \in L^2(R_-^3) \}.$$

Istnieje ciągle odwzorowanie liniowe z  $V_2$  w  $L^4(\Gamma^{(2)})$ . Oznacza to, że "wartości" przemieszczenia wirtualnego  $\underline{v}^{(2)}$  są dobrze określone na brzegu rozpatrywanej półprzestrzyny. Przestrzeń  $V_2$  jest większa od przestrzeni  $H^1(R_-^3, R^3)$ , stąd jej zaleta. Przy takim doborze przestrzeni  $V_2$  naturalny jest następujący dobór obciążeń:

$$(5.43) \quad B_i^{(2)} \in L^{6/5}(R_-^3), F_i^{(2)} \in L^{4/3}(\Gamma_1^{(2)}).$$

Jeśli chodzi o macierz Greena  $[G_{1ij}(x^{(1)}, y^{(1)})]$ , gdzie  $x^{(1)}, y^{(1)} \in \Omega_1$ , to jest to macierz dla drugiego zagadnienia elastostatyki [120].

#### Uwagi

1. Rozpatrzmy klasyczne zagadnienie Signoriniego bez tarcia. Wówczas na  $\Gamma_2$  mamy jedynie warunki (3.5), a zamiast prawa tarcia (3.6) warunek  $\underline{s}_t = 0$  (na  $\Gamma_2$ ). N.N.W. (3.17) redukuje się do znacznie prostszej nierówności wariacyjnej

$$(5.54) \quad \underline{u} \in K_D: a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq \mathcal{L}(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in K_D.$$

N.K.W. (5.22) redukuje się do nierówności wariacyjnej

$$(5.55) \quad s_n \in (-K_n^*): \int_{\Gamma_2} (z^* - s_n) ([G(s_n)]_n + \hat{u}_n) d\Gamma \geq 0, \quad \forall z^* \in (-K_n^*).$$

Ostatnia nierówność wariacyjna została po raz pierwszy wyprowadzona przez Kikuchiego [76] i nazwana "wzajemną nierównością wariacyjną" ("reciprocal variational inequality"). Jest ona niczym innym jak dualną nierównością wariacyjną w sensie Mosco, por. (4.21). Zwrócono na to uwagę już w pracy [151]. Nierówność wariacyjną (5.55) na wyznaczenie kontaktowych naprężeń normalnych Kikuchi wyprowadził w sposób formalny, bez odwoływania się do dualności w sensie Mosco.

2. Problem kontaktu jednostronnego dwóch ciał, z których jedno jest ograniczone a drugie półprzestrzenią rozpatrzył również Boucher [19,20], ale bez uwzględniania tarcia.

## 6. ZAGADNIENIE SIGNORINIEGO Z TARCIEM: PRZYPADEK KWASI- -STATYCZNY

Założmy obecnie, że siły masowe  $\underline{B}$  i powierzchniowe  $\underline{F}$  są funkcjami nie tylko zmiennych przestrzennych, ale i czasu  $\tau \in [0, \tau_0]$ ,  $\tau_0 > 0$ . Rozpatrzmy jedynie przypadek kwasi-statyczny, chociaż możliwe jest uogólnienie poniższych rozważań na zagadnienie dynamiczne. Zazwyczaj będziemy stosować oznaczenie  $\underline{u}(\tau)$  zamiast  $\underline{u}(x, \tau)$ ; innymi słowy  $\underline{u}(\tau) = \{ \underline{u}(x, \tau), x \in \Omega \}$ , por. [101]. Niniejszy podrozdział jest oparty na pracy [156].  
Rozpatrzmy najpierw sformułowanie silne.

### Zadanie $Q_1$

Znaleźć  $\underline{u}(\tau)$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) takie, że

$$(6.1) \quad s_{ij,j}(\underline{u}(\tau)) + B_i(\tau) = 0, \quad \text{w } \Omega \times [0, \tau_0],$$

$$(6.2) \quad s_{ij}(\tau) = s_{ij}(\underline{u}(\tau)) = a_{ijkl} e_{kl}(\underline{u}(\tau)),$$

$$(6.3) \quad \underline{u}(\tau) = 0, \quad \text{na } \Gamma_0 \times [0, \tau_0],$$

$$(6.4) \quad s_{ij}(\tau) n_j = F_i(\tau), \quad \text{na } \Gamma_1 \times [0, \tau_0],$$

$$(6.5) \quad u_n(\tau) \leq 0, \quad s_n(\tau) \leq 0, \quad s_n(\tau) u_n(\tau) = 0$$

$$(6.6) \quad -\dot{\underline{u}}_t(\tau) \in \partial I_{K(s_n)}(\underline{s}_t(\tau)) \quad \left. \vphantom{\dot{\underline{u}}_t(\tau)} \right\} \text{na } \Gamma_2 \times [0, \tau_0],$$

$$(6.7) \quad \underline{u}(0) = 0.$$

Przejdźmy do sformułowania wariacyjnego. Odnosnie obciążeń przyjmujemy następujące założenie

$$(6.8) \quad B_i(\tau) \in L^2(\Omega), \quad F_i(\tau) \in L^2(\Gamma_1), \quad \text{dla p.w. } \tau \in (0, \tau_0).$$

Poza tym zakładamy, że  $a_{ijkl}$  nie zależy od czasu.

Ze względu na to, że w warunkach Signoriniego (6.5) występują przemieszczenia, zaś w prawie tarcia (6.6) mamy do czynienia z prędkością przemieszczenia stycznego  $\dot{\underline{u}}_t$ , przeto nie można uzyskać, jak się wydaje, sformułowania wariacyjnego w postaci jednej tylko nierówności wariacyjnej. Jak dotychczas, nikt takiego sformułowania nie uzyskał. Zgodnie z ideą przedstawioną



w pracy [152], można uzyskać sformułowanie wariacyjne w postaci dwóch sprzężonych nierówności. W zadaniu wariacyjnym, które sformułujemy, przestrzeń  $V$  jest określona wzorem (3.9).

Zadanie  $Q_d$

Znaleźć  $\underline{u}(\tau) \in V$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) takie, że  $\dot{\underline{u}}(\tau) \in V$  oraz

$$(6.9) \quad a(\underline{u}(\tau), \underline{v} - \dot{\underline{u}}(\tau)) + J(\underline{u}(\tau), \underline{v}) - J(\underline{u}(\tau), \dot{\underline{u}}(\tau)) - \\ - \int_{\Gamma_2} \sigma_n(\underline{u}(\tau))(v_n - \dot{u}_n(\tau)) d\Gamma \geq \mathcal{L}(\underline{v} - \dot{\underline{u}}(\tau)), \quad \forall \underline{v} \in V,$$

$$(6.10) \quad \int_{\Gamma_2} \sigma_n(\underline{u}(\tau))(w - u_n(\tau)) d\Gamma \geq 0, \quad \forall w \in K_n,$$

$$(6.11) \quad \underline{u}(0) = 0.$$

Ścisłe rzecz biorąc w N.W. (6.10) zamiast całki po  $\Gamma_2$  powinniśmy napisać  $\langle \dots \rangle_{\Gamma_2}$ .

Mając na uwadze zastosowania będziemy jednak używać symbolu całki, pamiętając o tym, że w ogólności jest to tylko oznaczenie symboliczne. Zwróćmy również uwagę na to, że w N.N.W. (6.9) pole  $\underline{v}$  oznacza wirtualną prędkość przemieszczeń, a nie przemieszczenia przygotowane.

N.N.W. (6.9) otrzymujemy mnożąc równanie równowagi (6.1) przez  $(\underline{v} - \dot{\underline{u}}(\tau))$ , całkując otrzymane wyrażenie przez części i wykorzystując następnie zależności (6.2)-(6.4) i (6.6). Nierówność wariacyjna (6.10) jest niczym innym jak globalną postacią warunków Signoriniego (6.5). Zwróćmy bowiem uwagę na to, iż  $\sigma_n u_n = 0$ , zaś  $\sigma_n w \geq 0$  dla każdego  $w \in K_n$ . Należy jeszcze skomentować warunek początkowy (6.11), który dla prostoty przyjęto jako jednorodny. Wydaje się jednakże, że w zagadnieniu kwasi-statycznym takie założenie jest fizycznie sensowne.

Jeśli  $\underline{u}, \dot{\underline{u}} \in L^p([0, \tau_0], V)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) to  $u \in C([0, \tau_0], V)$ , por. [101, rozdz. I, lemat 1.2]. Oznacza to, że przemieszczenie  $\underline{u}$  jest wówczas funkcją ciągłą względem czasu na przedziale  $[0, \tau_0]$ . Tym samym  $\underline{u}(0)$  ma sens.

Andersson [4] zbadał problem istnienia globalnego w czasie rozwiązania dla kwasi-statycznego zagadnienia z tarcieniem dla ciała liniowo sprężystego przy uwzględnieniu normalnej podatności podłoża. Model taki jest prostszy do analizy, gdyż zastę-

puje się podłoże sztywne (warunki Signoriniego) podłożem odkształcalnym. Z pracy Anderssona wynika ciekawy wniosek: uwzględnienie tarcia powoduje, że rozwiązania względem czasu są nieciągłe. Otwarty pozostaje problem przejścia do podłoża sztywnego, czyli warunków Signoriniego. Wydaje się jednakże, że i w przypadku warunków Signoriniego z tarciami rozwiązanie  $\underline{u}$  zadania  $Q_d$  będzie nieciągłe względem czasu, czyli  $\underline{u} \in BV[(0, \tau_0), V]$ . Przypomnijmy, iż jeśli funkcja  $\underline{u} \in BV[(0, \tau_0), V]$  to prędkość  $\dot{\underline{u}}$  jest miarą ograniczoną, czyli należy do przestrzeni większej niż  $L^p[(0, \tau_0), V]$ , por. [26, Dodatek]. W takim przypadku funkcja ma w zerze dwie wartości: lewostronną  $\underline{u}^-(0)$  i prawostronną  $\underline{u}^+(0)$ , które nie muszą być równe. Warunek początkowy (6.10) należy wówczas rozumieć jako, por. [113]

$$(6.11') \quad \underline{u}^-(0) = 0.$$

Nierówność wariacyjną (6.10) można zapisać w następującej równoważnej postaci

$$(6.12) \quad \int_{\Gamma_2} \sigma_n(\underline{u}(\tau))(w - u_n(\tau)) d\Gamma + I_{K_n}(w) - I_{K_n}(u_n(\tau)) \geq 0, w \in V_{\Gamma_2},$$

gdzie

$$(6.13) \quad V_{\Gamma_2} = \{w|_{\Gamma_2} \mid w \in H^{1/2}(\Gamma), w = 0 \text{ na } \Gamma_0\}.$$

Przejdźmy do wariacyjnego sformułowania naprężeniowego. Związek konstytutywny (6.2) i warunek początkowy (6.7) implikują:  $\underline{s}(0) = 0$ .

Definiujemy zbiór  $K_S^0(s_n)$  naprężeń dopuszczalnych

$$(6.14) \quad K_S^0(s_n) = \{ \underline{s} \in H_S \mid \sigma_{ij,j} + B_i = 0, w \in \Omega; \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ na } \Gamma_1; \sigma_n = s_n, \underline{s}_t \in K(s_n) \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Zbiór  $K_S^0(s_n)$  jest różny od zbioru  $K_S(s_n)$ , danego zależnością (3.18), gdyż obecnie nie zakładamy, że  $\sigma_n \leq 0$ . Jednakże warunek niedodatniości dopuszczalnych naprężeń normalnych  $\sigma_n$  na  $\Gamma_2$  będzie zawarty w poniższej N.W. (6.17).

Niech  $\underline{s}(\tau)$  będzie polem naprężeń zaś  $\underline{u}(\tau)$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) polem przemieszczeń rozwiązujących zadanie  $Q_1$ . Możemy więc napisać

$$(6.15) \quad 0 = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - s_{ij,j}(\tau)) \dot{u}_i(\tau) dx - b(\dot{\underline{s}}(\tau), \underline{s} - \underline{s}(\tau)) + \int_{\Gamma_2} (\underline{s}_t - s_t(\tau)) \cdot \dot{\underline{u}}_t(\tau) d\Gamma,$$

gdzie  $\dot{s}_{ij}(\tau) = a_{ijkl} e_{kl}(\dot{\underline{u}}(\tau))$ , gdyż zgodnie z naszymi założeniami współczynniki  $a_{ijkl}$  nie zależą od czasu. Uwzględniając w (6.15) prawo tarcia (6.6) otrzymujemy

$$(6.16) \quad b(\dot{\underline{s}}(\tau), \underline{\underline{e}} - \underline{s}(\tau)) \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{e}} \in K_S^0(s_n(\tau)),$$

W terminach naprężeń globalną postacią warunków Signoriniego jest następująca nierówność

$$(6.17) \quad \int_{\Gamma_2} (\tilde{s} - s_n(\tau)) u_n(\underline{s}(\tau)) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \tilde{s} \in -K_n^*.$$

Reasumując mamy

Zadanie  $Q_S$

Znaleźć $\underline{s}(\tau) \in K_S^0(s_n(\tau)) (\tau \in [0, \tau_0])$ takie, że $\dot{\underline{s}}(\tau) \in L^2(\Omega, E_S^3)$
oraz
(6.18) $b(\dot{\underline{s}}(\tau), \underline{\underline{e}} - \underline{s}(\tau)) \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{e}} \in K_S^0(s_n(\tau)),$
(6.19) $\int_{\Gamma_2} (\tilde{s} - s_n(\tau)) u_n(\underline{s}(\tau)) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \tilde{s} \in -K_n^*,$
(6.20) $\underline{s}(0) = 0.$

Widzimy, że wariacyjne sformułowanie naprężeniowe ma postać N.K.W.(6.18) sprzężonej z N.W.(6.19). Powstaje jednakże pytanie jak znaleźć  $u_n(\underline{s})$ ? W tym celu można zastosować metod Cesaro [120]. Przypomnijmy istotę tej metody w zastosowaniu do naszego zadania. Metoda ta pozwala wyznaczyć przemieszczenia znając odkształcenia. Niech  $\Omega$  będzie obszarem jednopójnym, zaś  $e_{ij}$  - klasy  $C^1(\bar{\Omega})$ . Załóżmy, że  $A(x^0)$  jest takim punktem rozpatrywanego ciała, którego przemieszczenie  $\underline{u}(x^0)$  jest znane. Na przykład, możemy wziąć  $\underline{u}(x^0)=0$ , jeśli  $x^0 \in \Gamma_0$ . Przez  $\underline{\omega}$  oznaczymy skośnie-symetryczną część gradientu wektora przemieszczenia, tzn.  $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ ;  $\underline{\omega}^0 = \underline{\omega}(x^0)$ . Jeśli  $A'(x')$  jest dowolnym punktem obszaru  $\Omega$  to

$$(6.21) \quad u_i(x') = u_i(x^0) + (x'_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 + \int_{A(x^0)} U_{ij} dx_j,$$

gdzie

$$(6.22) \quad \begin{aligned} U_{ij} &= e_{ij} + (x'_k - x_k^0)(e_{ji,k} - e_{kj,i}) = \\ &= e_{ij} + \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmp} (x'_k - x_k^0) e_{jm,p}. \end{aligned}$$



Tutaj  $(\epsilon_{ijk})$  oznacza symbol permutacyjny, zaś  $e_{ij} = b_{ijkl} s_{kl}$ .  
 Wnioskujemy stąd, że  $b_{ijkl}$  musi być również klasy  $C^1$ . Ostatecznie mamy  $\underline{u}(\tau) = \underline{u}(\underline{s}(\tau))$  oraz  $u_n(\tau) = u_n(\underline{s}(\tau))$ .

Uwagi

1. Moreau [112] rozpatrzył problem wyznaczenia pola przemieszczenia, przy założeniu, że  $\underline{g}$  jest dystrybucją, tzn.  $\underline{g} \in \mathcal{D}'(\Omega, E_S^3)$ . Obszar  $\Omega$  może być przy tym wielospójny. Główny rezultat Moreau jest taki, iż istnieje pole przemieszczeń  $\underline{u} \in \mathcal{D}'(\Omega, R^n)$  takie, że  $e_{ij}(\underline{u}) = u_{(i,j)}$  (w sensie dystrybucji).

Paris [124] zbadał regularność takiego pola przemieszczeń. Jeden z jego rezultatów mówi, że jeśli  $e_{ij} \in C(\Omega)$  to  $u_i \in C(\Omega)$ .

2. Warunek  $\sigma_n = s_n$  w definicji zbioru  $K_S^0(s_n)$  można osłabić. Przyjmijmy bowiem

$$(6.23) \quad K_S^1(s_n) = \{ \underline{g} \in H_S \mid \sigma_{ij,j} + B_i = 0, \text{ w } \Omega ; \\ \sigma_{ijn_j} = F_i, \text{ na } \Gamma_1 ; \underline{g}_t \in K(s_n), \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Wówczas zamiast (6.18) mamy następującą nierówność kwasi-wariacyjną

$$(6.24) \quad b(\underline{s}(\tau), \underline{g} - \underline{s}(\tau)) - \int_{\Gamma_2} (\sigma_n - s_n(\tau)) \dot{u}_n(\underline{s}(\tau)) d\Gamma \geq 0, \forall \underline{g} \in K_S^1(s_n(\tau)).$$

3. W N.N.W. (6.9) wchodzącej do zadania  $Q_d$ , wirtualne jest pole prędkości przemieszczeń. Inaczej jest w N.K.W. (6.18) (zadanie  $Q_s$ ), gdzie wirtualne są naprężenia, prędkość naprężeń wchodzi poprzez  $\dot{\underline{s}}(\tau)$  (prędkość naprężeń rzeczywistych). Komplikuje to badanie zadań dualnych.

4. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych i implementacji numerycznej wygodne może być sformułowanie mieszane. Zamiast traktować naprężenia  $\sigma_n$  na  $\Gamma_2$  jako funkcję przemieszczeń, traktujemy je jako funkcję niezależną. W nierówności (6.9) piszemy więc  $\sigma_n(\tau)$ . Zamiast N.W. (6.10) rozpatrujemy następującą nierówność wariacyjną

$$\sigma_n : \int_{\Gamma} u_n(\tau) (r - \sigma_n(\tau)) d\Gamma \geq 0, \quad \forall r \in H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Do warunku początkowego (6.11) dodajemy zależność  $\sigma_n(0) = 0$  (na  $\Gamma_2$ ).

5. W pracy [121] rozpatrzono zagadnienie stacjonarnego toczenia się walca po nieodkształcalnym podłożu przy uwzględnieniu tarcia i dużych odkształceń samego walca. Otrzymane przez tych autorów sformułowanie wariacyjne jest, moim zdaniem, sztuczne. Sformułowanie poprawne podałem w pracy [152], otrzymując je również w postaci N.N.W. sprzężonej z N.W. Rozszerzenie na przypadek prostoliniowego ruchu niestacjonarnego podano w pracy [160].

## 7. ROZSZERZENIE TEORII DUALNOŚCI W SENSIE M-CD-M NA PRZYPADEK N.N.W. SPRZĘZONEJ Z N.W.

Teoria dualności pozwalająca badać kwasi-statyczne zagadnienie z tarciami została zbudowana w pracy [156]. Podobnie jak w przypadku statycznym istotnie nowe będzie zagadnienie  $Q_D^*$ . Dlatego też ograniczymy się tutaj do podania tylko tych elementów tej teorii, które pozwolą nam to zadanie wyprowadzić.

Niech  $V$  i  $V_1$  będą lokalnie wypukłymi przestrzeniami topologicznymi, zaś  $(V, V^*, \langle \dots \rangle)$  i  $(V_1, V_1^*, \langle \dots \rangle_1)$  parami topologicznymi [2, 172]. Przyjmujemy założenia  $(H_1)$  i  $(H_2)$  z podrozdziału czwartego oraz:

- $(H_{3a})$  | Operator, niekoniecznie liniowy,  $N: V \rightarrow V^*$  jest odwracalny.
- $(H_{3b})$  | Dla każdego  $w \in D(L)$  odwzorowanie  $v \rightarrow g(w, v)$  posiada pochodną Gâteaux  $D_2 g(w, v)$  w punkcie  $v = Lw$ , taką, że dla dowolnego  $w^* \in V^*$  zbiór  $\{w \in D(L) \mid D_2 g(w, Lw) = w^*\}$  zawiera co najwyżej jeden element  $(D_2 g)^{-1}(w^*)$ .
- $(H_4)$  |  $L: D(L) \rightarrow V$  ( $D(L) \subset V$ ),  $L_1: V \rightarrow V_1$ ,  $L_2: V \rightarrow V_1^*$  są liniowymi i ciągłymi operatorami. Operator  $N: V \rightarrow V^*$  jest taki, że  $N(0) = 0$ .
- $(H_5)$  |  $\Psi: V_1 \rightarrow R \cup \{+\infty\}$  jest wypukłym, właściwym i dolnie półciągłym funkcjonałem.

Tutaj  $D(L)$  oznacza dziedzinę operatora  $L$ . W przypadku rozpatrywanego przez nas kwasi-statycznego zagadnienia mamy  $L = \frac{d}{dt}$

(w sensie dystrybucyjnym, por. 101).

Możemy teraz sformułować abstrakcyjną postać zadania pierwotnego.

Zadanie P

Znaleźć  $u(\tau) \in D(L) \cap D(N)$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) takie, że

$$(7.1) \quad \varphi(u(\tau), Lu(\tau)) + g(u(\tau), Lu(\tau)) \leq \\ \leq \varphi(u(\tau), v) + g(u(\tau), v), \quad \forall v \in V,$$

$$(7.2) \quad \langle L_2 N(u(\tau)), w - L_1 u(\tau) \rangle_1 + \Psi(w) - \Psi(L_1 u(\tau)) \geq 0, \quad \forall w \in V_1,$$

$$(7.3) \quad u(0) = 0.$$

W zastosowaniach funkcja  $\Psi$  jest często funkcją indyktorową, a operator  $L_1$  operatorem śladu.

W terminach wyłącznie zmiennej dualnej można sformułować dwa zadania dualne, w zależności od tego czy korzystamy z założenia  $(H_{3a})$  czy  $(H_{3b})$ . W pracy [156] zadania to oznaczono odpowiednio, symbolami  $(P_a^*)$  i  $(P_b^*)$ . Mając na uwadze zastosowanie do wyprowadzenia zadania dualnego  $Q_d^*$  tutaj sformułujemy tylko zadanie  $P_b^*$ . Bardziej szczegółowe rozważania i dowody podano w pracy [156].

Zadanie  $P_b^*$

Znaleźć  $u^*(\tau) \in V^*$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) takie, że

$$(7.4) \quad \varphi^*[(D_2 g)^{-1}(-u^*(\tau)), u^*(\tau)] - \langle u^*(\tau), L[(D_2 g)^{-1}(-u^*(\tau))] \rangle \leq \\ \leq \varphi^*[(D_2 g)^{-1}(-u^*(\tau)), v^*] - \langle v^*, L[(D_2 g)^{-1}(-u^*(\tau))] \rangle, \quad \forall v^* \in V^*,$$

$$(7.5) \quad \langle v_1^* - L_2 u^*(\tau), -L_1 (D_2 g)^{-1}(-u^*(\tau)) \rangle_1 + \\ + \Psi^*(v_1^*) - \Psi^*(L_2 u^*(\tau)) \geq 0, \quad \forall v_1^* \in V_1^*,$$

$$(7.6) \quad u^*(0) = 0.$$

Poniższe twierdzenie podaje związek między zadaniami P i  $P_b^*$ .

Twierdzenie 7.1. Przy założeniach  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_{3b})$ ,  $(H_4)$  i  $(H_5)$  funkcja  $u(\tau)$  stanowi rozwiązanie zadania P wtedy i tylko wtedy gdy  $u^*(\tau) = -N(u(\tau)) = -D_2 g(u(\tau), Lu(\tau))$  jest rozwiązaniem zadania dualnego  $P_b^*$ . Ponadto spełnione są następujące warunki ekstremalności

$$(7.7) \quad \varphi(u(\tau), Lu(\tau)) + \varphi^*(u(\tau), u^*(\tau)) = \langle u^*(\tau), Lu(\tau) \rangle =$$



$$(7.8) \quad \Psi^*(L_2 u^*(\tau)) + \Psi(L_1 u(\tau)) = \langle L_2 u^*(\tau), L_1 u(\tau) \rangle_1,$$

Uwaga

Zadanie  $Q_d$  ma postać zadania  $P$ , natomiast zadanie  $Q_s$  ma trochę inną strukturę, co wynika z trzeciej uwagi podanej na końcu poprzedniego rozdziału. Oznacza to, że chcąc wyprowadzić zadanie dualne  $Q_s^*$  należy najpierw zbudować odpowiedni schemat ogólny. Zostało to zrobione w pracy [156]. Ponieważ jednak zadanie  $Q_s^*$  pokrywa się z  $Q_d$ , dlatego też ograniczymy się jedynie do tej wzmianki, a w podrozdziale następnym wyprowadzimy jawną postać zadania  $Q_d^*$ .

### 8. ZADANIE DUALNE DO ZADANIA $Q_d$

W celu wyprowadzenia jawnej postaci zadania dualnego skorzystamy z rezultatów poprzedniego podrozdziału. W tym celu położymy

$$(8.1) \quad g(\underline{u}, \underline{v}) = a(\underline{u}, \underline{v} - \dot{\underline{u}}) - \mathcal{L}(\underline{v} - \dot{\underline{u}}) - \int_{\Gamma_2} s_n(\underline{u})(v_n - \dot{u}_n) d\Gamma,$$

$$(8.2) \quad \varphi(\underline{u}, \underline{v}) = J(\underline{u}, \underline{v}),$$

$$(8.3) \quad \Psi(w) = I_{K_n}(w).$$

Operator  $L$  przyporządkowuje funkcji, powiedzmy  $\underline{z}(\tau) \in V$ , jej pochodną  $\dot{\underline{z}}(\tau) \in V$ , przy czym przestrzeń  $V$  jest określona wzorem (3.9). Regularność względem czasu, istotna dla problemu istnienia rozwiązania, nie jest nam potrzebna do wyprowadzenia zadania  $Q_d^*$ . Nieciągłe zachowanie się względem czasu, czyli  $\underline{u} \in B V[(0, \tau_0), V]$  jest dopuszczalne, por. podrozdział szósty.

Ponadto  $L_1: \underline{z} \in V \rightarrow (\mathcal{L}\underline{z})_n = z_n = z_i n_i$  (na  $\Gamma_2$ );  
 $N\underline{z} = (\mathcal{G}_{ij}(\underline{z})n_j)$ ,  $L_2 N\underline{z} = \mathcal{G}_n(\underline{z})$ , na  $\Gamma_2$ .

Tym samym zadanie  $Q_d$  ma postać abstrakcyjnego zadania  $P$  z poprzedniego podrozdziału. Zadanie dualne sformułujemy w postaci zadania  $P_b^*$ .

Z zależności (8.2) otrzymujemy, por.(5.10)

$$(8.4) \quad \mathcal{I}^*(\underline{u}, \underline{v}^*) = J^*(\underline{u}, \underline{v}^*) = I_C[s_n(\underline{u})](\underline{v}_t^*) .$$

Rozumując podobnie jak w podrozdziale piątym otrzymujemy

$$(8.5) \quad g^*(\underline{u}, \underline{v}^*) = \sup_{V^* \times V} \{ \langle \underline{v}^*, \underline{v} \rangle - g(\underline{u}, \underline{v}) \mid \underline{v} \in V \} = \\ = a(\underline{u}, \underline{u}) - \mathcal{L}(\underline{u}) - \langle s_n(\underline{u}), \underline{u}_n \rangle_{\Gamma_2} + \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{v}^* = A\underline{u} - \tilde{\mathcal{F}}, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przy-} \\ & \text{padkach,} \end{cases}$$

gdzie  $\tilde{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, s_n(\underline{u})) = (\underline{b}, \underline{F}, s_n(\underline{u}))$ . Z podrozdziału piątego wiemy, że operator  $A$ , dany zależnością (5.11) jest odwracalny. W rozpatrywanym kwasi-statycznym przypadku możemy stosować operator Greena podobnie jak dla zagadnienia statycznego. Zależne od czasu przemieszczenia obliczamy z wzoru

$$(8.6) \quad u_k(\tau) = [G(\underline{b}(\tau), \underline{F}(\tau), \underline{s}(\tau))]_k = \\ = \hat{u}_k(\tau) + \int_{\Gamma_2} s_i(y, \tau) G_{ik}(x, y) d\Gamma(y) ,$$

$$\text{gdzie } \hat{u}(\tau) = G(\underline{b}(\tau), \underline{F}(\tau)), \quad \underline{s} = (s_{ij} n_j) \Big|_{\Gamma_2} .$$

Pochodna Gâteaux  $D_2 g$  ma obecnie postać

$$(8.7) \quad \langle D_2 g(\underline{u}, \underline{v}), \underline{h} \rangle_{V^* \times V} = a(\underline{u}, \underline{h}) - \mathcal{L}(\underline{h}) - \langle s_n(\underline{u}), \underline{h}_n \rangle_{\Gamma_2} ,$$

gdzie  $\underline{h} \in V$  Ostatnia zależność daje

$$(8.8) \quad D_2 g(\underline{u}(\tau), \underline{u}(\tau)) = A\underline{u}(\tau) - \tilde{\mathcal{F}}(\tau) = \underline{s}_t(\tau) = (\underline{s}_t(\tau)) \Big|_{\Gamma_2}$$

czyli  $A\underline{u}(\tau) = \tilde{\mathcal{F}}(\tau) + D_2 g(\underline{u}(\tau), \underline{u}(\tau))$ , gdzie

$$\underline{s}_t(\tau) = \underline{s}(\tau) - s_n(\tau) \underline{n} = \underline{s}(\tau) - (s_{ij} n_i n_j) \Big|_{\Gamma_2} \underline{n} .$$

Mamy więc

$$(8.9) \quad \underline{u}(\tau) = G[D_2 g(\underline{u}(\tau), \underline{u}(\tau))] + G\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = G[\underline{s}_t(\tau)] + G\tilde{\mathcal{F}}(\tau), \text{ w } \Omega ,$$

oraz

$$(8.10) \quad \underline{u}_t(\tau) = (D_2 g)^{-1}(\underline{s}_t(\tau)) = \hat{u}_t(\tau) + [G(\underline{s}(\tau))]_t , \text{ na } \Gamma_2 .$$

Ostatnia zależność wynika stąd, że

$$G[\underline{s}_t(\tau)] + G\bar{\underline{z}}(\tau) = G\underline{z}(\tau) + G[s_n(\tau)]_n + \underline{s}_t(\tau) = \hat{u}(\tau) + G[\underline{s}(\tau)].$$

Funkcja  $\Psi^*$  ma prostą postać, gdyż

$$(8.11) \quad \Psi^*(w^*) = I_{K_n^*}(w^*).$$

Uwzględniając zależności (8.4), (8.5), (8.10) i (8.11) możemy sformułować zadanie  $Q_d^*$ , które jest przypadkiem szczególnym zadania  $P_b^*$ .

Zadanie  $Q_d^*$

Znaleźć  $\underline{s}(\tau) = (s_n(\tau), \underline{s}_t(\tau)) \in (-K_n^*) \times C[s_n(\tau)]$ ,  $\tau \in [0, \tau_0]$ ,  
takie, że

$$(8.12) \quad \int_{I_2} (\underline{r} - \underline{s}_t(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau} (\hat{u}(\tau) + [G(\underline{s}(\tau))]_t) d\tau \geq 0, \quad \forall \underline{r} \in C[s_n(\tau)],$$

$$(8.13) \quad \int_{I_2} (w^* - s_n(\tau)) (\hat{u}_n(\tau) + [G(\underline{s}(\tau))]_n) d\tau \geq 0, \quad \forall w^* \in -K_n^*,$$

$$(8.14) \quad \underline{s}(0) = 0.$$

Przypominamy, że  $K_n^*$  dane jest zależnością (5.8), natomiast  $C(s_n)$  określa wzór (5.9).

Można również wykazać, że  $Q_d^{**} = Q_d$ ,  $Q_s^* = Q_d$ .

## 9. ROZSZERZENIE TWIERDZEŃ O NOŚNOŚCI GRANICZNEJ NA PRZYPADEK JEDNOSTRONNYCH ZAGADNIEŃ KONTAKTOWYCH

Teoria nośności granicznej, w przypadku obciążeń jednoparametrowych, stanowi jeden z najbardziej klasycznych działów teorii plastyczności [73, 134, 135]. Rozpatrywane zazwyczaj warunki brzegowe należą do dwustronnych. W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawiony szereg uogólnień twierdzeń o nośności granicznej na przypadek jednostronnych warunków brzegowych bez tarcia i z tarciami. Rezultaty przedstawione w punktach 9.1-9.3 są zaczerpnięte z prac autora [149, 150]. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku kontaktu z podłożem idealnie-plastycznym, rozpatrzone w punkcie 9.4, zostały po raz pierwszy sformułowane w pracy [151], ale bez dowodów. Para twierdzeń ekstremalnych dla ośrodka idealnie plastycznego bę-



dącego w kontakcie z podłożem nieliniowo lepkosprężystym jest rozpatrywana, jak sądzę, po raz pierwszy (p. 9.5).

9.1. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku warunków Signoriniego bez tarcia

Niech  $\underline{v} = (v_i)$  oznacza pole prędkości przemieszczeń. Warunki Signoriniego bez tarcia mają teraz postać

$$(9.1) \quad \underline{s}_t = 0, \quad v_n \leq 0, \quad s_n \leq 0, \quad s_n v_n = 0, \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Oznaczmy przez  $C$  ograniczony zbiór wypukły i domknięty w przestrzeni  $E_S^3$  plastycznie dopuszczalnych naprężeń. Na przykład, jeśli funkcje wypukłe  $f_J(\underline{s}) = 0$  ( $J=1, \dots, R$ ) określają powierzchnię plastyczności to

$$(9.2) \quad C = \{ \underline{s} \in E_S^3 \mid f_J(\underline{s}) \leq 0, \quad J=1, \dots, R \}.$$

Zbiór  $C$  może zależeć od punktu  $x \in \Omega$ , tzn. dopuszczamy plastyczną niejednorodność. Oznacza to, że granica plastyczności może zmieniać się od punktu do punktu, w sposób niekoniecznie ciągły. Rozpatrywany ośrodek idealnie plastyczny zajmuje obszar  $\bar{\Omega}$  a brzeg  $\Gamma = \partial\Omega$  składa się, podobnie jak poprzednio, z trzech części:  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Przypominamy, że  $\Gamma_2$  oznacza powierzchnię potencjalnego kontaktu.

Funkcja podpierająca  $D$  zbioru  $C$  jest dana zależnością

$$(9.3) \quad D(\dot{\underline{e}}) = \sup \{ s_{ij} \dot{e}_{ij} - I_C(\underline{s}) \} = \sup \{ s_{ij} \dot{e}_{ij} \mid \underline{s} \in C \},$$

gdzie  $\dot{\underline{e}}$  jest tensorem prędkości odkształceń. Jak wiadomo, dla ciała sztywno plastycznego  $\underline{e}^e = 0$ .

Obszar wypukły  $C$  dopuszcza naroża, a więc stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia wygodnie jest zapisać w następującej subrózniczkowej postaci

$$(9.4) \quad \dot{\underline{e}} \in \partial I_C(\underline{s}) \iff \underline{s} \in \partial D(\dot{\underline{e}}),$$

por. lemat 4.1. Korzystając z tego lematu widzimy, że

$$(9.5) \quad I_C(\underline{s}) + D(\dot{\underline{e}}) = s_{ij} \dot{e}_{ij}.$$

Dla  $\underline{s} \in C$  z ostatniej zależności otrzymujemy

$$(9.6) \quad D(\dot{\underline{e}}) = s_{ij} \dot{e}_{ij}.$$

Tym samym funkcja  $D$  jest gęstością dysypacji plastycznej. Wypukłość implikuje, że funkcja  $D$  jest nieujemna [128].

Przyjmujemy następujące oznaczenie: jeśli  $\underline{v}$  jest polem prędkości przemieszczeń to  $\dot{\underline{e}} = \underline{e}(\underline{v}) = (e_{ij}(\underline{v})) = (v_{(i,j)})$ . Przez  $D_C$  oznaczamy będziemy całkowitą dysypację, czyli

$$(9.7) \quad D_C(\dot{\underline{e}}) = \int_{\Omega} D(\dot{\underline{e}}) dx .$$

Milcząco zakładamy, że do powyższej całki włączone są człony pochodzące od dysypacji na powierzchniach nieciągłości. Taki matematycznie zwięzły zapis staje się zrozumiały jeśli  $\dot{\underline{e}}_{ij}$  rozumiemy jako miarę ograniczoną, czyli gdy pole prędkości przemieszczeń należy do przestrzeni  $BD(\Omega)$ , por. [49, 142, 162] oraz podrozdział II.7.1.

Pole naprężeń  $\underline{s}$  nazywać będziemy statycznie dopuszczalnym jeśli:

$$(9.8) \quad s_{ij,j} + B_i = 0, \quad w \Omega,$$

$$(9.9) \quad \underline{s}(x) \in C(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(9.10) \quad s_{ij} n_j = m^s p_i^0, \quad na \Gamma_1,$$

$$(9.11) \quad s_t = 0, \quad s_n \leq 0, \quad na \Gamma_2.$$

Przez  $m^s$  oznaczyliśmy statyczny mnożnik obciążenia, natomiast obciążenia powierzchniowe  $\underline{p}^0 = (p_i^0)$  są zadane. Zauważmy, że obciążenia masowe nie są związane z mnożnikiem obciążenia. Takie podejście wydaje się fizycznie sensowne. Zazwyczaj bowiem przyjmuje się w (9.8)  $m^s \underline{B}$  a nie  $\underline{B}$ .

Pole prędkości przemieszczeń  $\underline{v}$  nazywamy pojem kinematycznie dopuszczalnym jeśli

$$(9.12) \quad \underline{v} = 0, \quad na \Gamma_0,$$

$$(9.13) \quad v_n \leq 0, \quad na \Gamma_2,$$

$$(9.14) \quad \int_{\Gamma_2} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma > 0 .$$

W przypadku ośrodka nieściśliwego pole takie musi dodatkowo spełniać warunek nieściśliwości

$$(9.15) \quad v_{i,i} = 0, \quad w \Omega .$$

Kinematycznie dopuszczalny mnożnik obciążenia  $m^k$  definiujemy następująco

$$(9.16) \quad m^k(\underline{v}) = \frac{D_c(\underline{e}(\underline{v})) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx}{\int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma},$$

gdzie  $\underline{v}$  jest polem kinematycznie dopuszczalnym.

Zwróćmy uwagę na to, że jeśli mnożnik obciążenia jest związany również z siłami masowymi, to zamiast (9.16) mamy

$$(9.17) \quad m_1^k(\underline{v}) = \frac{D_c(\underline{e}(\underline{v}))}{\mathcal{L}(\underline{v})},$$

gdzie

$$(9.18) \quad \mathcal{L}(\underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx + \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma.$$

Różnica pomiędzy mnożnikami  $m^k$  i  $m_1^k$  jest oczywista.

Przez rozwiązanie zupełne zadania nośności granicznej rozumiemy trójkę  $(m, \underline{s}, \underline{v})$  taką, że pole naprężeń  $\underline{s}$  jest statycznie dopuszczalne, zaś pole prędkości przemieszczeń  $\underline{v}$  - kinematycznie dopuszczalne; mnożnik  $m$  jest granicznym mnożnikiem obciążenia, tzn.:  $m = m^s(\underline{s}) = m^k(\underline{v})$ . W takim przypadku  $\underline{s}$  i  $\underline{e}(\underline{v})$  są związane stowarzyszonym prawem płynięcia (9.4) (lub (9.5)), gdzie  $\dot{\underline{e}} = \underline{e}(\underline{v}) = (\underline{v}_{(i,j)})$ .

Twierdzenie o dolnej granicy obciążenia

$$(9.19) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Znaleźć} \\ \sup \{ m^s(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S \}, \end{array} \right\}$$

gdzie

$$(9.20) \quad K_S = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid \underline{s}(x) \in C(x), x \in \Omega; s_{ij,j} + B_i = 0, \text{ w } \Omega; \\ s_{ij} n_j = m^s p_i^0, \text{ na } \Gamma_1; s_n \leq 0, \underline{s}_t = 0, \text{ na } \Gamma_2 \},$$

jest zbiorem naprężeń statycznie dopuszczalnych. Sformułowanie równoważne ma postać

$$(9.21) \quad m^s(\underline{s}) \leq m, \quad \forall \underline{s} \in K_S.$$

Aby udowodnić (9.21) rozpatrzmy równość

$$\int_{\Omega} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})_{,j} \tilde{v}_i \, dx = 0,$$

która zachodzi dla dla każdego  $\underline{s} \in K_S$ . Całkując przez części



i uwzględniając zależność  $\tilde{s}_n \tilde{v}_n = 0$  otrzymujemy

$$0 \geq \int_{\Omega} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij}) e_{ij}(\tilde{v}) dx = (m^s - m) \int_{\Gamma_1} p_i^0 \tilde{v}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} s_n \tilde{v}_n d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in K_s.$$

Nierówności  $s_n \leq 0$  i  $\tilde{v}_n \leq 0$  implikują  $s_n \tilde{v}_n \geq 0$ . Tym samym nierówność (9.21) została udowodniona.

Twierdzenie o górnej granicy obciążenia

$$(9.22) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć} \\ \inf \{ m^k(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k \}, \end{array} \right.$$

gdzie

$$(9.23) \quad K_k = \{ \underline{v} = (v_i) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma_0; v_n \leq 0, \text{ na } \Gamma_2; \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot v_i d\Gamma > 0 \},$$

lub w przypadku ośrodka nieściśliwego

$$(9.24) \quad K_k = \{ \underline{v} = (v_i) \mid v_{i,i} = 0, \text{ w } \Omega; \underline{v} = 0 \text{ na } \Gamma_0, v_n \leq 0 \text{ na } \Gamma_2; \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot v_i d\Gamma > 0 \}.$$

Musimy więc udowodnić nierówność

$$(9.25) \quad m \leq m^k(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in K_k.$$

W tym celu korzystamy z subbrózniczekowości funkcjonału dysypacji  $D_c$ , czyli

$$(9.26) \quad D_c(e(\underline{v})) - D_c(e(\tilde{v})) \geq \int_{\Omega} \tilde{s}_{ij} e_{ij}(\underline{v} - \tilde{v}) dx, \quad \underline{v} \in K_k.$$

Zgodnie z (9.16), zamiast  $D_c(e(\underline{v}))$  i  $D_c(e(\tilde{v}))$ , bierzemy, odpowiednio,

$$m^k \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot v_i d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} dx, \quad m \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot \tilde{v}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \tilde{v} dx.$$

Uwzględniając te wyrażenia w (9.26) otrzymujemy

$$m^k \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot v_i d\Gamma \geq m \int_{\Gamma_1} p_i^0 \cdot v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \tilde{s}_n v_n d\Gamma.$$

Ponieważ  $\tilde{s}_n v_n \geq 0$  (na  $\Gamma_2$ ) i biorąc pod uwagę (9.14), ostatecznie dochodzimy do (9.25). ■

Uwagi

1. Zadania (9.19) i (9.23) można traktować jako parę zadań dualnych rozszerzając w ten sposób rezultaty Temama i Stranga [162,163] na przypadek warunków Signoriniego bez tarcia.

2. Analiza zagadnienia jednoznaczności rozwiązania zupełnego  $(m, \tilde{s}, \tilde{v})$  prowadzi do wniosków analogicznych jak w przypadku

"klasycznym", gdy  $\Gamma_2 = \emptyset$ , por. [73,134].

3. Twierdzenia o dolnej i górnej granicy obciążenia pozostają słuszne, jeśli zamiast definicji (9.16) przyjąć następujące określenie kinematycznego mnożnika obciążenia

$$(9.27) \quad m_2^k(\underline{v}) = \frac{\int_{\Omega} (s_{ij} e_{ij}(\underline{v}) - \underline{B} \cdot \underline{v}) dx - \int_{\Gamma_2} s_n v_n d\Gamma}{\int_{\Gamma_2} p^0 \cdot \underline{v} d\Gamma},$$

gdzie  $\underline{s} \in \partial D(e(\underline{v}))$ . Wzór (9.27) wynika bezpośrednio z zasady przygotowanych prędkości przemieszczeń. Zauważmy, iż  $m^k(\underline{v}) = m_2^k(\underline{v})$ , gdyż  $\bar{s}_n \bar{v}_n = 0$ .

4. Dokonując prostych modyfikacji można przeformułować powyższe twierdzenia o dolnej i górnej granicy obciążenia na przypadek gdy  $\Gamma_2$  jest powierzchnią rozdziału ("interface"), tzn.

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_2$ . Warunki Signoriniego bez tarcia przyjmują wówczas postać

$$(9.28) \quad \underline{s}_t = \underline{s}_t^{(1)} = -\underline{s}_t^{(2)} = 0, \quad \llbracket v_n \rrbracket \leq 0, \quad s_n \llbracket v_n \rrbracket = 0, \quad \text{na } \Gamma_2,$$

gdzie  $s_n = s_n^{(1)} = -s_n^{(2)}$ .

Jeśli  $\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_2 \subset \Omega$  to obszar  $\Omega$  można zawsze podzielić na podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  powierzchnią  $\Gamma_r$  taką, że  $\Gamma_2 \subset \Gamma_r$  i  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Gamma_r \setminus \Gamma_2)$ . W takim przypadku  $\Gamma_2$  jest stacjonarną szczeliną w ciele  $\Omega$ .

5. "Dobrą" przestrzenią dla prędkości przemieszczeń jest przestrzeń zdefiniowana następująco

$$(9.29) \quad BD(\Omega) = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^3), e_{ij}(\underline{v}) \in M^1(\Omega) \},$$

por. [49,142,162] oraz podrozdział II.7.1.

Dla ośrodka nieściśliwego przestrzeń, do której należą kinematycznie dopuszczalne pola prędkości przemieszczeń jest nieco mniejsza

$$(9.30) \quad U(\Omega) = \{ \underline{v} \in BD(\Omega) \mid v_{i,i} \in L^2(\Omega) \},$$

por. [162]. Przypomnijmy, że  $M^1(\Omega)$  jest przestrzenią miar ograniczonych. Taki dobór przestrzeni prędkości przemieszczeń jest w naturalny sposób podyktowany nieciągłościami pól prędkości przemieszczeń. Jednakże problem istnienia rozwiązania granicznego jest jeszcze bardziej skomplikowany, jak udowodnił to Christiansen [35,36] w przypadku gdy  $\Gamma_2 = \emptyset$ . Okazuje się, że

przestrzeń  $BD(\Omega)$  jest jeszcze za mała, aby wykazać istnienie rozwiązania. Pole prędkości na  $\Gamma_1$  trzeba traktować jako pole niezależne od pola  $\underline{v}(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Naturalne byłoby, aby  $\underline{v}^+ \in [L^1(\Gamma_1)]^3$ , gdzie  $\underline{v}^+$  oznacza tzw. ślad zewnętrzny [142,162]. Przestrzeń  $L^1(\Gamma_1)$  jest jednak za mała. Moim zdaniem naturalne jest przyjęcie  $\underline{v}^+_{\Gamma_1} \in [M^1(\Gamma_1)]^3$ , co wynika z rozważań o istnieniu rozwiązań dla funkcjonałów określonych na przestrzeni BV, por. [60,61]. Takie podejście upraszcza bardziej skomplikowane rozważania Christiansena.

W pracy [152] rozpatrzono problem istnienia rozwiązań dla problemu nośności granicznej przy uwzględnieniu warunków Signoriniego, ale przy założeniu, że mnożnik obciążenia jest związany zarówno z siłami masowymi jak i powierzchniowymi na  $\Gamma_1$ . W tym celu wykorzystano twierdzenie o minimaksie Christiansena [35]. Jednakże przypadek, gdy mnożnik obciążenia jest związany jedynie z siłami powierzchniowymi pozostaje otwarty nawet wtedy gdy  $\Gamma_2 = \emptyset$ .

Kilka słów o przestrzeni naprężeń. Jeśli środek jest nieściśliwy to za Temamem [162] można przyjąć

$$(9.31) \quad \Sigma(\Omega) = \{ \underline{s} \in L^2(\Omega, E_s^3) \mid s_{ij,j} \in L^4(\Omega), s_{ij}^d \in L^\infty(\Omega) \},$$

gdzie  $\underline{s}^d$  oznacza część dewiatorową pola tensorowego  $\underline{s}$ .

Dla ośrodka ściśliwego przestrzeń naprężeń jest mniejsza ( $\Omega$  jest zbiorem ograniczonym):

$$(9.32) \quad \Sigma_s(\Omega) = \{ \underline{s} \in L^\infty(\Omega, E_s^3) \mid s_{ij,j} \in L^4(\Omega) \}.$$

Tym samym należy przyjąć  $B_i \in L^4(\Omega)$ .

6. Rozpatrzmy związek między nośnością graniczną gdy na  $\Gamma_2$  mamy warunki Signoriniego bez tarcia, a nośnością tego samego ośrodka, gdy  $\Gamma_2$  jest brzegiem swobodnym. W tym ostatnim przypadku zamiast  $K_S$  mamy następujący zbiór statycznie dopuszczalnych naprężeń

$$(9.33) \quad K_S^0 = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid \underline{s}(x) \in C(x), x \in \Omega; s_{ij,j} + B_i = 0, w \Omega; \\ s_{ij} n_j = m_o^s p_i^0, na \Gamma_1, s_{ij} n_j = 0, na \Gamma_2 \}.$$

Podobnie zamiast  $K_K$  mamy

$$(9.34) \quad K_K^0 = \{ \underline{v} = (v_i) \mid \underline{v} = 0, na \Gamma_0, \int_{\Gamma_1} p^0 \underline{v} d\Gamma > 0 \},$$



albo

$$(9.35) \quad K_k^0 = \{ \underline{v} = (v_i) \mid v_{i,i} = 0, \text{ w } \Omega; \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma_0, \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} d\Gamma > 0 \}.$$

Ponieważ  $K_S^0 \subset K_S$  przeto

$$m_0 = \sup \{ m_0^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S^0 \} \leq \sup \{ m^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S \} = m.$$

Z kolei  $K_k^0 \supset K_k$ , stąd

$$m_0 = \inf \{ m_0^K(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k^0 \} \leq \inf \{ m^K(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k \} = m.$$

Wynika stąd, że  $m_0 \leq m$ , czyli warunki Signoriniego bez tarcia (gładkie i sztywne podłoże) mają taki wpływ, iż nośność graniczna ośrodka może wzrosnąć.

### 9.2. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku tarcia i zadanych naprężeniach normalnych na powierzchni kontaktu

Sformułujemy obecnie twierdzenia o nośności granicznej przy założeniu, że na  $\Gamma_2$  zachodzi kontakt z tarciami, przy czym normalne naprężenia kontaktowe  $s_n$  są znane a priori, czyli  $s_n = F_n \leq 0$  (na  $\Gamma_2$ );  $F_n$  jest znaną funkcją. Przypadek taki jest oczywiście rzadko spotykany w praktyce, jednakże traktujemy go jako wstęp do pełnej analizy nośności granicznej z tarciami, która zostanie przedstawiona w punkcie następnym.

Położmy

$$(9.36) \quad \mathcal{K}_S^t = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid s_{ij,j} + B_i = 0, \underline{s}(x) \in C(x), \text{ w } \Omega; \\ s_{ij}n_j = m^S p_i^0, \text{ na } \Gamma_1; s_n = F_n, \underline{s}_t \in K(F_n), \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Pole  $\underline{s} \in K_S^t$  nazwiemy polem statycznie dopuszczalnym. Pole prędkości przemieszczeń  $\underline{v} \in K_K^0$  nazwiemy polem kinematycznie dopuszczalnym.

Kinematyczny mnożnik obciążenia  $m^K$  definiujemy następująco

$$(9.37) \quad m^K(\underline{v}) = \frac{D_C(\underline{g}(\underline{v})) + J_1(\underline{v}) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} F_n v_n \, d\Gamma}{\int_{\Gamma_0} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma}, \quad \underline{v} \in K_K^0,$$

gdzie, por. wzór (3.12)

$$(9.38) \quad J_1(\underline{v}) = \int_{\Gamma_2} j(F_n, \underline{v}_t) \, d\Gamma, \quad \underline{v} \in K_K^0.$$

Funkcjonał  $J_1$  przedstawia w tym przypadku całkowitą (wirtualną) dysypację spowodowaną tarciem.

Trójka  $(m, \underline{s}, \underline{v})$  jest rozwiązaniem zupełnym jeśli  $\underline{s} \in K_S^t, \underline{v} \in K_K^0$ , a  $m$  jest mnożnikiem granicznym, czyli  $m = m^S(\underline{s}) = m^K(\underline{v})$ .

Pola  $\underline{s}$  i  $\underline{v}$  są oczywiście związane stowarzyszonym prawem płynięcia (9.4); ponadto na  $\Gamma_2$  mamy:  $(-\underline{v}_t) \in \partial I_{K(F_n)}(\underline{s}_t)$ .

Twierdzenie o dolnej granicy obciążenia

(9.39) | Znaleźć  $\sup\{m^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S^t\}$ .

Należy więc udowodnić, że  $m^S(\underline{s}) \leq m, \forall \underline{s} \in K_S^t$ . W tym celu korzystamy z zależności

$$\int_{\Omega} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})_{,j} \tilde{v}_i dx = 0, \quad \underline{s} \in K_S^t.$$

Całkując przez części otrzymujemy stąd

$$0 \geq \int_{\Omega} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij}) e_{ij}(\underline{v}) dx = (m^S - m) \int_{\Gamma_1} p^0 \cdot \underline{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [(s_n - \tilde{s}_n) \tilde{v}_n + (s_t - \tilde{s}_t) \cdot \tilde{v}_t] d\Gamma.$$

Uwzględniając nierówność

$$\int_{\Gamma_2} (s_t - \tilde{s}_t) \cdot \tilde{v}_t \geq 0, \quad \forall \underline{s} \in K(F_n),$$

i wiedząc, że  $s_n = \tilde{s}_n = F_n$ , wnioskujemy, że  $m^S - m \leq 0$ .

Twierdzenie o górnej granicy obciążenia

(9.40) | Znaleźć  $\inf\{m^K(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_K^0\}$ .

Wystarczy więc wykazać, że dla każdego  $\underline{v} \in K_K^0$  zachodzi nierówność  $m \leq m^K(\underline{v})$ . W tym celu korzystamy z nierówności (9.29). Po scałkowaniu przez części otrzymujemy

$$(9.41) \quad D_c(\underline{e}(\underline{v})) - D_c(\underline{e}(\underline{v})) + \int_{\Gamma_2} (-s_t) \cdot (v_t - \tilde{v}_t) d\Gamma \geq \int_{\Omega} p \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) dx + m \int_{\Gamma_1} p^0 \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} F_n (v_n - \tilde{v}_n) d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in K_K^0.$$

Subróżniczkowalność funkcjonału  $J_1$  daje

$$J_1(\underline{v}) - J_1(\underline{v}) \geq \int_{\Gamma_2} (-\tilde{s}_t) \cdot (v_t - \tilde{v}_t) d\Gamma.$$

Uwzględniając ostatnią nierówność w (9.41) i biorąc pod uwagę (9.37) wnioskujemy, że  $m \leq m^K(\underline{v}), \forall \underline{v} \in K_K^0$ .

Uwaga

W liczniku wyrażenia po prawej stronie zależności (9.37) występuje człon reprezentujący moc zadanych naprężeń normalnych  $F_n$ . Opuszczając ten człon można wprowadzić następującą definicję mnożnika obciążenia

$$(9.42) \quad \tilde{m}^k(\underline{v}) = \frac{D_c(\underline{e}(\underline{v})) + J_1(\underline{v}) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx}{\int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, dx}$$

Zauważmy, że w przypadku pominięcia sił masowych licznik ostatniego wyrażenia przedstawia całkowitą dysypację spowodowaną płynięciem plastycznym i tarcie. Można wykazać, że przyjmując definicję (9.41) zamiast (9.37) twierdzenie o dolnej granicy obciążenia pozostaje słuszne. Jednakże po to, aby zachodziło twierdzenie o górnej granicy obciążenia musimy zmodyfikować zbiór kinematycznie dopuszczalnych prędkości przemieszczeń definiując go następująco

$$(9.42) \quad \tilde{K}_K^0(\underline{v}) = \{ \underline{v} \in K^0 \mid v_n = \tilde{v}_n, \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Wnioskujemy stąd, że w takim przypadku zbiór kinematycznie dopuszczalnych prędkości przemieszczeń zależy od nieznanego pola  $\tilde{v}$  z rozwiązania zupełnego. Tym samym definicja (9.37) ma większą wartość praktyczną.

9.3. Nośność graniczna w przypadku warunków Signoriniego z tarcie

Trudności w sformułowaniu twierdzeń o nośności granicznej dla zagadnień kontaktowych z tarcie biorą się z niestowarzyszonego charakteru prawa tarcia. Stosując do takich zagadnień twierdzenia o dolnej i górnej granicy obciążenia w ich klasycznym sformułowaniu można dojść do wniosku takiego jak ten, że  $m^s > m^k$ , por. przykład podany przez Salençona [130].

Naszym obecnym celem będzie zbudowanie teorii nośności granicznej, która wyklucza tego rodzaju możliwość. Oprócz tarcia uwzględnimy warunki Signoriniego, co nadaje poniższym rozważaniom większą ogólność. Korzystamy przy tym z prac [149, 150]. Założymy, że na  $\Gamma_2$  zadana jest funkcja  $\theta_n \leq 0$ . Położymy



$$(9.43) \quad K_S(\theta_n) = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid s_{ij,j} + B_i = 0, \underline{s}(x) \in C(x), x \in \Omega; \\ s_{ij,n_j} = m^S p_i^0, \text{ na } \Gamma_1; s_n \leq 0, \underline{s}_t \in K(\theta_n) \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Przypomnijmy, że zbiór wypukły i domknięty  $K(\theta_n)$  oznacza zbiór dopuszczalnych naprężeń stycznych na  $\Gamma_2$ , por.(2.6).

Przejdźmy do rozpatrzenia analogonu podejścia statycznego. W tym celu formułujemy zadanie optymalizacji wypukłej:

$$(9.44) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ m_{\theta_n}^S(\tilde{\underline{s}}) = \sup \{ m^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S(\theta_n) \}. \end{array} \right.$$

Pole naprężenia  $\tilde{\underline{s}}$  rozwiązujące zadanie (9.44) zależy oczywiście od  $\theta_n$ , zaś mnożnik obciążenia od  $\theta_n$  i  $\tilde{\underline{s}}$ . Dana a priori funkcja  $\theta_n$  zazwyczaj nie przedstawia rzeczywistego rozkładu normalnych naprężeń kontaktowych na  $\Gamma_2$ . Jest tak jedynie w przypadku gdy  $\theta_n = \tilde{\underline{s}}_n$  (na  $\Gamma_2$ ). Powstaje pytanie jak, teoretycznie, takie  $\theta_n$  wyznaczyć. Rozważmy ten problem. Polu  $\underline{s} = (s_{ij})$ , niekoniecznie należącemu do  $K_S(\theta_n)$ , przyporządkowujemy funkcję  $T_n(\underline{s})$ , taką że

$$(9.45) \quad \int_{\Gamma_2} T_n(\underline{s}) w_n d\Gamma = \int_{\Omega} [s_{ij} e_{ij}(\underline{w}) - B_i w_i] dx,$$

dla każdego  $\underline{w} = (w_i)$  takiego, że  $\underline{w}|_{\Gamma \setminus \Gamma_2} = 0$  i  $\underline{w}_t|_{\Gamma_2} = 0$ . Jeśli  $\underline{s}$

spełnia równanie równowagi (9.8) to  $T_n(\underline{s}) = s_n$  (na  $\Gamma_2$ ).

Niech  $\theta_n$  będzie funkcją występującą w (9.43). Tym samym dla  $\underline{s} \in K_S(\theta_n)$  zdefiniowany jest, w sposób niejawny, operator nieliniowy  $N: \theta_n \rightarrow T_n(\underline{s}) = s_n$ . Przypuśćmy, że  $\theta_n = T_n(\tilde{\underline{s}}) = s_n$ , gdzie  $\tilde{\underline{s}}$  jest rozwiązaniem zadania (9.44). Oznacza to, że  $\theta_n = T_n(\tilde{\underline{s}}) = N(\theta_n) = \tilde{\underline{s}}_n$ , czyli  $\theta_n = \tilde{\underline{s}}_n$  jest punktem stałym operatora  $N$ , tzn.  $\tilde{\underline{s}}_n = N(\tilde{\underline{s}}_n)$ .

Powyższe rozważania pozwalają sformułować odpowiednik twierdzenia o dolnej granicy obciążenia:

$$(9.46) \quad m^S(\underline{s}) \leq m_{\theta_n}^S(\tilde{\underline{s}}), \quad \forall \underline{s} \in K_S(\tilde{\underline{s}}_n),$$

gdzie mnożnik  $m^S(\underline{s})$  jest związany z polem  $\underline{s} \in K(\tilde{\underline{s}}_n)$ . Pole  $\underline{s} \in K_S(\tilde{\underline{s}}_n)$  nazwiemy polem statycznie dopuszczalnym.

Rozpatrzmy jak takie sformułowanie ma się do podejścia klasycznego. Podejście statyczne brzmi:

$$(9.47) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ \tilde{m}^S(\underline{s}^0) = \sup \{ m^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S^k \}, \end{array} \right.$$

gdzie

$$(9.48) \quad K_S^k = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid s_{ij,j} + B_i = 0, \underline{s}(x) \in C(x), \text{ w } \Omega;$$

$$s_{ij} n_j = m^s p_i^0, \text{ na } \Gamma_1; s_n \leq 0, (s_n, \underline{s}_t) \in K \},$$

gdzie zbiór  $K$  jest wypukły i dany zależnością (2.7). Ponieważ  $K_S(\theta_n) \subset K_S^k$  dlatego też  $m_S^s(\underline{s}) \leq \tilde{m}^s(\underline{s}^0)$ ; w szczególności  $K_S(\tilde{s}_n) \subset K_S^k$ , przy czym inkluzja jest zazwyczaj silna. Dowodzi to, dlaczego klasyczne sformułowanie w postaci zadania (9.47), nie ma sensu dla zagadnień nośności granicznej z tarcie.

Rozważmy teraz podejście kinematyczne. Załóżmy, że znamy rzeczywisty rozkład naprężeń normalnych  $\tilde{s}_n$  na  $\Gamma_2$ . Niech  $K_k$  będzie określone zależnością (9.23) albo (9.24). Kinematyczny mnożnik obciążenia definiujemy następująco

$$(9.49) \quad m_{S_n}^k(\underline{v}) = \frac{D_c(\underline{e}(\underline{v})) + \tilde{J}(\tilde{s}_n, \underline{v}) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} \tilde{s}_n v_n \, d\Gamma}{\int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma},$$

gdzie  $\underline{v} \in K_k$ ; ponadto

$$(9.50) \quad \tilde{J}(\tilde{s}_n, \underline{v}) = \int_{\Gamma_2} j(\tilde{s}_n, v_t) \, d\Gamma.$$

Odpowiednik twierdzenia o górnej granicy obciążenia brzmi:

$$(9.51) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ \inf \{ m_{S_n}^k(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k \}. \end{array} \right.$$

Biorąc pod uwagę rezultaty punktu 9.2 mamy

$$(9.52) \quad m^s(\underline{s}) \leq m_{S_n}^k(\underline{v}),$$

dla każdego  $\underline{s} \in K_S(\tilde{s}_n)$  i dla każdego  $\underline{v} \in K_k$ .

Oznaczmy przez  $\tilde{\underline{v}}$  rozwiązanie zadania (9.51). Graniczny mnożnik obciążenia  $m_g$  jest określony następująco

$$(9.53) \quad m_g = m_{S_n}^s(\tilde{\underline{s}}) = m_{S_n}^k(\tilde{\underline{v}}).$$

Zwróćmy uwagę na to, że w tak - jak się wydaje sensownie - skonstruowanej teorii nośności granicznej uwzględniającej tarcie na brzegu ciała, podejście kinematyczne jest sprzężone ze statycznym, co prowadzi do tego, że mnożnik statyczny nigdy nie

może być większy od kinematycznego.

Uwaga

Określony powyżej operator nieliniowy  $N$  nie jest znany w jawnej postaci. Dlatego też z praktycznego punktu widzenia taka metoda nie jest efektywna. Jednakże można zastosować następującą procedurę iteracyjną.

Założmy, że na  $\Gamma_2$  zadana jest funkcja  $s_n^{(0)} \leq 0$  i  $K(s_n^{(0)})$  ma sens. Następnie rozpatrujemy zadanie:

znaleźć

$$(9.54) \quad m_{s_n^{(0)}}(\underline{s}^1) = \sup \{ m^s(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_s(s_n^{(0)}) \}.$$

Rozwiązanie  $\underline{s}^1$  tego zadania daje  $s_n^{(1)} \leq 0$  (na  $\Gamma_2$ ). W ten sposób formułujemy ciąg zadań optymalizacji wypukłej:

znaleźć

$$(9.55) \quad m_{s_n^{(1-1)}}(\underline{s}^1) = \sup \{ m^s(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_s(s_n^{(1-1)}) \},$$

gdzie

$$(9.56) \quad K_s(s_n^{(1-1)}) = \{ \underline{s} \mid s_{ij,j} + B_i = 0, \underline{s}(x) \in C(x), x \in \Omega; \\ s_{ij}n_j = m^s p_i^0, \text{ na } \Gamma_1; s_n \leq 0, \underline{s}_t \in K(s_n^{(1-1)}), \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

W ten sposób otrzymujemy ciąg  $\underline{s}^1(1=1,2,\dots)$ . Zakładając, że granica tego ciągu istnieje możemy napisać

$$\tilde{\underline{s}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{s}^1, \text{ skąd } \tilde{s}_n = \tilde{s}_{ij}n_j.$$

Z tak skonstruowanym ciągiem zadań statycznych można stowarzyszyć ciąg zadań kinematycznych:

znaleźć

$$(9.57) \quad m_{s_n^{(1)}}^k(\underline{v}^{1+1}) = \inf \{ m_{s_n^{(1)}}^k(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k \},$$

gdzie

$$(9.58) \quad m_{s_n^{(1)}}^k(\underline{v}) = \frac{D_c(\underline{e}(\underline{v})) + \tilde{J}(s_n^{(1)}, \underline{v}) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx - \int_{\Gamma_2} s_n^{(1)} v_n \, d\Gamma}{\int_{\Gamma_1} p^0 \cdot \underline{v} \, d\Gamma},$$

przy czym  $\underline{v} \in K_k$ .

Zwróćmy uwagę na fakt, że zawsze zachodzi nierówność

$$(9.59) \quad m_{s_n^{(1)}}^s(\underline{s}) \leq m_{s_n^{(1)}}^k(\underline{v}), \quad \underline{s} \in K_s(s_n^{(1)}), \underline{v} \in K_k.$$



Ścisłe matematyczna analiza tak zbudowanej teorii nośności granicznej pozostaje problemem otwartym.

9.4. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku kontaktu ze sztywno-idealnie plastycznym podłożem

Obecnie naszym celem będzie sformułowanie twierdzeń o nośności granicznej w przypadku gdy powierzchnia  $\Gamma_2$  jest powierzchnią kontaktu bez tarcia z podłożem sztywno idealnie plastycznym. Model takiego podłoża skonstruujemy korzystając z prostych pojęć analizy wypukłej. Istniejąca w literaturze niewielka ilość prac dotyczy głównie nośności belek i płyt spoczywających na plastycznym podłożu [18a,136]; por. również prace cytowane w [137]. Poza tym przyjęty przez nas opis umożliwia jedynie częściowy kontakt z podłożem na części powierzchni  $\Gamma_2$ , a priori nieznaney.

Niech  $\mathcal{P}(x)$  ( $x \in \Gamma_2$ ) oznacza ograniczony przedział domknięty, taki że  $0 \in \mathcal{P}(x)$ . Przedział ten charakteryzuje plastycznie dopuszczalne naprężenia normalne podłoża. Jeśli podłoże jest jednorodne to  $\mathcal{P}$  nie zależy od  $x \in \Gamma_2$ . W szczególności  $\mathcal{P}(x)$  może mieć następującą postać

$$(9.60) \quad \mathcal{P}(x) = \{s_n : |s_n(x)| \leq k(x), x \in \Gamma_2\},$$

gdzie  $k(\cdot)$  oznacza granicę plastyczności podłoża.

W takim przypadku podłoże, niekoniecznie jednorodne, reaguje jednakowo na ściskanie i rozciąganie; pomiędzy ciałem a podłożem istnieje adhezja.

Jeśli przedział  $\mathcal{P}(x)$  ma postać:  $\mathcal{P}(x) = [k_c(x), 0]$ ,  $k_c(x) < 0$ , to podłoże nie przenosi naprężeń rozciągających.

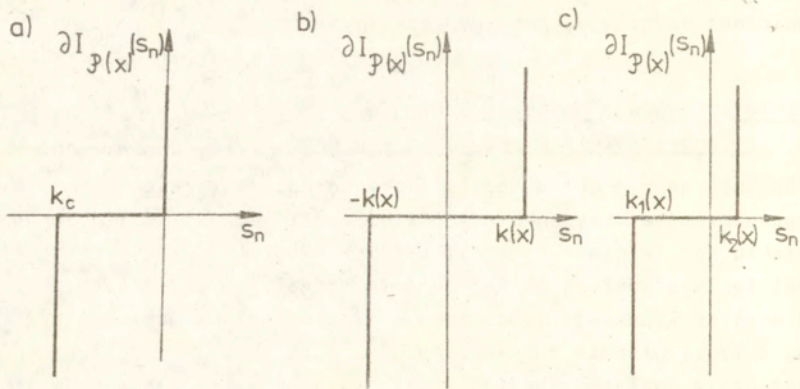
Warunki kontaktowe na powierzchni  $\Gamma_2$  przyjmujemy w postaci

$$(9.61) \quad \underline{u}_t = 0, \quad -v_n \in \partial I_{\mathcal{P}(x)}(s_n).$$

Należy pamiętać o tym, że jeśli na powierzchnię  $\Gamma_2$  działają naprężenia  $s_n$  to na podłoże  $(-s_n)$ . Jeśli  $\mathcal{P}(x)$  ma postać

(9.60) to

$$(9.62) \quad \partial I_{\mathcal{P}(x)}(s_n) = \begin{cases} [0, \infty), & \text{jeśli } s_n = k(x), \\ 0, & \text{jeśli } s_n \in (-k(x), k(x)), \\ (-\infty, 0], & \text{jeśli } s_n = -k(x). \end{cases}$$



Rys.1. Przykłady prawa subróżniczkowego (9.61)<sub>2</sub>

Warunek (9.62)<sub>2</sub> jest równoważny nierówności

$$(9.63) \quad (s^0 - s_n) v_n \geq 0, \quad \forall s^0 \in \mathcal{P}(x).$$

Funkcja podpierająca  $\Psi(x, \cdot)$  zbioru wypukłego  $\mathcal{P}(x)$  ma postać

$$(9.64) \quad \Psi(x, s_n^*) = \sup\{s_n^* s \mid s \in \mathcal{P}(x)\},$$

i przedstawia gęstość dysypacji podłoża w punkcie  $x \in \Gamma_2$ . Korzystając z lematu 4.1 otrzymujemy zależność odwrotną do (9.61)<sub>2</sub>

$$(9.65) \quad s_n \in \partial \Psi(x, -v_n).$$

oraz

$$(9.66) \quad I_{\mathcal{P}(x)}(s_n) + \Psi(x, -v_n) = \Psi(x, -v_n) = -s_n v_n, \quad x \in \Gamma_2,$$

gdź dla  $s_n \in \mathcal{P}(x)$  mamy  $I_{\mathcal{P}(x)}(s_n) = 0$ .

Jeśli funkcja  $\Psi(x, \cdot)$  jest symetryczna, tzn.  $\Psi(x, z) = \Psi(x, -z)$  to  $\Psi(x, z) = \Psi(x, |z|)$ . W takim przypadku przedział  $\mathcal{P}(x)$  jest symetryczny względem zera, a gęstość dysypacji ma postać

$$(9.67) \quad \Psi(x, -v_n) = k(x) |v_n|.$$

Jeśli  $\mathcal{P}(x) = [k_1(x), 0]$  to

$$(9.68) \quad \Psi(x, -v_n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } v_n \geq 0, \\ k_1(x) v_n, & \text{dla } v_n < 0. \end{cases}$$

Dla rozpatrywanego zagadnienia kontaktowego bez tarcia zbior, oznaczmy go przez  $K_S^P$ , statycznie dopuszczalnych naprężeń definiujemy następująco

$$(9.69) \quad K_S^P = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid \underline{s}(x) \in C(x), s_{ij,j} + B_i = 0, w \Omega; \\ s_{ij,n_j} = m^S p_i^0, na \Gamma_1; \underline{s}_t = 0, s_n(x) \in P(x), na \Gamma_2 \}.$$

Pole prędkości przemieszczeń  $\underline{v}$  jest pojem kinematycznie dopuszczalnym jeśli  $\underline{v} \in K_K^0$ , por. (9.34) i (9.35).

Jeśli pole naprężenia  $\underline{s} \in K_S^P$  jest takie, że  $\underline{s}(x)$  należy do wnętrza zbioru  $C(x)$  ( $x \in \Omega$ ), a naprężenia normalne  $s_n(x)$  przyjmują wartości określone przez końce przedziału  $P(x)$  ( $x \in \Gamma_2$ ), przy czym zero jest punktem wewnętrznym przedziału  $P(x)$ , to pod obciążeniem  $m^S p_i^0$  ciało  $\Omega$  pozostaje sztywne, zaś podłoże ulega uplastycznieniu. Łatwo wyobrazić sobie inne możliwości. Istotne jest więc założenie  $K_S^P \neq \emptyset$ .

Kinematyczny mnożnik obciążenia  $m^k$  określamy w następujący sposób

$$(9.70) \quad m^k(\underline{v}) = \frac{D_C(\underline{e}(\underline{v})) + \bar{\Phi}(\underline{v}) - \int_{\Omega} B \cdot \underline{v} \, dx}{\int_{\Gamma_1} p_i^0 v_i \, d\Gamma}, \quad \underline{v} \in K_K^0,$$

gdzie

$$(9.71) \quad \bar{\Phi}(\underline{v}) = \int_{\Gamma_2} \Psi(x, -v_n) \, d\Gamma, \quad \underline{v} \in K_K^0.$$

Trójkę  $(m, \underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{v}})$  spełniającą zarówno warunki statyczne jak i kinematyczne nazwiemy rozwiązaniem zupełnym.

#### Twierdzenie o dolnej granicy obciążenia

$$(9.72) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć} \\ \sup \{ m^S(\underline{s}) \mid \underline{s} \in K_S^P \} . \end{array} \right.$$

Jak wiemy z poprzednich rozważań należy udowodnić, że  $m^S(\underline{s}) \leq m^S(\underline{\tilde{s}}) = m$ ,  $\forall \underline{s} \in K_S^P$ . W tym celu rozpatrujemy równość

$$\int_{\Omega} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})_{,j} \tilde{v}_i \, dx = 0, \quad \forall \underline{s} \in K_S^P,$$

przeprowadzamy całkowanie przez części, a następnie korzystamy z nierówności  $(s_n - \tilde{s}_n) v_n \geq 0$ , por. (9.63).



Twierdzenie o górnej granicy obciążenia

(9.73) | Znaleźć  $\inf\{m^k(\underline{v}) \mid \underline{v} \in K_k^0\}$ ,

gdzie  $K_k^0$  jest dane zależnością (9.34), albo - dla ośrodka niesściśliwego - (9.35).

Udowodnimy, że  $m \leq m^k(\underline{v})$ ,  $\forall \underline{v} \in K_k^0$ . W tym celu wychodzimy od nierówności (9.26), w której  $\underline{v} \in K_k^0$ . Całkując jej prawą stronę przez części otrzymujemy

$$D_c(e(\underline{v})) - D_c(e(\tilde{v})) \geq \int_{\Omega} \underline{B} \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) dx + m \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \tilde{s}_n (v_n - \tilde{v}_n) d\Gamma.$$

Subrózniczkowalność funkcji  $\Psi(x, \cdot)$  daje nierówność

$$\int_{\Gamma_2} \Psi(x, -v_n) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \Psi(x, -\tilde{v}_n) d\Gamma \geq \int_{\Gamma_2} \tilde{s}_n (\tilde{v}_n - v_n) d\Gamma, \quad \underline{v} \in K_k^0.$$

Uwzględniając tę ostatnią nierówność otrzymujemy

$$D_c(e(\underline{v})) - D_c(e(\tilde{v})) + \int_{\Gamma_2} \Phi(\underline{v}) - \int_{\Gamma_2} \Phi(\tilde{v}) \geq \int_{\Omega} \underline{B} \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) dx + m \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot (\underline{v} - \tilde{v}) d\Gamma.$$

Biorąc następnie pod uwagę zależność (9.70) dostajemy

$$m^k(\underline{v}) \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} d\Gamma \geq m \int_{\Gamma_1} \underline{p}^0 \cdot \underline{v} d\Gamma, \quad \forall \underline{v} \in K_k^0.$$

Wynika stąd, że  $m \leq m^k(\underline{v})$ ,  $\forall \underline{v} \in K_k^0$ .

9.5. Zasady ekstremalne dla ciała idealnie plastycznego w przypadku kontaktu z podłożem nieliniowo lepkiem

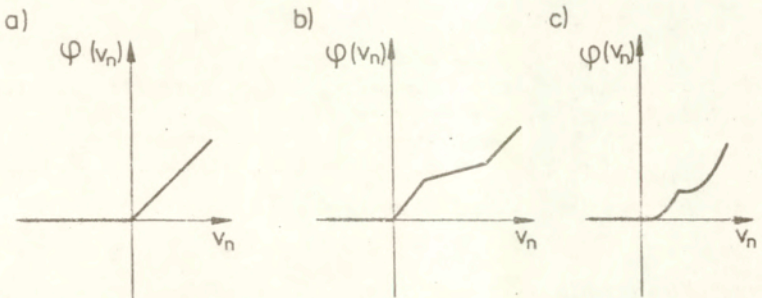
Załóżmy, że powierzchnia  $\Gamma_2$  ciała sztywno idealnie plastycznego jest powierzchnią kontaktu bez tarcia z podłożem lepkiem, niekoniecznie liniowym. Warunki kontaktowe na  $\Gamma_2$  mają następującą postać

$$(9.74) \quad \underline{s}_t = 0, \quad -s_n = k(v_n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } v_n \leq 0, \\ \psi(v_n), & \text{jeśli } v_n > 0, \end{cases}$$

gdzie  $\psi$  jest funkcją ciągłą, niemalejącą, niekoniecznie różniczkowalną i taką, że  $\psi(0) = 0$ , por. rys.2.

Zauważmy, że dla  $v_n \leq 0$  naprężenia normalne są równe zeru, czyli dopuszczalne jest odrywanie się ciał od podłoża.

Możliwe są znacznie ogólniejsze, przynajmniej z matematycznego punktu widzenia, zależności  $s_n$  od  $v_n$ . Wystarczy bowiem założyć,



Rys.2. Przykłady funkcji  $\varphi(v_n)$

ze funkcja  $\varphi$ , czyli zbiór  $\{\xi, \varphi(\xi)\}$  jest maksymalnie monotonicz-  
 ay, por. [26,54]. Oznacza to, że funkcja  $\varphi$  może być jedynie  
 niemalejąca i dolnie półciągła.

W przypadku podłoża liniowego mamy

$$(9.75) \quad -s_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } v_n \leq 0, \\ cv_n, & \text{jeśli } v_n > 0, \end{cases}$$

gdzie  $c = \hat{c}(x) > 0$  ( $x \in \Gamma_2$ ) jest funkcją materiałową.

Mówiąc o podłożu liniowym mamy na myśli jego reakcję dla  $v_n > 0$ .

Przejdźmy do sformułowania zasad wariacyjnych. Połóżmy

$$(9.76) \quad G(v_n) := \int_{-\infty}^{v_n} k(\xi) d\xi = \int_0^{v_n} k(\xi) d\xi.$$

Widać stąd, że funkcja  $G$  nie jest dodatnio jednorodną rzędu  
 1. Korzystając z tw.24.2 Rockafellara [128] wnioskujemy, że  
 funkcja ta jest dolnie półciągłą funkcją wypukłą na  $\mathbb{R}$ , a więc  
 ciągłą na swojej dziedzinie efektywnej  $\text{dom}G$ . W naszym przypadku  
 $\text{dom}G = \mathbb{R}$ . Ponadto  $\partial G(v_n) = k(v_n)$ . Tym samym związek (9.74)<sub>2</sub> może-  
 my zastąpić zależnością subdifferentialną

$$(9.77) \quad -s_n \in \partial G(v_n).$$

Przekształcenie Fenchela

$$(9.78) \quad G^*(v_n^*) = \sup_{v_n} \{ v_n^* v_n - G(v_n) \},$$

definiuje funkcję sprzężoną. Korzystając z lematu 4.1 otrzymujemy zależność odwrotną do (9.77)

$$(9.79) \quad v_n \in \partial G^*(-s_n).$$

Tenże lemat implikuje związek

$$(9.80) \quad G(v_n) + G^*(-s_n) = -s_n v_n.$$

Na przykład, w przypadku podłoża liniowego mamy

$$G(v_n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } v_n \leq 0, \\ cv_n^2/2, & \text{jeśli } v_n > 0; \end{cases}$$

$$G^*(-s_n) = \begin{cases} s_n^2/2c, & \text{jeśli } s_n \leq 0, \\ +\infty, & \text{jeśli } s_n > 0. \end{cases}$$

Jak już wspomnieliśmy funkcją  $G$  nie jest funkcją dodatnio jednorodną rzędu 1. Fakt ten powoduje, że nie udaje się sformułować twierdzeń o nośności granicznej, podobnie jak poprzednio. Innymi słowy, funkcja  $G^*$  nie jest funkcją indykatorową.

Można jednakże sformułować dwie (dualne) zasady ekstremalne. W tym celu założymy, że na  $\Gamma_1$  zadane jest pole prędkości przemieszczeń  $\underline{v}^0$ , czyli

$$(9.81) \quad \underline{v} = \underline{v}^0, \text{ na } \Gamma_1.$$

Wówczas wektor naprężenia  $(s_{ij}n_j)|_{\Gamma_1}$  będzie reakcją na zadane pole prędkości przemieszczeń.

Podejście statyczne. Zbiór naprężeń statycznie dopuszczalnych określamy następująco

$$(9.82) \quad K^S = \{ \underline{s} = (s_{ij}) | s_{ij,j} + B_i = 0, \underline{s}(x) \in C(x), x \in \Omega; \\ \underline{s}_t = 0, -s_n \in \text{dom} G^*, \text{ na } \Gamma_2 \}.$$

Pierwsza zasada ekstremalna przyjmuje postać zadania na maksimum:



$$(9.83) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ \sup \left\{ \int_{\Gamma_1} s_{ij} n_j v_i^0 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} G^*(-s_n) d\Gamma \mid \underline{s} \in K^S \right\}. \end{array} \right.$$

Dowód nie jest skomplikowany. Załóżmy, że pole naprężeń  $\underline{s} \in K^S$  jest polem, na którym osiągane jest supremum. Musimy więc udowodnić, że zachodzi nierówność

$$(9.84) \quad \int_{\Gamma_1} s_{ij} n_j v_i^0 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} G^*(-s_n) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} \tilde{s}_{ij} n_j v_i^0 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} G^*(-\tilde{s}_n) d\Gamma,$$

dla każdego  $\underline{s} \in K^S$ . Oznaczmy przez  $\underline{v}$  kinematycznie dopuszczalne pole prędkości przemieszczeń, będące minimizerem sformułowanego poniżej zadania (9.88). Wynika stąd, że

$$0 = \int_{\Omega} (\tilde{s}_{ij} - s_{ij})_{,j} \tilde{v}_i dx = - \int_{\Omega} (\tilde{s}_{ij} - s_{ij}) e_{ij}(\underline{v}) dx + \\ + \int_{\Gamma_1} (\tilde{s}_{ij} n_j - s_{ij} n_j) v_i^0 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\tilde{s}_n - s_n) \tilde{v}_n d\Gamma, \quad \forall \underline{s} \in K^S,$$

czyli

$$(9.85) \quad 0 \leq \int_{\Omega} (\tilde{s}_{ij} - s_{ij}) e_{ij}(\underline{v}) dx = \int_{\Gamma_1} \tilde{s}_{ij} n_j v_i^0 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} s_{ij} n_j v_i^0 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\tilde{s}_n - s_n) \tilde{v}_n d\Gamma.$$

Subróżniczkowalność funkcji  $G^*$  oznacza, że

$$(9.86) \quad G^*(-s_n) - G^*(-\tilde{s}_n) \geq (\tilde{s}_n - s_n) \tilde{v}_n, \quad \forall \underline{v} \in K^S.$$

Uwzględniając (9.86) w (9.85) dochodzimy do nierówności (9.84).

Podjęcie kinematyczne. Zbiór kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń definiujemy następująco

$$(9.87) \quad K^k = \{ \underline{v} = (v_i) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma_0; \underline{v} = \underline{v}^0, \text{ na } \Gamma_1 \},$$

albo, w przypadku ośrodka nieściśliwego

$$(9.88) \quad K^k = \{ \underline{v} = (v_i) \mid v_{i,i} = 0, \text{ w } \Omega; \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma_0; \underline{v} = \underline{v}^0 \text{ na } \Gamma_1 \}.$$

Druga zasada ekstremalna brzmi

$$(9.89) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ \inf \left\{ D_c(\underline{e}(\underline{v})) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} dx + \int_{\Gamma_2} G(v_n) d\Gamma \mid \underline{v} \in K^k \right\}. \end{array} \right.$$

Dla dowodu skorzystamy z subróżniczkowalności funkcjonału całkowitej energii dysypowanej  $D_c$ :

$$D_c(\underline{e}(\underline{v})) - D_c(\underline{e}(\underline{\tilde{v}})) \geq \int_{\Omega} \tilde{s}_{ij} e_{ij}(\underline{v} - \underline{\tilde{v}}) dx = \int_{\Omega} \underline{B} \cdot (\underline{v} - \underline{\tilde{v}}) dx + \int_{\Gamma_2} \tilde{s}_n (v_n - \tilde{v}_n) d\Gamma, \underline{v} \in K^k,$$

gdyż na  $\Gamma_1$   $\underline{v} = \underline{v}^0$ . Uwzględniając subbrózniczkowalność funkcji  $G$ :

$$G(v_n) - G(\tilde{v}_n) \geq (-s_n)(v_n - \tilde{v}_n),$$

dochodzimy do wniosku, że

$$D_c(\underline{e}(\underline{\tilde{v}})) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{\tilde{v}} dx + \int_{\Gamma_2} G(\tilde{v}_n) d\Gamma \leq D_c(\underline{e}(\underline{v})) - \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} dx + \int_{\Gamma_2} G(v_n) d\Gamma, \underline{v} \in K^k.$$

Ostatnia nierówność dowodzi słuszności zasady ekstremalnej (9.89). ■

#### Uwaga

Ola sformułowania dwóch zasad ekstremalnych w p.9.5 założyliśmy, że na  $\Gamma_1$  prędkość  $\underline{v}$  jest znana i wynosi  $\underline{v} = \underline{v}^0$ . Jeśli powierzchnie  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  są takie, że  $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset$ , to sprawa doboru pola  $\underline{v}^0$  jest delikatna, gdyż na  $\Gamma_0$   $\underline{v} = 0$ . W takim przypadku pole  $\underline{v}^0$  musi być takie, aby zapewnić gładkie przejście na  $\Gamma_0$ . Inne rozwiązanie to wprowadzenie pomiędzy powierzchnie  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  powierzchni  $\Gamma_3$  wolnej od naprężeń, czyli

$$(9.90) \quad s_{ij} n_j = 0, \text{ na } \Gamma_3.$$

Rozszerzenie zasad ekstremalnych (9.83) i (9.85) jest proste i wymaga jedynie uwzględnienia warunku (9.90) w definicji zbioru  $K^S$ , danego wzorem (9.82).

## ROZDZIAŁ II

### WYBRANE NIELINIOWE ZAGADNIENIA HOMOGENIZACJI

#### 1. WSTĘP

Za słowem "homogenizacja" kryją się różnorodne metody uśredniania równań różniczkowych, nierówności wariacyjnych i funkcjonalów [6,16,13,131,132]. Do matematycznie ścisłych metod należą metody  $G$  - i  $\Gamma$ -zbieżności; metoda epi-zbieżności jest przypadkiem szczególnym metody  $\Gamma$ -zbieżności [6].

Metody homogenizacji okazały się bardzo użytecznym narzędziem w poszukiwaniu własności makroskopowych ośrodków i konstrukcji o strukturze periodycznej i kwasi-periodycznej [13,17,37-39,42,51,57,63,66,75,81,82,85,90-92,103-105,131-133,140-144,171].

Ogólnie rzecz biorąc, metody homogenizacji są skuteczne wtedy gdy niejednorodności charakteryzuje mały parametr  $\epsilon$ . Homogenizacja oznacza przejście z tym parametrem do zera w odpowiednim sensie, por. [6]. Matematyczne metody homogenizacji, jak  $G$  - i  $\Gamma$ -zbieżność, pozwalają rozpatrywać niejednorodności nieperiodyczne. Jednakże na obecnym etapie rozwoju tych metod przejście graniczne daje jedynie istnienie modelu efektywnego, natomiast praktycznie nie znamy jego konkretnych własności.

W niniejszym podrozdziale zostaną przedstawione rezultaty autora z zakresu homogenizacji sprężystych ośrodków i płyt spękanych oraz płyt plastycznych. Odpowiednie prace autora, a także prace wspólne z Lewińskim, zawierają reprezentatywny przegląd publikacji z zakresu problematyki wiążącej się z poruszanymi zagadnieniami. Warto przy okazji podkreślić, że w sporej już literaturze mechanicznej dotyczącej wyznaczania modeli efektywnych ośrodków spękanych brak prac uwzględniających warunki typu Signoriniego na szczelinach. A właśnie tego rodzaju warunki modelują zamykanie i otwieranie się szczelin, niekoniecznie całkowite. Metody wariacyjne w powiązaniu z metodami homogenizacji pozwoliły skonstruować modele efektywne ośrodków i płyt spękanych [89,93,95,96,97,100,131,155,158,161].

W niedawno opublikowanej pracy [88], w której autorzy dokonują



między innymi przeglądu metod wyznaczania własności efektywnych laminowanych kompozytów spękanymi, brak nawet wzmianki o homogenizacji i możliwości uwzględniania warunków jednostronnych.

## 2. NIEZBĘDNE WIADOMOŚCI Z ZAKRESU EPI-ZBIEŻNOŚCI I DUALNOŚCI

Celem niniejszego podrozdziału jest wprowadzenie podstawowych pojęć matematycznych z zakresu epi-zbieżności ciągu funkcjonałów i ciągu funkcjonałów sprzężonych. Wiadomości te odgrywać będą istotną rolę w dalszych rozważaniach i nie są, zdaniem autora, zbyt rozpowszechnione. Te literaturowe wiadomości uzupełniamy komentarzami dotyczącymi interesujących nas zastosowań do homogenizacji ośrodków i płyt.

### 2.1. Epi-zbieżność

Szczegółową prezentację teorii epi-zbieżności, która jest szczególnym przypadkiem tzw.  $\Gamma$ -zbieżności, można znaleźć w książce Attoucha [6].

Definicja 2.1. Niech  $(X, \mathcal{T})$  będzie metryzowalną przestrzenią topologiczną, a  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  ciągiem funkcjonałów,  $F_\varepsilon : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ .

(a)  $\mathcal{T}$ -epi-granicą dolną  $\mathcal{T}\text{-li}_e F_\varepsilon$ , oznaczaną również przez  $F^i$ , jest funkcjonał na  $X$  określony następująco

$$F^i(u) = \mathcal{T}\text{-li}_e F_\varepsilon(u) = \min_{\{u_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{T}} u\}} \liminf_\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

(b)  $\mathcal{T}$ -epi-granicą górną ciągu  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ , oznaczaną przez  $\text{-ls}_e F_\varepsilon$  lub  $F^s$ , jest funkcjonał na  $X$  określony zależnością

$$F^s(u) = \mathcal{T}\text{-ls}_e F_\varepsilon(u) = \min_{\{u_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{T}} u\}} \limsup_\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

(c) Mówimy, że ciąg  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest  $\mathcal{T}$ -epi-zbieżny jeśli dla każdego  $u \in X$   $F^i(u) = F^s(u)$ .

Wówczas piszemy  $F = \mathcal{T}\text{-lim}_e F_\varepsilon$ .

#### Własności

(i) Funkcjonały  $F^i$  i  $F^s$  są dolnie półciągłe w topologii  $\mathcal{T}$ .

(ii) Jeśli  $G: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  jest funkcjonałem ciągłym w topologii  $\mathcal{T}$ , tzw.

funkcjonałem perturbacji, to

$$\tau\text{-}\lim_e (F_\epsilon + G) = \tau\text{-}\lim_e F_\epsilon + G = F + G.$$

$$(iii) F(u) = \tau\text{-}\lim_e F_\epsilon(u) \iff \begin{cases} \forall u_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\tau} u, F(u) \leq \liminf_\epsilon F_\epsilon(u_\epsilon), u \in X; \\ \forall u \in X \exists u_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\tau} u \text{ taki, że} \\ F(u) \geq \limsup_\epsilon F_\epsilon(u_\epsilon). \end{cases}$$

(iv) Jeśli funkcyjonały  $F_\epsilon$  są wypukłe to i funkcyjonał  $F^S$  jest wypukły. W takim przypadku funkcyjonał  $F = \tau\text{-}\lim_e F_\epsilon$  jest dolnie półciągłym funkcyjonałem wypukłym.

W wielu zagadnieniach mechaniki funkcyjonał  $G$ , o którym mowa w (ii), przedstawia pracę wirtualną obciążenia zewnętrznego, por. podrozdziały 3, 6.3 i 7.3. Własność (ii) orzeka, że taki funkcyjonał nie wpływa na epi-granicę. Jednak nie zawsze tak jest, jak przekonamy się o tym w punkcie 7.4.2.

Iwierdzenie 2.1. Niech  $F = \tau\text{-}\lim_e F_\epsilon$  i założmy, że istnieje podzbiór  $X_0 \subset X$  relatywnie zwarty w topologii  $\tau$  taki, że

$$\inf_{X_0} F_\epsilon = \inf_X F_\epsilon \quad (\forall \epsilon > 0).$$

Wówczas

$$\inf_X F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\inf_X F_\epsilon).$$

Ponadto, jeśli  $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  jest ciągiem takim, że  $F_\epsilon(u_\epsilon) \rightarrow \inf_X F$  to istnieje podciąg ciągu  $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  zbieżny do minimizera  $X$  funkcyjonału  $F$ .

Uwaga 2.1. Jeśli  $X$  jest przestrzenią Banacha, w której kule są  $\tau$ -zwarte to warunkiem dostatecznym istnienia zbioru  $X_0$  jest aby ciąg  $\{F_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  spełniał następujący warunek ekwi-koercywności:

$$(2.1) \limsup_\epsilon \sup F_\epsilon(u_\epsilon) < +\infty \implies \limsup_\epsilon \|u_\epsilon\|_X < \infty.$$

Rozpatrując homogenizację płyt plastycznych obciążonych na części  $\Gamma_1$  brzegu momentami zginającymi będziemy mieć do czynienia z \*-słabą topologią  $\mathcal{G}(M^1(\Gamma_1), C_0(\Gamma_1))$ , która nie jest metryzowalna.

Ogólnie, jeśli topologia  $\tau$  nie jest metryzowalna to stosuje się pojęcie tzw. ciągowej (sekwencyjnej) epi-zbieżności [6,22].

Definicja 2.2. Ciąg  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest  $\tau$ -epi-zbieżny ciągowo do  $F$  wtedy i tylko wtedy gdy

- (1)  $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\tau} u \implies \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$ .  
 (2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\tau} u$  taki, że  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u) + \varepsilon$ .

W tym przypadku piszemy:  $F = \text{seq}\tau - \lim_e F_\varepsilon$ .

Jeśli topologia  $\tau$  jest metryzowalna to definicje 2.1 i 2.2 są równoważne. Ponadto warunek (2) jest spełniony dla  $\varepsilon=0$ , por. własność (iii).

W praktycznie ważnych sytuacjach istotny jest przypadek gdy przestrzeń  $(X, \tau)$  jest przestrzenią dualną, powiedzmy  $E^*$ , do ośrodkowej przestrzeni Banacha  $E$ ; przy tym  $E^*$  jest wyposażona w topologię \*-słabą. Na przykład,  $E^* = M^1(\Omega)$ , a  $\tau = \mathfrak{G}(M^1(\Omega), C_0(\Omega))$ . Zachowamy więc oznaczenie  $\mathfrak{G}$  dla \*-słabej topologii na  $E^*$  i w przypadku ogólnym.

Dla pełniejszego obrazu definicji epi-zbieżności podamy jeszcze pojęcie topologicznej epi-zbieżności.

Definicja 2.3. Niech  $(X, \tau)$  będzie przestrzenią topologiczną, a  $N_\tau(u)$  zbiorem otoczeń punktu  $u \in X$ . Niech  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $F_\varepsilon: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  będzie ciągiem funkcjonałów.  $\tau$ -epi-granicę dolną i górną określamy, odpowiednio, następująco:

$$\tau\text{-li}_e F_\varepsilon(u) = \sup_{V \in N_\tau(u)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{v \in V} F_\varepsilon(v),$$

$$\tau\text{-ls}_e F_\varepsilon(u) = \sup_{V \in N_\tau(u)} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{v \in V} F_\varepsilon(v).$$

Jeśli  $F^i = F^s$  to piszemy  $F = \tau - \lim_e F_\varepsilon$ .

W metryzowalnej przestrzeni topologicznej definicje 2.1 i 2.3 są równoważne. Na przykład, w ogólnej przestrzeni topologicznej mamy

$$(2.2) \quad \inf_{\{u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\tau} u\}} \liminf_{\varepsilon} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sup_{V \in N_\tau(u)} \liminf_{\varepsilon} \inf_{v \in V} F_\varepsilon(v).$$

Jeśli  $(X, \tau)$  jest przestrzenią metryzowalną to w zależności (2.2) zachodzi równość.

Następujące twierdzenie podaje związek między topologicznym (definicja 2.3) a ciągowym pojęciem epi-zbieżności, przy czym  $\mathfrak{G}$  oznacza omówioną wyżej topologię słabą.



Twierdzenie 2.2 [3]. Jeśli ciąg  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest ekwi-koercywny na  $E^*$ , gdzie  $E$  jest ośrodkową przestrzenią Banacha, to następujące stwierdzenia są równoważne

$$(\alpha) \quad F = \sigma - \lim_e F_\varepsilon,$$

$$(\beta) \quad F = \text{seq}\sigma - \lim_e F_\varepsilon.$$

## 2.2. Epi-zbieżność a dualność

Mając daną parę dualną  $(U^*, U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  i ciąg funkcjonałów  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  możemy skonstruować ciąg funkcjonałów sprzężonych

$$(2.3) \quad F_\varepsilon^*(u^*) = \sup \{ \langle u^*, u \rangle - F_\varepsilon(u) \mid u \in U \}.$$

Powstaje teraz naturalne pytanie o związek między epi-zbieżnością ciągów  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  i  $\{F_\varepsilon^*\}_{\varepsilon>0}$ , por. [6-8, 11, 12, 84, 174].

Attouch [6] podał taki związek przy założeniu, że  $U$  jest refleksywną i ośrodkową przestrzenią Banacha, por. również [84, 174]. Ogólniejszy rezultat uzyskał Azé, który zakłada jedynie ośrodkowość [12].

Twierdzenie 2.3 [12]. Niech  $U$  będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, a  $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \Gamma_0(U)$ . Załóżmy, że:

$$(i) \quad F = s - \lim_e F_\varepsilon.$$

$$(ii) \quad \limsup_\varepsilon F_\varepsilon^*(u_\varepsilon^*) < +\infty \implies \sup_\varepsilon \|u_\varepsilon^*\|_{U^*} < +\infty.$$

Wówczas

$$(2.4) \quad F^* = w^* - \lim_e F_\varepsilon^*.$$

W założeniu (i) tego twierdzenia  $s$  oznacza silną topologię przestrzeni  $U$  (topologię normy), zaś w (2.4)  $w^*$  to  $*$ -słaba topologia przestrzeni  $U^*$ . Przypomnijmy jeszcze, że  $\Gamma_0(U)$  to przestrzeń funkcji wypukłych, właściwych i dolnie półciągłych na  $U$ , por. podrozdział I.4.

Twierdzenie 2.3 zastosujemy w podpunkcie 7.4.2 rozważając homogenizację płyt plastycznych. Wówczas będziemy mieć  $U = C_0(\Gamma_1)$ ,  $U^* = M^1(\Gamma_1)$ . Twierdzenie to odgrywa również istotną rolę w zbudowaniu teorii dualności w postaci jaką zaproponował Azé [11]. Teoria ta, którą zwięźle przedstawiemy, jest wygodnym narzędziem do badania epi-zbieżności wielu zadań dualnych mechaniki przy istotnym założeniu, że wyjściowy ciąg jest ciągiem

funkcjonałów wypukłych.

Niech  $U$  i  $Z$  będą ośrodkowymi przestrzeniami Banacha, przy czym  $(U^*, U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  i  $(Z^*, Z, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  stanowią pary dualne. Niech  $\{F_\xi\}_{\xi>0}$  będzie ciągiem funkcyjonałów ze zbioru  $\Gamma_0^*(U^* \times Z)$ . Dla ustalonego  $\xi > 0$  zadanie pierwotne ma postać

$$(P_\xi) \quad \inf \{F_\xi(u^*, 0) \mid u^* \in U^*\}.$$

Zauważmy, że drugi argument, czyli  $z \in Z$ , gra rolę perturbacji, por. [56].

Położmy

$$(2.5) \quad h_\xi(z) = \inf \{F_\xi(u^*, z) \mid u^* \in U^*\}, \quad z \in Z.$$

Wówczas mamy [56, 87]

$$(2.6) \quad h_\xi^*(z^*) = F_\xi^*(0, z^*), \quad z^* \in Z^*.$$

Sformułujmy zadanie dualne do zadania  $(P_\xi)$ :

$$(P_\xi^*) \quad \sup \{-F_\xi^*(0, z^*) \mid z^* \in Z^*\}, \quad (\sup \{-h_\xi^*(z^*) \mid z^* \in Z^*\}).$$

Przyjmujemy następujące założenie:

$$(Z) \quad \left| \begin{array}{l} \text{istnieje } r > 0 \text{ takie, że dla każdego ciągu } \{z_\xi\}_{\xi>0} \\ \text{elementów z kuli } B_r = \{z \in Z : \|z\| \leq r\} \text{ istnieje ciąg } \{u_\xi^*\}_{\xi>0}, \\ \text{ograniczony, i taki, że } \lim_\xi \sup F_\xi(u_\xi^*, z_\xi) < +\infty. \end{array} \right.$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie, istotne do rozważań przeprowadzonych w punktach 3.2 i 6.5.

Twierdzenie 2.4 [11]. Niech  $U$  i  $Z$  będą ośrodkowymi przestrzeniami Banacha, a  $F_\xi$  i  $F$  funkcyjonałami z  $\Gamma_0^*(U^* \times Z)$  spełniającymi następujące warunki:

$$(2.7) \quad F = w^* s - \lim_e F_\xi.$$

$$(2.8) \quad (Z).$$

$$(2.9) \quad F_\xi(u^*, 0) \geq m(\|u^*\|), \text{ dla } \xi > 0, u^* \in U^*, \text{ przy czym } m \text{ jest funkcją koercywną, wypukłą i parzystą.}$$

Wówczas mamy

$$(i) \quad h = s - \lim_e h_\xi.$$

$$(ii) \quad h^* = w^* - \lim_e h_\xi^*.$$

$$(iii) \quad F(\cdot, 0) = w^* - \lim_e F_\xi(\cdot, 0).$$

- (iv)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Jeśli } u_{\xi}^* \text{ jest minimizerem z dokładnością do } \xi \text{ zadania} \\ P_{\xi}, \text{ a } z_{\xi}^* \text{ minimizerem (również z dokładnością do } \xi) \\ \text{zadania } P_{\xi}^*, \end{array} \right.$   
 gdzie  $\xi \rightarrow 0$ , to ciągi  $\{u_{\xi}^*\}$  i  $\{z_{\xi}^*\}$  są ograniczone. Jeśli  $u^*$  i  $z^*$  są granicami podciągów tych ciągów to:  
 $u^*$  realizuje minimum zadania  $P$ ,  
 $z^*$  realizuje minimum zadania  $P^*$ ,  
 $\inf P = \sup P^*$ ,  
 $\inf P_{\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \inf P$ ,  
 $\sup P_{\xi}^* \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \sup P^*$ .

Dopiero co sformułowane twierdzenie wymaga kilku objaśnień. Funkcja  $h$  występująca w (i) ma postać

$$h(z) = \inf\{F(u^*, z) \mid u^* \in U^*\},$$

natomiast funkcja  $h^*$  jest funkcją sprzężoną z nią poprzez transformację Fenchela, czyli

$$h^*(z^*) = F^*(0, z^*).$$

Zadania  $P$  i  $P^*$  mają odpowiednio postać

$$(P) \quad \inf\{F(u^*, 0) \mid u^* \in U^*\},$$

$$(P^*) \quad \sup\{-F^*(0, z^*) \mid z^* \in Z^*\}.$$

W języku homogenizacji,  $P$  to zadanie zhomogenizowane, przedstawiające - na przykład - zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej dla ośrodka uśrednionego (skala makroskopowa). Podobnie, zadanie  $P^*$  to zhomogenizowane zadanie dualne, czyli - na przykład - zasada energii dopełniającej.

### Uwagi

1. Przedstawiona teoria dualności nie wymaga żadnych założeń periodyczności.
2. Interesujące byłoby rozszerzenie przedstawionej teorii dualności na przypadek niewypukłych funkcjonałów rachunku wariacyjnego, a w szczególności takich, dla których funkcje podcałkowe są:  
 a) wypukłe względem najwyższych pochodnych, b) kwasi-wypukłe, a w szczególności poli-wypukłe, por. [41]. Problem ten pozostaje otwarty. Jego rozwiązanie pozwoliłoby badać problem homogenizacji dualnej dla szerokiej klasy geometrycznie nieliniowych



ośrodków, płyt i powłok, dla której znane jest rozwiązanie problemu homogenizacji pierwotnej, por. [25,94,96a,98,99,118].

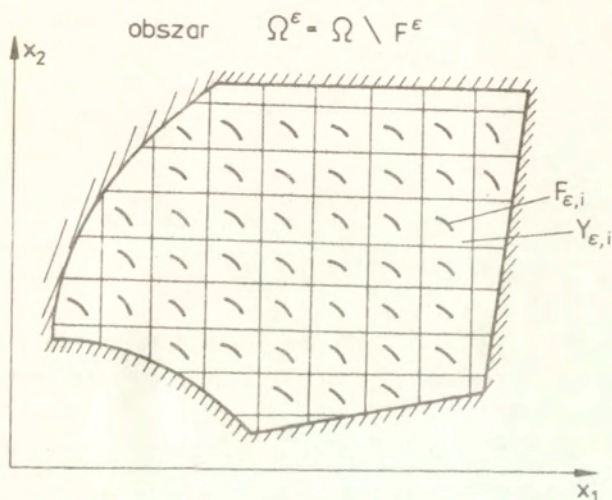
### 3. WŁASNOŚCI EFEKTYWNE SPĘKANEGO OŚRODKA SPRĘŻYSTEGO

W niniejszym i następnym podrozdziale będziemy się zajmować homogenizacją periodycznie spękanego ośrodka sprężystego. Otwieranie się i zamykanie mikroszczelin opisują warunki typu Signoriniego. Można więc mówić o "wewnętrznych" warunkach tego typu. Celem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie rezultatów dotyczących homogenizacji tak spękanego ośrodka bez uwzględnienia tarcia na mikroszczelinach. Pierwotnie zadanie to zostało rozwiązane przez Sanchez-Palencię [131] przy pomocy dwuskalowej metody rozwinięć asymptotycznych. Ścisłe rzecz biorąc metoda ta jest metodą formalną. Dowód zbieżności został przez nas przedstawiony w pracy [152] w oparciu o rezultaty Attoucha i Murat [9] dla przypadku skalarne. W punkcie 3.1 ograniczymy się do sformułowania zagadnienia i przedstawienia głównych wyników. Homogenizację dualną, po raz pierwszy tutaj rozważaną, omówimy w punkcie 3.2. Rezultaty niniejszego podrozdziału ułatwią zrozumienie zagadnienia homogenizacji płyt częściowo spękanych, które rozpatrzemy w podrozdziale szóstym.

Wyczerpujący wykaz publikacji związanych z uśrednianiem ośrodków spękanych zawierają prace [5,88,95,100,154]. Z nowszych prac zacytujemy jeszcze pracę Hashina [72a], którego podejście jest zbliżone do metody pól samogodnych ("self-consistent"). Uwzględnienie wewnętrznych warunków Signoriniego, nawet bez tarcia, nie jest tak proste, gdyż prowadzi do zagadnień o swobodnej powierzchni. Stąd brak w literaturze czysto mechanicznej prac, w których uwzględniano by te (nieliniowe) warunki w sposób precyzyjny. Jak zobaczymy, wygodnym narzędziem okazują się metody homogenizacji i nierówności wariacyjnych.

### 3.1. Podejście przemieszczeniowe

Rozpatrzmy ośrodek sprężysty, w ramach teorii fizycznie i geometrycznie liniowej, osłabiony periodycznie rozłożonymi mikroszczelinami; por. rys.3, na którym schematycznie przedstawiono przypadek dwuwymiarowy.

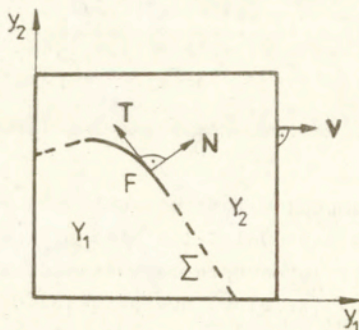


Rys. 3. Ośrodek osłabiony periodycznie rozłożonymi mikroszczelinami - przypadek dwuwymiarowy

Zakładamy, że ciało jest utwierdzone na brzegu, przy czym mikroszczeliny  $F_{\epsilon,i}$  są rozłożone okresowo i nie przecinają brzegu  $\partial\Omega$ . Każda komórka  $Y_{\epsilon,i}$  jest homotetyczna do tzw. komórki bazowej  $Y$ , por. rys.4.

Komórka ta jest osłabiona szczeliną  $F$ , o której zakładamy, że jest powierzchnią klasy  $C^1$ , oraz  $F = \bar{F}$ . Mamy więc  $\text{dist}(F, \partial Y) > 0$ . Ponadto zakładamy, że zbiór  $Y \setminus F$  jest spójny, przy czym  $F$  może być sumą rozłącznych szczelin. Oczywiście parametr  $\epsilon$  jest dodatni a homogenizacja ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) oznacza rozmywanie szczelin i konstruowanie ośrodka makroskopowego bez szczelin.

Oznaczamy przez  $F^\epsilon$  sumę mikroszczelin takich, że odpowiednie komórki  $Y_{\epsilon,i}$  są zawarte w  $\Omega$ , czyli



Rys.4. Komórka bazowa Y osłabiona szczeliną F

$$(3.1) \quad F^\varepsilon = \bigcup_{i \in I(\varepsilon)} F_{\varepsilon, i}, \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon.$$

Liniowo sprężysty materiał ośrodka jest, dla prostoty rozważań, jednorodny. Stałe sprężyste  $a_{ijkl}$  spełniają zwykle warunki symetrii oraz

$$(3.2) \quad \exists c_1 \geq c_0 > 0, \quad \forall \underline{e} \in E_S^n \quad c_0 e_{ij} e_{ij} \leq a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \leq c_1 e_{ij} e_{ij}.$$

Tutaj  $n=2$  lub  $3$ . Do dalszych rozważań przyjmiemy  $n=3$  (przypadek trójwymiarowy). Można również rozpatrywać przypadek ogólniejszy gdy  $a_{ijkl}$  są periodyczne, czyli  $a_{ijkl} \in L^\infty(Y)$ , albo  $a_{ijkl}(x, \cdot) \in L^\infty(Y)$ . W tym ostatnim przypadku wystarczy założyć, że  $a_{ijkl} \in W^{1, \infty}(\Omega, L^\infty(Y))$ , por. [157]. Oznacza to, że sam materiał jest kwasi-periodyczny. Jeśli jest ogólnie niejednorodny to wystarczy założyć, że  $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ . Oczywiście zawsze milcząco zakładamy, że zachodzi warunek (3.2).

Przez  $H_{\text{per}}(Y \setminus F)$  oznaczmy następującą przestrzeń funkcji  $Y$ -periodycznych:

$$(3.3) \quad H_{\text{per}}(Y \setminus F) = \{ \underline{v} = (v_i(y)) \mid v_i \in H^1(Y \setminus F), \underline{v} \text{ jest } Y\text{-periodyczna} \},$$

gdzie, por. [71]

$$(3.4) \quad H^1(Y \setminus F) = \{ v \in L^2(Y \setminus F) \mid \frac{\partial v}{\partial y_i} \in L^2(Y \setminus F) \} = \\ = \{ v \in H^1(Y_1) \cup H^1(Y_2) \mid v|_{\Gamma_1} = v|_{\Gamma_2}, \text{ na } \Sigma \setminus F \}.$$



Tutaj  $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma$ ,  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ ,  $Y \setminus F = Y_1 \cup Y_2 \cup (\Sigma \setminus F)$ , por. rys.4. Wybór gładkiej powierzchni  $\Sigma$  zawierającej  $F$  jest dowolny.

Skok funkcji  $v \in H^1(Y \setminus F)$  na  $F$  określamy następująco

$$(3.5) \quad \llbracket v \rrbracket = v|_2 - v|_1, \quad \text{na } F.$$

Warunki (wewnętrzne) Signoriniego bez tarcia na  $F^\epsilon$  mają postać

$$(3.6) \quad \underline{s}_t^\epsilon = 0, \quad \llbracket u_n^\epsilon \rrbracket \geq 0, \quad s_n^\epsilon \leq 0, \quad s_n^\epsilon \llbracket u_n^\epsilon \rrbracket = 0, \quad \text{na } F^\epsilon,$$

gdzie  $s_n^\epsilon = s_n^\epsilon|_1 = -s_n^\epsilon|_2$ ,  $\underline{s}_t^\epsilon = \underline{s}_t^\epsilon|_1 = -\underline{s}_t^\epsilon|_2$ .

Definiujemy formę dwuliniową, przedstawiającą pracę wirtualną sił wewnętrznych

$$(3.7) \quad a^\epsilon(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega^\epsilon} a_{ijkl} e_{ij}(\underline{u}) e_{kl}(\underline{v}) dx; \quad \underline{u}, \underline{v} \in H^1(\Omega^\epsilon, R^3).$$

Zbiór (stożek wypukły) kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń ma postać

$$(3.8) \quad K_D^\epsilon = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega^\epsilon, R^3) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \partial\Omega; \llbracket v_n \rrbracket \geq 0, \text{ na } F^\epsilon \}.$$

Dla ustalonego  $\epsilon > 0$  zagadnienie równowagi ośrodka spękanego formułujemy jako zadanie minimizacji:

$$(3.9) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} a^\epsilon(\underline{v}, \underline{v}) - \int_{\Omega^\epsilon} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx \mid \underline{v} \in K_D^\epsilon \right\}.$$

Ponieważ zadanie (3.9) jest wypukłym zadaniem minimizacji, więc sformułowanie równoważne ma postać nierówności wariacyjnej.

#### Zadanie $P^\epsilon$

$$(3.10) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć } \underline{u}^\epsilon \in K_D^\epsilon, \text{ takie że} \\ a^\epsilon(\underline{u}^\epsilon, \underline{v} - \underline{u}^\epsilon) \geq L(\underline{v} - \underline{u}^\epsilon), \quad \forall \underline{v} \in K_D^\epsilon, \end{array} \right.$$

gdzie

$$(3.11) \quad L(\underline{v}) = \int_{\Omega^\epsilon} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx = \int_{\Omega} \underline{B} \cdot \underline{v} \, dx, \quad \underline{v} \in H^1(\Omega^\epsilon, R^3).$$

Zakładamy, że  $B_i \in L^2(\Omega)$ .

Homogenizacja polega na przejściu  $\epsilon \rightarrow 0$  w zadaniu (3.9), lub (3.10). Podstawowe rezultaty ujmuje następujące twierdzenie, por. [152].

Twierdzenie 3.1. Niech  $\underline{u}^\varepsilon$  będzie rozwiązaniem zadania  $P^\varepsilon$  i niech  $s_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl} e_{kl}(\underline{u}^\varepsilon)$ . Wówczas mamy

$$\begin{aligned} \underline{u}^\varepsilon &\longrightarrow \underline{u} \text{ silnie w } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ \underline{s}^\varepsilon &\longrightarrow \underline{s} \text{ słabo w } L^2(\Omega, E_s^3), \end{aligned}$$

gdzie  $\underline{u}$  jest minimizerem całkowitej energii potencjalnej ośrodka zhomogenizowanego

$$\begin{aligned} (3.12) \quad \mathcal{J}^h(\underline{u}) &= \min \{ \mathcal{J}^h(\underline{v}) \mid \underline{v} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \} = \\ &= \min \left\{ \int_{\Omega} [W^h(\underline{e}(\underline{v})) - \underline{B} \cdot \underline{v}] dx \mid \underline{v} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \right\}. \end{aligned}$$

Potencjał sprężysty  $W^h$  tego ośrodka ma postać

$$(3.13) \quad W^h(\underline{E}) = \inf_{\gamma \setminus F} \left\{ \frac{1}{2|\gamma|} \int_{\gamma \setminus F} a_{ijkl} (e_{yij}(\underline{w}) + E_{ij}) (e_{ykl}(\underline{w}) + E_{kl}) dy \mid \underline{w} \in K_{\text{per}} \right\},$$

gdzie  $\underline{E} \in E_s^3$ ,  $e_{yij}(\underline{w}) = (\frac{\partial w_i}{\partial y_j} + \frac{\partial w_j}{\partial y_i})/2$ ,

oraz

$$(3.14) \quad K_{\text{per}} = \{ \underline{w} \in H_{\text{per}}(\gamma \setminus F) \mid [w_N] \geq 0, \text{ na } F \}.$$

Ponadto

$$(3.15) \quad a^\varepsilon(\underline{u}^\varepsilon, \underline{u}^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} W^h(\underline{e}(\underline{u})) dx,$$

$$(3.16) \quad \underline{s}(x) = \frac{\partial W^h(\underline{e}(\underline{u}(x)))}{\partial \underline{e}}, \text{ p.w. } x \in \Omega.$$

Ze względu na to, że zbiór  $K_{\text{per}}$  kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń mikroskopowych jest stożkiem, różnym od całej przestrzeni  $H_{\text{per}}(\gamma \setminus F)$ , przeto potencjał makroskopowy  $W^h$  nie jest funkcją kwadratową odkształceń makroskopowych. Ośrodek zhomogenizowany jest więc fizycznie nieliniowy. Jeśli  $a_{ijkl}$  zależą od zmiennej makroskopowej  $x \in \Omega$  to oczywiście i potencjał  $W^h$  zależy jawnie od tej zmiennej.

Widzimy, że ośrodek zhomogenizowany nie zawiera szczelin, które zostały rozmyte. Jest to możliwe w przypadku periodycznego rozkładu. Przypadek ogólniejszy pozostaje otwarty.

Warto zauważyć jeszcze, że ciąg funkcjonałów

$$(3.17) \quad \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{v}) = \frac{1}{2} a^\varepsilon(\underline{v}, \underline{v}) - L(\underline{v}),$$

jest epi-zbieżny do funkcjonału  $\mathcal{J}^h$ , czyli

$$(3.18) \quad \mathcal{J}^h = [S - L^2(\Omega, R^3)]\text{-}\lim_e \mathcal{J}^\varepsilon.$$

Znacznie bardziej złożone rozważania związane z tego rodzaju epi-zbieżnością przeprowadzimy w punkcie 6.4.

Następne twierdzenie charakteryzuje główne własności potencjału makroskopowego  $W^h$ .

Twierdzenie 3.2. Potencjał sprężysty  $W^h$  jest klasy  $C^1$ , ściśle wypukły i spełnia następujący warunek

$$(3.19) \quad c_2 E_{ij} E_{ij} \leq W^h(\underline{E}) \leq c_1 E_{ij} E_{ij}, \quad \forall \underline{E} \in E_S^3,$$

dla pewnego  $c_2 > 0$  (stała  $c_1$  jest taka jak w (3.2)).

Dowód.

Krok 1. Dowód wypukłości przeprowadzimy podobnie jak w pracy [161] dla płyt typu Reissnera. Niech  $\underline{w}^{(\alpha)} \in K_{\text{per}}$  będzie funkcją realizującą infimum w prawej stronie zależności (3.13), dla zadanego  $\underline{E}^{(\alpha)} \in E_S^3$  ( $\alpha=1,2$ ). Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} (3.20) \quad W^h\left[\frac{1}{2}(\underline{E}^{(1)} + \underline{E}^{(2)})\right] &= \frac{1}{2|\gamma|} \int_{\gamma F} a_{ijkl} \left[\frac{1}{2}(E_{ij}^{(1)} + E_{ij}^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(e_{yij}(\underline{w}^{(1)}) + e_{yij}(\underline{w}^{(2)}))\right] \left[\frac{1}{2}(E_{kl}^{(1)} + E_{kl}^{(2)}) + \frac{1}{2}(e_{ykl}(\underline{w}^{(1)}) + e_{ykl}(\underline{w}^{(2)}))\right] dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2|\gamma|} \int_{\gamma F} \frac{1}{2} a_{ijkl} (E_{ij}^{(1)} + e_{yij}(\underline{w}^{(1)}))(E_{kl}^{(1)} + e_{ykl}(\underline{w}^{(1)})) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2|\gamma|} \int_{\gamma F} \frac{1}{2} a_{ijkl} (E_{ij}^{(2)} + e_{yij}(\underline{w}^{(2)}))(E_{kl}^{(2)} + e_{ykl}(\underline{w}^{(2)})) dy + \\ &= \frac{1}{2} W^h(\underline{E}^{(1)}) + \frac{1}{2} W^h(\underline{E}^{(2)}). \end{aligned}$$

Ponadto potencjał  $W^h$  jest ściśle wypukły, gdyż w nierówności (3.20) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy  $\underline{E}^{(1)} = \underline{E}^{(2)}$ ; wówczas również  $\underline{w}^{(1)} = \underline{w}^{(2)}$  (z dokładnością do stałego wektora).

Krok 2. Wykażemy teraz, że potencjał  $W^h$  jest subróżniczkowalny. Ponieważ funkcja  $W^h$  jest wypukła i skończona, a więc jest subróżniczkowalna, por. [128, Corollary 10.1.1, Theorem 23.4].



Mozna również rozumować inaczej. Oznaczmy przez  $\underline{g}(y)$  naprężenia mikroskopowe, tzn.:

$$(3.21) \quad \sigma_{ij}(y) = a_{ijkl} (\tilde{E}_{kl} + e_{ykl}(\underline{w})), \quad y \in Y \setminus F,$$

gdzie  $\underline{w}$  realizuje minimum w (3.13) dla zadanego  $\underline{E} \in E_S^3$ .

Mamy więc

$$\begin{aligned} (3.22) \quad W^h(\underline{E}^{(1)}) - W^h(\underline{E}) &= \frac{1}{2|Y|} \int_{Y \setminus F} a_{ijkl} (e_{yij}(\underline{w}^{(1)}) + E_{ij}^{(1)}) (e_{ykl}(\underline{w}^{(1)}) + E_{kl}^{(1)}) dy - \\ &- \frac{1}{2|Y|} \int_{Y \setminus F} a_{ijkl} (e_{yij}(\underline{w}) + \tilde{E}_{ij}) (e_{ykl}(\underline{w}) + \tilde{E}_{kl}) dy \geq \\ &\geq \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \sigma_{ij}(y) [E_{ij}^{(1)} + e_{yij}(\underline{w}^{(1)}) - (\tilde{E}_{ij} + e_{yij}(\underline{w}))] dy = \\ &= \left( \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \sigma_{ij}(y) dy \right) (E_{ij}^{(1)} - \tilde{E}_{ij}) + \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \sigma_{ij}(y) e_{yij}(\underline{w}^{(1)} - \underline{w}) dy \geq \\ &\geq s_{ij}(E_{ij}^{(1)} - \tilde{E}_{ij}), \quad \forall \underline{E}^{(1)} \in E_S^3, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.23) \quad \underline{s} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \underline{\sigma}(y) dy,$$

jest naprężeniem makroskopowym. Ponieważ  $\underline{E}^{(1)}$  i  $\tilde{E}$  są dowolnymi elementami z  $E_S^3$ , więc mamy nowy dowód subróżniczkowalności potencjału  $W^h$ . Skorzystaliśmy przy tym z faktu, że funkcja  $f(\underline{e}) = \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$  jest oczywiście subróżniczkowalna i z nierówności

$$(3.24) \quad \int_{Y \setminus F} \sigma_{ij}(y) e_{yij}(\underline{w}(y) - \underline{w}(y)) dy \geq 0, \quad \forall \underline{w} \in K_{per},$$

kterą wynika z zadania minimalizacyjnego występującego w (3.13). Korzystając następnie z lematu 7.2 podanego w książce [131] wnioskujemy, że potencjał  $W^h$  jest klasy  $C^1$ .

Przejdźmy do wykazania nierówności (3.19). Położmy  $\underline{w} = 0$  w (3.13), co daje

$$(3.25) \quad W^h(\underline{E}) \leq \frac{1}{2|Y|} \int_{Y \setminus F} a_{ijkl} E_{ij} E_{kl} dy \leq \frac{c_1}{2} E_{ij} E_{ij}, \underline{E} \in E_s^3.$$

Widzimy stąd, że w (3.19) zamiast stałej  $c_1$  można nawet wziąć stałą  $c_1/2$ .

Niech  $B$  będzie kulą, zawierającą  $F$ , o środku w  $Y$ . Uwzględniając (3.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} W^h(\underline{E}) &\gg \min \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} f(\underline{e}_y(\underline{w}) + \underline{E}) dy \mid \underline{w} \in \underline{H}_{\text{per}}(Y \setminus F) \right\} \gg \\ &\gg \min \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus B} f(\underline{e}_y(\underline{w}) + \underline{E}) dy \mid \underline{w} \in \underline{H}_{\text{per}}(Y) \right\} \gg \\ &\gg c_0 \min \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus B} |\underline{e}_y(\underline{w}) + \underline{E}|^2 dy \mid \underline{w} \in \underline{H}_{\text{per}}(Y) \right\} = c_0 W_B^h(\underline{E}), \underline{E} \in E_s^3. \end{aligned}$$

Funkcja  $W_B^h$  jest oczywiście wypukłą funkcją kwadratową niezmienniczą względem symetrii komórki  $Y$ . Oznacza to, że  $W_B^h(\underline{E}) = c|\underline{E}|^2$ , dla pewnego  $c > 0$ . Ostatecznie otrzymujemy

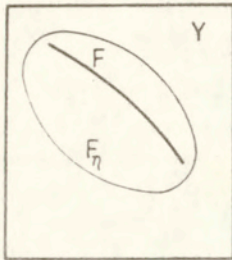
$$W^h(\underline{E}) \gg \tilde{c} c_0 |\underline{E}|^2 = c_2 E_{ij} E_{ij}, \quad c_2 = \tilde{c} c_0. \quad \blacksquare$$

Dowód twierdzenia 3.1 jest znacznie trudniejszy i dłuższy. Tutaj ograniczymy się jedynie do podania szkicu dowodu w oparciu o ostatni rozdział wykładów autora [152], gdzie z kolei korzysta się z wyników pracy [161]. Ogólnie mówiąc dowód polega na przejściu granicznym ( $\xi \rightarrow 0$ ) w nierówności wariacyjnej (3.10). Istotną trudność polega na tym, że obszar  $\Omega^\xi$  jest - z powodu obecności mikroszczelin  $F^\xi$  - bardzo nieregularny i zależy od  $\xi$ . Nie można do niego stosować nierówności Korna w znanej postaci [53, 119].

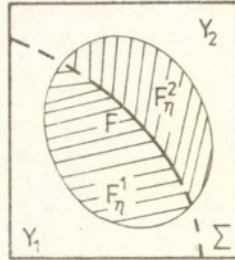
Idea Attoucha i Murat [9], rozpatrzona jedynie dla przypadku skalarnego, polega na zastąpieniu dwuwymiarowych szczelin  $F$  i  $F^\xi$  otworami i skonstruowaniu odpowiednich operatorów przedłużenia. Korzystając z tej idei rozpatrzmy przypadek wektorowy i sformułujemy odpowiednik nierówności Korna dla obszaru  $\Omega^\xi$ . Dowód twierdzenia 3.1 składa się z kilku etapów, które polegają na: 1) skonstruowaniu operatora rozszerzenia  $\mathcal{Q}^\xi$ , 2) wykazaniu ograniczoności ciągu  $\{\underline{u}^\xi\}_{\xi > 0}$ , 3) lokalizacji i 4) identyfikacji pól makroskopowych (naprężeń  $\underline{\sigma}$  i przemiesz-

czeń  $\underline{u}$ ).

Przejdźmy do skonstruowania operatora  $\mathbb{Q}^F$ . Niech  $\eta > 0$  będzie ustalonym parametrem, a  $F_\eta$  pustką ściśle zawartą w  $Y$ , przy czym  $F \subset F_\eta$ , por. rys.5.



$$F = \bar{F} \subset F_\eta$$



$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \Sigma, \quad Y_1 \cup Y_2 = \emptyset,$$

$$F_\eta^\alpha = F_\eta \cap Y_\alpha \quad (\alpha=1,2)$$

Rys.5. Komórka bazowa  $Y$  z pustką  $F_\eta$

Zakładamy, że brzeg obszaru  $F_\eta$  jest dostatecznie gładki. Najpierw konstruujemy operator rozszerzenia  $\mathbb{Q}$ . W poniższych sformułowaniach przez  $c$  oznaczamy stałe dodatnie, niekoniecznie takie same. Stosujemy również uproszczone oznaczenie dla norm; na przykład przez  $\|\cdot\|_{0,Y}$  oznaczamy normę  $L^2$  dla funkcji określonych na  $Y$ . Podobnie  $\|\cdot\|_{1,Y}$  oznacza normę  $H^1$ .

Lemat 3.1. Istnieje operator rozszerzenia

$$\mathbb{P} : H^1(Y \setminus F_\eta, \mathbb{R}^3) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{R}^3)$$

taki, że:

(a)  $\|\mathbb{P} \underline{v}\|_{0,Y} \leq c \|\underline{v}\|_{0,Y \setminus F_\eta}$ ,

(b)  $\sum_{i,j} \|e_{yij}(\mathbb{P} \underline{v})\|_{0,Y} \leq c \sum_{i,j} \|e_{yij}(\underline{v})\|_{0,Y \setminus F_\eta} \leq c \|e_y(\underline{v})\|_{0,Y \setminus F}$ ,

Dowód. Operator taki można zbudować w następujący sposób. Oznaczmy przez  $\mathfrak{R}$  przestrzeń ruchów sztywnych. Wówczas każdą funkcję  $\underline{v} \in H^{(1)}(Y \setminus F_\eta, \mathbb{R}^3)$  można przedstawić w postaci



$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{r}, \quad \underline{r} \in \mathcal{R}, \quad \underline{v}_1 \perp \mathcal{R} \quad (\text{w } L^2(Y \setminus F_{\eta}, \mathbb{R}^3)).$$

Aby przedłużyć  $\underline{v}$  na  $Y$  wystarczy uczynić to z funkcją  $\underline{v}_1$ . Przedłużenie takie istnieje, gdyż brzeg obszaru  $F_{\eta}$  jest gładki [7].  
Mamy więc

$$\mathbb{P}\underline{v} = \mathbb{P}\underline{v}_1 + \underline{r}.$$

Dalsze szczegóły dowodu podano w pracy [161].

Mając operator  $\mathbb{P}$  możemy skonstruować interesujący nas operator z  $Y \setminus F$  na  $Y$ .

Definicja 3.1. Operator przedłużenia

$$\mathcal{Q}: H^1(Y \setminus F, \mathbb{R}^3) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{R}^3)$$

jest równy złożeniu  $\mathcal{Q} = \mathbb{P} \circ \mathbb{R}$ , gdzie  $\mathbb{R}: H^1(Y \setminus F, \mathbb{R}^3) \rightarrow H^1(Y \setminus F_{\eta}, \mathbb{R}^3)$  jest operatorem zwężenia (obcięcia) z obszaru  $Y \setminus F$  na  $Y \setminus F_{\eta}$ .

Własności operatora  $\mathcal{Q}$

- (i)  $\mathcal{Q}\underline{v} = \underline{v}$ , na  $Y \setminus F_{\eta}$ .
- (ii)  $\|\mathcal{Q}\underline{v}\|_{0,Y} \leq c\|\underline{v}\|_{0,Y \setminus F_{\eta}} \leq c\|\underline{v}\|_{0,Y \setminus F} = c\|\underline{v}\|_{0,Y}$ .
- (iii)  $\|e_Y(\mathcal{Q}\underline{v})\|_{0,Y} \leq c\|e_Y(\underline{v})\|_{0,Y \setminus F_{\eta}} \leq c\|e_Y(\underline{v})\|_{0,Y \setminus F}$ .
- (iv)  $\|\mathcal{Q}\underline{v} - \underline{v}\|_{1,Y \setminus F} \leq c\|e_Y(\underline{v})\|_{0,Y \setminus F}$ .

W pracy [161] podano dowód tych własności dla przypadku dwuwymiarowego. Bez większych zmian dowód ten przenosi się na przypadek trójwymiarowy.

Mając operator  $\mathcal{Q}$  można skonstruować rozszerzenie  $\mathcal{Q}^{\varepsilon}$  działające na funkcjach określonych na  $\Omega^{\varepsilon}$ . Szczegóły podano w [161]. Otóż dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje liniowy i ciągły operator

$$\mathcal{Q}^{\varepsilon}: H^1(\Omega^{\varepsilon}, \mathbb{R}^3) \rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

który posiada następujące własności:

- (a)  $\mathcal{Q}^{\varepsilon}\underline{z} = \underline{z}$ , na  $\Omega \setminus F_{\varepsilon}^{\eta}$ ,  $F_{\varepsilon}^{\eta} = \bigcup_{i \in I(\varepsilon)} F_{\varepsilon}^{\eta}, i$ .
- (b)  $\|\mathcal{Q}^{\varepsilon}\underline{z}\|_{0,\Omega} \leq c\|\underline{z}\|_{0,\Omega}$ .
- (c)  $\|e(\mathcal{Q}^{\varepsilon}\underline{z})\|_{0,\Omega} \leq c\|e(\underline{z})\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}$ .
- (d)  $\|\mathcal{Q}^{\varepsilon}\underline{z} - \underline{z}\|_{0,\Omega} \leq c\varepsilon\|e(\underline{z})\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}$ .

Z własności (a) wynika ciekawa implikacja:

$$\underline{z} \in H_1^1(\Omega^\varepsilon, R^3) = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega^\varepsilon, R^3) \mid \underline{v} = 0 \text{ na } \partial\Omega \} \implies Q^\varepsilon \underline{z} \in H_0^1(\Omega, R^3).$$

Powyższe własności pozwalają sformułować nierówność Korna dla obszaru  $\Omega^\varepsilon$ .

Lemat 3.2. Dla każdego  $\underline{z} \in H_1^1(\Omega^\varepsilon, R^3)$  zachodzi nierówność

$$(3.26) \quad \|\underline{z}\|_{1, \Omega^\varepsilon} \leq (c\varepsilon + c_1) \| \underline{e}(\underline{z}) \|_{0, \Omega^\varepsilon}.$$

Stałe  $c$  i  $c_1$  nie zależą od  $\varepsilon$ .

Wnioskujemy stąd, że dla obszaru  $\Omega^\varepsilon$  nierówność Korna (3.26) zależy od  $\varepsilon$ . Ponieważ jednak interesuje nas przejście graniczne  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a stałe  $c$  i  $c_1$  od  $\varepsilon$  niezależą, więc nierówność tę możemy rozumieć w ten sposób, że istnieje stała  $\tilde{c}$ , która nie zależy od  $\varepsilon$ , taka że

$$(3.27) \quad \|\underline{z}\|_{1, \Omega^\varepsilon} \leq \tilde{c} \| \underline{e}(\underline{z}) \|_{0, \Omega^\varepsilon}, \quad \underline{z} \in H_1^1(\Omega^\varepsilon, R^3).$$

Wystarczy w tym celu przyjąć  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  w nierówności (3.26), gdzie  $\varepsilon_0$  jest ustalone.

Mając nierówność (3.26) można sformułować

Lemat 3.3. Dla dowolnego ciągu  $\{\underline{v}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  takiego, że  $\sup_{\varepsilon > 0} \| \underline{v}^\varepsilon \|_{1, \Omega^\varepsilon} < \infty$ , ciąg  $\{Q^\varepsilon \underline{v}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest ograniczony w  $H^1(\Omega, R^3)$

oraz  $\| Q^\varepsilon \underline{v}^\varepsilon - \underline{v}^\varepsilon \|_{0, \Omega} \rightarrow 0$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Wróćmy znów do dowodu tw.3.1. Korzystając z (3.9), (3.27) i z lematu 3.3 można wykazać, że

$$\begin{aligned} \underline{u}^\varepsilon &\longrightarrow \underline{u} && \text{silnie w } L^2(\Omega, R^3), \\ \underline{s}^\varepsilon &\longrightarrow \underline{s} && \text{słabo w } L^2(\Omega, E_S^3). \end{aligned}$$

Następnie rozpatruje się nierówność

$$(3.28) \quad \int_{\Omega^\varepsilon} \psi(x) [a_{ijkl} e_{kl}(\underline{u}^\varepsilon) - a_{ijkl} e_{kl}(\underline{\tilde{v}}_\varepsilon^\varepsilon)] e_{ij}(\underline{u}^\varepsilon - \underline{\tilde{v}}_\varepsilon^\varepsilon) dx \geq 0.$$

gdzie  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\psi > 0$ ,  $\underline{\tilde{v}}_\varepsilon^\varepsilon(x) = \varepsilon \underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon}) = \underline{p}(x) + \varepsilon \underline{\tilde{w}}(x/\varepsilon)$ ,

$\underline{p}_i = \varepsilon_{ij} x_j$ ,  $\underline{e} \in E_S^3$ . Przypominamy, że  $\underline{\tilde{w}} \in K_{\text{per}}$  jest rozwiązaniem lokalnego zadania minimalizacji występującego po prawej stronie zależności (3.13). Wykonując w nierówności (3.28) całkowanie przez części i korzystając z procedury lokalizacji [161] dochodzimy do prostej nierówności

$$(3.29) \quad \langle \underline{s}(x) - \partial W^h(\underline{E}), \underline{g}(\underline{u}(x)) - \underline{E} \rangle_{E_S^3 \times E_S^3} > 0, \quad \forall \underline{E} \in E_S^3, \text{ p.w. } x \in \Omega.$$

Z maksymalnej monotoniczności subdifferentialu  $\partial W^h$  wynika, że  $\underline{s}(x) \in \partial W^h(\underline{g}(\underline{u}(x)))$  [26]. Zależność (3.16) wynika stąd, że potencjał  $W^h$  jest klasy  $C^1$ .

Dowód zbieżności (3.15) oparty jest na metodzie epi-zbieżności. Bardziej złożony przypadek tego typu zbieżności rozpatrzemy w podrozdziale szóstym, przy omawianiu homogenizacji płyty częściowo spękanych.

### 3.2. Podejście naprężeniowe - homogenizacja dualna

Zagadnienie homogenizacji rozpatrzone w punkcie poprzednim było sformułowane w terminach przemieszczeń. Powstaje naturalne pytanie o analizę w terminach naprężeń. Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  zasada energii dopełniającej brzmi:

$$(3.30) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć} \\ \sup \{ -\frac{1}{2} b(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}) \mid \underline{\sigma} \in K_S^\varepsilon \}, \end{array} \right.$$

gdzie, por. (I.3.23)

$$(3.31) \quad b(\underline{\sigma}, \underline{\lambda}) = b^\varepsilon(\underline{\sigma}, \underline{\lambda}) = \int_{\Omega^\varepsilon} b_{ijkl} \sigma_{ij} \lambda_{kl} dx = \int_{\Omega} b_{ijkl} \sigma_{ij} \lambda_{kl} dx; \quad \underline{\sigma}, \underline{\lambda} \in L^2(\Omega^\varepsilon, E_S^3),$$

$$(3.32) \quad K_S^\varepsilon = \{ \underline{\sigma} \in L^2(\Omega^\varepsilon, E_S^3) \mid \sigma_{ij,j} + B_i = 0, \text{ w } \Omega^\varepsilon, \sigma_n \leq 0, \text{ na } F^\varepsilon \}.$$

Wyprowadzenie zadania (3.30) jest analogiczne (i prostsze) do sformułowania zasady energii dopełniającej (6.127) dla płyty spękanej. Z tego powodu dowód pomijamy.

Zwróćmy jednak uwagę na to, iż zasada ekstremalna (3.30) jest dualna do zasady (3.9). Łatwo się o tym przekonać stosując teorię dualności Rockafellara [56].

Zadanie (3.30) jest równoważne następującemu zadaniu bez ograniczeń:

$$(3.33) \quad \sup \left\{ -\frac{1}{2} b(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}) - I_{K_S^\varepsilon}(\underline{\sigma}) \mid \underline{\sigma} \in L^2(\Omega^\varepsilon, E_S^3) \right\}.$$

Zanim podamy nierówność wariacyjną równoważną zadaniu (3.30), sformułujemy prosty lemat. Zauważmy, że zadanie to (lub (3.33)) jest zadaniem, gdzie funkcja, której supremum poszukujemy jest



wklęsłą. Poniższy lemat jest odpowiednikiem dla funkcji wklęsłych rezultatu podanego w książce [56, Prop.2.2, rozdz. II].

Lemat 3.4. Niech  $G = G_1 + G_2$ ,  $G_1 = -F_1$ ,  $G_2 = -F_2$ , przy czym funkcje  $F_1$  i  $F_2$  są wypukłe i dolnie półciągłe na zbiorze wypukłym i domkniętym  $C \subset X$ , gdzie  $X$  jest refleksywną przestrzenią Banacha. Ponadto zakładamy, że funkcja  $G_1$  jest różniczkowalna w sensie Gâteaux. Oznaczmy tę pochodną symbolem  $G_1'$ . Przy założeniu, że  $u \in C$ , następujące warunki są równoważne:

(3.34)  $u$  jest rozwiązaniem zadania

$$G(u) = \sup_{v \in C} G(v) .$$

$$(3.35) \quad \langle G_1'(u), v-u \rangle_{X^* \times X} + G_2(v) - G_2(u) \leq 0, \quad \forall v \in C.$$

Dowód przebiega identycznie jak w przypadku funkcji wypukłych [56] więc go pomijamy. ■

Biorąc pod uwagę założenia ostatniego lematu mamy

$$(3.36) \quad \sup_{v \in C} \{ -F_1(v) - F_2(v) \} \iff \langle F_1'(u), v-u \rangle_{X^* \times X} + F_2(v) - F_2(u) \geq 0, \quad \forall v \in C.$$

Wracając do (3.33), kładziemy  $F_1(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} b(\underline{\sigma}, \underline{\sigma})$ ,  $F_2(\underline{\sigma}) = I_{K_S^E}(\underline{\sigma})$ ,

$X = L^2(\Omega^E, E_S^3)$ . Korzystając z (3.36) otrzymujemy równoważne sformułowanie zadania (3.30):

$$(P_\xi^*) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć } \underline{\sigma}^E \in K_S^E \text{ takie, że} \\ (3.37) \quad b(\underline{\sigma}^E, \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^E) \geq 0, \quad \forall \underline{\sigma} \in K_S^E. \end{array} \right.$$

Aby dokonać przejścia granicznego  $\xi \rightarrow 0$  w zadaniu (3.30), czyli otrzymać epi-granicę dla zadania dualnego, skorzystamy z teorii dualności Azé, a ściślej z twierdzenia 2.4.

W tym celu położymy

$$(3.38) \quad \bar{\Phi}_\xi(\underline{v}, \underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^E} a_{ijkl} (e_{ij}(\underline{v}) + \tau_{ij}) (e_{kl}(\underline{v}) + \tau_{kl}) dx,$$

gdzie  $\underline{v} \in H^1(\Omega^E, R^3)$ ,  $[[v_n]] \geq 0$  na  $F^E$ ,  $\underline{\tau} \in L^2(\Omega^E, E_S^3)$ .

Parametrem perturbacji jest funkcja  $\underline{\tau} = (\tau_{ij})$ .

Mamy wówczas

$$(3.39) \quad \bar{\Phi}^n = s \times s - \lim_e \bar{\Phi}_\xi$$

gdzie  $s \times s$  oznacza silną topologię przestrzeni  $L^3(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega, E_S^3)$ . Funkcjonał  $\Phi^h$  ma postać

$$(3.40) \quad \Phi^h(\underline{v}, \underline{\tau}) = \int_{\Omega} W^h[\underline{e}(\underline{v}) + \underline{\tau}] dx; \quad \underline{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \underline{\tau} \in L^2(\Omega, E_S^3).$$

Makroskopowy potencjał sprężysty jest oczywiście dany zależnością (3.13).

Aby udowodnić (3.39) można skorzystać z podejścia zastosowanego przez Azé [11] dla ośrodka niespękanego. W naszym przypadku istotną rolę odgrywa znajomość epi-granicy  $\mathcal{J}^h$  ciągu  $\{\mathcal{J}^\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  por. wzory (3.17), (3.18). Odsyłamy również do komentarza podanego na końcu punktu 6.5.

Położmy

$$(3.41) \quad F_\epsilon(\underline{v}, \underline{\tau}) = \Phi_\epsilon(\underline{v}, \underline{\tau}) - L(\underline{v}), \quad \underline{v} \in K^\epsilon, \quad \underline{\tau} \in L^2(\Omega^\epsilon, E_S^3).$$

Funkcjonał obciążenia  $L(\underline{v})$  nie wpływa na epi-zbieżność, gdyż odgrywa rolę ciągłej perturbacji, por. własność (ii) z punktu 2.1. Tym samym mamy

$$(3.42) \quad F^h(\underline{v}, \underline{\tau}) = s \times s - \lim_e F_\epsilon,$$

czyli spełnione jest założenie (2.7) twierdzenia 2.4. Założenie (2.8) jest spełnione w sposób oczywisty dla dowolnego  $r > 0$ , por. wzór (3.2). Należy jeszcze sprawdzić założenie (2.9). Korzystając z założenia (3.2) i nierówności Korn'a (3.26) otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_\epsilon(\underline{v}, 0) &\geq c_0 \|\underline{e}(\underline{v})\|_{0, \Omega^\epsilon}^2 - \|\underline{B}\|_{0, \Omega} \|\underline{v}\|_{0, \Omega^\epsilon} \gg \\ &\geq c \|\underline{v}\|_{1, \Omega^\epsilon} - \|\underline{B}\|_{0, \Omega} \|\underline{v}\|_{1, \Omega^\epsilon}. \end{aligned}$$

Założenia tw.2.4 są więc spełnione. Niech

$$(3.43) \quad G_\epsilon(\underline{\zeta}) = \frac{1}{2} b(\underline{\zeta}, \underline{\zeta}) + I_{K_S^\epsilon}(\underline{\zeta}), \quad \underline{\zeta} \in L^2(\Omega^\epsilon, E_S^3).$$

Twierdzenie 2.4 daje epi-granicę ciągu  $\{G_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$

$$(3.44) \quad G^h = (w-L^2(\Omega, E_S^3)) - \lim_e G_\epsilon,$$

gdzie

$$(3.45) \quad G^h(\underline{\zeta}) = \int_{\Omega} (W^h)^*(\underline{\zeta}) dx, \quad \underline{\zeta} \in H_S,$$

przy czym

$$(3.46) \quad H_S = \{ \underline{e} \in L^2(\Omega, E_S^3) \mid \sigma_{ij,j} + B_i = 0, \text{ w } \Omega \}.$$

Metodę umożliwiającą wyznaczenie dopełniającego potencjału makroskopowego  $(W^h)^*$  podano w pracy autora [154], por. również punkt 6.5 naszych dalszych rozważań. Potencjał ten wyznacza się z zależności

$$(3.47) \quad (W^h)^*(\underline{S}) = \sup \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y S_{ij} E_{ij} dy - W^h(\underline{E}) \mid \underline{E} \in E_S^3 \right\} = \\ = \frac{1}{|Y|} \sup_{\underline{E}} \left\{ \int_{Y \setminus F} S_{ij} E_{ij} dy - \inf_{\underline{v} \in K_{\text{per}}} \int_{Y \setminus F} \frac{1}{2} a_{ijkl} (e_{yij}(\underline{v}) + E_{ij})(e_{ykl}(\underline{v}) + E_{kl}) dy \right\}.$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$(3.48) \quad (W^h)^*(\underline{S}) = \inf \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{Y \setminus F} b_{ijkl} (S_{ij} - \tau_{ij})(S_{kl} - \tau_{kl}) dy \mid \underline{\tau} \in S_{\text{per}}^0(\underline{S}) \right\},$$

gdzie

$$(3.49) \quad S_{\text{per}}^0(\underline{S}) = (\underline{S} - S_{\text{per}}^C) \cap (E_S^3)^\perp.$$

Tutaj

$$(3.50) \quad (E_S^3)^\perp = \{ \underline{\tau} \in L^2(Y \setminus F, E_S^3) \mid \int_{Y \setminus F} \underline{\tau}(y) dy = 0 \},$$

oznacza dopełnienie ortogonalne w  $L^2(Y \setminus F, E_S^3)$  przestrzeni  $E_S^3$ .

Dowód tego faktu jest prosty:

$$\left( \int_{Y \setminus F} E_{ij} \tau_{ij}(y) dy = \int_{Y \setminus F} E_{ij} \tau_{ij}(y) dy = 0, \forall \underline{E} \in E_S^3 \right) \Rightarrow \int_{Y \setminus F} \underline{\tau}(y) dy = 0.$$

Zbiór  $S_{\text{per}}^C$  ma postać

$$(3.51) \quad S_{\text{per}}^C = \{ \underline{\tau} \in L^2(Y \setminus F, E_S^3) \mid \text{div}_y \underline{\tau} = 0, \text{ w } Y \setminus F; \tau_N \leq 0, \tau_T = 0, \\ \text{na } F; \underline{\tau}(y) \cdot \underline{v}(y) \text{ przyjmuje przeciwne wartości na} \\ \text{przeciwległych ścianach komórki } Y \},$$

przy czym

$$(3.52) \quad S_{\text{per}}^C = (\underline{e}(K_{\text{per}}))^*,$$

gdzie  $(\underline{e}(K_{\text{per}}))^*$  oznacza stożek polarny do stożka  $\underline{e}(K_{\text{per}})$  w przestrzeni  $L^2(Y \setminus F, E_S^3)$ .



Rzeczywiście

$$(3.53) \quad (\underline{e}(K_{\text{per}}))^* = \left\{ \underline{\tau} \in L^2(Y \setminus F, E_S^3) \mid \int_{Y \setminus F} \tau_{ij} e_{yij}(\underline{v}) dy \leq 0, \forall \underline{v} \in K_{\text{per}} \right\}.$$

Z kolei całkując przez części otrzymujemy

$$(3.54) \quad \int_{Y \setminus F} \tau_{ij} e_{yij}(\underline{v}) dy = - \int_{Y \setminus F} \underline{v} \cdot \text{div}_y \underline{\tau} dy + \int_{\partial Y} \tau_{ij} \nu_j ds + \\ + \int_F \tau_N \llbracket \nu_N \rrbracket ds + \int_F \tau_T \cdot \llbracket \nu_T \rrbracket ds.$$

Stąd wynika (3.51).

### Uwagi

1. Wzór (3.48) na dopełniający potencjał sprężysty można przedstawić w nieco innej postaci. Pole lokalne  $\underline{\tau} \in S_{\text{per}}^0(\underline{S})$  ma postać:  $\underline{\tau} = \underline{S} - \underline{\tilde{\tau}}$ ,  $\underline{\tilde{\tau}} \in S_{\text{per}}^c$ ,  $\langle \underline{\tau} \rangle = 0$ , gdzie

$$\langle \underline{\tau} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \underline{\tau}(y) dy = \frac{1}{|Y|} \int_Y \underline{\tau}(y) dy.$$

Stąd wynika, że  $\underline{\tilde{\tau}} = \underline{S} - \underline{\tau}$ ,  $\langle \underline{\tilde{\tau}} \rangle = \underline{S}$ . Wzór (3.48) przyjmuje następującą, równoważną postać

$$(3.55) \quad (W^h)^*(\underline{S}) = \inf \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_{Y \setminus F} b_{ijkl} \tilde{\tau}_{ij} \tilde{\tau}_{kl} dy \mid \tilde{\tau}_c \in S_{\text{per}}^c, \langle \underline{\tilde{\tau}} \rangle = \underline{S} \right\}.$$

2. Zastanówmy się nad tym, jak z zależności (3.48) wynika wzór na potencjał dopełniający dla niespełkanego ośrodka sprężystego, przy założeniu, że moduły  $b_{ijkl}$  są  $Y$ -okresowe. W takim przypadku zamiast zbioru  $K_{\text{per}}$  mamy całą przestrzeń liniową  $H_{\text{per}}(Y, R^3) = \{ \underline{v} \in H^1(Y, R^3) \mid \text{funkcje } \underline{v} \text{ są } Y\text{-okresowe} \}$ . Podobnie, zamiast zbioru  $S_{\text{per}}^c$  mamy przestrzeń liniową  $[\underline{e}(H_{\text{per}}(Y, R^3))]^\perp = \{ \underline{\tau} \in L^2(Y, E_S^3) \mid \text{div}_y \underline{\tau} = 0, \text{ w } Y; \underline{\tau}(y) \cdot \underline{\nu}(y) \text{ przyjmuje przeciwne wartości na przeciwnych ścianach komórki } Y \}$ . Widzimy, że tym razem  $\underline{S} - [\underline{e}(H_{\text{per}}(Y, R^3))]^\perp = [\underline{e}(H_{\text{per}}(Y, R^3))]^\perp$ . Oznacza to, że przestrzeń naprężeń mikroskopowych, oznaczmy ją przez  $S_{\text{per}}$ , ma postać

$$(3.56) \quad S_{\text{per}} = \{ \underline{S} - [\underline{e}(H_{\text{per}}(Y, R^3))]^\perp \} \cap (E_S^3)^\perp =$$

$$= \{ \underline{\tau} \in [ \underline{\varepsilon} (H_{\text{per}}(Y, R^3)) ]^{\perp} \mid \int_Y \underline{\tau}(y) dy = 0 \}.$$

Ostatecznie otrzymujemy następujący wzór na makroskopowy potencjał dopełniający

$$(3.57) \quad w^h(\underline{s}) = \inf \left\{ \frac{1}{2|Y|} \int_Y b_{ijkl} (s_{ij} + \tau_{ij})(s_{kl} + \tau_{kl}) dy \mid \underline{\tau} \in S_{\text{per}} \right\},$$

gdzie  $\underline{s} \in E_S^3$ . W ten sposób otrzymaliśmy na innej nieco drodze wzór pierwotnie podany przez Azé [11].

3. Jak się wydaje, pierwszą pracą z zakresu dualnego (naprężeniowego) podejścia do homogenizacji była praca Suquet'a [139], ograniczona jednakże do liniowego niespękanego ośrodka sprężystego (oczywiście o strukturze periodycznej). Podejście przedstawione w pracy [139] było czysto heurystyczne. Ścisłą analizę przeprowadził Azé [11]. Metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych do tego samego zagadnienia zastosował Francô [65].

#### 4. HOMOGENIZACJA SPEKANEGO OŚRODKA SPRĘŻYSTEGO PRZY UWZGLĘDNIENIU TARCIA NA MIKROSZCZELINACH: PRZYPADEK STATYCZNY

Rozpatrzmy obecnie ogólniejszy przypadek homogenizacji uwzględniając tarcie na mikroszczelinach  $F^\varepsilon$ , czyli na szczelinie  $F$  w zadaniu lokalnym. Podamy główne rezultaty zawarte w pracy autora [154]. W pracy tej rozpatrzono zarówno przypadek statyczny jak i kwasi-statyczny. Przyjmujemy opis tarcia zastosowany w poprzednim rozdziale przy rozważaniu zagadnień kontaktowych z tarciami.

Niestety, jak na razie nie ma eleganckich matematycznie metod pozwalających na przejście graniczne ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) przy uwzględnieniu tarcia. Musimy zadowolić się podejściem heurystycznym, pamiętając o tym, że ścisłych dowodów zbieżności brak.

##### 4.1. Podejście przemieszczeniowe

W poprzednim podrozdziale mieliśmy warunek  $\underline{s}_t^\varepsilon = 0$  na  $F^\varepsilon$ , por. (3.6)<sub>1</sub>. Uwzględniając tarcie w rozpatrywanym problemie statycznym przyjmujemy prawo tarcia w postaci ( $\varepsilon > 0$  jest ustalone)

$$(4.1) \quad \llbracket \underline{u}_t^\xi \rrbracket \in \partial I_{K^\xi(s_n^\xi)}(\underline{s}_t^\xi), \quad \text{na } F^\xi,$$

gdzie

$$(4.2) \quad K^\xi(s_n^\xi) = \{ \underline{d} \mid g(s_n^\xi, \underline{d}) \leq 0, \underline{d} \cdot \underline{n} = 0, \text{ na } F^\xi \},$$

przy czym  $\underline{n}(x)$  ( $x \in F^\xi$ ) oznacza normalny wektor jednostkowy. Zbiór wypukły  $K^\xi(s_n^\xi)$  nie musi mieć postaci (4.2), por. podrozdział I.2.1.

Podamy najpierw sformułowanie silnie zadania brzegowego dla ustalonego  $\xi > 0$ .

#### Zadanie $P_1^\xi$

Znaleźć pole przemieszczeń  $\underline{u}^\xi(x)$  ( $x \in \Omega^\xi$ ), takie że

$$(4.3) \quad s_{i,j,j}^\xi(\underline{u}^\xi) + B_i = 0, \quad \text{w } \Omega^\xi,$$

$$(4.4) \quad s_{ij}^\xi(\underline{u}^\xi) = a_{ijkl} e_{kl}(\underline{u}^\xi),$$

$$(4.5) \quad \underline{u}^\xi = 0, \quad \text{na } \partial\Omega,$$

$$(4.6) \quad \llbracket u_n^\xi \rrbracket \geq 0, \quad s_n^\xi \leq 0, \quad s_n^\xi \llbracket u_n \rrbracket = 0, \quad \text{na } F^\xi,$$

$$(4.7) \quad \llbracket \underline{u}_t^\xi \rrbracket \in \partial I_{K^\xi(s_n^\xi)}(\underline{s}_t^\xi), \quad \text{na } F^\xi.$$

Przejdźmy do sformułowania wariacyjnego. Położmy

$$(4.8) \quad j^\xi(\sigma_n, \llbracket \underline{v}_t \rrbracket) = \sup \{ \underline{d} \cdot \llbracket \underline{v}_t \rrbracket \mid \underline{d} \in K^\xi(\sigma_n) \}.$$

Funkcja  $j^\cdot$  przedstawia jednostkową pracę sił tarcia na przemieszczeniach wirtualnych  $\underline{v}$  na  $F^\xi$ . Dla prawa tarcia Coulomba mamy

$$j^\xi(\sigma_n, \llbracket \underline{v}_t \rrbracket) = \mu |\sigma_n| | \llbracket \underline{v}_t \rrbracket |,$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia.

Dla ustalonego  $\xi > 0$  sformułowanie wariacyjne przyjmuje postać niejawną nierówności wariacyjnej

#### Zadanie $P^\xi$

Znaleźć pole przemieszczeń  $\underline{u}^\xi \in K_D^\xi$ , takie że

$$(4.9) \quad a^\xi(\underline{u}^\xi, \underline{v} - \underline{u}^\xi) + J^\xi(\underline{u}^\xi, \underline{v}) - J^\xi(\underline{u}^\xi, \underline{u}^\xi) \geq L(\underline{v} - \underline{u}^\xi), \quad \forall \underline{v} \in K_D^\xi,$$

gdzie

$$(4.10) \quad J^\xi(\underline{u}^\xi, \underline{v}) = \int_{F^\xi} j^\xi(s_n^\xi(\underline{u}^\xi), \llbracket \underline{v}_t \rrbracket) ds,$$



zaś zbiór  $K_D^\epsilon$  kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń jest dany wzorem (3.8).

Zadania lokalnego nie możemy obecnie sformułować w postaci zadania na minimum. Będzie ono miało również postać N.N.W. Oznaczmy przez  $\underline{\alpha}$  parametr wewnętrzny, którym jest skok niesprężystej składowej stycznej wektora przemieszczenia na  $F$ ,  $\underline{\alpha} = \llbracket \underline{u}_T \rrbracket^P$ . Podobnie jak i poprzednio przez  $\underline{E} \in E_S^3$  oznaczamy odkształcenie makroskopowe.

Zadanie  $P_{loc}$

(4.11) Dla zadanych  $\underline{E}$  i  $\underline{\alpha}$  znaleźć pole przemieszczeń lokalnych  $\underline{w} \in K_{per}$  takie, że

$$\int_{Y \cap F} a_{ijkl} (E_{kl} + e_{ykl}(\underline{w})) e_{yij}(\underline{v} - \underline{w}) dy + J(\underline{u}, \underline{v}) - J(\underline{u}, \underline{v} - \underline{\alpha}) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in K_{per},$$

gdzie  $u_i = E_{ij} y_j + w_i$ , oraz

(4.12) 
$$J(\underline{u}, \underline{v}) = \int_F j(\underline{\sigma}_N(\underline{u}), \llbracket \underline{v}_T \rrbracket) ds.$$

Przypominamy, że  $\underline{\sigma}_N = \sigma_{ij} N_i N_j$ , gdzie wektor jednostkowy  $\underline{N}$ , prostopadły do  $F$ , jest skierowany na zewnątrz podobszaru  $Y_1$ , por. rys.4. Zauważmy jeszcze, iż  $\llbracket \underline{u}_T \rrbracket = \llbracket \underline{w}_T \rrbracket$  (na  $F$ ). Zbiór  $K(\underline{\sigma}_N)$  jest, dla ustalonych mikroskopowych naprężeń normalnych  $\underline{\sigma}_N$  na  $F$ , wypukłym zbiorem dopuszczalnych stycznych naprężeń lokalnych (na  $F$ ). Wektor stycznego naprężenia mikroskopowego na  $F$  określamy następująco  $\underline{\sigma}_T = \underline{\sigma}_T|_2 = -\underline{\sigma}_T|_1$ .

Jest rzeczą oczywistą, że rozwiązanie  $\underline{u}$  zadania lokalnego ( $P_{loc}$ ) zależy od  $\underline{E}$  i  $\underline{\alpha}$ , tzn.  $\underline{u} = \hat{u}(\underline{E}, \underline{\alpha})$ . Ścisłejszy byłby zapis  $\hat{u}(\underline{E}, \underline{\alpha})(y)$ . Jednakże pozostaniemy przy prostych zapisach, pamiętając o wspomnianej zależności.

Potencjał makroskopowy  $w_{\underline{\sigma}_N}(\underline{E}, \underline{\alpha})$  określamy następująco

(4.13) 
$$w_{\underline{\sigma}_N}(\underline{E}, \underline{\alpha}) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \cap F} f(e_y(\underline{w}) + \underline{E}) dy + \frac{1}{|Y|} \int_F j(\underline{\sigma}_N(\underline{u}), \llbracket \underline{u}_T \rrbracket - \underline{\alpha}) ds,$$

gdzie dla prostoty zapisu przyjęto oznaczenie

$$(4.14) \quad f(\underline{e}_y(\underline{w}) + \underline{E}) = \frac{1}{2} a_{ijkl} (e_{ykl}(\underline{w}) + E_{kl})(e_{yij}(\underline{w}) + E_{ij}).$$

Zastosowaliśmy oznaczenie  $w_{\underline{e}_N}$  aby podkreślić, że mikroskopowe naprężenie  $\underline{\sigma}_N(\hat{u}(\underline{E}, \underline{\alpha}))$ , czyli pierwszy argument funkcji  $j$ , jest traktowane jako parametr w procesie różniczkowania, które wystąpi poniżej, tzn. względem  $\underline{E}$  i  $\underline{\alpha}$ .

Wprowadźmy jeszcze globalny potencjał

$$(4.15) \quad \Phi_{\underline{e}_N}(\underline{A}) = \frac{1}{|\gamma|} \int_F I_K(\underline{\sigma}_N(s))(\underline{\sigma}_T(s)) ds,$$

gdzie  $\underline{A}$  jest siłą termodynamiczną stowarzyszoną z  $\underline{\alpha}$ , czyli

$$(4.16) \quad \underline{\alpha} \in \partial \Phi_{\underline{e}_N}(\underline{A}).$$

Powstaje naturalne pytanie o uzasadnienie takiego podejścia. Ściśle matematycznego dowodu przejścia granicznego ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) w N.N.W.(4.9) brak. Można jednakże podać fizycznie poprawny dowód zależności (4.13). W tym celu uogólnimy znany lemat Hilla [34] na przypadek pól nieciągłych. Przedtem jednakże podamy kilka prostych zależności. Niech  $\underline{u}(y)$  ( $y \in Y \setminus F$ ) będzie mikroskopowym polem przemieszczeń, czyli w naszym przypadku  $u_i = E_{ij} y_j + w_i$ , gdzie  $\underline{w}(y)$  jest rozwiązaniem zadania  $P_{loc}$ . Wówczas mamy

$$(4.17) \quad \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma \setminus F} e_{yij}(\underline{u}(y)) dy = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\partial Y} \frac{1}{2} (u_i \nu_j + u_j \nu_i) ds - \\ - \frac{1}{|\gamma|} \int_F \frac{1}{2} [\underline{u}_N] (N_i N_j + N_j N_i) ds - \frac{1}{|\gamma|} \int_F \frac{1}{2} ([\underline{u}_T] N_j + [\underline{u}_T] N_i) ds.$$

Przypominamy, że  $\underline{\nu}$  oznacza wektor jednostkowy normalny do  $\partial Y$  i skierowany na zewnątrz komórki bazowej  $Y$ .

Pierwszy człon po prawej stronie wzoru (4.17) przedstawia odkształcenia makroskopowe, tzn.:

$$(4.18) \quad E_{ij} = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\partial Y} \frac{1}{2} (u_i \nu_j + u_j \nu_i) ds.$$

Tym samym otrzymujemy

$$(4.19) \quad E_{ij} = \langle e_{ij} \rangle_{Y \setminus F} + \frac{1}{|Y|} \int_F \llbracket u_N \rrbracket N_i N_j ds + \\ + \frac{1}{|Y|} \int_F \frac{1}{2} (\llbracket u_{Ti} \rrbracket N_j + \llbracket u_{Tj} \rrbracket N_i) ds ,$$

gdzie

$$(4.20) \quad \langle e_{ij} \rangle_{Y \setminus F} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} e_{yij}(\underline{u}(y)) dy .$$

Przejdźmy do sformułowania wspomnianego uogólnienia lematu Hilla.

Lemat 4.1. Niech  $\underline{u}$  i  $\underline{\epsilon}$  będą polami mikroskopowymi takimi, że albo

$$(i) \quad u_i = E_{ij} y_j , \quad \text{na } \partial Y , \\ \partial \epsilon_{ij} / \partial y_j = 0 , \quad \text{w } Y \setminus F , \\ \epsilon_N \llbracket u_N \rrbracket = 0 , \quad \text{na } F ;$$

lub

$$(ii) \quad \epsilon_{ij} y_j = S_{ij} y_j , \quad \text{na } \partial Y , \\ \partial \epsilon_{ij} / \partial y_i = 0 , \quad \text{w } Y \setminus F , \\ \epsilon_N \llbracket u_N \rrbracket = 0 , \quad \text{na } F ,$$

gdzie  $\underline{E} \in E_S^3$  i  $\underline{S} \in E_S^3$  są zadane.

Wówczas

$$(4.21) \quad S_{ij} E_{ij} = E_{ij} \langle \epsilon_{ij} \rangle_{Y \setminus F} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \epsilon_{ij}(y) e_{yij}(\underline{u}(y)) dy + \\ + \frac{1}{|Y|} \int_F \llbracket \underline{\epsilon}_T \cdot \llbracket \underline{u}_T \rrbracket \rrbracket ds .$$

Prosty dowód tego lematu znaleźć można w pracy [154]. Warto przy tym zwrócić uwagę na jego ogólność, gdyż ani w sformułowaniu ani w dowodzie nie korzysta się ze związku konstytutywnego. Spostrzeżenie to odnosi się również do zależności (4.17)-(4.19).

Różniczkując obustronnie zależności (4.13) i (4.21) względem  $\underline{E}$  i porównując otrzymane związki wnioskujemy, że [154]



$$(4.22) \quad \underline{S} = \langle \underline{\epsilon} \rangle_{Y \setminus F} = \frac{\partial W_{\epsilon_N}}{\partial \underline{\epsilon}},$$

Oczywiście,  $\underline{S}$  oznacza naprężenie makroskopowe. Podobnie, różniczkując (4.13) i (4.21) względem  $\underline{\alpha}$  dochodzimy do zależności

$$(4.23) \quad \underline{A} = - \frac{\partial W_{\epsilon_N}}{\partial \underline{\alpha}} = \frac{1}{|Y|} \underline{\epsilon}_T.$$

Z ostatniego wzoru wnioskujemy, że w ogólności siła termodynamiczna  $\underline{A}$  (wielkość makroskopowa) zależy od zmiennej mikroskopowej  $s \in F \subset Y$ . Wynika to stąd, że  $\underline{\epsilon}_T$ , czyli mikroskopowe naprężenie styczne na  $F$ , zależy w ogólności od  $s \in F$ .

Oznaczmy przez  $F'$  tę część szczeliny  $F$ , na której  $\epsilon_N < 0$  oraz  $[[u_T]]^P = [[u_T]] \neq 0$ . Oznacza to, że na  $F'$  praca sił tarcia jest dodatnia. Odkształcenie makroskopowe  $\underline{\epsilon}$  jest sumą części sprężystej  $\underline{\epsilon}^e$  i niesprężystej (plastycznej)  $\underline{\epsilon}^p$ , czyli  $\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p$ , gdzie

$$(4.24) \quad \epsilon_{ij}^e = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y \setminus F} e_{yij}(u(y)) dy + \int_F [[u_N]] N_i N_j ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{F \setminus F'} ([[u_{Ti}]] N_j + [[u_{Tj}]] N_i) ds, \right.$$

$$(4.25) \quad \epsilon_{ij}^p = \frac{1}{|Y|} \int_{F'} \frac{1}{2} ([[u_{Ti}]] N_j + [[u_{Tj}]] N_i) ds.$$

Uwzględniliśmy przy tym zależność (4.19). Jeśli szczelina  $F$  jest otwarta to  $F' = \emptyset$  i  $\epsilon^p = 0$ . W drugim skrajnym przypadku, gdy  $F' = F$ , całka po  $F \setminus F'$  we wzorze (4.24) znikną.

Ogólny wniosek z powyższych rozważań jest następujący: ośrodek makroskopowy jest sprężysto-plastyczny typu niestandardowego, gdyż prawo tarcia jest prawem niestowarzyszonym z warunkiem tarcia. W rozpatrzonym czysto statycznym przypadku jest to sprężysto-plastyczność typu deformacyjnej teorii plastyczności.

#### 4.2. Wyprowadzenie potencjału dopełniającego dla zadanych naprężeń normalnych $\epsilon_N$

Przed rozpatrzeniem zagadnienia wyznaczenia potencjału dopełniającego  $W_{\epsilon_N}^*$  w przypadku ogólnym, rozważymy problem prost-

szy. Załóżmy mianowicie, że rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_N$  na szczelinie  $F$  w zadaniu lokalnym jest znany. Przeprowadzone poniżej rozważania są szczególnym przypadkiem nieco ogólniejszych wyników uzyskanych w pracy autora [154].

Jeśli  $\sigma_N$  jest zadane to zadanie lokalne (4.11) daje

$$(4.26) \quad W_{\sigma_N}^*(\underline{E}, \underline{\alpha}) = \inf \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y \setminus F} f(\underline{e}_Y(\underline{v}) + \underline{E}) dy + \int_F j(\sigma_N, [\underline{v}_T]) - \underline{\alpha} ds \mid \underline{v} \in K_{\text{per}} \right\}.$$

Potencjał dualny  $W_{\sigma_N}^*$  wyznaczmy stosując transformację Fenchela, czyli

$$(4.27) \quad W_{\sigma_N}^*(\underline{E}, \underline{\alpha}) = \sup_{\underline{E}, \underline{\alpha}} \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y \setminus F} S_{ij} E_{ij} dy + \int_F |Y| \underline{\alpha}^* \cdot \underline{\alpha} ds - W_{\sigma_N}(\underline{E}, \underline{\alpha}) \right\}.$$

Rozpatrzmy wypukłe zadanie minimalizacji

$$(P(\underline{E}, \underline{\alpha})) \inf \left\{ \int_{Y \setminus F} f(\underline{e}_Y(\underline{v}) + \underline{E}) dy + \int_F j(\sigma_N, [\underline{v}_T]) - \underline{\alpha} ds + I_{K_{\text{per}}}(\underline{v}) \mid \underline{v} \in H_{\text{per}} \right\},$$

gdzie  $\underline{E} \in E_S^3$  i  $\underline{\alpha}$  są ustalone. Jeśli chodzi o parametr wewnętrzny  $\underline{\alpha}$  to możemy przyjąć, że  $\underline{\alpha} \in L^2(Y \setminus F, R^3)$  przy czym  $\underline{\alpha} \cdot \underline{N} = 0$ .

Zadanie dualne  $P^*(\underline{E}, \underline{\alpha})$  wyprowadzimy korzystając z teorii dualności Rockafellara [56]. W tym celu położmy  $\mathcal{L}\underline{v} = \underline{e}_Y(\underline{v})$  i weźmy

$$(4.28) \quad G_{\underline{E}}(\mathcal{L}\underline{v}) = \int_{Y \setminus F} f(\underline{e}_Y(\underline{v}) + \underline{E}) dy, \quad \underline{v} \in H_{\text{per}};$$

$$(4.29) \quad \mathcal{F}(\underline{v}) = \int_F j(\sigma_N, [\underline{v}_T]) - \underline{\alpha} ds + I_{K_{\text{per}}}(\underline{v}), \quad \underline{v} \in K_{\text{per}}.$$

Operator  $\mathcal{L}: H^1(Y \setminus F, R^3) \rightarrow L^2(Y \setminus F, E_S^3) = L_S^2$  jest operatorem liniowym i ciągłym.

Ogólna postać zadania dualnego jest następująca

$$(P^*(\underline{E}, \underline{\alpha})) \quad \sup \{ -G_{\underline{E}}^*(\underline{p}^*) - F^*(-\mathcal{L}^* \underline{p}^*) \mid \underline{p}^* \in L_S^2 \} = \\ = -\inf \{ G_{\underline{E}}^*(\underline{p}^*) + F^*(-\mathcal{L}^* \underline{p}^*) \mid \underline{p}^* \in L_S^2 \}.$$

Korzystając z twierdzenia Ekelanda i Temama [56, Th.2.1, rozdz. IX] mamy

$$(4.30) \quad G_{\underline{E}}^*(\underline{p}^*) = \int_{Y \setminus F} g^*(\underline{p}^*, \underline{E}) dy,$$

gdzie

$$(4.31) \quad g^*(\underline{p}^*, \underline{\varepsilon}) = \sup \{ p_{ij}^* p_{ij} - f(p+\underline{\varepsilon}) \mid p \in E_S^3 \} = \\ = - p_{ij}^* \varepsilon_{ij} + f^*(\underline{p}^*).$$

Tutaj

$$f^*(\underline{p}^*) = \frac{1}{2} b_{ijkl} p_{ij}^* p_{kl}^*, \quad \underline{p}^* \in E_S^3, \quad \underline{b} = \underline{a}^{-1}.$$

Wyznamy teraz operator sprzężony  $\mathcal{L}^*$ . Mamy

$$\langle \mathcal{L} \underline{v}, \underline{p}^* \rangle = \int_{Y \setminus F} e_{yij}(\underline{v}) p_{ij}^* dy = - \int_{Y \setminus F} p_{ij}^* v_{ij} dy + \int_{\partial Y} p_{ij}^* n_j v_i ds - \\ - \int_F p_N^* \llbracket v_N \rrbracket ds - \int_F \underline{p}_T^* \cdot \llbracket \underline{v}_T \rrbracket ds = \langle \underline{v}, \mathcal{L}^* \underline{p}^* \rangle, \quad \underline{v} \in H^1(Y \setminus F, R^3), \quad \underline{p}^* \in L_S^2.$$

Oznacza to, że

$$(4.32) \quad \mathcal{L}^* \underline{p}^* = \begin{cases} - \operatorname{div}_y \underline{p}^*, & \text{w } Y \setminus F, \\ (p_{ij}^* \nu_j), & \text{na } \partial Y, \\ -p_N^*, & \text{na } F, \\ -\underline{p}_T^*, & \text{na } F. \end{cases}$$

Uwzględniając (4.32) otrzymujemy

$$(4.33) \quad \mathcal{F}^*(-\mathcal{L}^* \underline{p}^*) = \sup \{ \langle \underline{v}, -\mathcal{L}^* \underline{p}^* \rangle - \mathcal{F}(\underline{v}) \mid \underline{v} \in H_{\text{per}} \} = \\ = \begin{cases} \int_F \underline{p}^* \cdot \underline{\varepsilon} ds, & \text{jeśli } \underline{p}^* \in \mathcal{C}_{\text{per}}^C(\mathcal{G}_N), \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$(4.34) \quad \mathcal{C}_{\text{per}}^C(\mathcal{G}_N) = \{ \underline{p}^* \in L_S^2 \mid \operatorname{div}_y \underline{p}^* = 0, \text{ w } Y \setminus F; \\ p_N^* \leq 0, \underline{p}_T^* \in K(\mathcal{G}_N), \text{ na } F; \underline{p}^*(y) \cdot \underline{\nu}(y) \text{ przyjmuje przeciw-} \\ \text{ne wartości na przeciwległych ścianach komórki } Y \}.$$

Biorąc pod uwagę zależności (4.31) i (4.33) dostajemy

$$(4.35) \quad \sup \{ -G_{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{p}^*) - \mathcal{F}^*(-\mathcal{L}^* \underline{p}^*) \mid \underline{p}^* \in L_S^2 \} = \\ = - \inf^* \left\{ \int_{Y \setminus F} f^*(\underline{p}^*) dy - \int_{Y \setminus F} p_{ij}^* \varepsilon_{ij} dy + \int_F \underline{p}_T^* \cdot \underline{\varepsilon} ds \mid \underline{p}^* \in \mathcal{C}_{\text{per}}^C(\mathcal{G}_N) \right\}.$$



Dla znalezienia ostatecznej postaci potencjału  $W_{\mathfrak{G}_N}^*$  skorzystamy z zależności

$$(4.36) \quad \inf P(\underline{E}, \underline{\alpha}) = \sup P^*(\underline{E}, \underline{\alpha}).$$

Jej prawdziwość wynika z tw.4.2 podanego w rozdz.III książki [56]. Twierdzenie to jest w naszym przypadku spełnione gdyż minimalizowany w zadaniu  $P(\underline{E}, \underline{\alpha})$  funkcjonal jest wypukły, dolnie półciągły i koercywny. Koercywność zachodzi na przestrzeni

$$(4.37) \quad \tilde{H}_{\text{per}} = \left\{ \underline{v} \in H_{\text{per}} \mid \int_{Y \setminus F} \underline{v}(y) dy = 0 \right\}.$$

Zauważmy, że w ten sposób eliminujemy ruchy sztywne dla wirtualnych pól przemieszczeń mikroskopowych  $\underline{v} \in \tilde{H}_{\text{per}}$ .

Przypomnijmy jeszcze, że dla funkcji z  $H^1(Y \setminus F, \mathbb{R}^3)$  zachodzi nierówność Korn'a [131].

Dla udowodnienia równości (4.36) niezbędna jest jeszcze pewna własność funkcji  $j(\mathfrak{G}_N, \underline{w})$ . Wiemy, że dla ustalonego  $\mathfrak{G}_N$ , zgodnie z naszym wcześniejszym założeniem, zbiór  $K(\mathfrak{G}_N)$  jest ograniczony, wypukły i domknięty. Z ograniczoności wynika, że istnieją kule  $K_1(\mathfrak{G}_N, r_1)$  i  $K_2(\mathfrak{G}_N, r_2)$  o środkach w punkcie  $(\mathfrak{G}_N, 0)$  i promieniach odpowiednio,  $r_1$  i  $r_2$ , takie że  $K_1(\mathfrak{G}_N, r_1) \subset K(\mathfrak{G}_N) \subset K_2(\mathfrak{G}_N, r_2)$ .

Oczywiście promienie  $r_1$  i  $r_2$  mogą zależeć od  $\mathfrak{G}_N$ . Mając takie kule możemy napisać

$$(4.38) \quad r_1 |\underline{w}| = \sup \{ \underline{d} \cdot \underline{w} \mid \underline{d} \in K_1(\mathfrak{G}_N, r_1) \} \leq j(\mathfrak{G}_N, \underline{w}) = \\ = \sup \{ \underline{d} \cdot \underline{w} \mid \underline{d} \in K(\mathfrak{G}_N) \} \leq \sup \{ \underline{d} \cdot \underline{w} \mid \underline{d} \in K_2(\mathfrak{G}_N, r_2) \} = r_2 |\underline{w}|.$$

Funkcja  $j(\mathfrak{G}_N, \cdot)$  jest nieujemna i o wzroście liniowym, czyli subliniowa.

Uwzględniając (4.35) i (4.36) w (4.27) otrzymujemy

$$W_{\mathfrak{G}_N}^*(\underline{S}, \underline{\alpha}^*) = \sup_{\underline{E}, \underline{\alpha}} \inf_{\underline{p} \in \mathcal{L}_{\text{per}}^c(\mathfrak{G}_N)} \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{Y \setminus F} f^*(\underline{p}^*) dy + \right. \\ \left. + \int_{Y \setminus F} (\underline{S} - \underline{p}^*) : \underline{E} dy + \int_F (\underline{p}_T^* + |Y| \underline{\alpha}^*) \cdot \underline{\alpha} ds \right\}.$$

Supremum po  $\underline{\alpha}$  jest skończone wtedy i tylko wtedy gdy  $\underline{p}_T^* + |Y| \underline{\alpha}^* = 0$  (na  $F$ ). Oznacza to, że

$$\begin{aligned}
 (4.39) \quad W_{\mathcal{G}_N}^*(\underline{s}, \underline{\alpha}^*) &= \sup_{\underline{E} \in E_S^3} \inf_{\substack{\underline{p}^* \in \mathcal{L}_{\text{per}}^C(\mathcal{G}_N) \\ \underline{p}_T^* + |\gamma| \underline{\alpha}^* = 0}} \frac{1}{|\gamma|} \left\{ \int_{\gamma F} f^*(\underline{p}^*) dy + \right. \\
 &+ \left. \int_{\gamma F} (\underline{s} - \underline{p}^*) : \underline{E} dy \right\} = \sup_{\underline{E} \in E_S^3} \inf_{\underline{p}^* \in L_S^2} \frac{1}{|\gamma|} \left\{ \int_{\gamma F} f^*(\underline{p}^*) dy + \right. \\
 &+ \left. \int_{\gamma F} (\underline{s} - \underline{p}^*) : \underline{E} dy + I_{\mathcal{X}(\underline{\alpha}^*)}(\underline{p}^*) \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{X}(\underline{\alpha}^*) = \{ \underline{p}^* \in \mathcal{L}_{\text{per}}^C(\mathcal{G}_N) \mid \underline{p}_T^* + |\gamma| \underline{\alpha}^* = 0, \text{ na } F \}.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że przestrzeń  $E_S^3$  można zanurzyć w naturalny sposób w przestrzeń  $L_S^2$ , traktując element  $\underline{e} \in E_S^3$  jako funkcję stałą. Korzystając z pojęcia inf-splotu (patrz podrozdział I.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 W_{\mathcal{G}_N}^*(\underline{s}, \underline{\alpha}^*) &= \sup_{\underline{E} \in E_S^3} \inf_{\underline{p}^* \in L_S^2} \frac{1}{|\gamma|} \left\{ \int_{\gamma F} f^*(\underline{s} - \underline{p}^*) dy + I_{\mathcal{X}(\underline{\alpha}^*)}(\underline{s} - \underline{p}^*) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\gamma F} \underline{p}^* : \underline{E} dy \right\}.
 \end{aligned}$$

Supremum po  $\underline{E} \in E_S^3$  jest skończone wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int_{\gamma F} \underline{p}^*(\gamma) dy = 0.$$

Możemy więc napisać

$$W_{\mathcal{G}_N}^*(\underline{s}, \underline{\alpha}^*) = \frac{1}{|\gamma|} \inf_{\gamma F} \left\{ \int_{\gamma F} f^*(\underline{s} - \underline{p}^*) dy \mid \underline{p}^* \in (-\underline{s} + \mathcal{X}(\underline{\alpha}^*)) \cap (E_S^3)^\perp \right\}.$$

Położmy

$$(4.40) \quad \mathcal{L}_{\text{per}}(\mathcal{G}_N, \underline{s}) = [\underline{s} - \mathcal{X}(\underline{\alpha}^*)] \cap (E_S^3)^\perp.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$(4.41) \quad W_{\mathcal{G}_N}^*(\underline{s}, \underline{\alpha}^*) = \frac{1}{|\gamma|} \inf_{\underline{q}} \left\{ \int_{\gamma F} f^*(\underline{s} - \underline{q}) dy \mid \underline{q} \in \mathcal{L}_{\text{per}}(\mathcal{G}_N, \underline{s}) \right\},$$

gdzie  $\underline{s} \in E_S^3$  oznacza naprężenie makroskopowe.

Zastanówmy się jeszcze nad postacią naprężenia lokalnego  $\underline{q} \in \mathcal{L}_{\text{per}}(\mathfrak{E}_N, \underline{S})$ . Zgodnie z definicją mamy:  $\underline{q} = \underline{S} - \tilde{\underline{q}}$ ,  $\tilde{\underline{q}} \in \mathcal{K}(\underline{\alpha}^*)$ ,  $\langle \underline{q} \rangle = 0$ ; dalej warunek  $\tilde{\underline{q}} \in \mathcal{K}(\underline{\alpha}^*)$  oznacza, że  $\tilde{\underline{q}} \in \mathcal{L}_{\text{per}}^C(\mathfrak{E}_N)$  i  $\tilde{\underline{q}}_T + |\gamma| \underline{\alpha}^* = 0$ .

Biorąc pod uwagę wcześniejsze rozważania widzimy, że zmienna dualna  $\underline{\alpha}^*$  jest związana z siłą termodynamiczną zależnością:  $\underline{A} = -\underline{\alpha}^*$ .

### 4.3. Postać potencjału dopełniającego w przypadku ogólnym

W ogólnym przypadku tarcia na mikroszczelinach naprężenia normalne  $s_n^\xi$  na  $F^\xi$  nie są znane. Jak wiemy z rozważań nad zagadnieniami kontaktowymi z tarciem, nie dysponujemy wówczas zasadami ekstremalnymi. Tym samym nie można stosować teorii dualności Rockafellara. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby rozważyć podejście naprężeniowe, które obecnie zwięźle przedstawimy, korzystając z pracy autora [154].

Rozpatrzmy najpierw naprężeniowe sformułowanie wariacyjne zadania  $P_1^\xi$ . Statycznie dopuszczalne pola naprężeń należą do następującego zbioru

$$(4.42) \quad \mathcal{L}(s_n) = \{ \underline{s} \in H_S(\Omega^\xi) \mid \varrho_{ij,j} + B_i = 0, \text{ w } \Omega^\xi; \\ \varrho_n \leq 0, \quad \varrho_t \in K^\xi(s_n), \text{ na } F^\xi \},$$

gdzie  $K^\xi(s_n)$  określa zależność (4.2). Odpowiednią przestrzenią dla naprężeń jest następująca przestrzeń, por. (I.3.20).

$$(4.43) \quad H_S(\Omega^\xi) = \{ \underline{s} = (s_{ij}) \mid \underline{s} \in L^2(\Omega^\xi, E_S^3), s_{ij,j} \in L^2(\Omega^\xi) \}.$$

Naprężeniowe sformułowanie wariacyjne zadania  $P_1^\xi$  brzmi:

$$(P_1^\xi) \quad \left| \begin{array}{l} \text{znaleźć } \underline{s}^\xi \in \mathcal{L}^\xi(s_n^\xi) \text{ takie, że} \\ (4.44) \quad \int_{\Omega^\xi} b_{ijkl} s_{ij}^\xi (\varrho_{ij} - s_{ij}^\xi) dx \geq 0, \quad \forall \varrho \in \mathcal{L}^\xi(s_n^\xi). \end{array} \right.$$

N.K.W. (4.44) przedstawia zasadę naprężeń przygotowanych dla ustalonego  $\xi > 0$ .

Dla wyprowadzenia tej nierówności wystarczy rozpatrzeć całkę



$$\int_{\Omega^\varepsilon} e_{ij}(\underline{u}^\varepsilon) (\rho_{ij} - s_{ij}^\varepsilon) dx,$$

gdzie  $\underline{u}^\varepsilon \in K_D^\varepsilon$  jest rozwiązaniem N.W.(4.9).

Całkując przez części, korzystając z definicji zbioru  $\mathcal{C}(s_N^\varepsilon)$  i uwzględniając warunki Signoriniego (4.6) dochodzimy do N.K.W.(4.44).

Przejdźmy do zagadnienia homogenizacji problemu  $(P_S^\varepsilon)$ . Oznaczmy przez  $P_{loc}^S$  problem lokalny. Ma on również postać nierówności kwasi-wariacyjnej, ale zadanej oczywiście na  $Y \setminus F$ . Postać tej nierówności otrzymujemy uwzględniając prawą stronę zależności (4.41) pamiętając o tym, że tym razem naprężenia mikroskopowe  $\sigma_N$  na  $F$  nie są zadane.

Zadanie  $P_{loc}^S$

Dla zadanych  $\underline{s} \in E_S^3$  i  $\underline{A}$  znaleźć  $\underline{\sigma} \in \mathcal{C}_{per}(\sigma_N, \underline{s})$  takie, że

$$(4.45) \int_{Y \setminus F} b_{ijkl} (s_{ij} - \sigma_{ij}) (q_{kl} - \sigma_{kl}) dy \gg 0, \quad \forall q \in \mathcal{C}_{per}(\sigma_N, \underline{s})$$

Należy przy tym pamiętać, że  $\underline{\alpha}^* = -\underline{A}$ .

Tutaj  $\underline{s} \in E_S^3$  oznacza naprężenia makroskopowe, a  $\underline{A}$  jest siłą termodynamiczną. Naprężenia makroskopowe  $\underline{\sigma}$  zależą od  $\underline{s}$  i  $\underline{A}$ , czyli  $\underline{\sigma} = \hat{\sigma}(\underline{s}, \underline{A})$ .

Makroskopowy potencjał dopełniający ma postać, por.(4.41)

$$(4.46) \quad w_{\sigma_N}(\underline{s}, \underline{A}) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} f^*(\underline{s} - \hat{\sigma}(\underline{s}, \underline{A})) dy.$$

Dopełniający (komplementarny) potencjał  $\Phi_{\sigma_N}^*$  obliczamy jako funkcję sprzężoną z  $\hat{\sigma}_{\sigma_N}$ , czyli

$$(4.47) \quad \begin{aligned} \Phi_{\sigma_N}^*(\underline{\alpha}) &= \sup_{\underline{A}} \left\{ \int_F \underline{A} \cdot \underline{\alpha} ds - \frac{1}{|Y|} \int_F I_{K(\sigma_N)}(\underline{\sigma}_I) ds \right\} = \\ &= \frac{1}{|Y|} \sup_{\underline{A}} \left\{ \int_F |Y| \underline{A} \cdot \underline{\alpha} ds - \int_F I_{K(\sigma_N)}(|Y| \underline{A}) ds \right\} = \\ &= \frac{1}{|Y|} \sup_{\underline{B}} \int_F [\underline{B} \cdot \underline{\alpha} - I_{K(\sigma_N)}(\underline{B})] ds = \frac{1}{|Y|} \int_F j(\sigma_N, \underline{\alpha}) ds. \end{aligned}$$

Siła termodynamiczna  $\underline{A}$  i parametr wewnętrzny  $\underline{\alpha}$  są związane zależnościami subróżniczkowymi

$$(4.48) \quad \alpha \in \partial \Phi_{\sigma_N}(\underline{A}) \iff \underline{A} \in \partial \Phi_{\sigma_N}^*(\alpha).$$

5. HOMOGENIZACJA SPEKANEGO OŚRODKA SPRĘŻYSTEGO PRZY UWZGLĘDNIENIU TARCIA NA MIKROSZCZELINACH: PRZYPADEK KWASI-STATYCZNY

Dla rozpatrzonego w poprzednim podrozdziale zagadnienia homogenizacji prawo tarcia było prawem typu deformacyjnej teorii plastyczności. Realniejsze fizycznie jest prawo typu parabolicznego

$$\llbracket \dot{w}_T \rrbracket \in \partial I_{K(\sigma_N)}(\dot{F}_T), \text{ na } F,$$

gdzie  $\dot{w}$  oznacza prędkość przemieszczeń mikroskopowych,  $\dot{w} = dw/d\tau$ .

Niniejszy podrozdział jest również oparty na pracy [154].

Będziemy zakładać, że tensor modułów sprężystych  $a_{ijkl}$  nie zależy od czasu, jednakże może zależeć od zmiennej makroskopowej  $x$ .

Przejdźmy do sformułowania silnego. Podobnie jak w podrozdziale 1.6 będziemy pisać  $\underline{u}(\tau)$ , etc., zamiast  $\underline{u}(x, \tau)$ .

Zadanie  $Q_1^\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ )

Znaleźć przemieszczenia  $\underline{u}(\tau)$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) takie, że

$$(5.1) \quad s_{ij,j}^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau)) + B_i(\tau) = 0, \text{ w } \Omega^\epsilon,$$

$$(5.2) \quad s_{ij}^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau)) = a_{ijkl} e_{ij}(\underline{u}^\epsilon(\tau)),$$

$$(5.3) \quad \underline{u}^\epsilon(\tau) = 0, \text{ na } \partial\Omega,$$

$$(5.4) \quad \llbracket u_n^\epsilon(\tau) \rrbracket \geq 0, s_n^\epsilon(\tau) \leq 0, s_n^\epsilon(\tau) \llbracket u_n^\epsilon(0) \rrbracket = 0, \text{ na } F^\epsilon,$$

$$(5.5) \quad \llbracket \dot{u}_t^\epsilon(\tau) \rrbracket \in \partial I_{K^\epsilon(s_n^\epsilon(\tau))}(\dot{s}_t^\epsilon(\tau)), \text{ na } F^\epsilon,$$

$$(5.6) \quad \underline{u}^\epsilon(0) = 0, \text{ w } \Omega^\epsilon.$$

Jak wiemy z poprzedniego rozdziału, zadań, w których występują warunki Signoriniego i prawo tarcia typu prawa plastycznego płynięcia, nie udaje się sformułować w postaci jednej nierówności wariacyjnej. Postępując podobnie jak w podrozdziale 1.6 otrzymujemy następujące sformułowanie wariacyjne

Zadanie  $Q^\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ )

Znaleźć  $\underline{u}^\epsilon$  takie, że  $\underline{u}^\epsilon(\tau) \in K^\epsilon$ ,  $\dot{\underline{u}}^\epsilon(\tau) \in V^\epsilon$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) oraz

$$(5.7) \quad a^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau), \underline{v} - \dot{\underline{u}}^\epsilon(\tau)) + J^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau), \underline{v}) - J^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau), \dot{\underline{u}}^\epsilon(\tau)) + \\ + \int_{F^\epsilon} s_n^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau)) (\llbracket v_n \rrbracket - \llbracket \dot{u}_n^\epsilon(\tau) \rrbracket) ds \geq \int_{\Omega} \underline{b}(\tau) \cdot (\underline{v} - \dot{\underline{u}}^\epsilon(\tau)) dx, \quad \forall \underline{v} \in V^\epsilon,$$

$$(5.8) \quad - \int_{F^\epsilon} s_n^\epsilon(\underline{u}^\epsilon(\tau)) (w - \llbracket u_n^\epsilon(\tau) \rrbracket) ds \geq 0, \quad \forall w \in K_{F^\epsilon},$$

$$(5.9) \quad \underline{u}^\epsilon(0) = 0,$$

gdzie

$$(5.10) \quad V^\epsilon = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega^\epsilon, R^3) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \partial\Omega \},$$

$$(5.11) \quad K_{F^\epsilon} = \{ w \in L^2(F^\epsilon) \mid w \geq 0 \}.$$

Zadanie lokalne, zadane na komórce bazowej  $Y$ , z którego wyznaczamy mikroskopowe pole przemieszczeń, ma również postać N.N.W. sprzężonej z N.W.

Zadanie  $Q_{loc}$

Dla zadanego  $\underline{E}(\tau) \in E_S^3$  i  $\underline{\alpha}(\tau)$  ( $\tau \in [0, \tau_0]$ ) znaleźć mikroskopowe pole przemieszczeń  $\underline{w}$  takie, że  $\underline{w}(\tau) \in K_{per}$  i  $\dot{\underline{w}}(\tau) \in H_{per}$  oraz

$$(5.12) \quad \int_{Y \setminus F} a_{ijkl} e_{yij}(\underline{w}(\tau) + \underline{E}(\tau)) e_{ykl} (\underline{v} - \dot{\underline{w}}(\tau)) dy + \\ + \int_F \sigma_N(\underline{u}(\tau)) (\llbracket v_N \rrbracket - \llbracket \dot{u}_n(\tau) \rrbracket) ds + \\ + J(\underline{u}(\tau), \underline{v}) - J(\underline{u}(\tau), \dot{\underline{u}}(\tau) - \dot{\underline{\alpha}}(\tau)) \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in H_{per}$$

$$(5.13) \quad - \int_F \sigma_N(\underline{u}(\tau)) (w - \llbracket u_N(\tau) \rrbracket) ds \geq 0, \quad \forall w \in K_F,$$

$$(5.14) \quad \underline{u}(0) = 0, \quad \underline{\alpha}(0) = 0.$$

Tutaj  $u_i(\tau) = E_{ij}(\tau) y_j + w_i(\tau)$ ; ponadto

$$(5.15) \quad K_F = \{ w \in L^2(F) \mid w \geq 0 \}.$$

Przemieszczenie mikroskopowe  $\underline{w}(\tau)$  będące rozwiązaniem zadania  $Q_{loc}$  zależy od  $\underline{E}(\tau)$  i  $\underline{\alpha}(\tau)$ , tzn.  $\underline{u}(\tau) = \hat{\underline{u}}(\underline{E}(\tau), \underline{\alpha}(\tau))$ .



Podamy teraz opis ośrodka zhomogenizowanego, czyli makroskopowego. Jeśli  $\underline{E}(\tau) \in E_S^3$  oznacza odkształcenie makroskopowe w chwili  $\tau \in [0, \tau_0]$  to niesprężysta część odkształcenia ma postać (4.25). Należy przy tym pamiętać o tym, że obecnie zarówno  $F'$  jak i  $\underline{u}$  zależą od czasu. Makroskopowy potencjał sprężysty ma postać

$$(5.16) \quad W(\underline{E}, \underline{\alpha}) = \frac{1}{2} a_{ijkl} E_{ij}^e E_{kl}^e = \frac{1}{2} a_{ijkl} (E_{ij} - E_{ij}^p)(E_{kl} - E_{kl}^p),$$

Odkształcenie  $E^p(\tau)$  zależy, w ogólności, od  $\underline{\alpha}(\tau)$  i od  $\underline{E}(\tau)$ . Makroskopowe naprężenie  $\underline{S}$  obliczamy z wzoru

$$(5.17) \quad \underline{S} = \frac{\partial W}{\partial \underline{E}},$$

zaś siłę termodynamiczną stowarzyszoną z  $\underline{\alpha}$  z zależności

$$(5.18) \quad \underline{A} = - \frac{\partial W}{\partial \underline{\alpha}}.$$

Korzystając z (4.25) obliczamy prędkość odkształceń niesprężystych  $\dot{E}^p(\tau)$

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \dot{E}_{ij}^p &= \frac{1}{2|Y|} \frac{d}{d\tau} \int_{F'} (\llbracket u_{Ti} \rrbracket N_j + \llbracket u_{Tj} \rrbracket N_i) ds = \\ &= \frac{1}{2|Y|} \frac{d}{d\tau} \int_{F'} (\alpha_i N_j + \alpha_j N_i) ds = \frac{1}{|Y|} \int_{F'} [\dot{\alpha}_i N_j + \omega \alpha_i N_j] ds, \end{aligned}$$

gdz na  $F'(\tau)$  mamy  $\llbracket u_T(\tau) \rrbracket^p = \llbracket u_T(\tau) \rrbracket = \underline{\alpha}(\tau)$ . Tutaj  $\omega$  oznacza prędkość zmian powierzchni  $F'$  [58]. Problem wyznaczenia tej prędkości rozwiązano w pracy [58].

Wyrażenie na  $\dot{E}^p$  znacznie się upraszcza jeśli człon  $\omega \alpha_i N_j$  znika. Wówczas mamy

$$(5.20) \quad \dot{E}^p = \frac{1}{|Y|} \int_{F'} (\underline{\alpha} \otimes \underline{N})_{\text{sym}} ds.$$

Będzie tak w przypadku gdy  $F'$  nie zależy od czasu.

Prawo ewolucji parametru wewnętrznego  $\underline{\alpha}$  ma postać

$$(5.21) \quad \dot{\underline{\alpha}} \in \partial \Phi_{\sigma_N}(\underline{A}),$$

przy czym funkcja  $\Phi_{\sigma_N}$  jest dana wzorem (4.1).

Rozpatrzmy jeszcze problem wyznaczenia makroskopowego warunku plastyczności. Naprężenia mikroskopowe obliczamy z zależności

$$(5.22) \quad \sigma_{ij}(y) = a_{ijkl} e_{ykl}(\underline{u}), \quad y \in Y \setminus F,$$

gdzie  $\underline{u}$  jest oczywiście rozwiązaniem zadania lokalnego  $Q_{1loc}$ . Tym samym możemy napisać

$$(5.23) \quad \underline{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{u}(\underline{\varepsilon}, \underline{\alpha})),$$

przy czym należy pamiętać o tym, że rozpatrywane pola zależą od czasu  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Stosując częściową transformację Fenchela potencjału  $W$  względem pierwszego argumentu otrzymujemy

$$(5.24) \quad W_1^*(\underline{S}, \underline{\alpha}) = \sup \{ \underline{S} : \underline{E} - W(\underline{E}, \underline{\alpha}) \mid \underline{E} \in E_S^3 \},$$

skąd  $\underline{E} = \partial W_1^* / \partial \underline{S}$ , czyli  $\underline{\sigma} = \bar{\sigma}(\underline{S}, \underline{\alpha})$ .

Wynika stąd, że i naprężenia mikroskopowe  $\sigma_N$  i  $\sigma_T$  na  $F$  można wyrazić jako funkcje  $\underline{S}$  i  $\underline{\alpha}$ , tzn.:

$$\sigma_N = \bar{\sigma}_N(\underline{S}, \underline{\alpha}), \quad \sigma_T = \bar{\sigma}_T(\underline{S}, \underline{\alpha}), \quad \text{na } F.$$

Wielkości makroskopowe muszą spełniać ograniczenia wynikające z lokalnego warunku tarcia. Ograniczenia te opisują zbiór, oznaczmy go przez  $K_{(h)}$ , dopuszczalnych pól  $\underline{S}$  i  $\underline{\alpha}$  dany zależnością

$$(5.25) \quad K_{(h)} = \{ (\underline{S}, \underline{\alpha}) \mid (\bar{\sigma}_N(\underline{S}, \underline{\alpha}), \bar{\sigma}_T(\underline{S}, \underline{\alpha})) \in K \}.$$

Jeśli lokalny warunek tarcia generujący zbiór  $K$  ma postać (I.2.7) to możemy wówczas napisać

$$(5.26) \quad K_{(h)} = \{ (\underline{S}, \underline{\alpha}) \mid g_I(\bar{\sigma}_N(\underline{S}, \underline{\alpha}), \bar{\sigma}_T(\underline{S}, \underline{\alpha})) \leq 0, \quad I=1, \dots, M \}.$$

Ponieważ funkcje  $g_I$  nie muszą być wypukłe to i zbiór  $K_{(h)}$  nie musi być wypukły w przestrzeni wielkości efektywnych  $(\underline{S}, \underline{\alpha})$ . Na przykład zbiór  $K_{(h)}$  będzie wypukły wtedy gdy zbiór  $K$  jest wypukły a naprężenia mikroskopowe  $\sigma_N$  i  $\sigma_T$  (na  $F$ ) zależą liniowo od  $\underline{S}$  i  $\underline{\alpha}$ .

Oznaczmy przez  $g_{\Delta}^{(h)}$  ( $\Delta = 1, \dots, M'$ ) funkcje określające zbiór ograniczeń makroskopowych  $K_{(h)}$ , czyli

$$(5.27) \quad K_{(h)} = \{ (\underline{S}, \underline{\alpha}) \mid g_{\Delta}^{(h)}(\underline{S}, \underline{\alpha}) \leq 0; \quad \Delta = 1, \dots, M' \}.$$

W pracy [5] rozpatrzone zagadnienie dwuwymiarowe, przy założeniu, że szczelina  $F$  jest prostoliniowa o długości  $2a$ , przy czym  $2a \leq l$ , zaś  $l$  oznacza długość boku komórki bazowej  $Y$ . W takim przypadku analiza znacznie się upraszcza, gdyż szczelina  $F$  może być albo całkowicie otwarta albo zamknięta. Parametr wewnętrzny  $\tilde{\alpha}$  nie jest funkcją zmiennej  $s \in F$  i definiuje się go następująco

$$(5.28) \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{|Y|} \int_F [u_T] ds .$$

Dla wyznaczenia pola przemieszczeń i naprężeń mikroskopowych można komórkę ograniczoną  $Y$  aproksymować płaszczyzną osłabioną szczeliną  $F$ . Zakładając, że lokalny warunek tarcia jest warunkiem Coulomba, otrzymuje się warunek makroskopowy  $g^{(h)}$  w postaci

$$(5.29) \quad g^{(h)}(\underline{S}, \tilde{\alpha}) = (S_T - c \tilde{\alpha})^2 - S_N^2 \leq 0 ,$$

gdzie  $c$  oznacza dobrze określoną stałą dodatnią.

Wróćmy do rozważań ogólnych. Pełna transformacja Fenchela funkcji  $W$  daje

$$(5.30) \quad W^*(\underline{S}, \underline{\alpha}^*) = \sup_{\underline{E}, \underline{\alpha}} \left\{ \underline{S} : \underline{E} + \int_F \underline{\alpha}^* \cdot \underline{\alpha} ds - W(\underline{E}, \underline{\alpha}) \right\}$$

Wnioskujemy stąd, że

$$(5.31) \quad \underline{E} = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{S}} , \quad \underline{\alpha} = - \frac{\partial W^*}{\partial \underline{A}} .$$

Tym samym naprężenia mikroskopowe  $\underline{\sigma}_N$  i  $\underline{\sigma}_T$  na szczelinie  $F$  można przedstawić w funkcji wielkości  $\underline{S}$  i  $\underline{A}$ . Wówczas zbiór ograniczeń makroskopowych  $K_{(h)}^1$  w przestrzeni wewnętrznych sił uogólnionych ma postać

$$(5.32) \quad K_{(h)}^1 = \{ (\underline{S}, \underline{A}) \mid (\tilde{\sigma}_N(\underline{S}, \underline{A}), \tilde{\sigma}_T(\underline{S}, \underline{A})) \in K \} .$$

Założmy dla prostoty, że  $M' = 1$ . Z (5.21) i (5.27) otrzymujemy następujące związki

$$\begin{aligned} g^{(h)}(\underline{S}, \underline{\alpha}) &\leq 0 , \\ g^{(h)}(\underline{S}, \underline{\alpha}) < 0 &\iff \underline{\alpha} = 0 , \\ \underline{\alpha} \neq 0 &\implies g^{(h)}(\underline{S}, \underline{\alpha}) = 0 \text{ i } \dot{g}^{(h)}(\underline{S}, \underline{\alpha}) = 0 . \end{aligned}$$



Wnioskujemy stąd, że funkcja  $g^{(h)}$  gra rolę makroskopowego warunku plastyczności. Sprężysto-plastyczne zachowanie się ośrodka efektywnego z rozmytymi szczelinami jest niestandardowe, co wynika stąd, że prawo tarcia jest prawem niestowarzyszonym z warunkiem tarcia. Parametr  $\underline{\alpha}$  jest odpowiedzialny za wzmocnienie lub osłabienie. Zależy to oczywiście od lokalnego warunku tarcia a także - w ogólności nieliniowych - zależności  $\hat{\sigma}_N$  i  $\hat{\sigma}_T$  (na F) od wielkości efektywnych  $\underline{S}$  i  $\underline{\alpha}$ . Mając na uwadze osłabienie korzystniejsze może być wyrażenie makroskopowego warunku plastyczności w terminach makroskopowych odkształceń  $\underline{E}$  i parametru wewnętrznego  $\underline{\alpha}$ . Dopuszczalny zbiór tych wielkości, oznaczmy go przez  $K_{(h)}^2$ , ma postać

$$(5.33) \quad K_{(h)}^2 = \{(\underline{E}, \underline{\alpha}) \mid (\hat{\sigma}_N(\underline{E}, \underline{\alpha}), \hat{\sigma}_T(\underline{E}, \underline{\alpha})) \in K\}.$$

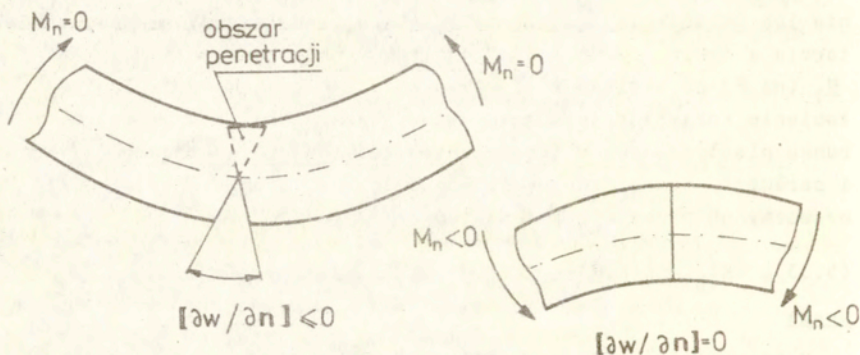
#### Uwaga

W pracy [154] cytuję szereg publikacji dotyczących homogenizacji nierówności kwasi-wariacyjnych. Ich istotą jest to, że po homogenizacji otrzymuje się również nierówności kwasi-wariacyjne. Niestety, rezultatów tych nie udaje się zastosować do rozpatrzonych zagadnień homogenizacji spękanych ośrodków sprężystych z uwzględnieniem tarcia. Powoduje ona bowiem, że ośrodek efektywny nie jest już sprężysty, lecz sprężysto-plastyczny i pojawiają się parametry wewnętrzne.

## 6. HOMOGENIZACJA SPRĘŻYSTYCH PŁYT SPĘKANYCH

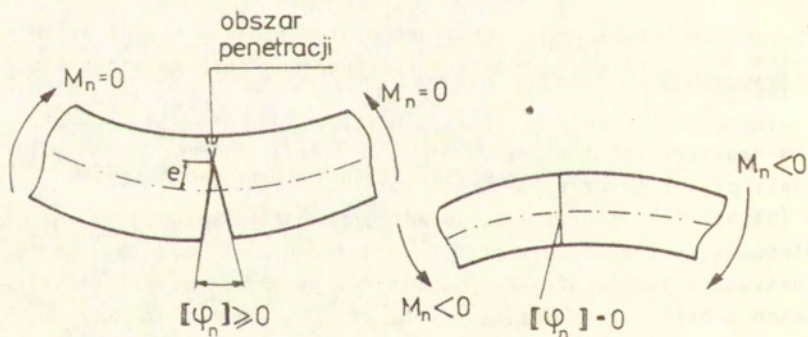
W praktyce istotne znaczenie może mieć znajomość efektywnych modeli płyt i tarcz osłabionych szczelinami. Wydaje się, że prace [93,95] były pierwszymi, w których konsekwentnie stosowano metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych do znalezienia efektywnego modelu spękanych periodycznie płyt sprężystych w ramach modelu Kirchhoffa-Love'a i przy uwzględnieniu jednostronnych warunków typu Signoriniego bez tarcia na szczelinach. Płyta efektywna jest płytą sprężystą ale fizycznie nieliniową. Model Kirchhoffa-Love'a jest modelem bardzo "ubogim" gdyż jeśli przyjąć, że powierzchnia środkowa płyty jest osłabiona mikro-szczelinami rozłożonymi w sposób periodyczny to oznacza to, iż

szczeliny te przecinają płytę na wylot. Implikuje to istnienie obszarów wzajemnej penetracji, por. rys.6.



Rys. 6.

Do analizy spękanych płyt sprężystych typu Reissnera wprowadzono parametr  $e$ , por. rys.7.



Rys. 7.

Jeśli  $e \neq 0$  to w płycie zhomogenizowanej mamy sprzężenie płytowo-tarczowe. Z rys.7 wnioskujemy, że dla  $e < h/2$  ( $h$  - grubość płyty) również występują obszary penetracji. Rezultaty dotyczące homogenizacji płyt typu Reissnera przedstawiono w pracach [96,161].

W pracy [97] wprowadzono wygodny do rozważań i dalszych uogólnień model płyty sprężystej, który nazwaliśmy modelem dwuwarstwowym. Opis tego modelu zostanie przedstawiony w punkcie 6.1. Ma on charakter czysto konwencjonalny, jeśli płyta wykonana jest z materiału jednorodnego i nie jest osłabiona szczelinami.

Głównym celem niniejszego podrozdziału będzie zbudowanie modelu zhomogenizowanego płyty dwuwarstwowej przy założeniu, że jedna z warstw jest osłabiona periodycznie rozłożonymi szczelinami. Dla rozwiązania tego problemu w pracy [100] zastosowano metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych. Jednakże tutaj przedstawimy rezultaty pracy [158], w której problem homogenizacji rozwiązano metodą  $\Gamma$ -zbieżności, a ściślej epi-zbieżności (punkty 6.3 i 6.4). Bazując na tej pracy rozpatrzemy również podejście dualne.

Na zagadnienie homogenizacji płyt o strukturze periodycznej, w szczególności płyt osłabionych okresowo rozłożonymi szczelinami, można spojrzeć jako na problem przejścia asymptotycznego od modelu ciała trójwymiarowego, którego jeden wymiar jest istotnie mniejszy od dwu pozostałych, do modelu dwuwymiarowego. Takie "cienkie" ciało trójwymiarowe charakteryzują dwa małe parametry: grubość  $h$  i parametr periodyczności  $\epsilon$ . Szczegółową analizę przejść asymptotycznych:  $h \rightarrow 0$  i  $\epsilon \rightarrow 0$ , ale jedynie dla płyt niespekanych, przeprowadził Caillerie [31], por. również [83,92].

Okazuje się, że kolejność wspomnianych przejść asymptotycznych nie jest przemienne. Ważny jest również stosunek tych parametrów. Jeśli parametr periodyczności jest większy od grubości płyty ( $\epsilon \approx h^\lambda$ ,  $\lambda > 1$ ) to usprawiedliwione jest homogenizowanie dwuwymiarowego równania płyty. W naszych dalszych rozważaniach dotyczących homogenizacji płyt spekanych jak i płyt plastycznych (podrozdział 7) podstawą będą właśnie równania dwuwymiarowe. Rozszerzenie analizy przeprowadzonej w pracach [31,83,92]

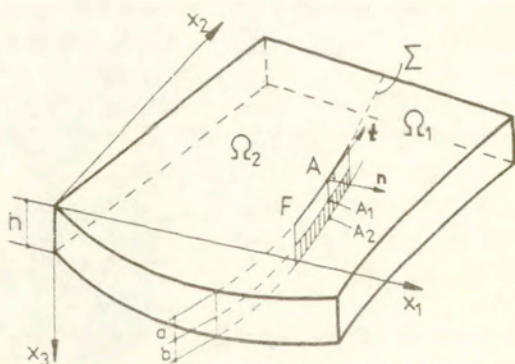


na płyty spękanie przy uwzględnieniu warunków Signoriniego na szczelinach - nawet bez tarcia - pozostaje problemem otwartym. Trudności te są dwójakiego rodzaju: nieliniowość warunków Signoriniego i przecinanie brzegu cienkiego ciała trójwymiarowego przez szczeliny.

W zastosowanym przez nas podejściu unikamy tych trudności przeprowadzając homogenizację na związkach modelu dwuwymiarowego. Ale musimy przy tym pamiętać o ograniczeniach, jakie wynikają z rozważań przeprowadzonych w pracach [31,83].

### 6.1. Podstawowe równania dwuwarstwowego modelu płyty

Niech  $\mathcal{B}$  będzie ograniczonym obszarem zajmowanym przez nieuszkodzoną i nieodkształconą płytę o grubości  $h$ . Obszar  $\mathcal{B}$  parametryzuje kartezjański układ współrzędnych  $\underline{x} = (x_i) = (x, x_3)$ , gdzie  $x = (x_\alpha)$ ,  $\alpha=1,2$ . Górna powierzchnia płyty leżąca w płaszczyźnie  $x_3=0$  zajmuje obszar  $\Omega$ . Obszar ten przyjmujemy za płaszczyznę odniesienia. Mamy więc  $\mathcal{B} = \Omega \times (0, h)$ , przy czym  $h=a+b$ . Warstwa górna płyty ma grubość  $a$ , zaś dolna  $b$ , por. rys.8, gdzie przedstawiono płytę osłabioną jedną szczeliną. Na rysunku tym  $F$  oznacza rzut szczeliny na  $\Omega$ . W ogólności można



Rys. 8

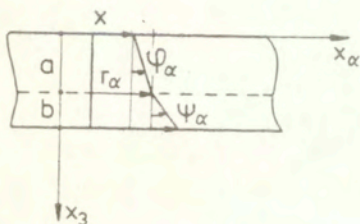
przyjąć, że warstwa górna o grubości  $a$  jest wykonana z innego materiału niż warstwa dolna o grubości  $b$ , przy czym warstwy są idealnie spójne. W takim ogólnym przypadku moduły sprężystości  $a_{ijkl}(\underline{x})$  ( $\underline{x} \in \mathcal{D}$ ) są przestrzennie zmienne, jednakże przyjmujemy, że płaszczyzny  $x_3 = \text{const.}$  są płaszczyznami symetrii, czyli  $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{3333} = 0$ . Można by również rozpatrywać płyty poprzecznie niejednorodne, jednakże podstawowe idee lepiej jest przedstawić na prostszym modelu.

Oznaczmy przez  $\underline{u} = (u_i) = (\underline{u}, u_3) = (u_\alpha, u_3)$  wektor przemieszczenia. Dwuwymiarowy model płyty dwuwarstwowej oparty jest na następujących założeniach:

(i) przemieszczenia  $u_\alpha$  w płaszczyźnie płyty są odcinkowo liniowe, zaś ugięcia  $u_3$  są stałe wzdłuż grubości, por. rys.9.

$$(6.1) \quad u_\alpha(x, x_3) = \begin{cases} r_\alpha(x) + (x_3 - a)\varphi_\alpha(x), & \text{jeśli } x \in [0, a], \\ r_\alpha(x) + (x_3 - a)\psi_\alpha(x), & \text{jeśli } x \in [a, h], \end{cases}$$

$$(6.2) \quad u_3(x, x_3) = w(x), \quad x_3 \in [0, h],$$



Rys. 9.

Tutaj  $\underline{r} = (r_\alpha)$  oznacza przemieszczenie w płaszczyźnie rozdziału warstw, natomiast  $\underline{\varphi} = (\varphi_\alpha)$  i  $\underline{\psi} = (\psi_\alpha)$  oznaczają kąty obrotu przekrojów poprzecznych, odpowiednio, w warstwie górnej i dolnej. Funkcja  $w$  oznacza ugięcie.

(ii) W płycie panuje uogólniony płaski stan naprężenia. Związki konstytutywne mają postać

$$(6.3) \quad \sigma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 2a_{\alpha 3\lambda 3} \gamma_{\lambda 3}, \quad \sigma_{33} = 0,$$

gdzie

$$(6.4) \quad \gamma_{ij}(\underline{u}) = u_{(i,j)} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,$$

$$(6.5) \quad C_{\alpha\beta\lambda\mu} = a_{\alpha\beta\lambda\mu} - a_{\alpha\beta\gamma\gamma} a_{\gamma\gamma\lambda\mu} / a_{\gamma\gamma\gamma\gamma}.$$

Oczywiście  $(\sigma_{ij})$  jest tensorem naprężenia. Zgodnie z założeniem (i) odkształcenia wyraża wzór

$$\gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) = \begin{cases} e_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}) + (x_3 - a) \rho_{\alpha\beta}(\underline{\Phi}), & x_3 \in [0, a], \\ e_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}) + (x_3 - a) \kappa_{\alpha\beta}(\underline{\Psi}), & x_3 \in [a, h], \end{cases}$$

$$(6.6) \quad 2\gamma_{\alpha 3}(\underline{u}) = \begin{cases} w_{,\alpha} + \varphi_{\alpha}, & x_3 \in [0, a], \\ w_{,\alpha} + \psi_{\alpha}, & x_3 \in [a, h], \end{cases}$$

$$\gamma_{33}(\underline{u}) = 0, \quad x_3 \in [0, h],$$

gdzie

$$(6.7) \quad e_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}) = \Gamma_{(\alpha,\beta)}, \quad \rho_{\alpha\beta}(\underline{\Phi}) = \Phi_{(\alpha,\beta)}, \quad \kappa_{\alpha\beta}(\underline{\Psi}) = \Psi_{(\alpha,\beta)}.$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy, że ciało  $\mathcal{B}$  jest utwierdzone na brzegu  $\Gamma_{\mathcal{B}} = \Gamma \times (0, h)$ , gdzie  $\Gamma = \partial\Omega$ . Ponadto obciążenie transwersalne  $p \in L^2(\Omega)$  działa na powierzchnię górną  $x_3 = 0$ .

Dla ośrodka trójwymiarowego  $\mathcal{B}$  wariacyjne sformułowanie zagadnienia równowagi ma postać następującego zadania.

Zadanie  $P_{\mathcal{B}}$

Znaleźć pole przemieszczeń  $\underline{u} \in V(\mathcal{B}) = \{ \underline{v} = (v_i) \in H^1(\mathcal{B}, R^3) \mid v_i = 0, \text{ na } \Gamma_{\mathcal{B}} \}$ , takie, że

$$(6.8) \quad a_{\mathcal{B}}(\underline{u}, \underline{v}) = \mathcal{L}(v_3) \quad \forall \underline{v} \in V(\mathcal{B}),$$

gdzie

$$(6.9) \quad a_{\mathcal{B}}(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}(\underline{u}) \gamma_{ij}(\underline{v}) dx,$$

$$(6.10) \quad \mathcal{L}(v_3) = \int_{\Omega} p v_3 dx.$$

Przypominamy, że związek konstytutywny dany jest wzorem (6.3).

Celem wyprowadzenia równań dwuwymiarowych rozpatrujemy jedynie takie pola wirtualne (funkcje próbne), które spełniają założenie (i), zn.:



$$v_{\alpha}(x, x_3) = \begin{cases} z_{\alpha}(x) + (x_3 - a)\eta_{\alpha}(x), & x_3 \in [0, a], \\ z_{\alpha}(x) + (x_3 - a)\theta_{\alpha}(x), & x_3 \in [a, h], \end{cases} \quad (6.11)$$

$$v_3(x, x_3) = v(x), \quad x \in [0, h].$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy założenie:

(iii) moduły sprężyste  $a_{ijkl}$  są stałe.

Jak już o tym wspominaliśmy, można prowadzić rozważania i bez tego założenia, ale wzory stają się wtedy dłuższe, przy tych samych koncepcjach podstawowych.

Obliczając  $\delta_{ij}^{\psi}(\underline{v})$  dla przemieszczenia wirtualnego (6.11), wstawiając do (6.9) i całkując po grubości sprowadzamy trójwymiarowe równanie wariacyjne (6.8) do równania dwuwymiarowego

$$(6.12) \quad a_{\Omega}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}, \underline{w}; \underline{z}, \underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{v}) = \mathcal{L}(\underline{v}),$$

gdzie

$$(6.13) \quad a_{\Omega}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}, \underline{w}; \underline{z}, \underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{v}) = \int_{\Omega} [N_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) e_{\alpha\beta}(\underline{z}) + M_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{\varphi}) \rho_{\alpha\beta}(\underline{\eta}) + L_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{\psi}) \partial_{\alpha\beta}(\underline{\theta}) + Q_{\alpha}(\underline{w}, \underline{\varphi}) g_{\alpha}(v, \underline{\eta}) + T_{\alpha}(\underline{w}, \underline{\psi}) d_{\alpha}(v, \underline{\theta})] dx,$$

gdzie

$$(6.14) \quad g_{\alpha}(v, \underline{\eta}) = v_{,\alpha} + \eta_{\alpha}, \quad d_{\alpha}(v, \underline{\theta}) = v_{,\alpha} + \theta_{\alpha}.$$

Czynimy następujące założenia

$$(6.15) \quad \exists c_0 > 0, \quad C_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} \geq c_0 |\underline{e}|^2, \quad \forall \underline{e} \in E_S^2,$$

$$(6.16) \quad \exists c_2 > 0, \quad H_{\alpha\beta} d_{\alpha} d_{\beta} \geq c_2 |\underline{d}|^2, \quad \forall \underline{d} \in R^2.$$

Z założenia (iii) wynikają dalsze nierówności

$$(6.17) \quad C_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} \leq c_1 |\underline{e}|^2, \quad \forall \underline{e} \in E_S^2,$$

$$(6.18) \quad H_{\alpha\beta} d_{\alpha} d_{\beta} \leq c_3 |\underline{d}|^2, \quad \forall \underline{d} \in R^2,$$

gdzie  $c_1 > 0$  i  $c_3 > 0$  są stałymi.

W przypadku ogólnym nierówności (6.17) i (6.18) wynikają z założenia:  $a_{ijkl} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ .  $E_S^2$  jest przestrzenią macierzy symet-

rycznych  $2 \times 2$ .

Związki konstytutywne mają postać

$$(6.19) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}, \underline{\varphi}, \underline{\Psi}) &= C_{\alpha\beta\lambda\mu} [h e_{\lambda\mu}(\underline{\Gamma}) - \frac{a^2}{2} g_{\lambda\mu}(\underline{\varphi}) + \frac{b^2}{2} \mathfrak{z}_{\lambda\mu}(\underline{\Psi})], \\ M_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}, \underline{\varphi}) &= C_{\alpha\beta\lambda\mu} [-\frac{a^2}{2} e_{\lambda\mu}(\underline{\Gamma}) + \frac{a^3}{3} g_{\lambda\mu}(\underline{\varphi})], \\ L_{\alpha\beta}(\underline{\Gamma}, \underline{\Psi}) &= C_{\alpha\beta\lambda\mu} [\frac{b^2}{2} e_{\lambda\mu}(\underline{\Gamma}) + \frac{b^3}{3} \mathfrak{z}_{\lambda\mu}(\underline{\Psi})], \end{aligned}$$

$$(6.20) \quad \begin{aligned} Q_{\alpha}(w, \underline{\varphi}) &= a H_{\alpha\beta} g_{\beta}(w, \underline{\varphi}), \quad H_{\alpha\beta} := a_{\alpha\beta} z_{\beta} z_{\beta}, \\ T_{\alpha}(w, \underline{\Psi}) &= b H_{\alpha\beta} d_{\beta}(w, \underline{\Psi}). \end{aligned}$$

Tutaj  $\underline{N}$  oznaczają siły membranowe,  $\underline{M}$  i  $\underline{L}$  są momentami w warstwach, odpowiednio, górnej i dolnej, natomiast  $\underline{Q}$  i  $\underline{T}$  oznaczają siły poprzeczne w odpowiednich warstwach.

Związki konstytutywne (6.19) wygodnie jest przedstawić następująco

$$(6.21) \quad \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{L} \end{bmatrix} = \underline{D} \begin{bmatrix} \underline{e}(\underline{\Gamma}) \\ \underline{g}(\underline{\varphi}) \\ \underline{\mathfrak{z}}(\underline{\Psi}) \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} h & -a^2/2 & b^2/2 \\ -a^2/2 & a^3/3 & 0 \\ b^2/2 & 0 & b^3/3 \end{bmatrix} \otimes \underline{C},$$

gdzie  $\otimes$  oznacza iloczyn Kroneckera macierzy [106], czyli iloczyn tensorowy. Z zasady prac wirtualnych (6.12) otrzymujemy równania równowagi

$$(6.22) \quad \left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} &= 0, & -M_{\alpha\beta,\beta} + Q_{\alpha} &= 0, \\ -L_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha} &= 0 & -(Q_{\alpha} + T_{\alpha}),_{\alpha} &= p \end{aligned} \right\} \quad \text{w } \Omega$$

Oznaczmy przez  $\underline{D}^{(1)} = [D_{ij}^{(1)}]$  macierz

$$(6.23) \quad \underline{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} h & -a^2/2 & b^2/2 \\ -a^2/2 & a^3/3 & 0 \\ b^2/2 & 0 & b^3/3 \end{bmatrix}$$

łatwo sprawdzić, że forma  $D_{ij}^{(1)} z_i z_j$  jest istotnie dodatnia, czyli

$$(6.24) \quad D_{ij}^{(1)} z_i z_j > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^3, z \neq 0.$$

Przechodząc do postaci kanonicznej mamy

$$(6.25) \quad D_{ij}^{(1)} z_i z_j = \lambda_1 \eta_1^2,$$

gdzie  $\lambda_i > 0$  ( $i=1,2,3$ ) są wartościami własnymi macierzy  $\underline{D}^{(1)}$ , oraz  $z_i = \underline{Q}_{ij} \xi_j$ . Tutaj  $\underline{Q}$  jest macierzą ortogonalną [106]. Wnioskuje się stąd, że  $|z|^2 = z_i z_i = |\xi|^2 = \xi_i \xi_i$ ; ponadto

$$(6.26) \quad \underline{D}_{ij}^{(1)} z_i z_j = \lambda_i \xi_i^2 \geq \tilde{c} |\xi|^2 = \tilde{c} |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2,$$

gdzie  $\tilde{c} = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , czyli  $\tilde{c} > 0$ .

Korzystając z (6.15) i (6.26) można wykazać, że związana z macierzą  $\underline{D}$  forma  $\Xi$  spełnia nierówność

$$(6.27) \quad \exists c > 0, \Xi(\underline{e}, \underline{g}, \underline{x}) = [\underline{e}, \underline{g}, \underline{x}] \underline{D} [\underline{e}, \underline{g}, \underline{x}]^t \geq c(|\underline{e}|^2 + |\underline{g}|^2 + |\underline{x}|^2), \quad \forall \underline{e}, \underline{g}, \underline{x} \in E_S^2.$$

Nierówność ta odgrywa ważną rolę w dalszych rozważaniach. Wskaźnik górny "t" oznacza transpozycję.

## 6.2. Płyta dwuwarstwowa osłabiona szczeliną w warstwie dolnej

Przed rozpatrzeniem zagadnienia homogenizacji płyty osłabionej w warstwie dolnej periodycznie rozłożonymi szczelinami rozważmy prostsze zadanie. Niech mianowicie warstwa ta będzie osłabiona szczeliną tak jak na rys.8. Zamknięta szczelina jest prostopadła do płaszczyzny odniesienia.  $F$  oznacza rzut tej szczeliny na  $\Omega$ . Łuk  $F$  jest domknięty jako zbiór, tzn.  $F = \overline{F} \subset \Omega$ . Obszar  $\Omega$  dzielimy krzywą  $\Sigma$  na podobszary  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  w taki sposób, że  $F \subset \Sigma$ ,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$ .

Rozpatrzmy zadanie równowagi płyty osłabionej szczeliną  $F$ . Jeśli szczelina jest zamknięta to przemieszczenia punktów leżących na odcinku  $AA_2$  prostopadłym do  $\Omega$  spełniają założenie (i) z poprzedniego punktu. Rozkład przemieszczeń  $u_n$ , normalnych do  $F$  opisuje zależność

$$(6.28) \quad u_n = \begin{cases} r_n(x) + (x_3 - a) \varphi_n(x), & \text{jeśli } x_3 \in [0, a], \\ r_n(x) + (x_3 - a) \psi_n(x), & \text{jeśli } x_3 \in [a, h], \end{cases} \quad \text{na } F,$$

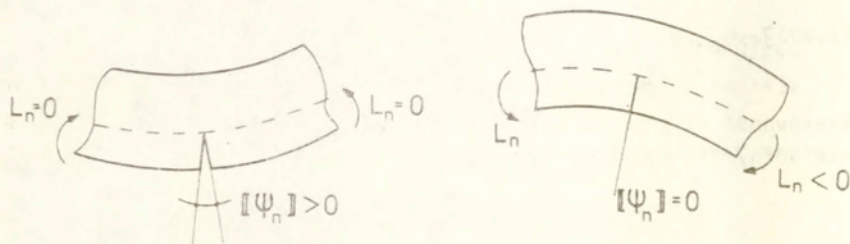
gdzie  $u_n = u_n^\alpha n_\alpha$ ,  $r_n = r_n^\alpha n_\alpha$ ,  $\varphi_n = \varphi_n^\alpha n_\alpha$ ,  $\psi_n = \psi_n^\alpha n_\alpha$ .

Jeśli szczelina jest otwarta to wielkość  $\Psi_n$  doznaje skoku

$$(6.29) \quad \llbracket \Psi_n \rrbracket = \Psi_n|_2 - \Psi_n|_1, \quad \text{na } F,$$



gdzie  $\Psi_n|_{\Omega_\alpha}$  oznacza wartość wielkości  $\Psi_n$  od strony obszaru  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Oczywiście warunek  $[\Psi_n] = 0$  oznacza, że szczelina jest zamknięta. Zwróćmy uwagę na fakt, że a priori nie wiemy jaką część szczeliny jest otwarta a jaką zamknięta. Tarcie na szczelinie pomijamy. Tam gdzie szczelina jest otwarta zachodzi silna nierówność  $[\Psi_n] > 0$ , por. rys.10.



Rys. 10

Z założenia o pomijalności tarcia wynika, że nie nakładamy warunków na  $[\Psi_t]$ . Pozostałe pola kinematyczne są ciągłe czyli:  $[r] = 0$ ,  $[\varphi] = 0$ ,  $[w] = 0$ , na  $F$ .

Wprowadźmy oznaczenie

$$(6.30) \quad \bar{L}_n = L_{\alpha\beta}|_{\Omega} n_\alpha n_\beta ; \quad \bar{\sigma} = 1, 2,$$

na momenty zginające wzdłuż szczeliny z obydwu jej stron. Zgodnie z zasadą akcji i reakcji mamy:  $L_n = \bar{L}_n^1 = \bar{L}_n^2$ . Moment  $L_n$  jest ujemny gdy szczelina jest zamknięta; w przeciwnym przypadku  $L_n = 0$ . Oznacza to, że wzdłuż  $F$  mamy warunki typu Signoriniego bez tarcia:

$$(6.31) \quad L_t = 0, \quad [\Psi_n] \geq 0, \quad L_n \leq 0, \quad L_n [\Psi_n] = 0, \quad \text{na } F,$$

$$\text{gdzie } L_t = L_{\alpha\beta}|_1 n_\alpha t_\beta = L_{\alpha\beta}|_2 n_\alpha t_\beta = 0.$$

Po tych niezbędnych objaśnieniach możemy przystąpić do sformułowania problemu brzegowego dla płyty osłabionej szczeliną w warstwie dolnej. Najpierw podamy sformułowanie silne.

Zadanie  $P_F^1$

Znaleźć pola przemieszczeń  $\underline{r}(x)$ ,  $w(x)$ , ( $x \in \Omega$ ) i obrotów  $\underline{\varphi}(x)$  ( $x \in \Omega$ ) i  $\underline{\psi}(x)$  ( $x \in \Omega \setminus F$ ), takie, że:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) &= 0, \quad w \in \Omega \setminus F; \quad -M_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\varphi}) + Q_{\alpha}(w, \underline{\varphi}) = 0 \quad w \in \Omega \\ -L_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\psi}) + T_{\alpha}(w, \underline{\psi}) &= 0, \quad w \in \Omega \setminus F, \\ -[Q_{\alpha}(w, \underline{\varphi}) + T_{\alpha}(w, \underline{\psi})]_{,\alpha} &= p, \quad w \in \Omega \setminus F; \end{aligned}$$

spełnione są związki konstytutywne (6.19), (6.20);

$$\underline{r} = 0, \quad \underline{\varphi} = 0, \quad \underline{\psi} = 0, \quad w = 0, \quad \text{na } \Gamma;$$

spełnione są warunki Signoriniego (6.31).

Zanim przejdziemy do sformułowania wariacyjnego musimy zdefiniować zbiór pól kinematycznie dopuszczalnych dla przemieszczeń uogólnionych.

Położmy

$$(6.32) \quad K(\Omega \setminus F) = \{ \underline{v} = (v_{\alpha}) \in H^1(\Omega \setminus F, R^2) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma; \llbracket v_n \rrbracket \geq 0, \text{ na } F \},$$

$$(6.33) \quad K_F = H_0^1(\Omega, R^2) \times H_0^1(\Omega, R^2) \times K(\Omega \setminus F) \times H_0^1(\Omega).$$

Niech  $\underline{u} = (\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}, w) \in K_F$ ,  $\underline{w} = (\underline{z}, \underline{\varrho}, \underline{\theta}, v) \in K_F$ .

Forma dwuliniowa występująca w sformułowanej poniżej zasadzie (6.36) uogólnionych przemieszczeń wirtualnych musi być oczywiście określona na obszarze  $\Omega \setminus F$ . Ma ona postać

$$(6.34) \quad a(\underline{u}, \underline{w}) = \int_{\Omega \setminus F} [N_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) e_{\alpha\beta}(\underline{z}) + M_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\varphi}) g_{\alpha\beta}(\underline{\varrho}) + L_{\alpha\beta,\gamma}(\underline{r}, \underline{\psi}) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{\theta}) + Q_{\alpha}(w, \underline{\varphi}) g_{\alpha}(v, \underline{\varrho}) + T_{\alpha}(w, \underline{\psi}) d_{\alpha}(v, \underline{\theta})] dx.$$

Forma  $a(\dots)$  jest symetryczna i koercywna na przestrzeni  $V_F = H_0^1(\Omega, R^2) \times H_0^1(\Omega, R^2) \times H_1^1(\Omega \setminus F, R^2) \times H_0^1(\Omega)$ , gdzie  $H_1^1(\Omega \setminus F) = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega \setminus F) \mid \underline{v} = 0, \text{ na } \Gamma \}$ .

Koercywność oznacza, że istnieje stała  $c > 0$  taka, że zachodzi nierówność

$$(6.35) \quad a(\underline{w}, \underline{w}) \geq c(\|\underline{z}\|_{1,\Omega}^2 + \|\underline{\varrho}\|_{1,\Omega}^2 + \|\underline{\theta}\|_{1,\Omega \setminus F}^2 + \|w\|_{1,\Omega}^2), \quad \forall \underline{w} \in K_F.$$

Nierówność tę otrzymujemy korzystając z (6.16), (6.27), nierówności Korn'a dla obszarów  $\Omega$  i  $\Omega \setminus F$  oraz nierówności Poincaré. Należy przy tym skorzystać z elementarnej nierówności

$$(a+b)^2 \geq \frac{\delta}{\delta+1} a^2 - \delta b^2; \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0,$$

aby wykazać, że

$$\int_{\Omega} |\nabla v + \underline{u}|^2 dx \geq \frac{\delta}{\delta+1} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 - \delta \|\underline{u}\|_{0,\Omega}^2.$$

Postępując następnie w standardowy sposób dochodzimy do sformułowania wariacyjnego.

Zadanie  $P_F$

Znaleźć przemieszczenia uogólnione  $\underline{u} = (\underline{r}, \underline{p}, \underline{\psi}, w) \in K_F$ , takie, że

$$(6.36) \quad a(\underline{u}, \underline{w}) \geq \mathcal{L}(v-w), \quad \forall \underline{w} \in K_F.$$

Nierówność wariacyjna (6.36) przedstawia zasadę uogólnionych przemieszczeń wirtualnych dla płyty sprężystej osłabionej szczeliną w warstwie dolnej. Rozwiązanie  $\underline{u}$  istnieje i jest jednoznaczne [78,151].

Ponieważ forma  $a(\dots)$  jest symetryczna przeto zadanie  $P_F$  jest równoważne zadaniu minimalizacji funkcjonału

$$(6.37) \quad \mathcal{J}(\underline{w}) = \frac{1}{2} a(\underline{w}, \underline{w}) - \mathcal{L}(v)$$

na wypukłym i domkniętym zbiorze  $K_F$ .

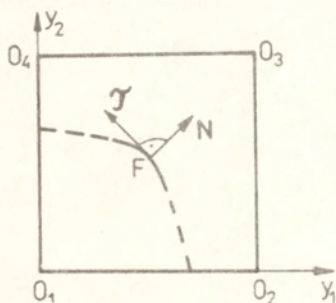
### 6.3. Homogenizacja płyty osłabionej periodycznie rozłożonymi szczelinami w warstwie dolnej

Obecnie zajmiemy się wyprowadzeniem efektywnego modelu płyty sprężystej przy założeniu, że warstwa dolna jest periodycznie splekana. Podobnie jak w przypadku jednej szczeliny do opisu bierzemy rzut szczelin na  $\Omega$ , przy czym płyta jest utwierdzona na brzegu. Obszar  $\Omega$  dzielimy na powtarzalne "małe" komórki  $Y_{\epsilon, i}$  homotetyczne z komórką bazową  $Y$  osłabioną szczeliną  $F$ . Komórki  $Y_{\epsilon, i}$  ( $i \in I(\epsilon)$ ) są oczywiście rozłożone  $\epsilon$ -Y-okresowo, gdzie  $\epsilon > 0$  jest małym parametrem. Przez  $F^\epsilon$  oznaczamy sumę szczelin, a ściśle ich rzutów na  $\Omega$ , takich że odpowiednie komórki  $Y_{\epsilon, i}$  są zawarte w tym obszarze, czyli

$$(6.38) \quad F^\epsilon = \bigcup_{i \in I(\epsilon)} F_{\epsilon, i}, \quad \Omega^\epsilon = \Omega \setminus F^\epsilon,$$



przy czym  $F_{\varepsilon,i} = \bar{F}_{\varepsilon,i} \subset Y_{\varepsilon,i}$ . Komórka bazowa  $Y$  jest prostokątem, np.  $Y = (0, Y_1) \times (0, Y_2)$ , por. rys.11.



Rys.11

Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  funkcjonal  $J^\varepsilon$  całkowitej energii potencjalnej ma postać

$$(6.39) \quad J^\varepsilon(\underline{u}, \underline{\varphi}, \Psi, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} [N_{\alpha\beta}(\underline{u}, \underline{\varphi}, \Psi) e_{\alpha\beta}(\underline{u}) + M_{\alpha\beta}(\underline{u}, \underline{\varphi}) g_{\alpha\beta}(\underline{\varphi}) + L_{\alpha\beta}(\underline{u}, \Psi) \delta_{\alpha\beta}(\Psi) + Q_\alpha(w, \underline{\varphi}) g_\alpha(w, \underline{\varphi}) + T_\alpha(w, \Psi) d_\alpha(w, \Psi)] dx - \int_{\Omega} pw \, dx.$$

Położmy

$$(6.40) \quad K_1^\varepsilon = \{ \Psi \in H^1(\Omega^\varepsilon, \mathbb{R}^2) \mid \Psi = 0, \text{ na } \Gamma; \llbracket \Psi_n \rrbracket \geq 0 \text{ na } F^\varepsilon \},$$

gdzie  $\underline{n} = (n_\alpha)$  oznacza wektor jednostkowy normalny do  $F^\varepsilon$ .

Zadanie  $P_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )

Znaleźć

$$(6.41) \quad J^\varepsilon(\underline{u}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon, w^\varepsilon) = \inf \{ J^\varepsilon(\underline{u}, \underline{\varphi}, \Psi, w) \mid \underline{u}, \underline{\varphi} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

$$\Psi \in K_1^\varepsilon, w \in H_0^1(\Omega) \}.$$

Zadanie  $P_\varepsilon$  posiada jednoznaczne rozwiązanie gdyż funkcjonal  $J^\varepsilon$  jest ściśle wypukły, a dla obszaru  $\Omega^\varepsilon$  mamy nierówność Korn'a w postaci wynikającej z lematu 3.2. Jak już wiemy z poprzednich rozważań, aby znaleźć efektywny model płyty z rozmytymi szczeli-

nami musimy dokonać przejścia asymptotycznego  $\varepsilon \rightarrow 0$  w ciągu funkcjonałów  $\{\gamma^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ . W tym celu zastosujemy metodę epi-zbieżności [158]. Obecnie przedstawimy same rezultaty homogenizacji, odkładając zagadnienie epi-zbieżności do następnego punktu.

Wprowadźmy do rozważań zbiór kinematycznie dopuszczalnych pól lokalnych (mikroskopowych)

$$(6.42) \quad K_{YF} = \{ \underline{v} \in H_{\text{per}}(Y \setminus F, \mathbb{R}^2) \mid \llbracket v_N \rrbracket \geq 0 \text{ na } F \}.$$

Aby wyznaczyć potencjał sprężysty płyty zhomogenizowanej należy rozwiązać zadanie lokalne

$$(6.43) \quad W_1(\underline{e}^h, \underline{z}^h) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{e}^h, \underline{z}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) + \underline{z}^h) dy \mid \underline{v} \in K_{YF} \right\},$$

gdzie  $\underline{e}^h, \underline{z}^h \in E_S^2$ ; ponadto

$$(6.44) \quad j_1(\underline{e}^h, \underline{z}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) + \underline{z}^h) = \frac{1}{2} \left[ \frac{b^3}{3} c_{\alpha\beta\lambda\mu} (\underline{z}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) + \underline{z}^h_{\alpha\beta}) (\underline{z}_{y\lambda\mu}(\underline{v}) + \underline{z}^h_{\lambda\mu}) + b^2 c_{\alpha\beta\lambda\mu} (\underline{z}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) + \underline{z}^h_{\alpha\beta}) e^h_{\lambda\mu} \right].$$

Tutaj

$$\underline{z}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) = \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \right) / 2.$$

Zadanie minimalizacji występujące po prawej stronie zależności (6.43) jest równoważne znalezieniu rozwiązania nierówności wariacyjnej.

#### Zadanie $P_{\text{loc}}$

Znaleźć  $\tilde{\underline{v}} \in K_{YF}$  takie, że

$$(6.45) \quad \int_{Y \setminus F} c_{\alpha\beta\lambda\mu} \underline{z}_{y\alpha\beta}(\tilde{\underline{v}}) \underline{z}_{y\lambda\mu}(\underline{v} - \tilde{\underline{v}}) dy \geq \ell(\underline{v} - \tilde{\underline{v}}), \quad \forall \underline{v} \in K_{YF},$$

gdzie forma liniowa  $\ell(\cdot)$  zależy od makroskopowych miar odkształcenia  $\underline{e}^h$  i  $\underline{z}^h$  następująco:

$$(6.46) \quad \ell(\underline{v}) = - \int_{Y \setminus F} c_{\alpha\beta\lambda\mu} \left( \frac{3}{2b} e^h_{\alpha\beta} + \underline{z}^h_{\alpha\beta} \right) \underline{z}_{y\lambda\mu}(\underline{v}) dy.$$

Zastanówmy się nad problemem istnienia minimizera funkcjonału występującego po prawej stronie zadania (6.43), przy założeniu, że wielkości  $\underline{e}^h \in E_S^2$ ,  $\underline{z}^h \in E_S^2$  są zadane. Biorąc pod uwagę (6.15) i symetrię modułów sprężystych wnioskujemy, że wspomniany funkcjo-

nał jest ściśle wypukły. Wprowadźmy jeszcze, za Sanchez-Palencią [131], przestrzeń

$$(6.47) \quad \tilde{H}_{\text{per}} = \left\{ \underline{v} \in H_{\text{per}}(\Upsilon \setminus F, \mathbb{R}^2) \mid \int_{\Upsilon} \underline{v}(y) dy = 0 \right\};$$

wyposażoną w normę przestrzeni  $H^1(\Upsilon \setminus F, \mathbb{R}^2)$ .

Na przestrzeni  $\tilde{H}_{\text{per}}$  forma

$$\int_{\Upsilon \setminus F} C_{\alpha\beta\lambda\mu} \underline{\alpha}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) \underline{\alpha}_{y\lambda\mu}(\underline{v}) dy,$$

jest ciągła i koercyjna [131]. Zauważmy, że forma ta nie jest koercyjna na przestrzeni  $H_{\text{per}}(\Upsilon \setminus F, \mathbb{R}^2)$ . Korzystając z (6.17) otrzymujemy

$$\int_{\Upsilon \setminus F} C_{\alpha\beta\lambda\mu} (\underline{\alpha}_{y\alpha\beta}(\underline{v}) + \underline{\alpha}_{\alpha\beta}^h) e_{\lambda\mu}^h dy \geq - \frac{\delta^2}{2} \tilde{c}_0 \|\underline{v}\|_{1, \Upsilon \setminus F}^2 + \tilde{c}_1,$$

gdzie  $\delta > 0$ ,  $\underline{v} \in H_{\text{per}}(\Upsilon \setminus F, \mathbb{R}^2)$ ,  $\tilde{c}_0 > 0$  jest stałą, natomiast stała  $\tilde{c}_1$  zależy od  $\underline{e}^h$ ,  $\underline{\alpha}^h$  i  $\delta$ . Z powyższych rozważań wnioskujemy, że dla dostatecznie małego  $\delta$  funkcjonał

$$(6.48) \quad \int_{\Upsilon \setminus F} j_1(\underline{e}^h, \underline{\alpha}_y(\underline{v}) + \underline{\alpha}^h) dy,$$

jest koercyjny na

$$(6.49) \quad \tilde{K}_{\Upsilon F} = \left\{ \underline{v} \in K_{\Upsilon F} \mid \int_{\Upsilon} \underline{v}(y) dy = 0 \right\},$$

i posiada jednoznacznie określony minimizer  $\tilde{\underline{v}} \in K_{\Upsilon F}$ . Jako element zbioru  $K_{\Upsilon F}$  minimizer tego funkcjonału jest wyznaczony z dokładnością do stałego wektora. Oczywiście stała ta nie wpływa na wartość funkcji  $W_1$ .

Znajomość tej funkcji jest wystarczająca dla sformułowania związków opisujących płytę zhomogenizowaną z rozmytymi szczelinami. Efektywne (zhomogenizowane) związki konstytutywne mają postać

$$(6.50) \quad \begin{bmatrix} \underline{N}^h \\ \underline{M}^h \\ \underline{L}^h \end{bmatrix} = \underline{Q} \begin{bmatrix} \underline{e}^h \\ \underline{s}^h \\ \underline{\alpha}^h + \frac{1}{|\Upsilon|} \int_{\Upsilon \setminus F} \underline{\alpha}_y(\tilde{\underline{v}}) dy \end{bmatrix},$$



$$(6.51) \quad Q_{\alpha}^h = a H_{\alpha\beta} g_{\beta}^h, \quad T_{\alpha}^h = b H_{\alpha\beta} d_{\beta}^h,$$

gdzie  $\underline{e}^h = \underline{e}(\underline{r}^h)$ ,  $\underline{g}^h = \underline{g}(\underline{f}^h)$ ,  $\underline{z}^h = \underline{z}(\underline{\psi}^h)$ ,  $\underline{g}_{\alpha}^h = w_{,\alpha}^h + \varphi_{\alpha}^h$ ,  
 $d_{\alpha}^h = w_{,\alpha}^h + \psi_{\alpha}^h$ ; ponadto  $\underline{r}^h, \underline{f}^h, \underline{\psi}^h \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $w^h \in H_0^1(\Omega)$ .

Makroskopowy potencjał sprężysty  $W^h$  ma postać

$$(6.52) \quad W^h(\underline{e}^h, \underline{g}^h, \underline{z}^h, \underline{g}^h, \underline{d}^h) = \frac{1}{2} [h C_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}^h e_{\lambda\mu}^h + \frac{a^3}{3} C_{\alpha\beta\lambda\mu} g_{\alpha\beta}^h g_{\lambda\mu}^h - \\ - a^2 C_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}^h g_{\lambda\mu}^h] + W_1(\underline{e}^h, \underline{z}^h) + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} (a g_{\alpha}^h g_{\beta}^h + b d_{\alpha}^h d_{\beta}^h).$$

Równania równowagi płyty o własnościach efektywnych mają postać (6.22), przy czym należy wstawić  $\underline{N}^h$  zamiast  $\underline{N}$ , etc. Równania te są spełnione w obszarze  $\Omega$ , gdyż płyta zhomogenizowana nie ma szczelin!

Sformułujmy odpowiednik twierdzenia 3.2.

Twierdzenie 6.1. Potencjał makroskopowy (6.52) jest klasy  $C^1$ , ściśle wypukły i spełnia następujący warunek:

$$(6.53) \quad \exists 0 < c_0 \leq c_1 < +\infty \text{ takie, że}$$

$$c_0 (|\underline{e}|^2 + |\underline{g}|^2 + |\underline{z}|^2 + |\underline{g}|^2 + |\underline{d}|^2) \leq W^h(\underline{e}, \underline{g}, \underline{z}, \underline{g}, \underline{d}) \leq \\ \leq c_1 (|\underline{e}|^2 + |\underline{g}|^2 + |\underline{z}|^2 + |\underline{g}|^2 + |\underline{d}|^2), \quad \forall \underline{e}, \underline{g}, \underline{z} \in E_S^2, \quad \forall \underline{g}, \underline{d} \in \mathbb{R}^2.$$

Dowód ostatniego twierdzenia jest podobny do dowodu tw.3.2, z tą jedynie różnicą, że rachunki są dłuższe. ■

Położmy

$$(6.54) \quad \gamma^h(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w) = \int_{\Omega} W^h[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f}), \underline{z}(\underline{\psi}), \underline{g}(w, \underline{f}), \underline{d}(w, \underline{\psi})] dx - \mathcal{L}(w).$$

Możemy obecnie sformułować zasadę minimum całkowitej energii potencjalnej dla płyty zhomogenizowanej.

Zadanie P<sup>h</sup>

Znaleźć

$$(6.55) \quad \gamma^h(\underline{r}^h, \underline{f}^h, \underline{\psi}^h, w^h) = \inf \{ \gamma^h(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w) \mid \underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ w \in H_0^1(\Omega) \}.$$

Uwzględniając tw.6.1 wnioskujemy, że zadanie P<sup>h</sup> posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Zauważmy, że można rozpatrywać płyty spękaną przy znacznie ogólniejszych warunkach brzegowych, np. mieszanych. W trakcie

procesu homogenizacji funkcjonał obciążenia zewnętrznego odgrywa rolę perturbacji, dlatego też po to, aby znaleźć makroskopowy potencjał  $W^h$  przyjęliśmy warunki najprostsze.

#### 6.4. Zagadnienia zbieżności

Głównym celem niniejszego punktu będzie rozwiązanie problemu epi-zbieżności ciągu funkcjonałów  $\{\mathcal{J}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ , danych zależnością (6.39), do funkcjonału  $\mathcal{J}^h$ . Innymi słowy, wykazemy że

$$(6.56) \quad \mathcal{J}^h = [s-L^2(\Omega)]-\lim_e \mathcal{J}^\varepsilon.$$

Zapiszmy funkcjonał  $\mathcal{J}^\varepsilon$  w postaci

$$(6.57) \quad \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w) = G_1^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}) + \Phi(\underline{f}, \underline{\psi}, w) - \mathcal{L}(w),$$

gdzie

$$(6.58) \quad G_1^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \Xi[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f}), \underline{x}(\underline{\psi})] dx = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} [N_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}) e_{\alpha\beta}(\underline{r}) + M_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{f}) g_{\alpha\beta}(\underline{f}) + L_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{\psi}) \partial e_{\alpha\beta}(\underline{\psi})] dx = \\ = \int_{\Omega} j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] dx + \int_{\Omega} j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(\underline{\psi})] dx,$$

$$(6.59) \quad \Phi(\underline{f}, \underline{\psi}, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [Q_\alpha(w, \underline{f}) g_\alpha(w, \underline{f}) + T_\alpha(w, \underline{\psi}) d_\alpha(w, \underline{\psi})] dx,$$

przy czym

$$(6.60) \quad j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] = \frac{1}{2} [h C_{\alpha\beta\gamma\mu} e_{\alpha\beta}(\underline{r}) e_{\gamma\mu}(\underline{r}) - \\ - \frac{a^2}{2} C_{\alpha\beta\gamma\mu} e_{\alpha\beta}(\underline{r}) g_{\gamma\mu}(\underline{f}) + M_{\alpha\beta}(\underline{r}, \underline{f}) g_{\alpha\beta}(\underline{f})],$$

$$(6.61) \quad j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(\underline{\psi})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{b^3}{3} C_{\alpha\beta\gamma\mu} \partial e_{\alpha\beta}(\underline{\psi}) \partial e_{\gamma\mu}(\underline{\psi}) + \right. \\ \left. + b^2 C_{\alpha\beta\gamma\mu} e_{\alpha\beta}(\underline{r}) \partial e_{\gamma\mu}(\underline{\psi}) \right].$$

Zgodnie z rozpatrywanym modelem spękania mamy  $r_\alpha, f_\alpha, w \in H_0^1(\Omega)$ , natomiast  $\psi \in K_1^\varepsilon$ . Epi-zbieżność dotyczy ciągu funkcjonałów

$\{\mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \dots, w)\}_{\varepsilon > 0}$ . Funkcjonał  $\Phi$  zależy od funkcji  $\psi$  ale nie

od jej pochodnych. Funkcjonał  $\bar{\Phi}(\underline{f}, \cdot, w)$  jest wypukły i ciągły w silnej topologii przestrzeni  $L^2(\Omega, R^2)$ . Funkcjonał obciążeń zewnętrznych  $\mathcal{L}$  jest oczywiście ciągły w  $L^2(\Omega)$ , jeśli  $p \in L^2(\Omega)$ . Oznacza to, że funkcyjonał  $\bar{\Phi}(\underline{f}, \cdot, w) - \mathcal{L}(w)$  można traktować jako funkcyjonał perturbacji. Tym samym będzie nas interesować jedynie epi-zbieżność ciągu funkcyjonałów

$$(6.62) \quad \int_{\Omega^\varepsilon} [g(\underline{f}), \underline{x}(\cdot)] dx,$$

związanych ze zmiennym obszarem  $\Omega^\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Jednakże po to, aby udowodnić epi-zbieżność, będzie nam potrzebna nieujemność funkcji podcałkowej. Stąd do rozważań bierzemy funkcję podcałkową

$$(6.63) \quad k = \frac{1}{2} \Sigma = j_0 + j_1,$$

a nie jedynie  $j_1$ . Położymy

$$(6.64) \quad G^\varepsilon(\underline{f}, \underline{f}, \underline{\psi}) = \begin{cases} G_1^\varepsilon(\underline{f}, \underline{f}, \underline{\psi}); & \text{jeśli } \underline{f}, \underline{f} \in H^1(\Omega, R^2), \underline{\psi} \in K^\varepsilon, \\ +\infty & , \text{ w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$(6.65) \quad K^\varepsilon = \{ \underline{\psi} \in H^1(\Omega, R^2) \mid \|\underline{\psi}_n\| \geq 0, \text{ na } F^\varepsilon \}.$$

Najważniejszy rezultat dotyczący epi-zbieżności sformułujemy w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6.2. Ciąg funkcyjonałów  $\{G^\varepsilon(\underline{f}, \underline{f}, \cdot)\}_{\varepsilon > 0}$ , zdefiniowany wzorem (6.64), jest epi-zbieżny w silnej topologii  $L^2(\Omega, R^2)$  do funkcyjonału

$$(6.65) \quad G(\underline{f}, \underline{f}, \underline{\psi}) = \begin{cases} \int_{\Omega} [j_0(g(\underline{f}), \underline{f}(\underline{x})) + W_1(g(\underline{f}), \underline{x}(\underline{\psi}))] dx, & \text{jeśli } \underline{f}, \underline{f}, \underline{\psi} \in H_0^1(\Omega, R^2) \\ +\infty & , \text{ w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie funkcja  $W_1(\underline{f}, \underline{x})$  jest dana wzorem (6.43).

Uwaga. Dla uproszczenia oznaczeń nie będziemy używać górnego indeksu "h" na oznaczenie wielkości makroskopowych, lecz położymy  $\underline{f} = \underline{f}^h$ ,  $\underline{x} = \underline{x}^h$ , etc.

Zwróćmy również uwagę na fakt, że rozpatrujemy epi-zbieżność dla funkcji z  $H^1$ . Ponieważ  $H_0^1 \subset H^1$ , łatwo zauważyć śledząc poniższy dowód, że twierdzenie to pozostaje słuszne i dla funkcji



z  $H_0^1$ . Szczegółowy dowód podany został w pracy autora [158]. Tutaj ograniczymy się do podania istotnych punktów tego dowodu; szczegółowy dowód jest znacznie dłuższy.

Dowód. Zgodnie z własnością (iii) epi-granicy musimy wykazać, że (patrz podrozdział 2)

(a) dla każdego  $\underline{\psi} \in H^1(\Omega, R^2)$  istnieje ciąg  $\{\underline{\psi}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset K^\varepsilon$  zbieżny do  $\underline{\psi}$  w  $L^2(\Omega, R^2)$  taki, że

$$(6.67) \quad G(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}^\varepsilon).$$

(b) Dla każdego ciągu  $\{\underline{\psi}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset K^\varepsilon$  takiego, że

$$\underline{\psi}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\psi} \quad \text{w silnej topologii } L^2(\Omega, R^2),$$

spełniona jest nierówność

$$(6.68) \quad G(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}^\varepsilon).$$

Dowód składa się z kilku kroków.

Krok 1. Niech  $\{\Omega_i\}_{i \in J}$  będzie skończonym pokryciem obszaru  $\Omega$  wielokątami. Pozwala to skorzystać z lokalnego charakteru funkcjonałów  $\{G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \cdot)\}_{\varepsilon > 0}$ . Połóżmy

$$\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i \mid \text{dist}(x, \partial\Omega_i) > \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Niech  $\varphi_i^\delta \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  będzie funkcją taką, że  $0 \leq \varphi_i^\delta \leq 1$ ,  $\varphi_i^\delta|_{\Omega_i^\delta} = 1$ . Jak zwykle,  $\mathcal{D}(\Omega_i)$  oznacza przestrzeń funkcji klasy  $C^\infty|_{\Omega_i}$  o nośniku zawartym w  $\Omega_i$ .

Niech  $\underline{\psi} \in H^1(\Omega, R^2)$  będzie funkcją ciągłą, w podobszarach afiniczną, czyli taką, że

$$(6.69) \quad \underline{\psi}_\alpha(x) = \chi_{\alpha\beta}^i x_\beta + z_\alpha^i, \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \chi^i \in E_s^2, \quad z^i \in R^2, \quad i \in J.$$

Stąd mamy:

$$\underline{\psi}(\underline{\psi}(x)) = \underline{\chi}^i, \quad x \in \Omega_i, \quad i \in J.$$

Każdej rodzinie funkcji  $\{\underline{v}^i\}_{i \in J} \subset K_{YF}$  przyporządkowujemy ciąg

$$(6.70) \quad \underline{\psi}^{\varepsilon, \delta}(x) = \underline{\psi}(x) + \varepsilon \sum_{i \in J} \varphi_i^\delta(x) \underline{v}^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Wnioskujemy stąd, że  $\underline{\psi}^{\varepsilon, \delta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\psi}$  w silnej topologii przestrzeni  $L^2(\Omega, R^2)$ . Ponadto  $\|\underline{\psi}^{\varepsilon, \delta}\| = \varepsilon \sum_{i \in J} \varphi_i^\delta \|\underline{v}_i^i\| \geq 0$ , na  $F^\varepsilon$ .

Niech  $t < 1$  (następnie przejdziemy z  $t \rightarrow 1$ ), oraz  $\omega_i^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \cap \Omega_i$ . Korzystając z oczywistej tożsamości:  $t\varphi_i^\varepsilon + t(1-\varphi_i^\varepsilon) + (1-t) = 1$ , wypukłości funkcji  $j_1(\underline{E}, \cdot)$ , dodatniości funkcji  $k_i$  następującej nierówności

$$(6.71) \quad k(\underline{E}, \underline{\theta}, \underline{x}) \leq \mathcal{L}_0 (|\underline{E}|^2 + |\underline{\theta}|^2 + |\underline{x}|^2); \quad \underline{E}, \underline{\theta}, \underline{x} \in E_S^2,$$

gdzie  $\mathcal{L}_0 > 0$  jest stałą, otrzymujemy

$$\begin{aligned} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, t\Psi^{\varepsilon, \delta}) &\leq \sum_{i \in J} \int_{\omega_i^\varepsilon} \left\{ k[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x)), \underline{x}^i + \underline{x}\varepsilon(v^i(\frac{x}{\varepsilon}))] dx + \right. \\ &+ \mathcal{L}_0 \int_{\omega_i^\varepsilon} (1 - \varphi_i^\varepsilon(x)) |\underline{e}(\underline{r}(x))|^2 dx + \mathcal{L}_d |\underline{x}^i|^2 \int_{\omega_i^\varepsilon} (1 - \varphi_i^\varepsilon(x)) dx + \\ &+ \mathcal{L}_d (1-t) \int_{\omega_i^\varepsilon} [|\underline{e}(\underline{r}(x))|^2 + |\underline{g}(\underline{\varphi}(x))|^2 + |\frac{\varepsilon t}{1-t} \text{sym}(v^i(\frac{x}{\varepsilon})) \otimes \nabla \varphi_i^\varepsilon(x)|^2] dx. \end{aligned}$$

Przyjęto tutaj oznaczenie

$$[\text{sym}(v^i \otimes \nabla \varphi_i^\delta)]_{\alpha\beta} = (v_\alpha \frac{\partial \varphi_i^\delta}{\partial x_\beta} + v_\beta \frac{\partial \varphi_i^\delta}{\partial x_\alpha})/2.$$

Ponieważ funkcja  $k[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{\varphi}), \underline{x}^i + \underline{x}\varepsilon(v^i(\frac{\cdot}{\varepsilon}))]$  jest  $\varepsilon Y$ -okresowa, przeto z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$(6.72) \quad \limsup_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 1}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, t\Psi^{\varepsilon, \delta}) \leq \\ \leq \sum_{i \in J} \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \cap V} k[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x)), \underline{x}^i + \underline{x}\varepsilon_y(v^i(y))] dy \right\} dx.$$

Pomocny nam teraz będzie pewien lemat [6, s.33].

Lemat 6.1. Niech  $\{a_{A,B} \mid A, B=1, 2, \dots\}$  będzie podwójnie indeksowanym ciągiem w  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Istnieje odwzorowanie  $A \rightarrow B(A)$ , rosnące do  $+\infty$ , takie że

$$(6.73) \quad \limsup_{A \rightarrow +\infty} a_{A, B(A)} \leq \limsup_{B \rightarrow +\infty} (\limsup_{A \rightarrow +\infty} a_{A, B}).$$

Korzystając z tego lematu widzimy, że można skonstruować odwzorowanie  $\varepsilon \rightarrow (t(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ , takie że  $(t(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) \rightarrow (1^-, 0)$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Kładąc  $\Psi^\varepsilon = t(\varepsilon) \Psi^{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$ , z (6.72) dostajemy

$$(6.74) \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}^\varepsilon) \leq \sum_{i \in J} \int_{\Omega_i} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} k[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x)), \underline{\chi}^i + \underline{z}_y(\underline{v}^i(y))] dy \right\} dx$$

Biorąc w prawej stronie infimum gdy  $\underline{v}^i$  przebiega zbiór  $K_{YF}$  dochodzimy do zależności

$$G^S(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}^\varepsilon) \leq \int_{\Omega} j_0[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x))] dx + \sum_{i \in J} \int_{\Omega_i} \left\{ W_1(\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{\chi}^i) dx + \int_{\Omega} \{ j_0[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x))] + W_1[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{z}(\underline{\psi}(x))] \} dx \right\}$$

Krok 2. Kładąc  $\underline{v}=0$  w zależności (6.43) i uwzględniając (6.71), otrzymujemy

$$(6.75) \quad j_0(\underline{e}, \underline{\theta}) + W_1(\underline{e}, \underline{\chi}) \leq \mathcal{L}_\alpha(|\underline{e}|^2 + |\underline{\theta}|^2 + |\underline{\chi}|^2); \quad \underline{e}, \underline{\theta}, \underline{\chi} \in E^2_S.$$

Z własności (ii) epi-granicy wynika, że wypukłość funkcjonałów  $G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \cdot)$  jest zachowana przez epi-granicę górną. Ponadto, biorąc pod uwagę (6.75) możemy napisać

$$(6.76) \quad G^S(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) \leq \mathcal{L}_0 \int_{\Omega} (|\underline{e}(x)|^2 + |\underline{g}(\underline{\varphi}(x))|^2 + |\underline{z}(\underline{\psi}(x))|^2) dx,$$

dla każdego  $\underline{\psi} \in H^1_0(\Omega, R^2)$ . Ponieważ funkcjonał  $G^S(\underline{r}, \underline{\varphi}, \cdot)$  jest wypukły i skończony więc jest ciągły na  $H^1(\Omega, R^2)$ , por. [56].

W konsekwencji, na mocy gęstości w przestrzeni  $H^1(\Omega)$  funkcji ciągłych, afinicznych w podobozzarach [56], wnioskujemy, iż nierówność

$$G^S(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}) \leq G(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\psi}),$$

zachodzi dla każdego  $\underline{\psi} \in H^1(\Omega, R^2)$ . Funkcjonał  $G(\underline{r}, \underline{\varphi}, \cdot)$  jest oczywiście wypukły i ciągły na przestrzeni  $H^1(\Omega, R^2)$ . W ten sposób udowodniliśmy nierówność (6.67).

Przechodzimy do dowodu nierówności (6.68).

Krok 3. Niech  $\underline{\psi}$  będzie funkcją afiniczną, taką że

$$(6.77) \quad \underline{\psi}_\alpha(x) = \underline{\chi}_\alpha \cdot x_\beta + z_\alpha, \quad \underline{\chi} \in E^2_S, \quad z \in R^2.$$

Weźmy

$$(6.78) \quad \underline{\psi}^\varepsilon(x) = \underline{\psi}(x) + \varepsilon \underline{\psi}(\underline{e}, \underline{\chi}) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$



gdzie funkcja  $\underline{\Psi}(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi})$  jest rozwiązaniem zadania lokalnego

$$\inf_{\underline{y} \in K_{YF}} \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} [j_1(\underline{\varepsilon}, \underline{z}_y(\underline{y})) + \underline{\chi}] dy.$$

Przechodząc z  $\underline{\varepsilon} \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} (6.79) \quad \lim_{\underline{\varepsilon} \rightarrow 0} G^{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\Psi}^{\underline{\varepsilon}}) &= \int_{\Omega} [j_0[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{g}(\underline{\varphi}(x))] dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} j_1[\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{\chi} + \underline{z}_y(\underline{\Psi}(\underline{e}(\underline{r}), \underline{\chi}))(y)] dy \right\} dx = \\ &= \int_{\Omega} \{j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{\varphi})] + w_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{\chi}]\} dx = G(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\Psi}), \end{aligned}$$

ponieważ  $\underline{z}(\underline{\Psi}) = \underline{\chi}$ .

Krok 4. Niech  $\{\underline{\Psi}^{\underline{\varepsilon}}\}_{\underline{\varepsilon} > 0} \subset K^{\underline{\varepsilon}}$  będzie ciągiem funkcji silnie zbieżnym do  $\underline{\Psi} \in L^2(\Omega, R^2)$ . Weźmy  $q$ , funkcję ciągłą i w podobszarach afiniczną, czyli

$$(6.80) \quad q_{\alpha}(x) = \chi_{\alpha}^i x_{\beta} + z_{\alpha}^i, \quad \underline{z}(\underline{q}) = \underline{\chi}^i, \quad w \Omega_i,$$

gdzie  $\underline{\chi} \in E_S^2$ ,  $\underline{z}^i \in R^2$ ,  $i \in J$ . Oznaczmy przez  $\underline{v}^i$  ( $i \in J$ ) rozwiązanie następującego zadania lokalnego

$$(6.81) \quad \inf_{\underline{y} \in K_{YF}} \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{\varepsilon}, \underline{z}_y(\underline{y}) + \underline{\chi}^i) dy.$$

Oczywiście  $\underline{v}^i$  zależy od  $\underline{\varepsilon}$  i  $\underline{\chi}^i$ . Położmy

$$(6.82) \quad \underline{q}^{\underline{\varepsilon}, i}(x) = \underline{q}(x) + \underline{\varepsilon} \underline{v}^i(\frac{x}{\underline{\varepsilon}}), \quad i \in J.$$

Wnioskujemy stąd, że  $\underline{q}^{\underline{\varepsilon}, i} \xrightarrow{\underline{\varepsilon} \rightarrow 0} \underline{q}$  silnie w  $L^2(\Omega, R^2)$ , dla każdego  $i \in J$ .

Niech  $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  ( $i \in J$ ) będzie funkcją taką, że  $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ ,  $x \in \Omega_i$ . Korzystając z dodatniości funkcji  $k$  (wzór (6.63)) mamy

$$\begin{aligned} (6.83) \quad & \int_{\Omega} [j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{\varphi})] dx + \int_{\Omega^{\underline{\varepsilon}}} j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{z}(\underline{\Psi}^{\underline{\varepsilon}})] dx \geq \\ & \geq \sum_{i \in J} \int_{\Omega_i} \varphi_i(x) j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{\varphi})] dx + \sum_{i \in J} \int_{\omega_i^{\underline{\varepsilon}}} \varphi_i(x) j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{z}(\underline{\Psi}^{\underline{\varepsilon}})] dx, \end{aligned}$$

gdzie, przypomnijmy,  $\omega_i^\epsilon = \Omega^\epsilon \cap \Omega_i$ . Nierówność subróżniczkowa dla subróżniczki w punkcie  $\underline{x}(q^\epsilon, i)$  daje

$$(6.84) \quad \sum_{i \in J} \left\{ \int_{\Omega_i} \varphi_i j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] dx + \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(\Psi^\epsilon)] dx - \right. \\ \left. - \int_{\Omega_i} \varphi_i j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] dx - \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] dx \right\} \gg \\ \gg \sum_{i \in J} \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i D_{\alpha\beta} [\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] \mathcal{H}_{\alpha\beta}(\Psi^\epsilon - q^\epsilon, i) dx,$$

gdzie

$$(6.85) \quad D_{\alpha\beta} [\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] = [D_2 j_1(\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i))]_{\alpha\beta} = \\ = \frac{b^3}{3} C_{\alpha\beta\lambda\mu} \mathcal{H}_{\lambda\mu}(q^\epsilon, i) + \frac{b^2}{2} C_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\mu}(\underline{r}).$$

Tutaj  $D_2 j_1[\underline{e}(\underline{r}), \cdot]$  oznacza gradient funkcji  $j_1(\underline{e}(\underline{r}), \cdot)$ . Korzystając z (6.79) otrzymujemy

$$(6.86) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_i} \varphi_i j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] dx + \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] dx \right\} = \\ = \int_{\Omega_i} \varphi_i \{ j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})] + w_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q)] \} dx, \quad i \in J.$$

Całkując przez części ostatni człon nierówności (6.84) możemy napisać

$$(6.87) \quad \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i D_{\alpha\beta} [\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] \mathcal{H}_{\alpha\beta}(\Psi^\epsilon - q^\epsilon, i) dx = A_i^\epsilon + B_i^\epsilon + C_i^\epsilon,$$

gdzie (nie ma sumowania po  $i$  !)

$$(6.88) \quad A_i^\epsilon = - \int_{\omega_i^\epsilon} \varphi_i [D_{\alpha\beta} (\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i))]_{,\beta} (\Psi_\alpha^\epsilon - q_\alpha^\epsilon, i) dx,$$

$$(6.89) \quad B_i^\epsilon = - \int_{\omega_i^\epsilon} D_{\alpha\beta} [\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i)] \varphi_{i,\beta} (\Psi_\alpha^\epsilon - q_\alpha^\epsilon, i) dx,$$

$$(6.90) \quad C_i^\epsilon = \int_{F_i^\epsilon} \varphi_i \{ (\Psi_\alpha^\epsilon - q_\alpha^\epsilon, i) |_{11} [D_{\alpha\beta} (\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i))] n_\beta |_{11} - \\ - (\Psi_\alpha^\epsilon - q_\alpha^\epsilon, i) |_{22} [D_{\alpha\beta} (\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^\epsilon, i))] n_\beta |_{22} \} ds.$$

Tutaj  $F_1^\varepsilon = F^\varepsilon \cap \Omega_1$ .

Aby móc kontynuować dowód zbieżności musimy najpierw podać kilka rezultatów związanych z lokalizacją. Jak wiemy, lokalne zadanie minimalizacji (6.81) jest równoważne następującej nierówności wariacyjnej:

znaleźć  $\underline{v}^i \in K_{YF}$  takie, że

$$(6.91) \quad \int_{YF} D_{\alpha\beta}(\underline{E}, \underline{x}_y(\underline{v}^i) + \underline{x}^i) \mathcal{A}_{y\alpha\beta}(\underline{v} - \underline{v}^i) dy \geq 0, \quad \forall \underline{v} \in K_{YF},$$

gdzie  $\underline{E} = \underline{e}(\underline{r})$ . Biorąc następnie  $\underline{v} = \underline{v}^i + \underline{f}$ ,  $\underline{f} \in \mathcal{D}(YF, R^2)$ , otrzymujemy lokalne równanie równowagi

$$(6.92) \quad - \frac{\partial}{\partial y_\beta} D_{\alpha\beta}(\underline{E}, \underline{x}_y(\underline{v}^i) + \underline{x}^i) = 0,$$

które należy rozumieć w sensie dystrybucji, czyli  $\mathcal{D}^*(YF, R^2)$ . Uwzględniając (6.92) wnioskujemy, że

$$(6.93) \quad \left| D_{\alpha\beta}(\underline{E}, \underline{x}_y(\underline{v}^i) + \underline{x}^i) N_\beta \right. \text{ przyjmuje przeciwne wartości na} \\ \left. \text{przeciwnych bokach komórki } Y. \right.$$

Przeprowadzając zmianę skali ( $y \rightarrow \frac{x}{\varepsilon}$ ) otrzymujemy

$$(6.94) \quad [D_{\alpha\beta}(\underline{e}(\underline{r}(x)), \underline{x}(q^{\varepsilon, i}(x)))]_{,\beta} = 0, \quad \text{w } \mathcal{D}^*(\Omega^\varepsilon, R^2),$$

$$(6.95) \quad C_i^\varepsilon \geq 0, \quad i \in J.$$

Uwzględniając w nierówności (6.83) zależności (6.84), (6.88) - (6.90), (6.94) i (6.95) dostajemy

$$(6.96) \quad G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}^\varepsilon) = \int_{\Omega} j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{f}(\underline{f})] dx + \int_{\Omega^\varepsilon} j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(\underline{\psi}^\varepsilon)] dx \geq \\ \geq \sum_i \left\{ \int_{\Omega_i} \varphi_i j_0[\underline{e}(\underline{r}), \underline{f}(\underline{f})] dx + \int_{\omega_i^\varepsilon} \varphi_i j_1[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^{\varepsilon, i})] dx - \right. \\ \left. - \int_{\omega_i^\varepsilon} D_{\alpha\beta}[\underline{e}(\underline{r}), \underline{x}(q^{\varepsilon, i})] \varphi_{i,\beta} (\psi_\alpha^\varepsilon - q_\alpha^{\varepsilon, i}) dx. \right.$$

Przed przejściem do granicy ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) w ostatniej nierówności wykazemy następującą pożyteczną zależność

$$(6.97) \quad D_2 W_1(\underline{E}, \underline{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{YF} D_2 j_1[\underline{E}, \underline{x}_y(\underline{v}) + \underline{x}] dy,$$



gdzie  $\underline{E}, \underline{\chi} \in E_S^2$ , zaś  $\tilde{V}$  jest minimizerem zadania lokalnego. Zależność ta jest zarazem wystarczająca, aby wykazać, że potencjał makroskopowy  $W^h$  jest klasy  $C^1$ , por. tw.6.1. Jest rzeczą oczywistą, że

$$(6.98) \quad [D_2 j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_Y(\tilde{V}) + \underline{\chi})]_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(\underline{E}, \underline{\chi}_Y(\tilde{V}) + \underline{\chi}) = \\ = \frac{b^3}{3} C_{\alpha\beta\lambda\mu} (\partial_{\epsilon} \epsilon_{Y\lambda\mu}(\tilde{V}) + \chi_{\lambda\mu}) + \frac{b^2}{2} C_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\lambda\mu}.$$

Ponieważ funkcja  $j_1(\underline{E}, \cdot)$  jest wypukła i skończona więc możemy napisać

$$(6.99) \quad D_2 j_1(\underline{E}, \cdot) = \partial_2 j_1(\underline{E}, \cdot),$$

gdzie  $\partial_2 j(\underline{E}, \cdot)$  oznacza subdifferential funkcji  $j_1(\underline{E}, \cdot)$ . Podobnie mamy

$$(6.100) \quad D_2 W_1(\underline{E}, \underline{\chi}) = \partial_2 W_1(\underline{E}, \underline{\chi}); \underline{E}, \underline{\chi} \in E_S^2.$$

Oznaczmy przez  $(\ell_{\alpha\beta}(y))$  ( $y \in Y \setminus F$ ) momenty lokalne związane z polem  $\tilde{V}(y)$ , tzn.:

$$(6.101) \quad \ell_{\alpha\beta}(y) = D_{\alpha\beta}(\underline{E}, \underline{\chi}_Y(\tilde{V}) + \underline{\chi}),$$

oraz, por.(6.91)

$$(6.102) \quad \int_{Y \setminus F} \ell_{\alpha\beta}(y) \partial_{\epsilon} \epsilon_{Y\alpha\beta}(v - \tilde{V}) dy \geq 0, \quad \forall v \in K_{Y \setminus F}.$$

Uwzględniając (6.100) i (6.102) otrzymujemy

$$W_1(\underline{E}, \underline{\chi}^{(1)}) - W_1(\underline{E}, \underline{\chi}) = \\ = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} [D_2 j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_Y(\tilde{V}^{(1)}) + \underline{\chi}^{(1)}) - D_2 j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_Y(\tilde{V}) + \underline{\chi})] dy \geq \\ \geq \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \ell_{\alpha\beta}(y) [\partial_{\epsilon} \epsilon_{Y\alpha\beta}(\tilde{V}^{(1)}) + \chi_{\alpha\beta}^{(1)} - (\partial_{\epsilon} \epsilon_{Y\alpha\beta}(\tilde{V}) + \chi_{\alpha\beta})] dy \geq \\ \geq \left( \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \ell_{\alpha\beta}(y) dy \right) (\chi_{\alpha\beta}^{(1)} - \chi_{\alpha\beta}) = L_{\alpha\beta}^h (\chi_{\alpha\beta}^{(1)} - \chi_{\alpha\beta}),$$

gdzie

$$L_{\alpha\beta}^h = \frac{1}{|Y|} \int_{YF} l_{\alpha\beta}(y) dy,$$

oznacza momenty makroskopowe w warstwie dolnej płyty efektywnej. Tym samym zależność (6.97) została udowodniona.

Możemy już teraz przejść do granicy ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) w nierówności (6.96). Zauważmy najpierw, że

$$\underline{\Psi}^\varepsilon - \underline{q}^\varepsilon, i \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\Psi} - \underline{q} \quad (\text{silnie w } L^2(\Omega, R^2)),$$

$$(6.103) \quad D_{\alpha\beta} [e(\underline{r}), \underline{x}(q^\varepsilon, i)] = \\ = D_{\alpha\beta} [e(\underline{r}), \underline{x}^i + \frac{\underline{x}(\tilde{v}^i)(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon}] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|Y|} \int_{YF} D_{\alpha\beta} [e(\underline{r}), \underline{x}^i + \underline{x}_Y(\tilde{v}^i(y))] dy$$

słaba w  $L^2(\Omega, R_s^2)$ . Uwzględniając (6.97) widzimy, że granica w (6.103) jest równa  $D_2 W_1(e(\underline{r}), \underline{x}^i)$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\Psi}^\varepsilon) \geq \sum_{i \in J} \left\{ \int_{\Omega_i} \varphi_i(x) [j_0(e(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})) + W_1(e(\underline{r}), \underline{x}(q))] dx - \int_{\Omega_i} [D_2 W_1(e(\underline{r}), \underline{x}^i)]_{\alpha\beta} \varphi_{i,\beta}(\underline{\Psi}_\alpha - \underline{q}_\alpha) dx \right\}.$$

Korzystając następnie z lematu 3.3 i wiedząc, że  $\underline{\Psi}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\Psi}$  silnie w  $L^2(\Omega, R^2)$ , wnioskujemy, iż  $\underline{\Psi} \in H^1(\Omega, R^2)$ . Wykonując całkowanie przez części w ostatniej całce ostatniej nierówności, a następnie zmierzając z  $\varphi_i$  do 1 ( $i \in J$ ), otrzymujemy

$$(6.104) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\Psi}^\varepsilon) \geq \int_{\Omega} [j_0(e(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f})) + W_1(e(\underline{r}), \underline{x}(q))] dx + \\ + \int_{\Omega} [D_2 W_1(e(\underline{r}), \underline{x}(q))]_{\alpha\beta} \underline{x}_{\alpha\beta}(\underline{\Psi} - \underline{q}) dx.$$

Jak wiemy, funkcja  $q$  jest ciągła i w podobszarach afiniczna. Korzystając znów z gęstości takich funkcji w przestrzeni  $H^1(\Omega, R^2)$ , oraz z tego że funkcjonal  $G(\underline{r}, \underline{f}, \cdot)$  jest wypukły i ciągły na tej przestrzeni wnioskujemy, iż nierówność (6.104) zachodzi dla dowolnego  $q \in H^1(\Omega, R^2)$ . Kładąc  $\underline{\Psi} = \underline{q}$  ostatecznie otrzymujemy

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\Psi}^\varepsilon) \geq G(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\Psi}),$$

co dowodzi nierówności (6.68) i kończy dowód twierdzenia 6.2. ■

Wniosek

Z powyższych rozważań wyciągamy następującą ciekawą konkluzję

$$(6.105) \quad \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{J}^h(\underline{r}^h, \underline{\varphi}^h, \underline{\psi}^h, w^h),$$

przy czym uwzględniliśmy (6.41) i (6.55). Zgodnie bowiem z tw.

6.2 i komentarzem poprzedzającym to twierdzenie mamy, że dla  $(\underline{r}^h, \underline{\varphi}^h, \underline{\psi}^h, w^h) \in [H_0^1(\Omega, R^2)]^3 \times H_0^1(\Omega)$  istnieje ciąg

$$\{(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0} \subset [H_0^1(\Omega, R^2)]^2 \times K_1^\varepsilon \times H_0^1(\Omega), \text{ silnie zbieżny w } [L^2(\Omega, R^2)]^3 \times L^2(\Omega) \text{ i taki, że}$$

$$(6.106) \quad \mathcal{J}^h(\underline{r}^h, \underline{\varphi}^h, \underline{\psi}^h, w^h) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon),$$

por.(6.6). Ponadto, zgodnie z (6.67) mamy

$$(6.107) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon) \geq \mathcal{J}^h(\underline{r}^h, \underline{\varphi}^h, \underline{\psi}^h, w^h).$$

Ponieważ  $(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon)$  jest minimizerem zadania  $P_\varepsilon$  (patrz (6.41)), więc możemy napisać

$$(6.108) \quad \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon) \leq \mathcal{J}^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{\varphi}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon).$$

Zależności (6.106)-(6.108) dowodzą zbieżności całkowitej energii potencjalnej płyty spękaną do tejże energii płyty zhomogenizowanej. Za ważmy, że zbieżność tego rodzaju zachodzi i w przypadku ogólniejszych warunków brzegowych, np. mieszanych.

6.5. Homogenizacja dualna

Dotychczasowe rozważania dotyczące homogenizacji płyt częściowo spękaných przeprowadziliśmy w terminach przemieszczeń uogólnionych. Niniejszy punkt poświęcony jest zagadnieniu homogenizacji tej samej płyty, ale przy zastosowaniu homogenizacji dualnej. W tym przypadku zmiennymi wyjściowymi będą naprężenia uogólnione.

Ponieważ macierze  $\underline{D}^{(1)}$  i  $\underline{C}$  są nieosobliwe więc możemy napisać

$$(6.109) \quad \underline{D}^{-1} = [\underline{D}^{(1)}]^{-1} \otimes \underline{B}, \quad \underline{B} = \underline{C}^{-1},$$

gdzie



$$(6.110) \quad [\underline{D}^{(1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{h} & \frac{6}{ah} & -\frac{6}{bh} \\ \frac{6}{ah} & \frac{12(a+\frac{b}{4})}{a^3h} & -\frac{9}{abh} \\ -\frac{6}{bh} & -\frac{9}{abh} & \frac{12(\frac{a}{4}+b)}{b^3h} \end{bmatrix}$$

Związki konstytutywne, odwrotne do (6.19) i (6.20) mają, odpowiednio, postać

$$(6.111) \quad \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{g} \\ \underline{ze} \end{bmatrix} = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{L} \end{bmatrix},$$

$$(6.112) \quad \underline{g}_{\alpha} = a^{-1} z_{\alpha\beta} \underline{Q}_{\beta}, \quad \underline{z} = \underline{H}^{-1}, \\ \underline{d}_{\alpha} = b^{-1} z_{\alpha\beta} \underline{I}_{\beta}.$$

Celem wyprowadzenia zadania  $P_{\xi}^*$ , dualnego do zadania  $P_{\xi}$ , zastosujemy teorię dualności Rockafellara w postaci przedstawionej w książce [56].

Niech  $\mathcal{A}$  będzie operatorem liniowym i ciągłym zdefiniowanym następująco

$$(6.113) \quad \mathcal{A}(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w) = (\mathcal{A}_1 \underline{r}, \mathcal{A}_2 \underline{f}, \mathcal{A}_3 \underline{\psi}, \mathcal{A}_4(w, \underline{f}), \mathcal{A}_5(w, \underline{\psi})) = \\ = (\underline{e}(\underline{r}), \underline{g}(\underline{f}), \underline{z}(\underline{\psi}), \underline{g}(w, \underline{f}), \underline{d}(w, \underline{\psi})),$$

$$\mathcal{A}: [H_0^1(\Omega, R^2)]^2 \times H_1^1(\Omega^{\xi}, R^2) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow [L^2(\Omega, E_S^2)]^2 \times L^2(\Omega^{\xi}, E_S^2) \times [L^2(\Omega, R^2)]^2.$$

Znajdźmy operator sprzężony  $\mathcal{A}^*$ ; oznacza to, że musimy znaleźć operatory  $\mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_5^*$ .

Prosty rachunek daje

$$(6.114) \quad \langle \underline{N}, \mathcal{A}_1 \underline{r} \rangle_{L^2 \times L^2} = \int_{\Omega} N_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\underline{r}) dx = - \int_{\Omega} N_{\alpha\beta\gamma} r_{\alpha} dx = \\ = \langle \mathcal{A}_1^* \underline{N}, \underline{r} \rangle_{H^{-1} \times H_0^1},$$

przy założeniu, że  $\underline{r} \in H_0^1(\Omega, R^2)$ . W analogiczny sposób otrzymujemy

$$(6.115) \quad \mathcal{L}_2^* \underline{M} = (-M_{\alpha\beta,\beta}), \text{ w } \Omega;$$

$$(6.116) \quad \mathcal{L}_3^* \underline{L} = \begin{cases} (-L_{\alpha\beta,\beta}), \text{ w } \Omega^\varepsilon, \\ -L_n, \text{ na } F^\varepsilon; \end{cases}$$

$$(6.117) \quad \mathcal{L}_4^* \underline{Q} = \begin{cases} -Q_{\alpha,\alpha}, \text{ w } \Omega, & (w) \\ \underline{Q}, \text{ w } \Omega; & (\underline{p}) \end{cases}$$

$$(6.118) \quad \mathcal{L}_5^* \underline{I} = \begin{cases} -I_{\alpha,\alpha}, \text{ w } \Omega, & (w) \\ \underline{I}, \text{ w } \Omega; & (\underline{\psi}). \end{cases}$$

Położmy

$$(6.119) \quad \mathcal{L}_\varepsilon^*(v, \underline{\Psi}) = -\mathcal{L}(v) + I_{K_1}^\varepsilon(\underline{\Psi}).$$

Chcąc sformułować zadanie dualne  $P_\varepsilon^*$  obliczamy

$$(6.120) \quad \mathcal{L}_\varepsilon^*(-\mathcal{L}^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I})) = \sup \left\{ \int_{\Omega} (N_{\alpha\beta,\beta} \varphi_\alpha + M_{\alpha\beta,\beta} \psi_\alpha + \right. \\ \left. + Q_{\alpha,\alpha} w - Q_\alpha \varphi_\alpha + I_{\alpha,\alpha} w - I_\alpha \psi_\alpha + pw) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} L_{\alpha\beta,\beta} \psi_\beta dx + \right. \\ \left. + \int_{F^\varepsilon} L_n [\psi_n] ds - I_{K_1}^\varepsilon(\underline{\Psi}) \mid \underline{\varphi} \in H_0^1(\Omega, R^2), \underline{\psi} \in H_1^1(\Omega^\varepsilon, R^2) \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ jeśli } N_{\alpha\beta,\beta} = 0, -M_{\alpha\beta,\beta} + Q_\alpha = 0, \text{ w } \Omega, \\ (Q_\alpha + I_\alpha)_{,\alpha} + p = 0, \text{ w } \Omega, \\ -L_{\alpha\beta,\beta} + I_\alpha = 0, \text{ w } \Omega^\varepsilon, \\ L_n \leq 0, \text{ na } F^\varepsilon; \\ +\infty, \text{ w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$(6.121) \quad H_1^1(\Omega^\varepsilon, R^2) = \{ \underline{\psi} \in H^1(\Omega^\varepsilon, R^2) \mid \underline{\psi} = 0, \text{ na } \partial\Omega \}.$$

Niech

$$G_2^\varepsilon(\mathcal{L}(\underline{\varphi}, \underline{\psi}, w)) = \int_{\Omega^\varepsilon} k[\underline{e}(\underline{\varphi}), \underline{g}(\underline{\psi}), \underline{x}(\underline{\psi})] dx +$$

$$+ \int_{\Omega} j_2 [g(w, \underline{f}), d(w, \underline{\Psi})] dx,$$

gdzie

$$(6.122) \quad j_2 [g(w, \underline{f}), d(w, \underline{\Psi})] = \frac{1}{2} [Q_{\alpha} (w, \underline{f}) g_{\alpha} (w, \underline{f}) + I_{\alpha} (w, \underline{\Psi}) d_{\alpha} (w, \underline{\Psi})].$$

W naszym przypadku mamy, por. [56, tw.2.1, rozdz.IX]

$$(6.123) \quad G_2^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) = \int_{\Omega^E} k [N(x), M(x), L(x)] dx + \int_{\Omega} j_2^* [Q(x), I(x)] dx.$$

Proste rachunki dają

$$(6.124) \quad j_2^*(\underline{Q}, \underline{I}) = \sup \{ \underline{Q} \cdot \underline{g} + \underline{I} \cdot \underline{d} - j_2(\underline{g}, \underline{d}) \mid \underline{g}, \underline{d} \in R^2 \} = \\ = \frac{1}{2} (a^{-1} Z_{\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta} + b^{-1} Z_{\alpha\beta} I_{\alpha} I_{\beta}),$$

$$(6.125) \quad k^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) = \sup \{ \underline{N} : \underline{e} + \underline{M} : \underline{g} + \underline{L} : \underline{x} - k(\underline{e}, \underline{g}, \underline{x}) \mid \underline{e}, \underline{g}, \underline{x} \in E_S^2 \} = \\ = \frac{1}{2} [\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}] \underline{Q}^{-1} [\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}]^t = B_{\alpha\beta\lambda\mu} \left( \frac{2}{h} N_{\alpha\beta} N_{\lambda\mu} + \right. \\ \left. + \frac{6}{ah} N_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} - \frac{6}{bh} N_{\alpha\beta} L_{\lambda\mu} + \frac{3(4a+b)}{2a^3h} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} + \right. \\ \left. + \frac{3(4b+a)}{2b^3h} L_{\alpha\beta} L_{\lambda\mu} - \frac{9}{abh} L_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} \right).$$

Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  zbiór statycznie dopuszczalnych naprężeń uogólnionych  $\mathcal{C}_S^\varepsilon$  ma postać

$$(6.126) \quad \mathcal{C}_S^\varepsilon = \{ \underline{N} \in L^2(\Omega, E_S^2), \underline{M} \in L^2(\Omega, E_S^2), \underline{L} \in L^2(\Omega^E, E_S^2), \\ \underline{Q} \in L^2(\Omega, R^2), \underline{I} \in L^2(\Omega, R^2) \mid N_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \text{ w } \Omega ; \\ -M_{\alpha\beta\gamma\delta} + Q_{\alpha\alpha} = 0, \text{ w } \Omega ; (Q_{\alpha\alpha} + I_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + p = 0, \text{ w } \Omega ; \\ -L_{\alpha\beta\gamma\delta} + I_{\alpha\alpha} = 0, \text{ w } \Omega^E ; L_n \leq 0, \text{ na } F_n^E \}.$$

Korzystając ze wspomnianej już wcześniej teorii dualności Rockafellara [56], możemy sformułować zadanie dualne, czyli zasadę całkowitej energii dopełniającej.



Zadanie  $P_\epsilon^*$  ( $\epsilon > 0$ )

Znaleźć

$$(6.127) \quad \sup \left\{ - \int_{\Omega} [k^*(\underline{N}(x), \underline{M}(x), \underline{L}(x)) + j_2^*(\underline{Q}(x), \underline{I}(x))] dx \mid (\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) \in \mathcal{C}_S^\epsilon \right\}.$$

Wprowadzając funkcję indykatorową zbioru  $\mathcal{C}_S^\epsilon$  możemy rozważyć sformułowanie równoważne.

Zadanie  $R_\epsilon^*$

Znaleźć

$$(6.128) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} [k^*(\underline{N}(x), \underline{M}(x), \underline{L}(x)) + j_2^*(\underline{Q}(x), \underline{I}(x))] dx + I_{\mathcal{C}_S^\epsilon}(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) \mid (\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) \in \mathcal{H} \right\},$$

gdzie

$$(6.129) \quad \mathcal{H} = [L^2(\Omega, E^2)]^3 \times [L^2(\Omega, R^2)]^2.$$

Oczywiście mamy

$$\sup P_\epsilon^* = - \inf R_\epsilon^*.$$

Z twierdzenia 4.2 Ekelanda i Temama [56, rozdz. III] wynika, że rozwiązanie  $(\underline{N}^\epsilon, \underline{M}^\epsilon, \underline{L}^\epsilon, \underline{Q}^\epsilon, \underline{I}^\epsilon) \in \mathcal{C}_S^\epsilon$  zadania  $P_\epsilon^*$  istnieje i jest jednoznaczne. Zwróćmy uwagę na fakt, że potencjał dopełniający  $k^* + j_2^*$  jest ściśle wypukły.

Położmy

$$(6.130) \quad \mathcal{J}^\epsilon(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) = \int_{\Omega} [k^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) + j_2^*(\underline{Q}, \underline{I})] dx + I_{\mathcal{C}_S^\epsilon}(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}).$$

Zanim rozpatrzmy epi-zbieżność ciągu funkcjonałów  $\{\mathcal{J}^\epsilon\}_{\epsilon > 0}$  wyprowadzimy potencjał dopełniający  $(W^h)^*$ , dualny do potencjału makroskopowego  $W^h$ , danego wzorem (6.52). Zastosujemy podejście przedstawione w pracy autora [158]. Metoda zastosowana przez Azé [11] do wyprowadzenia potencjału dopełniającego dla sprężystego ośrodka niespękanego okazuje się nieprzydatna dla naszego znacznie bardziej złożonego zagadnienia.

Korzystając z transformacji Feocheła mamy

$$(6.131) \quad (W^h)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) = \sup \{ \underline{N} : \underline{E} + \underline{M} : \underline{\theta} + \underline{L} : \underline{\chi} + \underline{Q} : \underline{q} + I \cdot \underline{d} - W^h(\underline{E}, \underline{\theta}, \underline{\chi}, \underline{q}, \underline{d}) \mid \underline{E}, \underline{\theta}, \underline{\chi} \in E_S^2; \underline{q}, \underline{d} \in R^2 \} =$$

$$= (j_0 + W_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) + j_2^*(\underline{Q}, \underline{I}),$$

gdzie

$$(6.132) \quad (j_0 + W_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) = \sup_{\underline{E}, \underline{\theta}, \underline{\chi} \in E_S^2} \left\{ \underline{N} : \underline{E} + \underline{M} : \underline{\theta} + \right. \\ \left. + \underline{L} : \underline{\chi} - j_0(\underline{E}, \underline{\theta}) - \frac{1}{|Y|} \inf_{\underline{v} \in K_{YF}} \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_y(\underline{v}) + \underline{\chi}) dy \right\}.$$

Aby wyznaczyć jawną postać funkcji  $(j_0 + W_1)^*$  rozpatrzmy pomocnicze zadanie optymalizacji wypukłej

$$(P(\underline{E}, \underline{\chi})) \inf \left\{ \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_y(\underline{v}) + \underline{\chi}) dy \mid \underline{v} \in K_{YF} \right\} = \\ = \inf \left\{ \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{E}, \underline{\chi}_y(\underline{v}) + \underline{\chi}) dy + I_{K_{YF}}(\underline{v}) \mid \underline{v} \in H_{\text{per}}(Y \setminus F, R^2) \right\}$$

Położmy  $\Lambda \underline{v} = \underline{\chi}_y(\underline{v})$ , oraz

$$G(\underline{E}, \underline{\chi})(\Lambda \underline{v}) = \int_{Y \setminus F} j_1(\underline{E}, \Lambda \underline{v} + \underline{\chi}) dy, \quad \underline{v} \in H^1(Y \setminus F, R^2),$$

$$\mathcal{F}(\underline{v}) = I_{K_{YF}}(\underline{v}), \quad \underline{v} \in H_{\text{per}}(Y \setminus F, R^2).$$

Widzimy, że  $\Lambda : H^1(Y \setminus F, R^2) \rightarrow L^2(Y \setminus F, E_S^2)$ . Łatwo obliczyć funkcjonal sprzężony  $G^*(\underline{E}, \underline{\chi})$ , bowiem mamy

$$(6.133) \quad G^*(\underline{E}, \underline{\chi})(\underline{p}^*) = \int_{Y \setminus F} \tilde{j}_1^*(\underline{p}^*(y), \underline{E}, \underline{\chi}) dy,$$

gdzie

$$(6.134) \quad \tilde{j}_1^*(\underline{p}^*, \underline{E}, \underline{\chi}) = \sup \{ \underline{p}^* : \underline{p} - j_1(\underline{E}, \underline{p} + \underline{\chi}) \mid \underline{p} \in E_S^2 \} = \\ = \frac{3}{2b} B_{\alpha\beta\lambda\mu} p_{\alpha\beta}^* p_{\lambda\mu}^* - \frac{3}{2b} p_{\alpha\beta}^* E_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} - \frac{3b}{8} C_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\alpha\beta} E_{\lambda\mu}.$$

Operator sprzężony  $\mathcal{L}^*$  ma postać (4.32), a więc

$$(6.135) \quad \mathcal{F}^*(-\mathcal{L}^* \underline{p}^*) = \sup \{ \langle -\mathcal{L}^* \underline{p}^*, \underline{v} \rangle - \mathcal{F}(\underline{v}) \mid \underline{v} \in H_{\text{per}}(Y \setminus F, R^2) \} = \\ = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{p}^* \in S_{\text{per}}^C, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$(6.136) \quad S_{\text{per}}^C = \{ \underline{p}^* \in L^2(\Upsilon \setminus F, E_S^2) \mid \text{div}_Y \underline{p}^* = 0, \text{ w } \Upsilon \setminus F;$$

$p_T^* = 0, p_N^* \leq 0, \text{ na } F; \underline{p}^* \cdot \underline{\nu}$  przyjmuje przeciwne wartości na przeciwległych bokach komórki  $Y$  }.

Uwzględniając (6.133) i (6.135) otrzymujemy szukaną postać zadania dualnego do  $P(\underline{E}, \underline{\chi})$

$$(P^*(\underline{E}, \underline{\chi})) = -\inf \left\{ \int_{\Upsilon \setminus F} \tilde{J}_1^*(\underline{p}^*(y), \underline{E}, \underline{\chi}) dy \mid \underline{p}^* \in S_{\text{per}}^C \right\}.$$

Ponadto mamy

$$(6.137) \quad \inf P(\underline{E}, \underline{\chi}) = - \inf P^*(\underline{E}, \underline{\chi}).$$

Uwzględniając (6.138) w (6.132) dostajemy

$$(6.138) \quad (j_0 + w_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) = \sup_{\underline{E}, \underline{\theta}, \underline{\chi} \in E_S^2} \left\{ \underline{N} : \underline{E} + \underline{M} : \underline{\theta} + \right. \\ \left. + \underline{L} : \underline{\chi} - j_0(\underline{E}, \underline{\theta}) + \frac{3b}{8} C_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\alpha\beta} E_{\lambda\mu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{|Y|} \inf_{\underline{p}^* \in S_{\text{per}}^C} \int_{\Upsilon \setminus F} \left[ \frac{3}{2b^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} p_{\alpha\beta}^* p_{\lambda\mu}^* - \frac{3}{2b} p_{\alpha\beta}^* : \underline{E} - p_{\alpha\beta}^* : \underline{\chi} \right] dy. \right.$$

Położmy

$$(6.139) \quad j_3(\underline{p}^*, \underline{E}) = \frac{3}{2b^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} p_{\alpha\beta}^* p_{\lambda\mu}^* - \frac{3}{2b} p_{\alpha\beta}^* E_{\alpha\beta}.$$

Obliczając w (6.138) supremum względem  $\underline{\theta}$  i uwzględniając (6.139) otrzymujemy

$$(6.140) \quad (j_0 + w_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) = \frac{3}{2a^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} + \\ + \sup_{\underline{E}, \underline{\chi} \in E_S^2} \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_{\Upsilon \setminus F} (\underline{N} : \underline{E} - \frac{b}{8} C_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\alpha\beta} E_{\lambda\mu} + \frac{3}{2a} \underline{M} : \underline{E}) dy \right. \\ \left. + \inf_{\underline{p}^* \in S_{\text{per}}^C} \left[ \int_{\Upsilon \setminus F} j_3(\underline{p}^*(y), \underline{E}) dy + \int_{\Upsilon \setminus F} (\underline{L} - \underline{p}^*(y)) : \underline{\chi} dy \right] \right\}.$$



Korzystając z własności inf-splotu [87,128] możemy napisać

$$\begin{aligned}
 (6.141) \quad & \inf_{\underline{p}^* \in S_{\text{per}}^C} \left[ \int_{Y \setminus F} j_3(\underline{p}^*(y), \underline{E}) dy + \int_{Y \setminus F} (\underline{L} - \underline{p}^*(y)) : \underline{\chi} dy \right] = \\
 & = \inf_{Y \setminus F} \left[ \int j_3(\underline{p}^*(y), \underline{E}) dy + I_{S_{\text{per}}^C}(\underline{p}^*) + \right. \\
 & \left. + \int_{Y \setminus F} (\underline{L} - \underline{p}^*(y)) : \underline{\chi} dy \mid \underline{p}^* \in L^2(Y \setminus F, E_S^2) \right] = \\
 & = \inf_{Y \setminus F} \left[ \int j_3(\underline{L} - \underline{p}^*(y), \underline{E}) dy + I_{S_{\text{per}}^C}(\underline{L} - \underline{p}^*) + \right. \\
 & \left. + \int_{Y \setminus F} \underline{p}^*(y) : \underline{\chi} dy \mid \underline{p}^* \in L^2(Y \setminus F, E_S^2) \right].
 \end{aligned}$$

Uwzględniając (6.141) w (6.140) wnioskujemy, że supremum względem  $\underline{\chi}$  jest skończone jeśli

$$(6.142) \quad \int_{Y \setminus F} \underline{p}^*(y) dy = 0.$$

Oznacza to, że interesują nas tylko te pola lokalne  $\underline{p}^* \in L^*(Y \setminus F, E_S^2)$ , dla których

$$\underline{p}^* \in (\underline{L} - S_{\text{per}}^C) \cap \{ \underline{q}^* \in L^2(Y \setminus F, E_S^2) \mid \int_{Y \setminus F} \underline{q}^*(y) dy = 0 \} = (\underline{L} - S_{\text{per}}^C) \cap (E_S^2)^\perp,$$

por. (3.49).

Położymy

$$(6.143) \quad S_{\text{per}}^0(\underline{L}) = (\underline{L} - S_{\text{per}}^C) \cap (E_S^2)^\perp.$$

Tym samym możemy napisać

$$\begin{aligned}
 (j_0 + W_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) & = \frac{3}{2a^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} + \\
 + \sup_{\underline{E} \in E_S^2} \inf_{\underline{q} \in S_{\text{per}}^0(\underline{L})} & \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} [ \underline{N} : \underline{E} - \frac{h}{8} C_{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\alpha\beta} E_{\lambda\mu} + \right. \\
 + \frac{3}{2a} \underline{M} : \underline{E} - \frac{3}{2b} \underline{L} : \underline{E} & \left. + \frac{3}{2b} B_{\alpha\beta\lambda\mu} (L_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})(L_{\lambda\mu} - q_{\lambda\mu}) ] dy \right\}.
 \end{aligned}$$

Obliczając supremum względem  $\underline{E} \in E_S^2$  ostatecznie otrzymujemy

$$(6.144) \quad (j + w_1)^*(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}) = B_{\alpha\beta\lambda\mu} \left( \frac{2}{h} N_{\alpha\beta} N_{\lambda\mu} + \frac{6}{ah} N_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} - \right. \\ \left. - \frac{6}{bh} N_{\alpha\beta} L_{\lambda\mu} + \frac{3(4a+b)}{2a^3h} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu} - \frac{9}{abh} M_{\alpha\beta} L_{\lambda\mu} + \frac{9}{2b^2h} L_{\alpha\beta} L_{\lambda\mu} \right) + \\ + \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \frac{3}{2b^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} (L_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})(L_{\lambda\mu} - q_{\lambda\mu}) dy \mid q \in S_{per}^0(\underline{L}) \right\},$$

gdzie  $\underline{N}, \underline{M}, \underline{L} \in E_S^2$ .

Pełną postać makroskopowego potencjału  $(w^h)^*$  znajdziemy, korzystając z zależności (6.131), gdzie  $(j_0 + w_1^*)$  obliczamy zgodnie z wzorem (6.145);  $j_2^*$  określa przy tym zależność (6.124). Warto jeszcze zauważyć, że dla wyznaczenia tego potencjału musimy jedynie rozwiązać następujące zadanie lokalne:

dla zadanego  $\underline{L} \in E_S^2$  znaleźć

$$(6.145) \quad \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus F} \frac{3}{2b^3} B_{\alpha\beta\lambda\mu} (L_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}(y))(L_{\lambda\mu} - q_{\lambda\mu}(y)) dy \mid q \in S_{per}^0(\underline{L}) \right\}.$$

Wróćmy do zagadnienia epi-zbieżności ciągu funkcjonałów  $\{ \mathcal{J}_p^\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$ , przedstawiających energię dopełniającą płyty spękaną.

Położmy

$$(6.146) \quad \mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\Psi}, w; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} \{ k[\underline{e}(\underline{r}) + p_1, \underline{g}(\underline{\varphi}) + p_2, \underline{x}(\underline{\Psi}) + p_3] + \\ + j_2[\underline{g}(w, \underline{\varphi}) + p_4, \underline{d}(w, \underline{\Psi}) + p_5] \} dx,$$

gdzie  $\underline{p}_\alpha \in L^2(\Omega, E_S^2)$ ;  $\underline{p}_3 \in L^2(\Omega^\varepsilon, E_S^2)$ ,  $\underline{p}_4 \in L^2(\Omega, R^2)$ ,  $\underline{p}_5 \in L^2(\Omega, R^2)$ .

Korzystając z epi-zbieżności ciągu  $\{ \mathcal{J}_p^\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$  do funkcjonału  $\mathcal{J}^h$  można wykazać, że ciąg  $\{ \mathcal{J}_p^\varepsilon \}_{\varepsilon > 0}$  jest epi-zbieżny w silnej topologii przestrzeni  $[L^2(\Omega, R^2)]^3 \times L^2(\Omega) \times \mathcal{H}$  do funkcjonału

$$(6.147) \quad \mathcal{J}_p^h(\underline{r}, \underline{\varphi}, \underline{\Psi}, w; p_I) =$$

$$= \int_{\Omega} w^h(\underline{e}(\underline{r}) + \underline{p}_1, \underline{g}(\underline{f}) + \underline{p}_2, \underline{h}(\underline{\psi}) + \underline{p}_3, \underline{g}(w, \underline{f}) + \underline{p}_4, \underline{d}(w, \underline{\psi}) + \underline{p}_5) dx,$$

gdzie  $I=1,2,3,4,5$ .

Ścisłe rzecz biorąc, aby wykazać tę epi-zbieżność można skorzystać z podejścia zaproponowanego przez Azé [11] dla niespełnionego ośrodka o strukturze mikroperiodycznej. W naszym przypadku należy skorzystać z faktu, że  $\mathcal{J}^h$  jest epi-granicą ciągu  $\{\mathcal{J}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , a ponadto trzeba dobrać ciągi aproksymujące dla perturbacji  $\underline{p}_I (I=1,2,\dots,5)$ . W tym celu najpierw rozpatruje się przypadek gdy funkcje  $\underline{p}_I$  są stałe na zbiorach  $\Omega_i$ , stanowiących pokrycie obszaru  $\Omega^\varepsilon$ . Dla takich  $\underline{p}_I$  dowodzi się nierówności

$$(6.148) \quad \mathcal{J}^h(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w; \underline{p}_I) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{f}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon; \underline{p}_I),$$

$$(6.149) \quad \mathcal{J}^h(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w; \underline{p}_I) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}^\varepsilon, \underline{f}^\varepsilon, \underline{\psi}^\varepsilon, w^\varepsilon; \underline{p}_I),$$

zgodnie z własnością (iii) epi-granicy (patrz punkt 2.1).

W drugim etapie dowolne elementy  $\underline{p}_I (I=1,2,\dots,5)$  z odpowiednich przestrzeni  $L^2$  aproksymujemy funkcjami schodkowymi i dowodzimy nierówności typu (6.148) i (6.149).

W celu skorzystania z tw.2.4 należy jeszcze sprawdzić warunek koercyjności (2.9). W tym celu położmy

$$(6.150) \quad \mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w; \underline{p}_I) = \mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w, \underline{p}_I) - \mathcal{L}(w).$$

Korzystając z (6.16), (6.27), (6.63) i nierówności Korna (3.26) dla dwuwymiarowego obszaru  $\Omega^\varepsilon$  otrzymujemy

$$\mathcal{J}_p^\varepsilon(\underline{r}, \underline{f}, \underline{\psi}, w; \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) \geq c(\|\underline{r}\|_{1,\Omega}^2 + \|\underline{f}\|_{1,\Omega}^2 + \|\underline{\psi}\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 + \|\underline{w}\|_{1,\Omega}^2 - \|\underline{p}\|_{0,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}),$$

gdzie  $c > 0$  jest stałą.

Założenie (Z) z tw.2.4 jest spełnione w oczywisty sposób dla każdego  $r > 0$ . Tym samym korzystając ze wspomnianego twierdzenia mamy

$$(6.151) \quad \mathcal{J}^h = [w - \mathcal{H}] - \lim_e \mathcal{J}^\varepsilon,$$

gdzie



$$(6.152) \quad \mathcal{G}^h(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}) = \int_{\Omega} (\mathcal{W}^h)^* [\underline{N}(x), \underline{M}(x), \underline{L}(x), \underline{Q}(x), \underline{I}(x)] dx + I_{\mathcal{G}_S}(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L}, \underline{Q}, \underline{I}),$$

$$(6.153) \quad \mathcal{G}_S = \{(\underline{N}, \underline{M}, \underline{L} \in L^2(\Omega, E_S^2); \underline{Q}, \underline{I} \in L^2(\Omega, R^2) \mid N_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \\ -M_{\alpha\beta\gamma\delta} + Q_{\alpha} = 0, -L_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\alpha} = 0, (Q_{\alpha} + T_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + p = 0, \text{ w } \Omega\},$$

zaś w- $\mathcal{H}$  oznacza słabą topologię przestrzeni  $\mathcal{H}$ , por.(6.129).

### 6.6. Przykład

Przed przystąpieniem do analizy konkretnego przykładu podamy silne sformułowanie zadania lokalnego (6.45). Ponieważ procedura lokalizacji jest podobna do tej jaką zastosowano w pracy [95], dlatego też tutaj ograniczymy się do podania końcowych zależności.

Oznaczmy przez  $\underline{l} = (l_{\alpha\beta})$  momenty lokalne w warstwie dolnej

$$(6.154) \quad l_{\alpha\beta} = \frac{b^3}{3} C_{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_{\gamma\lambda\mu}(\tilde{v}) + l_{\alpha\beta}^0,$$

gdzie

$$(6.155) \quad l_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\beta\lambda\mu} \left( \frac{b^2}{2} E_{\lambda\mu} + \frac{b^3}{3} \chi_{\lambda\mu} \right).$$

Silne sformułowanie zadania lokalnego brzmi:

znaleźć  $\tilde{v} = (\tilde{v}_{\alpha})$ ,  $\tilde{v}_{\alpha} \in C^2(Y \setminus F)$  takie, że spełnione są:

(i) lokalne równania równowagi

$$C_{\alpha\beta\lambda\mu} \frac{\partial^2 \tilde{v}_{\alpha}}{\partial y_{\lambda} \partial y_{\beta}} = 0, \quad \text{w } Y \setminus F.$$

(ii) Warunki periodyczności:

$\tilde{v}$  przyjmuje jednakowe wartości na przeciwległych bokach komórki  $Y$ .

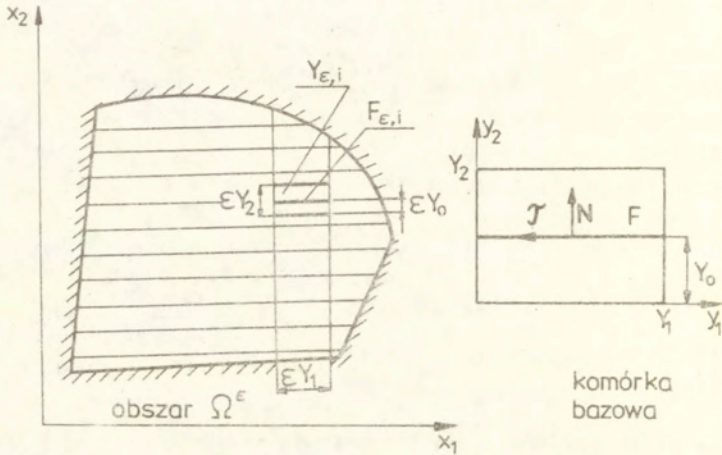
$l_{\alpha\beta\gamma\delta}$  przyjmuje przeciwne wartości na przeciwległych bokach komórki  $Y$ , przy czym  $\underline{y} = (y_{\alpha})$  jest wektorem jednostkowym normalnym do  $\partial Y$  i skierowanym na zewnątrz  $Y$ .

(iii) Warunki typu Signoriniego na  $F$ :

$$\llbracket \tilde{v}_N \rrbracket \geq 0, \quad \tilde{l}_T = l_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha} T_{\beta} = 0, \quad l_N = \hat{l}_N = \hat{l}_N \leq 0, \quad l_N \llbracket \tilde{v}_N \rrbracket = 0,$$

gdzie  $\vec{\ell}_N = \ell_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta$  ( $\alpha = 1, 2$ ), a  $\vec{I} = (I_\alpha)$  jest wektorem stycznym do  $F$ .

Przejdźmy do konkretnego przykładu. Wyznamy jednostkową energię sprężystą  $W^h$  dla płyty z jednorodnego materiału izotropowego osłabionej w warstwie dolnej równoległymi szczelinami, których rzuty na płaszczyznę odniesienia  $\Omega$  są równoległymi liniami prostymi, por. rys.12.



Rys.12. Płyta osłabiona równoległymi szczelinami

Komórka bazowa  $Y$  ma postać:  $Y = (0, Y_1) \times (0, Y_2)$  przy czym  $Y_1$  dobieramy w sposób dowolny. Z rys.12 wnioskujemy, że założenie  $F \cap \partial Y = \emptyset$  nie jest w tym przypadku spełnione. Jednakże nie przeszkadza to w zastosowaniu rezultatów dotyczących potencjału makroskopowego  $W^h$ . W tym konkretnym przykładzie, przy poczynionych założeniach, należy znaleźć funkcje  $\tilde{v}_\alpha \in C^2(Y \setminus F)$  takie, że

$$(a) \quad \delta_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\alpha}{\partial y_\beta \partial y_\gamma} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\beta}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0, \quad \text{w } Y \setminus F,$$

gdzie  $\nu$  oznacza współczynnik Poissona dla materiału płyty.

$$(b) \quad \tilde{v}_\alpha(y_1, 0) = \tilde{v}_\alpha(y_1, Y_2), \quad y_1 \in [0, Y_1],$$

$$\tilde{v}_\alpha(0, y_2) = \tilde{v}_\alpha(Y_1, y_2), \quad y_2 \in [0, Y_0] \cup (Y_0, Y_2].$$

$$(c) \quad l_{11}(0, y_2) = l_{11}(Y_1, y_2), \quad l_{22}(y_1, 0) = l_{22}(y_1, Y_2),$$

$$l_{12}(y_1, 0) = l_{12}(y_1, Y_2), \quad l_{21}(0, y_2) = l_{21}(Y_1, y_2),$$

$$\text{dla } y_1 \in [0, Y_1], \quad y_2 \in [0, Y_0] \cup (Y_0, Y_2].$$

$$(d) \quad \llbracket \tilde{v}_2 \rrbracket \geq 0, \quad l_N \leq 0, \quad l_N \llbracket \tilde{v}_2 \rrbracket = 0, \quad \text{na } F.$$

$$l_N = l_{22}(y_1, Y_0 - 0) = l_{22}(y_1, Y_0 + 0).$$

Szczelina F leży na linii  $y_2 = Y_0$ . Zauważmy, że wielkość  $Y_0 \in (0, Y_2)$  jest dobrana w sposób dowolny, gdyż - jak zobaczymy -  $Y_0$  nie ma wpływu na końcowe rezultaty.

Tensor modułów sprężystych ( $C_{\alpha\beta\lambda\mu}$ ) ma postać

$$(6.156) \quad C_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} + \frac{1-\nu}{2} (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda})],$$

przy czym E oznacza moduł Younga.

Momenty lokalne obliczone z wzoru (6.154) wyrażają się następująco

$$(6.157) \quad l_{\alpha\beta} = G[(1-\nu)\mathcal{H}_{y\alpha\beta}(\tilde{v}) + \nu\delta_{\alpha\beta}\mathcal{H}_{y\lambda\lambda}(\tilde{v})] + l_{\alpha\beta}^0,$$

gdzie

$$(6.158) \quad l_{\alpha\beta}^0 = G[(1-\nu)(\chi_{\alpha\beta} + \frac{1}{R} E_{\alpha\beta}) + \nu\delta_{\alpha\beta}(\chi_{\lambda\lambda} + \frac{1}{R} E_{\lambda\lambda})],$$

$$\text{gdzie } R = \frac{2}{3} b, \quad G = \frac{b^3}{3(1-\nu^2)}$$

Rozwiązując zadanie (a) - (e), jak podobne zadanie dla spękanej płyty typu Reissnera [96], wnioskujemy, że funkcje  $\tilde{v}_\alpha$  nie zależą od zmiennej  $y_1$  i są funkcjami odcinkowo-liniowymi z nieciągłością dla  $y_2 = Y_0$ . Mikroodkształcenia związane z polem  $\tilde{v}$  mają postać



$$\chi_{y_{12}}(\underline{v}) = \langle \chi_{y_{12}}(\underline{v}) \rangle = -(\chi_{12} + \frac{1}{R} E_{12}), \text{ dla dowolnego } \eta,$$

$$\chi_{y_{44}}(v) = 0,$$

(6.159)

$$\chi_{y_{22}}(\underline{v}) = \langle \chi_{y_{22}}(\underline{v}) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \eta \leq 0 \text{ (szczelina jest zamknięta),} \\ -\eta(E, \underline{x}), & \text{jeśli } \eta > 0 \text{ (szczelina jest otwarta),} \end{cases}$$

gdzie

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_2} \int_0^{Y_2} f \, dy_2,$$

$$\eta(E, \underline{x}) = (\chi_{22} + \nu \chi_{11}) + \frac{1}{R} (E_{22} + \nu E_{11}) = \frac{E_2}{G}.$$

Podstawiając (6.159) do wzoru (6.52) otrzymujemy jawną postać gęstości makroskopowej energii sprężystej:

$$(6.160) \quad W^h(\underline{e}^h, \underline{g}^h, \underline{x}^h, \underline{g}^h, \underline{d}^h) = \begin{cases} W_1^h(\underline{e}^h, \underline{g}^h, \underline{x}^h, \underline{g}^h, \underline{d}^h), & \text{jeśli} \\ \eta(\underline{e}^h, \underline{x}^h) \leq 0; \\ W_2^h(\underline{e}^h, \underline{g}^h, \underline{x}^h, \underline{g}^h, \underline{d}^h), & \text{jeśli} \\ \eta(\underline{e}^h, \underline{x}^h) > 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(6.161) \quad 2W_1^h = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ h [(e_{11}^h)^2 + 2\nu e_{11}^h e_{22}^h + (e_{22}^h)^2 + (1-\nu)(h-\frac{3}{4}b)(e_{12}^h)^2 + (e_{21}^h)^2] + \right. \\ \left. + \frac{a^3}{3} [(\rho_{11}^h)^2 + 2\nu \rho_{11}^h \rho_{22}^h + (\rho_{22}^h)^2 + (1-\nu)(\rho_{12}^h)^2 + (\rho_{21}^h)^2] + \right. \\ \left. + \frac{b^3}{3} [(\chi_{11}^h)^2 + 2\nu \chi_{11}^h \chi_{22}^h + (\chi_{22}^h)^2] + \right. \\ \left. + b^2 [e_{11}^h \chi_{11}^h + e_{22}^h \chi_{22}^h + \nu(e_{11}^h \chi_{22}^h + e_{22}^h \chi_{11}^h)] - \right. \\ \left. - a^2 [e_{11}^h \rho_{11}^h + e_{22}^h \rho_{22}^h + \nu(e_{11}^h \rho_{22}^h + e_{22}^h \rho_{11}^h)] + (1-\nu)(e_{12}^h \rho_{12}^h + e_{21}^h \rho_{21}^h) \right\} + \\ \left. + \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ a[(g_1^h)^2 + (g_2^h)^2] + b[(d_1^h)^2 + (d_2^h)^2] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (6.162) \quad 2W_2^h = & \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left[ \left( h - \frac{3}{4} \nu^2 b \right) (e_{11}^h)^2 + \left( h - \frac{3}{4} b \right) (e_{22}^h)^2 + \right. \right. \\
 & + 2 \nu \left( h - \frac{3}{4} b \right) e_{11}^h e_{22}^h + (1-\nu) \left( h - \frac{3}{4} b \right) h (e_{12}^h)^2 + (e_{21}^h)^2 \left. \right] + \\
 & + \frac{a^3}{3} \left[ (\varrho_{11}^h)^2 + 2\nu \varrho_{11}^h \varrho_{22}^h + (\varrho_{22}^h)^2 + (1-\nu) ((\varrho_{12}^h)^2 + (\varrho_{21}^h)^2) \right] + \\
 & + \frac{b^3}{3} (1-\nu^2) (\alpha e_{11}^h)^2 + b^2 (1-\nu^2) e_{11}^h \alpha e_{11}^h - \\
 & - a^2 [e_{11}^h \varrho_{11}^h + e_{22}^h \varrho_{22}^h + \nu (e_{11}^h \varrho_{22}^h + e_{22}^h \varrho_{11}^h)] + (1-\nu) (e_{12}^h \varrho_{12}^h + e_{21}^h \varrho_{21}^h) \left. \right\} + \\
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ a [(\varrho_1^h)^2 + (\varrho_2^h)^2] + b [(d_1^h)^2 + (d_2^h)^2] \right\}.
 \end{aligned}$$

Mając potencjał makroskopowy można wyznaczyć związki konstytutywne:

$$N_{11}^h = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ h(e_{11}^h + \nu e_{22}^h) - \frac{a^2}{2} (\varrho_{11}^h + \nu \varrho_{22}^h) + \frac{b^2}{2} (\alpha e_{11}^h + \nu \alpha e_{22}^h) \right], \\ \text{jeśli } \eta(e^h, \alpha e^h) \leq 0; \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left( h - \frac{3}{4} \nu^2 b \right) e_{11}^h + \left( h - \frac{3}{4} b \right) e_{12}^h - \frac{a^2}{2} (\varrho_{11}^h + \nu \varrho_{22}^h) + \right. \\ \left. - \frac{b^2}{2} (1-\nu^2) \alpha e_{11}^h \right], \text{ jeśli } \eta(e^h, \alpha e^h) > 0, \end{cases}$$

$$N_{22}^h = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ h(e_{22}^h + \nu e_{11}^h) - \frac{a^2}{2} (\varrho_{22}^h + \nu \varrho_{11}^h) + \frac{b^2}{2} (\alpha e_{22}^h + \nu \alpha e_{11}^h) \right], \\ \text{jeśli } \eta(e^h, \alpha e^h) \leq 0; \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left( h - \frac{3}{4} b \right) (e_{22}^h + \nu e_{11}^h) - \frac{a^2}{2} (\varrho_{22}^h + \nu \varrho_{11}^h) \right], \text{ jeśli } \eta(e^h, \alpha e^h) > 0, \end{cases}$$

$$M_{12}^h = \frac{E}{1+\nu} \left[ \left( h - \frac{3}{4} b \right) e_{12}^h - \frac{a^2}{2} \varrho_{12}^h \right],$$

$$M_{11}^h = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ -\frac{a^2}{2} (e_{11}^h + \nu e_{22}^h) + \frac{a^3}{3} (\varrho_{11}^h + \nu \varrho_{22}^h) \right],$$

$$M_{22}^h = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ -\frac{a^2}{2} (e_{22}^h + \nu e_{11}^h) + \frac{a^3}{3} (g_{22}^h + \nu g_{11}^h) \right],$$

$$M_{12}^h = M_{21}^h = \frac{E}{1+\nu} \left( -\frac{a^2}{2} e_{12}^h + \frac{a^3}{3} g_{12}^h \right),$$

$$L_{11}^h = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{b^2}{2} (e_{11}^h + \nu e_{22}^h) + \frac{b^3}{3} (\varkappa_{11}^h + \nu \varkappa_{22}^h) \right], & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) \leq 0, \\ E \left( \frac{b^2}{2} e_{11}^h + \frac{b^3}{3} \varkappa_{11}^h \right), & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) > 0, \end{cases}$$

$$L_{22}^h = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{b^2}{2} (e_{22}^h + \nu e_{11}^h) + \frac{b^3}{3} (\varkappa_{22}^h + \nu \varkappa_{11}^h) \right], & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) \leq 0, \\ 0, & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) > 0, \end{cases}$$

$$L_{12}^h = L_{21}^h = 0,$$

$$Q_{\alpha}^h = \frac{aE}{2(1+\nu)} g_{\alpha}^h, \quad T_{\alpha}^h = \frac{bE}{2(1+\nu)} d_{\alpha}^h.$$

Zauważmy, że potencjał  $W^h$  nie jest w tym przypadku ściśle wypukły gdyż  $\det[\partial^2 W_2^h / \partial \varkappa_{\alpha\beta}^h \partial \varkappa_{\gamma\mu}^h] = 0$ . Można go zapisać w następującej postaci

$$(6.163) \quad W^h(e^h, g^h, \varkappa^h, g^h, d^h) = \begin{cases} W_1^h(e^h, g^h, \varkappa^h, g^h, d^h), & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) \leq 0; \\ W_1^h(e^h, g^h, \varkappa^h, g^h, d^h) - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{b^3}{3} [\eta(e^h, \varkappa^h)]^2, & \text{jeśli } \eta(e^h, \varkappa^h) > 0. \end{cases}$$

Wnioskujemy stąd, że  $W_2^h \leq W_1^h$ ; równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy  $\eta(e^h, \varkappa^h) = 0$ .

Oznacza to, że makroskopowy potencjał sprężysty maleje, gdy szczelina jest otwarta. Ponadto mamy  $W_{\alpha}^h \geq 0$  ( $\alpha = 1, 2$ ), czyli i  $W^h \geq 0$ . Potencjał  $W^h$  jest wypukły i różniczkowalny, ale nie jest ściśle wypukły. Wnioskujemy stąd, że pogwałcenie warunku  $F \cap \partial Y = \emptyset$  spowodowało utratę silnej wypukłości makroskopowego potencjału sprężystego  $W^h$ .



### Uwagi

1. W rozpatrywanym modelu płyty spękannej przyjęliśmy, że głębokość  $b$  szczelin  $F^\varepsilon$  jest stała. Ma to uzasadnienie dla, na przykład, płyty dwuwarstwowej zbudowanej z warstw o różnych materiałach. Chociaż my przyjęliśmy, dla uproszczenia przedstawienia podstawowych idei, że płyta wykonana jest z materiału jednorodnego, to otrzymane rezultaty łatwo uogólnić na przypadek płyty rzeczywiście dwuwarstwowej. Wówczas

$$C_{\alpha\beta\lambda\mu} = \begin{cases} C_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(1)} & , \text{ w warstwie górnej;} \\ C_{\alpha\beta\lambda\mu}^{(2)} & , \text{ w warstwie dolnej,} \end{cases}$$

i podobnie dla  $H_{\alpha\beta}$ . Nadal mamy  $C_{\alpha\beta\lambda\mu} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $H_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ , co pozwala stosować podejście wariacyjne takie jak dla płyty z materiału jednorodnego.

Jeśli głębokość szczelin jest zmienna, ale okresowa to otrzymuje się tak skomplikowane wzory, że ich praktyczna przydatność jest wątpliwa.

Zaproponowane podejście można stosować nie tylko do płyt ale i do tarcz, niekoniecznie dwuwarstwowych. Garrett i Bailey [67] podali wyniki badań doświadczalnych laminatu trójwarstwowego. Uderzający jest periodyczny rozkład szczelin w warstwie środkowej, która uległa spękaniu. Konstruując model tarczy trójwarstwowej, której warstwa środkowa jest osłabiona periodycznie rozłożonymi szczelinami, można zastosować podobne podejście do zbudowania modelu efektywnego jak dla płyty dwuwarstwowej.

2. W rozpatrzonym zagadnieniu homogenizacji płyty częściowo spękannej pominęliśmy tarcie. Tarcie można uwzględnić podobnie jak dla ośrodka trójwymiarowego, zastępując warunek  $L_t = 0$  odpowiednim, powiedzmy subbróżniczkowym prawem tarcia.

## 7. HOMOGENIZACJA PŁYT IDEALNIE PLASTYCZNYCH

Homogenizacja płyt sprężystych została zapoczątkowana pracą [55], a więc już na samym początku zastosowań metod teorii homogenizacji do zagadnień mechaniki ciała stałego, por. [51, 103, 104]. Możliwość zastosowania tych wyników do optymalizacji płyt przedyskutował Bendsøe [15].

Jak się wydaje pierwszą publikacją z zakresu homogenizacji płyt plastycznych była praca [155], w której sformułowano podstawowe twierdzenia, ale jedynie dla przypadku gdy brzeg płyty nie jest obciążony momentami zginającymi.

W niniejszym podrozdziale podamy wszystkie istotne rezultaty zawarte w obszernej pracy [159], a dotyczące homogenizacji płyt idealnie plastycznych przy przyjęciu hipotezy kinematycznej Kirchhoffa-Love'a. Rozpatrzony zostanie również przypadek, gdy na części brzegu płyta jest obciążona momentami zginającymi. Przypadek ten jest najtrudniejszy do analizy, a zarazem bardzo ciekawy gdyż prowadzi do tzw. homogenizacji brzegowej. Oprócz bowiem homogenizacji w samym obszarze płyty mamy dodatkowo homogenizację na części brzegu obciążonej momentami zginającymi. Wydaje się, że tego rodzaju wynik trudno byłoby uzyskać bez zastosowania matematycznie ścisłej metody  $\Gamma$ -zbieżności (epi-zbieżności) i pewnych rezultatów Bouchitté [22] z zakresu analizy wypukłej. Przedmiotem naszych zainteresowań będzie homogenizacja płyt sprężysto-idealnie plastycznych z materiału Hencky-Nadai-Iliuszyna (deformacyjna teoria plastyczności) oraz nośność graniczna płyt periodycznie niejednorodnych.

Wcześniejsze rezultaty dotyczące homogenizacji ośrodków plastycznych są omówione w pracach [133, 142, 155].

Potencjał sprężysto-plastyczny jak i gęstość dysypacji są funkcjami o wzroście liniowym (subliniowymi), i to zarówno dla ośrodków jak i płyt. Właśnie w tym tkwią matematyczne trudności analizy układów idealnie plastycznych, w tym i homogenizacji.

### 7.1. Przestrzeń $HB(\Omega)$ . Wypukłe funkcje i funkcjonały miary

Zanim przejdziemy do homogenizacji płyt idealnie plastycznych celowym wydaje się wprowadzenie pewnej liczby stosunkowo nowych pojęć matematycznych, istotnych w naszych dalszych rozważaniach, a nie stosowanych we wcześniejszych partiach pracy.

Ponieważ w niniejszym podrozdziale interesować nas będą wyłącznie płyty, więc obszar  $\Omega$  już do końca będzie (ograniczonym) obszarem płaskim, czyli  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Przypomnijmy jeszcze, że  $E_S^2$  oznacza przestrzeń symetrycznych macierzy  $2 \times 2$ .

Oznaczmy przez  $M^1(\Omega, E_S^2)$  przestrzeń miar ograniczonych na  $\Omega$  o wartościach w  $E_S^2$  [162]. Konieczność wprowadzenia takiej przestrzeni wynika stąd, że dla płyty sprężysto idealnie plastycznej gradient ugięcia może być funkcją nieciągłą, co oznacza, że składowe tensora zmian krzywizny nie są już funkcjami, lecz funkcjami uogólnionymi - w tym przypadku miarami. Podobnie mamy w przypadku nośności granicznej płyt, gdzie operujemy polem prędkości ugięć, por. [148].

Niech  $C_0(\Omega, E_S^2)$  będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych na  $\Omega$ , o wartościach w  $E_S^2$  i zerujących się na  $\Gamma = \partial\Omega$ . Trójka  $(M^1(\Omega, E_S^2), C_0(\Omega, E_S^2), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  tworzy parę dualną [2].

Chcąc uwzględnić wspomniane nieciągłości gradientów pól przemieszczeń (lub prędkości przemieszczeń) wprowadzamy przestrzeń  $HB(\Omega)$ , bardziej szczegółowo omówioną w pracach [47, 48, 49, 50, 162].

$$(7.1) \quad HB(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \mid \mathfrak{E}(u) \in M^1(\Omega, E_S^2)\},$$

gdzie  $\mathfrak{E}(u) = (u, \alpha) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) = \nabla \nabla u = D^2 u$  (w sensie dystrybucji). Przez  $(x_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) oznaczyliśmy kartezjański układ współrzędnych, zaś  $W^{1,1}(\Omega)$  jest przestrzenią Sobolewa, którą definiujemy następująco

$$(7.2) \quad W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid u, \alpha \in L^1(\Omega)\}.$$

Będziemy również korzystać z następującej przestrzeni Sobolewa

$$(7.3) \quad W^{2,1}(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \mid \mathfrak{E}_{\alpha\beta}(u) \in L^1(\Omega)\}.$$

Wszystkie te trzy przestrzenie są nierefleksywnymi (niestety!)



przestrzeniami Banacha.

W przestrzeni  $HB(\Omega)$  wprowadzamy naturalną normę

$$(7.4) \quad \|u\|_{HB(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} + \|\underline{z}(u)\|_{M^1(\Omega, E_S^2)},$$

gdzie

$$(7.5) \quad \|\underline{z}(u)\|_{M^1(\Omega, E_S^2)} = \sup \{ \langle \underline{z}(u), \underline{\psi} \rangle \mid \underline{\psi} \in C_0^\infty(\Omega, E_S^2), |\underline{\psi}(x)| \leq 1 \},$$

przy czym  $|\cdot|$  oznacza tutaj normę euklidesową.

Oznaczmy przez  $\Pi_1(\Omega)$  przestrzeń dystrybucji o znikających drugich pochodnych. Wówczas (7.5) określa normę na przestrzeni ilorazowej  $HB(\Omega)/\Pi_1(\Omega)$ , równoważną normie indukowanej przez normę przestrzeni  $HB(\Omega)$ , przy założeniu, że obszar  $\Omega$  posiada własność stożka [47].

Demengel [47] wykazała, że zanurzenie

$$(7.6) \quad HB(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$$

jest zwarte.

Jak już powiedzieliśmy, składowe tensora zmian krzywizny (lub prędkości zmian krzywizny) są zazwyczaj miarami ograniczonymi, a nie funkcjami w zwykłym sensie. Oznacza to, że trzeba nadać sens pojęciom takim jak, np. całkowita dysypacja, gęstość dysypacji plastycznej, etc., a więc wielkościom fizycznym, które zależą od tych miar. Do tego celu użyteczne są funkcje i funkcjonały miary, które teraz krótko omówimy.

(H<sub>1</sub>) Niech  $f: (x, \underline{g}) \in \Omega \times E_S^2 \rightarrow R \cup \{+\infty\}$  będzie normalną wypukłą funkcją podcałkową, tzn.  $f$  jest wypukła i dolnie półciągła względem  $\underline{g}$  i mierzalna względem  $(x, \underline{g})$  [56].

Jeśli  $\underline{\mu} \in M^1(\Omega, E_S^2)$  to przez  $\underline{\mu} \ll dx$  rozumiemy, że  $\underline{\mu}$  jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a  $dx = dx_1 dx_2$  oraz  $\underline{\mu} = h(x) dx$ . Połóżmy

$$(7.7) \quad \tilde{F}(\underline{\mu}) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(x, \underline{h}(x)) dx, & \text{jeśli } \underline{\mu} \ll dx \text{ i } \underline{h} \in L^1(\Omega, E_S^2), \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Czynimy dalsze założenia:

$$(H_2) \quad \left| \begin{array}{l} \exists \varphi_0 \in C_0(\Omega, E_S^2), \quad \exists b \in L^1(\Omega) \text{ takie, że} \\ f(x, \underline{e}) \geq \varphi_{0\alpha\beta}(x) e_{\alpha\beta} - b(x), \quad \forall (x, \underline{e}) \in \Omega \times E_S^2, \end{array} \right.$$

$$(H_3) \quad \exists \underline{v}_0 \in L^1(\Omega, E_S^2) \mid \int_{\Omega} f(x, \underline{v}_0(x)) dx < +\infty.$$

Bouchitté [22] wykazał, że przy założeniach  $(H_1) - (H_3)$  dolnie półciągłą regularyzację funkcjonału  $\tilde{F}$  na  $M^1(\Omega, E_S^2)$ , w słabej topologii  $\mathcal{C}[M^1(\Omega, E_S^2), C_0(\Omega, E_S^2)]$ , przedstawia następujący funkcjonał

$$(7.8) \quad F(\underline{\mu}) = \sup \left\{ \langle \underline{\mu}, \underline{\varphi} \rangle - \int_{\Omega} f^*(x, \underline{\varphi}(x)) dx \mid \underline{\varphi} \in C_0(\Omega, E_S^2) \right\},$$

przy czym  $\underline{\mu} \in M^1(\Omega, E_S^2)$ ; por. również [24]. Tutaj  $f^*$  oznacza funkcję sprzężoną z  $f(x, \cdot)$ , czyli

$$(7.9) \quad f^*(x, \underline{e}^*) = \sup \{ e_{\alpha\beta}^* e_{\alpha\beta} - f(x, \underline{e}) \mid \underline{e} \in E_S^2 \}, \quad \underline{e}^* \in E_S^2.$$

Funkcjonał  $F(\underline{\mu})$ , oznaczany również symbolem

$$\int_{\Omega} f(x, \underline{\mu}),$$

jest wypukłym funkcjonałem miary  $\underline{\mu} \in M^1(\Omega, E_S^2)$ , a funkcja  $f(x, \underline{\mu})$  funkcją tej miary, która również jest miarą. Podejście Bouchitté jest propozycją alternatywną do tego co pierwotnie zaproponowali Demengel i Temam [50], por. również [152]. W rozdziale siódmym swojej habilitacji Hadhri [72] uściślił rezultaty przedstawione w pracach [50, 162].

Następujący lemat będzie odgrywał istotną rolę w homogenizacji płyt idealnie plastycznych [46, 47, 162].

Lemat 7.1. Niech  $f$  będzie funkcją wypukłą na  $E_S^2$  taką, że

$$(7.10) \quad \exists \lambda_0 \gg \lambda_0 > 0, \quad \exists k_0 > 0, \quad \lambda_0 |\underline{e}| - k_0 \leq f(\underline{e}) \leq \lambda_0 (1 + |\underline{e}|), \quad \forall \underline{e} \in E_S^2.$$

Niech  $F$  będzie funkcjonałem na  $W^{1,1}(\Omega)$  określonym następująco

$$(7.11) \quad F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(\underline{e}(u)), & \text{jeśli } u \in HB(\Omega), \\ +\infty, & \text{jeśli } u \in W^{1,1}(\Omega) \setminus HB(\Omega). \end{cases}$$

Wówczas

(i)  $F$  jest dolnie półciągłą regularyzacją w silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  funkcjonału

$$(7.12) \quad F(u) = \begin{cases} F(u), & \text{jeśli } u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega), \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Funkcjonał  $F$  jest wypukły i ciągły na  $HB(\Omega)$ .

(ii) Dla każdego  $u \in HB(\Omega)$  istnieje ciąg

$$\{u_n\}_{n=0}^\infty \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega) \text{ taki, że}$$

$$y_0^*(u_n) = y_0^*(u), \quad y_1^*(u_n) = y_1^*(u), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W^{1,1}(\Omega)} u, \quad \int_{\Omega} |y^*(u_n)| \rightarrow \int_{\Omega} |y^*(u)|, \quad F(u_n) \rightarrow F(u),$$

gdzie  $y_0^*$  i  $y_1^*$  są operatorami śladów;

$$y_0^*(u) \in y_0^*(W^{2,1}(\Omega)), \quad y_1^*(u) \in L^1(\Gamma), \quad \Gamma = \partial\Omega.$$

W powyższym lemacie  $\mathbb{N}$  oznacza oczywiście zbiór liczb naturalnych.

Zauważmy, że funkcjonał  $F(u)$  w (7.11) należy rozumieć w sensie wypukłego funkcjonału miary gdy  $u \in HB(\Omega) \setminus W^{2,1}(\Omega)$ .

Przez  $|\underline{\mu}|$  oznaczyliśmy wahanie bezwzględne miary  $\underline{\mu}$ ; niech  $d\underline{\mu}/d|\underline{\mu}|$  oznacza gęstość miary  $\underline{\mu}$  względem miary  $|\underline{\mu}|$ .

Jeśli  $f$  jest funkcją określoną na  $\Omega \times E_S^2$  to przez  $f_d$  oznaczmy funkcję recesji, zdefiniowaną następująco [128]

$$(7.13) \quad f_d(x, \underline{e}) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \varrho f(x, \frac{\underline{e}}{\varrho}) = \\ = \sup \{ \underline{e}^* : \underline{e} | \underline{e}^* \in \text{dom } f^*(x, \cdot) \},$$

gdzie  $\text{dom } f^*(x, \cdot)$  oznacza dziedzinę efektywną funkcji  $f^*(x, \cdot)$ . Z punktu widzenia interesującej nas analizy płyt idealnie plastycznych funkcja  $f_d$  przedstawiać będzie jednostkową pracę plastyczną dla płyt sprężysto-plastycznych, zaś w przypadku nośności granicznej - gęstość dysypacji.



Położmy

$$(7.14) \quad A = \{ \underline{\varphi} \in C_0(\Omega, E_S^2) \mid \int_{\Omega} f^*(x, \underline{\varphi}(x)) dx < +\infty \},$$

i oznaczymy przez  $h(x, \underline{g})$  funkcję

$$(7.15) \quad h(x, \underline{g}) = \sup \{ \underline{\varphi}(x) : \underline{g} \mid \underline{\varphi} \in A \}.$$

Funkcja ta jest dolnie półciągła, przy czym funkcja  $h(x, \cdot)$  jest wypukła i dodatnio jednorodna. Możemy teraz określić funkcję

$$(7.16) \quad g(x, \cdot) = [f(x, \cdot) \square h(x, \cdot)]^{**}$$

gdzie, przypominamy, symbol  $\square$  oznacza inf-splot.

Rozkład Lebesgue'a miary  $\underline{\mu}$  względem miary  $dx$  ma postać

$$(7.17) \quad \underline{\mu} = \underline{\mu}_a(x) dx + \underline{\mu}_s.$$

$\underline{\mu}_s$  oznacza oczywiście część osobliwą miary  $\underline{\mu}$ . Na przykład, jeśli  $\underline{\mu} = \underline{\mathcal{L}}(v)$  ( $v \in HB(\Omega)$ ) oznacza pole prędkości przemieszczeń to  $\underline{\mu}_s$  przedstawia osobliwą część tensora prędkości zmian krzywizny związanej z liniami nieciągłości.

Po tych niezbędnych określeniach możemy sformułować pożyteczny lemat o całkowitej reprezentacji funkcjonału miary [22], por. również [30].

Lemat 7.2 Przy założeniach  $(H_1) - (H_3)$  funkcjonał  $F$  określony zależnością (7.8) posiada następującą reprezentację całkową

$$(7.18) \quad F(\underline{\mu}) = \int_{\Omega} g(x, \underline{\mu}_a(x)) dx + \int_{\Omega} h(x, \frac{d\underline{\mu}_s}{d|\underline{\mu}_s|}) |\underline{\mu}_s|, \underline{\mu} \in M^1(\Omega, E_S^2),$$

gdzie

$$(7.19) \quad h(x, \cdot) = g_d(x, \cdot).$$

Wnioskujemy stąd, że wzór (7.18) zachodzi w szczególności dla  $u \in HB(\Omega)$ , gdyż wówczas  $\underline{\mu} = \underline{\mathcal{L}}(u) \in M^1(\Omega, E_S^2)$ .

Z punktu widzenia zastosowań szczególnie ważny jest przypadek gdy  $g=f$ . Wówczas mamy następującą reprezentację całkową

$$(7.20) \quad F(\underline{\mu}) = \int_{\Omega} f(x, \underline{\mu}_a(x)) dx + \int_{\Omega} f_d(x, \frac{d\underline{\mu}_s}{d|\underline{\mu}_s|}) |\underline{\mu}_s|,$$

gdzie  $\underline{\mu} \in M^1(\Omega, E_s^2)$ . Reprezentacja całkowa (7.20) zachodzi wtedy gdy [69]

$$(7.21) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-z| < \delta \implies |f(x, \underline{e}) - f(z, \underline{e})| < \varepsilon(1+|\underline{e}|),$$

gdzie  $x, z \in \Omega$ ,  $\underline{e} \in E_s^2$ . Warunek ten oznacza, że funkcja  $f$  jest dodatkowo ciągła względem  $x$ . Przy nieco słabszym warunku reprezentacja (7.20) została udowodniona przez Bouchitté [22]. Zauważmy jeszcze, iż (7.20) zachodzi w oczywisty sposób wtedy gdy funkcja  $f$ -posiadająca poprzednio wymienione własności - nie zależy od  $x \in \Omega$ .

Następujący lemat jest przypadkiem szczególnym lematu 2.3 Bouchitté [21].

Lemat 7.3. Jeśli funkcja  $f: E_s^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła i spełnia warunek (7.10) to

$$\forall \underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2 \in M^1(\Omega, E_s^2), \quad \int_{\Omega} f(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2) \leq \int_{\Omega} f(\underline{\mu}_1) + \int_{\Omega} f_d(\underline{\mu}_2).$$

## 7.2. Analiza sprężysto-plastyczna i nośność graniczna płyt: aspekty matematyczne

W obecnym punkcie podamy te rezultaty otrzymane przez Demengel [46,48], które dotyczą fundamentalnych aspektów płyt sprężysto-idealnie plastycznych z materiału Hencky-Nadaia-Iliuszyna, por. również [162]. Problem istnienia rozwiązań jest ściśle związany z odpowiednimi zadaniami nośności granicznej. Wyniki te są bardzo istotne również i w zagadnieniach homogenizacji. Dlatego też sformułujemy je w odpowiedniej do naszych dalszych rozważań postaci. Nadmienimy jeszcze, że aspekty mechaniczne teorii płyt plastycznych zostały przedstawione w książkach [73, 134] i obszernym opracowaniu [135].

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie powierzchnią środkową płyty. Przez  $\underline{M} = (M_{\alpha\beta})$ ,  $\underline{\gamma} = (\gamma_{\alpha\beta})$ ,  $\underline{D} = (D_{\alpha\beta\gamma\mu})$  oznaczamy, odpowiednio, tensor momentów, tensor krzywizny (lub jego prędkość w przypad-

ku nośności granicznej) i tensor modułów sztywności płyty, niekoniecznie izotropowy. Zakładamy, że  $D_{\alpha\beta\lambda\mu} = D_{\beta\alpha\lambda\mu} = D_{\lambda\mu\alpha\beta}$  oraz

$$(7.22) \quad \exists c > 0, \quad \forall \underline{e} \in E_S^2, \quad D_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} \geq c e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \text{ p.w. } x \in \Omega.$$

Ponadto zakładamy, że  $D_{\alpha\beta\lambda\mu} \in C^\infty(\Omega)$ . Wynika stąd warunek

$$(7.23) \quad \exists c_1 \geq c > 0 \quad \forall \underline{e} \in E_S^2 \quad D_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} \leq c_1 e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}, \text{ p.w. } x \in \Omega.$$

Niech  $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \in E_S^2$  będzie ograniczonym zbiorem wypukłym plastycznie dopuszczalnych momentów takim, że  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ . Na przykład, dla płyty z materiału Hubera-Misesa zbiór  $\mathcal{C}$  ma postać [73]

$$\mathcal{C} = \{ \underline{M} = (M_{\alpha\beta}) \mid M_{11}^2 - M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 3M_{12}^2 - M_0^2 \leq 0 \},$$

gdzie  $M_0$  oznacza moment graniczny.

Położmy

$$(7.24) \quad j^*(\underline{M}) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\lambda\mu} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu}, & \text{jeśli } \underline{M} \in \mathcal{C}, \\ +\infty, & \text{jeśli } \underline{M} \notin \mathcal{C}, \end{cases}$$

gdzie  $A = \underline{D}^{-1}$ . Zauważmy, że zbiór  $\mathcal{C}$  przedstawia równocześnie dziedzinę efektywnej funkcji  $j^*$ , tzn.  $\mathcal{C} = \text{dom } j^*$ . Ponadto mamy

$$(7.25) \quad j(\underline{e}) = (j^*)^*(\underline{e}), \quad \underline{e} \in E_S^2,$$

gdzie

$$(7.26) \quad j(\underline{e}) = \sup \{ \underline{M} : \underline{e} - j^*(\underline{M}) \mid \underline{M} \in E_S^2 \}, \quad \underline{e} \in E_S^2.$$

Funkcja  $j$  jest wypukła, dolnie półciągła i posiada następującą własność [162]

$$(7.27) \quad \exists \Lambda_0 \gg \lambda_0 > 0, \quad \lambda_0(|\underline{e}| - 1) \leq j(\underline{e}) \leq \Lambda_0(1 + |\underline{e}|), \quad \forall \underline{e} \in E_S^2.$$

Ponadto  $j(\underline{0}) = 0$ ,  $j(\underline{e}) \geq 0$ ,  $\forall \underline{e} \in E_S^2$ .

Funkcja recesji  $j_D$  jest obecnie funkcją podpierającą zbioru  $\mathcal{C}$  i ma postać, por.(7.13)

$$(7.28) \quad j_D(\underline{e}) = \sup \{ \underline{M} : \underline{e} \mid \underline{M} \in \mathcal{C} \} = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \varphi j\left(\frac{\underline{e}}{\varphi}\right), \quad \underline{e} \in E_S^2.$$

Funkcja  $j_D$  jest wypukła, dolnie półciągła, dodatnio jednorodna na  $E_S^2$  i spełnia warunek



$$(7.29) \quad \exists \lambda'_0 \gg \lambda'_0 > 0 \quad \lambda'_0 |\underline{e}| \leq j_D(\underline{e}) \leq \lambda'_0 (1 + |\underline{e}|), \quad \underline{e} \in E_S^2.$$

Zauważmy, że funkcje  $j$  i  $j_D$  są funkcjami o wzroście liniowym (subliniowymi). Z matematycznego punktu widzenia prowadzi to do konieczności poszukiwania przemieszczeń lub prędkości przemieszczeń w przestrzeni  $HB(\Omega)$ . Dla przestrzeni tej nie zachodzi (niestety!) nierówność Korna [162]. W przypadku nośności granicznej funkcja  $j_D$  przedstawia gęstość dysypacji.

Przykład 7.1. [155]. Niech zbiór  $\mathcal{C}$  momentów plastycznie dopuszczalnych ma postać

$$(7.30) \quad \mathcal{C} = \{ \underline{M} = (M_{\alpha\beta}) \mid a(\underline{M}) \leq k \},$$

przy czym funkcja  $a$  jest wypukła, niekoniecznie izotropowa. Jeśli  $k$  zależy od  $x$  (materiał niejednorodny) to oczywiście i  $\mathcal{C}$  zależy od tej zmiennej. W ogólnym przypadku nie udaje się wyznaczyć jawnej postaci funkcji  $j$  i  $j_D$ . Szczególnie trudno wyznaczyć funkcję  $j$ . Kilka przykładów podała Demengel [46].

Jeśli funkcja  $a$  ma postać

$$(7.31) \quad a(\underline{M}) = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta\lambda\mu} M_{\alpha\beta} M_{\lambda\mu}$$

to

$$(7.32) \quad j_D(\underline{e}) = (2G_{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} k)^{1/2}, \quad \underline{G} = \underline{F}^{-1},$$

przy założeniu, że  $\underline{F}$  jest istotnie dodatnio określona. ■

Niech  $B$  oznacza obciążenie transwersalne, przy czym  $B \in M(\Omega) = [C(\bar{\Omega})]^*$ . Oznacza to, że dopuszczalne są siły skupione działające na płytę. Ponieważ zanurzenie  $HB(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  jest ciągłe więc forma liniowa

$$L_1(u) = \langle B, u \rangle_{M(\Omega) \times C(\bar{\Omega})},$$

jest ciągła na  $HB(\Omega)$ .

Zauważmy, że wspomniane zanurzenie zachodzi również wtedy gdy obszar  $\Omega$  posiada jedynie odcinkami własność jednostajnej  $C^2$ -regularności, por. [47, Remark 3.2]. Wynika stąd, że zanurzenie to zachodzi dla płyt posiadających naroża, np. prostokątnych.

Niech  $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ , przy czym miara zbioru (długość)  $\Gamma_0 > 0$ . Na  $\Gamma_0$  zadane będą kinematyczne warunki brzegowe. Funkcjonał  $L$  całkowitego obciążenia płyty przyjmujemy w postaci

$$(7.33) \quad L(u) = L_1(u) + \int_{\Gamma_1} D^0 u d\Gamma,$$

gdzie  $D^0 \in L^\infty(\Gamma_1)$  oznacza brzegowe siły poprzeczne.

Przypadek gdy brzeg  $\Gamma_1$  jest dodatkowo obciążony momentami zginającymi zostanie rozpatrzony oddzielnie w p.7.4, gdyż jest jeszcze bardziej skomplikowany i ma swoją specyfikę.

Przejdźmy do sformułowania zasad ekstremalnych mających istotne znaczenie dla homogenizacji. Więcej szczegółów na temat tych zadań można znaleźć w pracach [46,162].

#### Zadanie $P_\lambda$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j(\underline{u}) dx - \lambda L(u) \mid u \in K_1 \right\},$$

gdzie

$$(7.34) \quad K_1 = K(U_0, U_1) = \{ u \in W^{2,1}(\Omega) \mid \gamma_0^*(u) = U_0, \gamma_1^*(u) = U_1, \text{ na } \Gamma_0 \}.$$

Przypominamy, że  $\gamma_0^*$  i  $\gamma_1^*$  są operatorami śladu; funkcje  $U_0$  i  $U_1$  są zadane. Parametr  $\lambda$  jest mnożnikiem obciążenia.

Korzystając z teorii dualności Rockafellara można wyprowadzić zadanie dualne.

#### Zadanie $P_\lambda^*$

Znaleźć

$$\sup \left\{ - \int_{\Omega} j^*(\underline{M}) dx \mid \underline{M} \in C_\lambda \right\},$$

gdzie

$$(7.35) \quad C_\lambda = \{ \underline{M} \in L^\infty(\Omega, E_S^2) \mid M_{\alpha\beta, \gamma\kappa} + \lambda B = 0, \text{ w } \Omega;$$

$$Q = \lambda D^0, M_n = 0, \text{ na } \Gamma_1; \underline{M}(x) \in \mathcal{C}, \text{ p.w. } x \in \Omega \}.$$

Tutaj  $Q$  oznacza efektywną siłę poprzeczną, natomiast  $M_n$  jest brzegowym momentem zginającym. Ścisłe rzecz biorąc wielkości te należy rozumieć w sensie operatorów śladów, odpowiednio  $b_0(\underline{M})$

i  $b_1(\underline{M})$ , szczególnie przedyskutowanych w pracach [46,162].

Przejdźmy do sformułowania zadań nośności granicznej (LA= limit analysis).

Zadanie  $P_{LA}$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j_D(\underline{z}(v)) dx \mid v \in K_0, L(v)=1 \right\},$$

gdzie

$$(7.36) \quad K_0 = K(U_0=0, U_1=0).$$

Przypominamy, że w zadaniach nośności granicznej pole kinematyczne  $v$  jest polem prędkości przemieszczeń.

Zadanie  $P_{LA}^*$

Znaleźć

$$\sup_{\inf} \{ \lambda(\underline{M}) \mid \underline{M} \in C_\lambda \}.$$

Ważną rolę w wariacyjnej analizie zadań idealnej plastyczności ośrodków i konstrukcji odgrywa relaksacja pewnych warunków brzegowych, por. [46,162].

Położmy

$$(7.37) \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta}(p) = p \cdot n_\alpha n_\beta, \quad p \in L^1(\Gamma_0),$$

gdzie  $\underline{n}=(n_\alpha)$  oznacza wektor jednostkowy normalny do  $\Gamma$ , skierowany na zewnątrz obszaru  $\Omega$ . Wygodnie jest wprowadzić następującą postać zrelaksowanego zadania  $P_\lambda$ .

Zadanie  $RP_\lambda$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j(\underline{z}(u)) dx + \int_{\Gamma_0} j_D[U_1 - \delta_1^*(u)] d\Gamma - \lambda L(u) \mid u \in W^{2,1}(\Omega), u=U_0, \text{ na } \Gamma_0 \right\}$$

Można wykazać, że  $(RP_\lambda)^* = P_\lambda^*$ , tzn., iż zadanie dualne  $(RP_\lambda)^*$  do zadania  $RP_\lambda$  jest identyczne z zadaniem  $P_\lambda^*$ . Ponadto mamy

$$(7.38) \quad \inf P_\lambda = \inf RP_\lambda = \sup P_\lambda^* = \sup (RP_\lambda)^*.$$

Związek pomiędzy zadaniami dla ośrodka sprężysto-idealnie plastycznego a zadaniami nośności granicznej ściśle łączy poniższy lemat.

Lemat 7.4. Następujące warunki są równoważne

- (i)  $\inf P_\lambda = \sup P_\lambda^* > -\infty$ .
- (ii)  $C_\lambda \neq \emptyset$  ( $\emptyset$  - zbiór pusty).
- (iii)  $\bar{\lambda} = \inf P_{LA} \gg \lambda$ .

Dowód podała Demengel [46]. Zauważmy, że każdy z powyższych warunków zapewnia istnienie jednoznacznego rozwiązania zadania  $P_\lambda^*$ . Jednakże infimum w zadaniu  $P_\lambda$  jest osiągnięte w przestrzeni HB( $\Omega$ ). W tym celu sformułujemy jeszcze jedno zadanie zrelaksowane.



Zadanie  $Q_\lambda$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j(\underline{\sigma}(u)) + \int_{\Gamma_0} [F(u_1 - \varphi_1^*(u))] d\Gamma - \lambda L(u) \mid u \in \mathcal{K} \right\},$$

gdzie

$$(7.39) \quad \mathcal{K} = \{ u \in \text{HB}(\Omega) \mid \varphi_0^*(u) = U_0, \text{ na } \Gamma_0 \}.$$

Zwróćmy uwagę na to, iż pierwszą całkę w tym zadaniu należy rozumieć jako wypukły funkcjonał miary. Ponadto mamy

$$\inf P_\lambda = \inf Q_\lambda.$$

Istnienie rozwiązania zadania  $Q_\lambda$  zapewnia następujący lemat.

Lemat 7.5. Jeśli hipoteza obciążenia bezpiecznego

$$(7.40) \quad \bar{\lambda} = \inf P_{LA} > \lambda,$$

jest spełniona, to zadanie  $Q_\lambda$  posiada rozwiązanie  $\tilde{u} \in \text{HB}(\Omega)$ .

Wnioskujemy stąd, że  $\inf P_\lambda$  osiągać jest w przestrzeni "dużej"  $\text{HB}(\Omega)$ , a nie w przestrzeni  $W^{2,1}(\Omega)$ .

7.3. Homogenizacja w przypadku gdy brzeg płyty nie jest obciążony momentami zginającymi

Zagadnienie homogenizacji płyt idealnie plastycznych o strukturze periodycznej jest znacznie bardziej skomplikowane niż płyt sprężystych, nawet spękanych. Fizycznie rzecz biorąc trudności te wynikają z samego modelu i nieodłącznie z nim związanych nieciągłości pól takich jak, na przykład, pole gradientów przemieszczenia. Znajduje to matematyczne odbicie w konieczności operowania funkcjonałami subliniowymi.

Zanim rozpatrzmy zagadnienie homogenizacji płyt niezbędne jest rozpatrzenie epi-zbieżności ciągu funkcjonałów o wzroście liniowym w silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  bez uwzględnienia warunków brzegowych. Uwzględnienie warunków typu Dirichleta prowadzi w naturalny sposób do relaksacji odpowiedniego warunku brzegowego, por. podpunkt 7.3.2.

7.3.1. Epi-zbieżność na przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  ciągu funkcjonałów o wzroście liniowym

Niech  $Y$ , podobnie jak i poprzednio, będzie komórką bazową. Tym razem jest to komórka dwuwymiarowa. Gęstość energii jest więc taka, że funkcja  $j(\cdot, \underline{e})$  jest  $Y$ -okresowa. Jeśli funkcja  $j$  jest dana zależnością (7.25), przy czym  $j^*$  ma postać (7.24), to wnioskujemy stąd, że  $A_{\alpha\beta\lambda\mu}(y)$  lub  $\mathcal{C}(y)$  są  $Y$ -okresowe. Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  płyta ma strukturę  $\varepsilon Y$ -okresową, co oznacza, że

$$A_{\alpha\beta\lambda\mu}^\varepsilon(x) = A_{\alpha\beta\lambda\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \mathcal{C}^\varepsilon(x) = \mathcal{C}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

są  $\varepsilon Y$ -okresowe. Na przykład, odpowiednikiem zależności (7.30) jest

$$(7.41) \quad \mathcal{C}^\varepsilon(x) = \mathcal{C}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \left\{ \underline{M} = (M_{\alpha\beta}) \mid a(\underline{M}) \leq k^\varepsilon(x), x \in \Omega \right\},$$

gdzie  $k^\varepsilon(x) = k(x/\varepsilon)$ . Oznacza to, że granica plastyczności jest  $\varepsilon Y$ -okresowa.

Przejdźmy do sformułowania pierwszego twierdzenia dotyczącego epi-zbieżności na przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  ciągu funkcjonałów o wzroście liniowym.

Twierdzenie 7.1. Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  będzie ograniczonym obszarem o własności jednostajnej  $C^2$ -regularności, za wyjątkiem ewentualnie skończonej liczby punktów brzegu  $\Gamma = \partial\Omega$ . Niech  $j: (y, \underline{e}) \in \mathbb{R}^2 \times E_S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją mierzalną, wypukłą względem  $\underline{e}$ ,  $Y$ -okresową względem  $y$  i taką, że

$$(7.42) \quad \exists \Lambda_0 \gg \lambda_0 > 0, \exists k_0 \gg 0, \lambda_0 |\underline{e}| - k_0 \leq j(y, \underline{e}) \leq \Lambda_0 (1 + |\underline{e}|), \underline{e} \in E_S^2.$$

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  definiujemy funkcjonał  $F^\varepsilon$  następująco

$$(7.43) \quad F^\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(u)\right) dx, & \text{jeśli } u \in W^{2,1}(\Omega), \\ +\infty, & \text{jeśli } u \in W^{1,1}(\Omega) \setminus W^{2,1}(\Omega). \end{cases}$$

Wówczas mamy

$$F^h = W^{1,1}(\Omega) - \lim_{\varepsilon} F^\varepsilon,$$

gdzie

$$(7.44) \quad F^h(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j^h(\underline{z}(u)), & \text{jeśli } u \in HB(\Omega), \\ \Omega \\ +\infty, & \text{jeśli } u \in W^{1,1}(\Omega) \setminus HB(\Omega), \end{cases}$$

przy czym

$$(7.45) \quad j^h(\underline{e}) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y j[y, \mathcal{E}_y(w) + \underline{e}] dy \mid w \in W_{\text{per}}^{2,1}(Y) \right\}, \underline{e} \in E_S^2.$$

Tutaj

$$(7.46) \quad W_{\text{per}}^{2,1}(Y) = \left\{ w \in W^{2,1}(Y) \mid w \text{ i } \frac{\partial w}{\partial y_\alpha} \text{ przyjmują jednakowe wartości na przeciwległych bokach komórki } Y \right\},$$

oraz

$$\mathcal{E}_{y_\alpha y_\beta}(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}.$$

Dowód tego twierdzenia polega, jak można się domyślić, na wykorzystaniu własności (iii) z punktu 2.1. Szczegółowy dowód, niesłusznie dosyć długi, podałem w pracy [159]. Tutaj go pominiemy, gdyż odgrywa dla nas rolę pomocniczą.

Ponieważ funkcja podcałkowa  $j(y, \cdot)$  jest funkcją o wzroście liniowym przeto infimum w zależności (7.45) jest na ogół osiągalne nie w przestrzeni  $W_{\text{per}}^{2,1}(Y)$  ale w przestrzeni większej  $HB(Y)$ . Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt że aby wyznaczyć funkcję  $(j_D)^h$  należy we wzorze (7.45) położyć  $j = j_D$ .

### 7.3.2. Epi-zbieżność i relaksacja jednego warunku brzegowego

Rozpatrzmy obecnie nieco bardziej skomplikowany przypadek gdy na części  $\Gamma_0$  brzegu  $\Gamma$  zadane są warunki Dirichleta

$$(7.47) \quad \mathcal{F}_0(u) = U_0, \quad \mathcal{F}_1(u) = U_1.$$

Funkcje  $U_0 \in [\mathcal{F}_0(W^{2,1}(\Omega))]_{|\Gamma_0}$  i  $U_1 \in L^1(\Gamma_0)$  są zadane.

Położmy

$$(7.48) \quad K = \{u \in HB(\Omega) \mid \mathcal{F}_0(u) = U_0, \mathcal{F}_1(u) = U_1, \text{ na } \Gamma_0\},$$

i oznaczymy przez  $I_K$ , jak zwykle, funkcję indykatorkową przestrzeni afinicznej  $K$ .

Twierdzenie 7.2. Niech ciąg funkcjonałów  $\{F^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  będzie określony wzorem (7.43). Wówczas ciąg  $\{F^\varepsilon + I_K\}_{\varepsilon > 0}$  jest epi-zbieżny w silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  do funkcjonału

$$(7.49) \quad \Phi(u) = F^h(u) + \int_{\Gamma_0} j_D^h[\mathcal{F}(U_1 - \mathcal{F}_1(u))] \cdot \nu, u \in \mathcal{K}.$$



Szczegółowy dowód tego twierdzenia podałem w pracy [159]. Nadmienimy tylko, iż polega on na wykazaniu, że  $l_{i_e}(F^E + I_K) \gg \Phi$  i  $l_{s_e}(F^E + I_K) \ll \Phi$ , przy czym wykorzystuje się tw.7.1.

Z wzoru (7.49) widzimy, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy epi-zbieżnością funkcjonałów o wzroście na przykład kwadratowym, a liniowym. W tym drugim przypadku pojawia się funkcjonał relaksacji warunku brzegowego na  $\Gamma_0$ . Z punktu widzenia mechaniki konstrukcji jest to związane z możliwością pojawienia się linii załomu w utwierdzeniu.

We wzorze (7.49) mamy

$$(7.50) \quad j_d^h = (j^h)_d = (j_d)^h.$$

Aby wykazać, że faktycznie  $(j^h)_d = (j_d)^h$ , wyznaczmy najpierw potencjał  $(j^h)^*$ . Oznaczmy przez  $\underline{v} = (v_\alpha)$  i  $\underline{t} = (t_\alpha)$ , odpowiednio, jednostkowy wektor normalny do  $\partial Y$  skierowany na zewnątrz obszaru  $Y$  i wektor styczny do  $\partial Y$ . Wykażemy, że zachodzi wzór

$$(7.51) \quad (j^h)^*(\underline{e}^*) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y j^*(y, \underline{m}(y) + \underline{e}^*) dy \mid \underline{m} \in \mathcal{M}_{\text{per}}(Y) \right\}, \underline{e} \in E_S^2.$$

gdzie

$$(7.52) \quad \mathcal{M}_{\text{per}}(Y) = \{ \underline{m} \in L^\infty(Y, E_S^2) \mid \text{div}_y \text{div}_y \underline{m} = 0, \text{ w } Y ; \\ m_v \text{ przyjmuje jednakowe wartości } a \text{ i } q \text{ przeciwnie na przeciwległych bokach komórki } Y ; \\ \sum_{i=1}^4 m_{12}(0_i) = 0 ; \int_Y \underline{m}(y) dy = 0 \}.$$

Tutaj

$$(7.53) \quad m_v = m_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta, \quad q = v_\alpha \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial y_\beta} + \frac{\partial m_t}{\partial s}, \quad m_t = m_{\alpha\beta} v_\alpha t_\beta;$$

$0_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) oznaczają naroża komórki  $Y$ .

Przejdźmy do dowodu.  $e^*$  jest niczym innym jak makroskopowym momentem zginającym, czyli  $e^* = \underline{M}^h$ . Zgodnie z definicją transformacji Fenchela mamy

$$(j^h)^*(\underline{e}^*) = \sup \{ \underline{e}^* : \underline{e} - j^h(\underline{e}) \mid \underline{e} \in E_S^2 \} =$$

$$= \frac{1}{|Y|} \sup_{\underline{e} \in E_S^2} \left\{ \int_Y \underline{e}^* : \underline{e} \, dy - \inf_{w \in W_{\text{per}}^{2,1}(Y)} \int_Y j(y, \underline{x}_y(w) + \underline{e}) \, dy \right\} =$$

$$= \frac{1}{|Y|} \sup_Y \left\{ \int_Y [\underline{e}^* : (\underline{x}_y(w) + \underline{e}) - j(y, \underline{x}_y(w) + \underline{e})] \, dy \mid \underline{e} \in E_S^2, w \in W_{\text{per}}^{2,1}(Y) \right\},$$

gdym

$$\int_Y \underline{e}^* : \underline{x}_y(w) \, dy = 0.$$

Kładąc

$$X = W_{\text{per}}^{2,1}(Y) \oplus E_S^2,$$

$$J(\underline{\theta}) = \int_Y j(y, \underline{\theta}(y)) \, dy,$$

możemy napisać

$$(j^h)^*(\underline{e}^*) = \frac{1}{|Y|} (J + I_X)^*(\underline{e}^*).$$

Symbolem  $\oplus$  oznaczyliśmy sumę prostą przestrzeni.

Funkcjonał  $(J + I_X)^*$  można wyrazić w postaci inf-splotu [87]

$$(7.54) \quad (J + I_X)^*(\underline{e}^*) = (J^* \square I_{W_{\text{per}}(Y)})(\underline{e}^*),$$

przy czym utożsamiamy  $\underline{e}^*$  z elementem stałym przestrzeni  $L^\infty(Y, E_S^2)$ , oraz

$$(\underline{m})^* = \int_Y j^*(y, \underline{m}) \, dy,$$

$$W_{\text{per}}(Y)^\perp = X^\perp = [W_{\text{per}}^{2,1}(Y)]^\perp \cap (E_S^2)^\perp.$$

Przez  $(E_S^2)^\perp$  oznaczyliśmy dopełnienie ortogonalne przestrzeni  $E_S^2 \subset L^1(Y, E_S^2)$  w sensie dualności  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty,1} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^\infty(Y, E_S^2) \times L^1(Y, E_S^2)}$ .

Tym samym mamy

$$(E_S^2)^\perp = \{ \underline{m} \in L^\infty(Y, E_S^2) \mid \langle \underline{m}, \underline{e} \rangle_{\infty,1} = 0, \forall \underline{e} \in E_S^2 \}.$$

Stąd

$$(7.55) \quad (E_S^2)^\perp = \left\{ \underline{m} \in L^\infty(Y, E_S^2) \mid \int_Y \underline{m}(y) \, dy = 0 \right\},$$

gdym z zależności

$$\langle \underline{m}, \underline{e} \rangle_{\infty, 1} = 0, \quad \forall \underline{e} \in E_S^2,$$

wynika

$$(7.56) \quad \int_Y \underline{e} : \underline{m}(y) dy = \underline{e} : \int_Y \underline{m}(y) dy = 0 \implies \int_Y \underline{m}(y) dy = 0.$$

Znajdźmy teraz dopełnienie ortogonalne  $[\underline{a}_y(w_{per}^{2,1}(Y))]^\perp$ . Mamy

$$0 = \langle \underline{m}, \underline{a}_y(w) \rangle_{\infty, 1} = \int_Y m_{\alpha\beta}(y) a_{y\alpha\beta}(w(y)) dy.$$

Całkując dwukrotnie przez części, przynajmniej formalnie, otrzymujemy

$$(7.57) \quad \langle \underline{m}, \underline{a}_y(w) \rangle_{\infty, 1} = \int_Y m_{\alpha\beta\gamma\delta} w dy - \int_{\partial Y} q \gamma_o^*(w) ds + \\ + \int_{\partial Y} m_{\nu} \delta_1^{\nu}(w) ds + \sum_{i=1}^4 m_{12}(0_i) w(0_i), \quad \forall w \in W_{per}^{2,1}(Y),$$

gdzie  $q$  (lokalną siłę poprzeczną) i  $m_{\nu}$  (lokalny moment zginający) określa zależność (7.53). Z (7.55) i (7.57) wynika (7.52):

Przejdźmy do wyznaczenia jawnej postaci makroskopowego potencjału  $(j^h)^*$ . Z (7.54) otrzymujemy

$$(j^h)^*(\underline{e}^*) = \frac{1}{|Y|} \inf \{ J^*(\underline{m}_1) + I_{\mathcal{M}_{per}(Y)}(\underline{m}_2) \mid \underline{e}^* = \underline{m}_1 + \underline{m}_2, \\ \underline{m}_\alpha \in \mathcal{M}_{per}(Y), \alpha = 1, 2 \} = \frac{1}{|Y|} \inf \{ J^*(\underline{e}^* - \underline{m}_2) \mid \underline{m}_2 \in \mathcal{M}_{per}(Y) \}.$$

Ponieważ zbiór  $\mathcal{M}_{per}(Y)$  jest przestrzenią liniową więc ostatecznie możemy napisać

$$(7.58) \quad (j^h)^*(\underline{M}^h) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y j^*(y, \underline{m}(y) + \underline{M}^h) dy \mid \underline{m} \in \mathcal{M}_{per}(Y) \right\}, \quad \underline{M}^h \in E_S^2.$$

Tym samym otrzymaliśmy zależność (7.51).

Wyznaczając funkcję  $[(j_d^h)^h]^*$  podobnie jak  $(j^h)^*$  wnioskujemy, że

$$\text{dom} [(j_d^h)^h]^* = \text{dom} (j^h)^*.$$

Z fizycznego punktu widzenia te dziedziny efektywne są niczym innym jak zhomogenizowanym zbiorem plastycznie dopuszczalnych momentów makroskopowych. Zbiór ten oznaczymy przez  $\mathcal{C}^h$ , czyli

$$(7.59) \quad \mathcal{C}^h = \text{dom} [(j_d^h)^h]^* = \text{dom} (j^h)^*.$$



Jest on wypukły i ograniczony, co wynika z własności funkcji  $(j_d)^h$ . Korzystając z (7.59) dostajemy

$$(7.60) \quad (j_d)^h(\underline{e}) = \sup\{\underline{e}^* | \underline{e}^* \in \text{dom}[(j_d)^h]^*\} = \\ = \sup\{\underline{e}^* | \underline{e}^* \in \text{dom}(j^h)^*\} = (j^h)_d(\underline{e}),$$

co dowodzi zależności (7.50).

### 7.3.3. Homogenizacja płyt idealnie plastycznych

Po tych długich, lecz niezbędnych, przygotowaniach możemy przystąpić do sformułowania i rozwiązania zagadnienia homogenizacji płyt idealnie plastycznych. W tym celu musimy najpierw, dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ , sformułować odpowiedniki zadań  $P_\lambda$  i  $P_{LA}$ . Interesować nas będzie przypadek gdy  $U_0 = 0$ . Przypomnijmy, że funkcje  $j(\cdot, \underline{e})$  i  $j_d(\cdot, \underline{e})$  są  $Y$ -okresowe. Funkcjonał obciążenia ma postać (7.33).

Położmy

$$(7.61) \quad K_{0,1} = K(U_0 = 0, U_1).$$

Zadanie  $P_\lambda^\varepsilon$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć} \\ \inf_{\Omega} \left\{ \int j\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(u)\right] dx - \lambda L(u) \mid u \in K_{0,1} \right\} = \\ = \inf \{ F^\varepsilon(u) - \lambda L(u) + I_{K_{0,1}}(u) \mid u \in W^{2,1}(\Omega) \}, \end{array} \right.$$

gdzie  $I_{K_{0,1}}$  oznacza funkcję indykatorkową zbioru  $K_{0,1}$ .

Zadanie  $P_{LA}^\varepsilon$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Znaleźć} \\ \inf_{\Omega} \left\{ \int j_d\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(v)\right] dx \mid v \in K_0, L(v) = 1 \right\}. \end{array} \right.$$

W zadaniu  $P_{LA}^\varepsilon$  pole  $v$  jest polem prędkości przemieszczeń.

Chcąc znaleźć odpowiednie modele płyt zhomogenizowanych (jednorodnych) musimy dokonać przejścia granicznego  $\varepsilon \rightarrow 0$  w sensie epi-zbieżności w silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$ .

Korzystając z tw.7.2 i własności (ii) epi-granicy z podpunktu 2.1, wnioskujemy, że ciąg  $\{F^\varepsilon - \lambda L + I_{K_{0,1}}\}_{\varepsilon > 0}$  jest epi-zbież-

ny do  $\Phi - \lambda L + I_{K_0}$ , gdzie

$$(7.62) \quad K_0 = \{u \in HB(\Omega) \mid \mathcal{V}_0(v) = 0, \text{ na } \Gamma_0\}.$$

Mnożnik obciążenia  $\lambda$  nie może być oczywiście dowolny; jaki, to zaraz zobaczymy.

Wspomniana epi-zbieżność zachodzi przy założeniu warunku ekwi-koercyjności

$$(7.63) \quad \lim_{\varepsilon} \sup [F^\varepsilon(u_\varepsilon) - \lambda L(u_\varepsilon) + I_{K_{0,1}}(u_\varepsilon)] < \infty \implies \\ \implies \lim_{\varepsilon} \sup \|u\|_{HB(\Omega)} < \infty.$$

Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  lemat 7.4 daje

$$(7.64) \quad \sup(P_\lambda^\varepsilon)^* = \inf P_\lambda^\varepsilon > -\infty \iff 0 \leq \lambda \leq \lambda^\varepsilon,$$

gdzie

$$(7.65) \quad \lambda^\varepsilon = \inf P_{LA}^\varepsilon,$$

Zagadnienie ekwi-koercyjności rozwiązuje następujący lemat.

Lemat 7.6. Przy założeniach

$$(1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \lambda^\varepsilon > \lambda,$$

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} M_n U_1 \text{ jest miarą na } \Gamma_0 \text{ taką, że jej wahanie bezwzględne} \\ \text{jest ograniczone z góry przez } \|M\|_{L^\infty(\Omega, E_S^2)} \|U_1\|_{L^1(\Gamma_0)}, \end{array} \right.$$

ciąg  $\{F^\varepsilon - \lambda L + I_{K_{0,1}}\}_{\varepsilon > 0}$  jest ekwi-koercyjny w sensie (7.63).

Dowód. Położmy

$$(7.66) \quad C_\lambda^\varepsilon = \{M \in L^\infty(\Omega, E_S^2) \mid M_{\alpha\beta, \gamma\delta} + \lambda B = 0, \text{ w } \Omega ; \\ Q = \lambda D^0, M_n = 0, \text{ na } \Gamma_1; M(x) \in \mathcal{C}^\varepsilon(x), \text{ p.w. } x \in \Omega\},$$

gdzie  $\mathcal{C}^\varepsilon(x)$  określa wzór (7.41). Z założenia (1) wynika, że istnieje  $\varrho$  takie, iż  $\lim_{\varepsilon} \inf \lambda^\varepsilon > \varrho > \lambda$ .

Zależność (7.64) implikuje

$$(7.67) \quad \inf P_\varrho^\varepsilon = \sup(P_\varrho^\varepsilon)^* \geq - \int_{\Omega} j^* \left[ \frac{x}{\varepsilon}, M(x) \right] dx - \int_{\Gamma_0} M_n U_1 d\Gamma,$$

dla każdego  $M \in C_\varrho^\varepsilon$ . Wyrażenie po prawej stronie ostatniej równości wynika z postaci zadania dualnego i przedstawia całkowitą energię dopełniającą.

Oznaczmy przez  $u_0$  funkcję określoną na  $\widetilde{\Omega} \ni \Omega$  i taką, że na  $\Gamma$ :  
 $\delta_0^*(u_0) = 0$ ,  $\delta_1^*(u_0) = U_1$ , przy czym jej nośnik jest zawarty w  $\widetilde{\Omega}$ .  
 Funkcja taka istnieje i możemy przyjąć, że  $u_0 \in W^{2,1}(\widetilde{\Omega})$ , por.  
 [47]. Jeśli  $u_\varepsilon \in K_{0,1}$  to korzystając z (7.42) otrzymujemy

$$(7.68) \quad \int_{\Omega} j\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(u_\varepsilon)\right] dx \geq \lambda_0 \int_{\Omega} |\underline{z}(u_\varepsilon - u_0) + \underline{z}(u_0)| dx - k_0 \geq \\
 \geq \lambda_0 \left| \int_{\Omega} |\underline{z}(u_\varepsilon - u_0)| dx - \int_{\Omega} |\underline{z}(u_0)| dx \right| - k_0.$$

Zauważmy, że na przestrzeni

$$HB_0(\Omega) = \{u \in HB(\Omega) \mid \delta_0^*(u) = \delta_1^*(u) = 0, \text{ na } \Gamma\},$$

możemy wprowadzić normę (7.5) równoważną normie przestrzeni  $HB(\Omega)$ . Ponieważ  $(u_\varepsilon - u_0) \in HB_0(\Omega)$ , więc (7.68) daje

$$\lim_{\varepsilon} \sup (F_\varepsilon^E + I_{K_{0,1}})(u_\varepsilon) < +\infty \implies \lim_{\varepsilon} \sup \|u_\varepsilon\|_{HB(\Omega)} < +\infty.$$

Tym samym warunek ekwi-koercywności zachodzi dla  $\lambda = 0$ .

Jak wiemy, dziedziła efektywna  $\mathcal{C}(y) = \text{dom} j^*(y, \cdot)$  jest ograniczonym zbiorem wypukłym. Mamy więc następującą własność:

$$\left| \begin{array}{l} \exists k_1 > 0 \text{ takie, że dla prawie każdego } y \in Y \\ j^*(y, \underline{M}) \leq k_1, \quad \forall \underline{M} \in \mathcal{C}(y). \end{array} \right.$$

Biorąc pod uwagę powyższą własność wnioskujemy, że  $\underline{M}$  spełniająca (7.67) spełnia również nierówność  $j^*\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{M}(x)\right] \leq k_1$ ; ponadto  $\underline{M}(x) \in \mathcal{C}^E(x)$  dla prawie każdego  $x \in \Omega$ , oraz  $|\underline{M}(x)| \leq \mathcal{L}_0$  (z (7.42)).

W tym celu przypomnijmy następujący rezultat z analizy wypukłej: jeśli  $F_1$  i  $F_2$  są funkcjami wypukłymi takimi, że  $F_1 \leq F_2$  to  $F_2^* \leq F_1^*$  [56].

W naszym przypadku biorąc  $F_1 = j$ ,  $F_2(\underline{e}) = \mathcal{L}_0(1 + |\underline{e}|)$  otrzymujemy:  $F_1^* = j^*$ ,  $F_2^*(\underline{e}^*) = -\mathcal{L}_0 + I_{B(0, \mathcal{L}_0)}(\underline{e}^*)$ , gdzie  $B(0, \mathcal{L}_0) = \{\underline{e}^* \in E_S^2 : |\underline{e}^*| \leq \mathcal{L}_0\}$ .

Kładąc  $\underline{e}^* = \underline{M}(x)$  mamy  $|\underline{M}(x)| \leq \mathcal{L}_0$ .

Uwzględniając założenie (2) dochodzimy do nierówności

$$(7.69) \quad \inf P_\lambda^* \geq -k_1 |\Omega| - \mathcal{L}_0 \int_{\Gamma_0} |u_1| d\Gamma.$$



Proste przekształcenia dają

$$F^\varepsilon(u) - \lambda L(u) \gg \frac{\lambda}{\varrho} [F^\varepsilon(u) - \varrho L(u)] + (1 - \frac{\lambda}{\varrho}) F^\varepsilon(u) \gg \\ \gg \frac{\lambda}{\varrho} \inf P_\varrho^\varepsilon + (1 - \frac{\lambda}{\varrho}) F^\varepsilon(u).$$

Uwzględniając (7.69) i wiedząc, że ciąg  $\{F^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest ekwi-koercywny dochodzimy do żądanego rezultatu. ■

Przejdźmy teraz do zbadania epi-zbieżności dla zagadnienia nośności granicznej  $P_{LA}^\varepsilon$ . Innymi słowy chcemy znaleźć model efektywny płyty sztywno-idealnie plastycznej. Zdefiniujemy ciąg funkcjonałów

$$(7.70) \quad F_{LA}^\varepsilon(v) = \int_{\Omega} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(v)] dx + I_{\tilde{K}_0}(v),$$

gdzie

$$(7.71) \quad \tilde{K}_0 = \{v \in K_0 \mid L(v) = 1\}.$$

Zauważmy, że ciąg  $\{F_{LA}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest ekwi-koercywny na przestrzeni  $HB(\Omega)$  (wystarczy położyć  $\lambda = 0$  w lemacie 7.6 i skorzystać z własności gęstości dysypacji  $j_d$ ).

Następujące twierdzenie rozwiązuje wspomniany problem homogenizacji dla zagadnienia nośności granicznej.

Twierdzenie 7.3. Ciąg funkcjonałów  $\{F_{LA}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest epi-zbieżny w słabej topologii przestrzeni  $HB(\Omega)$  (silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$ ) do funkcjonału

$$(7.72) \quad F_{LA}^h(v) = \int_{\Omega} j_d^h[\underline{z}(v)] + \int_{\Gamma_0} j_d^h[\underline{f}(-\nu_1(v))] d\Gamma + I_{\tilde{K}}(v),$$

gdzie

$$(7.73) \quad \tilde{K} = \{v \in \mathcal{K}_0 \mid L(v) = 1\}.$$

Ponadto

$$(7.74) \quad \lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda^h = \min P_{LA}^h = \inf \left\{ \int_{\Omega} j_d^h[\underline{z}(v)] dx \mid v \in K_0, L(v) = 1 \right\},$$

gdzie

$$(P_{LA}^h) \quad \inf \{ F_{LA}^h(v) \mid v \in \mathcal{K} \}.$$

Dowód. Dla  $D^0 \in L^\infty(\Gamma_1)$  zbiór więzów kinematycznych  $\tilde{K}$  jest słabo domknięty w  $HB(\Omega)$ , gdyż wówczas

$$\int_{\Gamma_1} D^0 \varphi_0(v_m) d\Gamma \longrightarrow \int_{\Gamma_1} D^0 \varphi_0(v) d\Gamma \quad \text{jeśli } m \longrightarrow \infty,$$

o ile  $v_m \rightharpoonup v$  słabo w  $HB(\Omega)$ . Wynika to stąd, że słaba zbieżność w  $HB(\Omega)$  implikuje silną w  $W^{1,1}(\Omega)$ , skąd z kolei wynika, iż  $\varphi_0(v_m) \rightarrow \varphi_0(v)$  (w topologii silnej). Tym samym nierówność  $\liminf F_{LA}^\varepsilon \geq F_{LA}^h(v)$  wynika z tw.7.2. Wystarczy bowiem przyjąć  $U_0 = U_1 = 0$ ,  $j = j_d$ .

Udowodnimy teraz, że  $\limsup F_{LA}^\varepsilon(v) \leq F_{LA}^h(v)$ . W tym celu bierzemy  $L(v)=1$ , gdyż w przeciwnym przypadku  $F_{LA}^h = +\infty$ .

Niech  $\{v_\varepsilon\} \subset W^{2,1}(\Omega)$  będzie ciągiem takim, że

$$v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{W^{1,1}(\Omega)} v \quad \text{i} \quad \limsup_\varepsilon \int_{\Omega} j_d\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{\varphi}(v_\varepsilon)\right] dx \leq F_{LA}^h(v),$$

gdzie  $\varphi_0^*(v_\varepsilon) = \varphi_1^*(v_\varepsilon) = 0$ , na  $\Gamma_0$ . Na mocy tw.7.2 taki ciąg istnieje. Połóżmy  $w_\varepsilon = \frac{1}{\xi_\varepsilon} v_\varepsilon$ ,  $\xi_\varepsilon = L(v_\varepsilon)$ . Wynika stąd, że  $L(w_\varepsilon)=1$ . Słaba zbieżność  $v_m \rightharpoonup v$  (na  $HB(\Omega)$ ) i słaba ciągłość funkcjonału  $L$  na  $HB(\Omega)$  implikują  $L(v_\varepsilon) \rightarrow L(v) = 1$ .

Uwzględniając dodatnią jednorodność funkcji  $j_d$  otrzymujemy

$$\limsup_\varepsilon \int_{\Omega} F_{LA}^\varepsilon(w_\varepsilon) = \limsup_\varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{\xi_\varepsilon} j_d\left[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{\varphi}(v_\varepsilon)\right] dx \leq F_{LA}^h(v).$$

Zbieżność  $\lambda^\varepsilon \rightarrow \lambda^h$  wynika z tw.2.1.

Zależność

$$(7.75) \quad \lambda^h = \inf \left\{ \int_{\Omega} j_d^h[\underline{\varphi}(v)] dx \mid v \in K_0, L(v)=1 \right\},$$

wynika stąd, że dolnie półciągłą regularyzację na przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$  funkcjonału

$$\int_{\Omega} j_d^h[\underline{\varphi}(v)] dx + I_{\{w \in K_0, L(w)=1\}}(v),$$

przedstawia właśnie funkcjonał  $F_{LA}^h$ , dany wzorem (7.72), por. [159].

Powyższe rezultaty umożliwiają przejście do epi-granicy w zadaniu  $P_\lambda^\varepsilon$ . Podsumowując, możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.4.

(a) Dla każdego mnożnika obciążenia  $\lambda$  takiego, że  $\lambda^h > \lambda \geq 0$  ciąg  $\{F^\varepsilon - \lambda L + I_{K_{0,1}}\}_{\varepsilon > 0}$  jest ekwi-koercywny na  $HB(\Omega)$  i epi-

-zbieżny do  $\Phi - \lambda L + I_{X_0}$  w silnej topologii przestrzeni  $W^{1,1}(\Omega)$ .

Jeśli rozważyć zadanie

$$(P_\lambda^h) \quad \inf \{ \Phi(u) - \lambda L(u) \mid u \in X_0 \},$$

to

$$\inf P_\lambda^\varepsilon \longrightarrow \min P_\lambda^h = \inf \left\{ \int_\Omega j^h(\underline{\sigma}(u)) dx - \lambda L(u) \mid u \in K_{0,1} \right\}.$$

(b) Dla każdego ciągu minimalizującego  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset K_{0,1} \cap HB(\Omega)$  istnieje podciąg słabo zbieżny w  $HB(\Omega)$  do rozwiązania zadania  $P_\lambda^h$ . ■

#### 7.4. Przypadek ogólny: część brzegu płyty jest obciążona momentami zginającymi

Rozpatrzmy obecnie zagadnienie homogenizacji płyty obciążonej wzdłuż  $\Gamma_1$  nie tylko siłami poprzecznymi, ale i momentami zginającymi. Analiza takiego przypadku jest jeszcze bardziej złożona niż poprzednio i wymaga oddzielnego potraktowania. W rozważaniach tych pomocne nam będą rezultaty uzyskane w pracach [23, 142] dla idealnie plastycznego ośrodka trójwymiarowego obciążonego na części brzegu.

Załóżmy, że wzdłuż  $\Gamma_1$  płyta jest dodatkowo obciążona momentami zginającymi  $M_n^0 \in L^\infty(\Gamma_1)$ . Funkcjonał obciążenia  $\mathcal{L}$  ma więc postać

$$(7.76) \quad \mathcal{L}(v) = L(v) - \int_{\Gamma_1} M_n^0 \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma,$$

przy czym funkcyjonał  $L(v)$  jest dany wzorem (7.33).

W całym niniejszym punkcie zakładamy, dla prostoty, że wzdłuż  $\Gamma_0$  płyta jest utwierdzona.

##### 7.4.1. Sformułowanie zadań, relaksacja

Podobnie jak w punkcie 7.2 sformułujemy najpierw podstawowe zadania w postaci zasad ekstremalnych i omówimy zagadnienie relaksacji dla płyt nie posiadających struktury periodycznej. Rozważania te są niezbędne dla zrozumienia homogenizacji płyt o strukturze periodycznej.



Relaksacja będzie obecnie bardziej złożona ze względu na konieczność relaksacji i na  $\Gamma_1$ .

Zadanie  $P_\lambda$

Znaleźć

$$\inf_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} j[\underline{u}(x)] dx - \lambda \mathcal{L}(u) \mid u \in K_0 \right\},$$

gdzie zbiór kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń  $K_0$  jest określony zależnością (7.36),

Zadanie  $P_\lambda^*$

Znaleźć

$$\sup_{\Omega} \left\{ - \int_{\Omega} j^*(\underline{M}) dx \mid \underline{M} \in C_\lambda^S \right\},$$

gdzie

$$(7.77) \quad C_\lambda^S = \{ \underline{M} \in L^\infty(\Omega, E_s^2) \mid M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + \lambda B = 0, \text{ w } \Omega,$$

$$Q = \lambda D^0, M_n = \lambda M_n^0, \text{ na } \Gamma_1; \underline{M}(x) \in \mathcal{C}, \text{ p.w. } x \in \Omega \}.$$

Przejdźmy do sformułowania zadań nośności granicznej.

Zadanie  $P_{LA}$

Znaleźć

$$\inf_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} j_d[\underline{u}(v)] dx \mid v \in K_0, \mathcal{L}(v) = 1 \right\}.$$

Zadanie  $P_{LA}^*$

Znaleźć

$$\sup \left\{ \lambda(\underline{M}) \mid \underline{M} \in C_\lambda^S \right\}.$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że relaksacja pewnych warunków brzegowych odgrywa istotną rolę przy konstruowaniu modeli efektywnych płyt idealnie plastycznych o strukturze periodycznej. Relaksacja ta ma swoje źródła w matematycznej analizie płyt jednorodnych. Podobnie jest i w rozpatrywanym przypadku.

Oznaczmy przez  $(\frac{\partial u}{\partial n})^+$  tzw. ślad zewnętrzny pochodnej normalnej [46, 47, 162]. Jeśli funkcja  $u \in HB(\Omega)$  to ślad zewnętrzny jest na ogół różny od śladu wewnętrznego  $(\frac{\partial u}{\partial n})^- = \mathcal{S}_1^+(u)$ . Właśnie z tej racji wprowadzamy zadanie zrelaksowane, które nie było roz-

patrywane w pracach Demengel z zakresu matematycznej analizy płyt idealnie plastycznych.

Położmy

$$(7.78) \quad \hat{\mathcal{L}}(u, (\frac{\partial u}{\partial \underline{n}})^+) = L(u) - \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial u}{\partial \underline{n}})^+ M^0 d\Gamma.$$

Tutaj funkcje  $u$  i  $(\frac{\partial u}{\partial \underline{n}})^+$  traktujemy jako niezależne.

Zadanie  $RP_{LA}$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j_d[\underline{z}(v)] dx + \int_{\Gamma_0} j_d[\underline{z}(-\delta_1^*(v))] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} j_d[\underline{z}((\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ - \delta_1^*(v))] d\Gamma \right.$$

$$\left. \{ v \in W^{2,1}(\Omega), (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ \in L^1(\Gamma_1), v=0 \text{ na } \Gamma_0, \hat{\mathcal{L}}[v, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+] = 1 \}.$$

Oczywiście warunek  $v=0$  na  $\Gamma_0$  należy rozumieć w sensie śladu:  $\gamma_0^c(v)=0$ .

Wykażemy obecnie, że

$$(7.79) \quad \mathbb{P}_{LA}^* = RP_{LA}^*.$$

W tym celu skorzystamy znowu z teorii dualności Rockafellara [56]. Niech

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) : (v, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+) \rightarrow [\underline{z}(v), \delta_1^*(v)]|_{\Gamma_0}, ((\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ - \delta_1^*(v))|_{\Gamma_1},$$

$$V = V_1 \times L^1(\Gamma_1), \quad \mathcal{A} : V \rightarrow Y = L^1(\Omega, E_S^2) \times L^1(\Gamma_0) \times L^1(\Gamma_1),$$

$$V_1 = \{ v \in W^{2,1}(\Omega) \mid v = 0, \text{ na } \Gamma_0 \},$$

$$P = (p_1, p_2, p_3) \in Y, \quad p^* \in Y^* = L^\infty(\Omega, E_S^2) \times L^\infty(\Gamma_0) \times L^\infty(\Gamma_1),$$

$$G(p) = G_1(p_1) + G_2(p_2) + G_3(p_3),$$

gdzie

$$G_1(p_1) = \int_{\Omega} j_d(p_1) dx, \quad G_2(p_2) = \int_{\Gamma_0} j_d[\underline{F}(-p_2)] d\Gamma, \quad G_3(p_3) = \int_{\Gamma_1} j_d[\underline{F}(p_3)] d\Gamma.$$

Weźmy

$$F(v, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \hat{\mathcal{L}}(v, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+) = 1, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przy powyższych oznaczeniach zadanie  $RP_{LA}^*$  polega na tym aby znaleźć

$$\inf \{ G[\mathcal{L}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+)] + F(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \mid (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \}.$$

Natomiast zadanie dualne ma postać [56]:

$$(RP_{LA}^*) \sup_{\underline{p}^* \in Y^*} \{ -G^*(\underline{p}^*) - F^*(-\mathcal{L}^*(\underline{p}^*)) \}.$$

Ponieważ  $j_D$  jako gęstość dysypacji jest funkcją podpierającą więc

$$(7.80) \quad G_1^*(\underline{p}_1^*) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{p}_1^*(x) \in \mathcal{C}, \text{ dla p.w. } x \in \Omega, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Korzystając z rezultatów Demengel [46] mamy

$$(7.81) \quad G_2^*(\underline{p}_2^*) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{p}_1^* \in C_\lambda^S, \text{ } b_1(\underline{p}_1^*) = -p_2^* \text{ na } \Gamma_0, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Podobnie otrzymujemy

$$(7.82) \quad G_3^*(\underline{p}_3^*) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \underline{p}_1^* \in C_\lambda^S, \text{ } b_1(\underline{p}_1^*) = p_3^* \text{ na } \Gamma_1, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Tutaj  $b_1(\underline{p}_1^*)$  oznacza odpowiedni ślad [46,162] funkcji  $\underline{p}_1^* \in C_\lambda^S$ . Kładąc  $\underline{M} = \underline{p}_1^*$  mamy  $b_1(\underline{M}) = M_n = M_{\alpha_p n_\alpha n_\beta}$  (na brzegu  $\Gamma$ ), przy założeniu, że  $\underline{M}$  jest dostatecznie regularne, np.  $\underline{M} \in C(\bar{\Omega}, E_S^2)$ .

Pozostaje nam teraz wyznaczyć  $F^*(-\mathcal{L}^*\underline{p}^*)$ . Zgodnie z definicją funkcjonału polarnego [56,87] piszemy

$$\begin{aligned} (7.83) \quad F^*(-\mathcal{L}^*\underline{p}^*) &= \sup \{ \langle -\mathcal{L}^*\underline{p}^*, (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \rangle_{V^* \times V} - \\ &\quad - F[v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+] \mid (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \} = \\ &= \sup \{ \langle -\underline{p}^*, \mathcal{L}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \rangle_{Y^* \times Y} \mid \hat{\mathcal{L}}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) = 1, (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \} = \\ &= \sup \{ - \int_{\Omega} p_1^* \mathcal{L}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}(v) dx - \int_{\Gamma_0} p_2^* \mathcal{L}_1^1(v) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_3^* [(\frac{\partial v}{\partial n})^+ - \mathcal{L}_1^1(v)] d\Gamma \mid \\ &\quad \mid \hat{\mathcal{L}}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) = 1, (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \}. \end{aligned}$$



Niech  $(v_0, (\frac{\partial v}{\partial n})^+)^* \in V$  będzie takie, że  $\hat{\mathcal{L}}[v_0, (\frac{\partial v}{\partial n})^+] = 1$ .

Dla dowolnego  $(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V$  położmy

$$(7.84) \quad (\tilde{v}, (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n})^+) = (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) + [1 - \hat{\mathcal{L}}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+)](v_0, (\frac{\partial v}{\partial n})^+).$$

Wynika stąd, że  $(\tilde{v}, (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n})^+) \in V$  oraz  $\hat{\mathcal{L}}(\tilde{v}, (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n})^+) = 1$ . Biorąc w

(7.83) funkcję  $(\tilde{v}, (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n})^+)$  zamiast  $(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+)$  otrzymujemy

$$(7.85) \quad F^*(-\mathcal{L}p^*) = \sup \left\{ - \int_{\Omega} p_{1\alpha\beta}^* \mathcal{A}_{\alpha\beta}(v) dx - \int_{\Gamma_0} p_2^* \mathcal{B}_1(v) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_3^* [(\frac{\partial v}{\partial n})^+ - \mathcal{B}_1(v)] d\Gamma + \lambda [1 - \hat{\mathcal{L}}(v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+)] \mid (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \right\},$$

gdzie

$$\lambda = \int_{\Omega} p_{1\alpha\beta}^* \mathcal{A}_{\alpha\beta}(v_0) dx + \int_{\Gamma_0} p_2^* \mathcal{B}_1(v_0) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial v_0}{\partial n})^+ p_3^* d\Gamma.$$

Aby obliczyć supremum w (7.85), weźmy najpierw  $(\frac{\partial v}{\partial n})^+ = 0$  oraz  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . W takim przypadku otrzymujemy

$$(7.86) \quad F^*(-\mathcal{L}p^*) \geq \lambda + \sup \left\{ \int_{\Omega} [-p_{1\alpha\beta}^* \mathcal{A}_{\alpha\beta}(v) - \lambda Bv] dx \mid v \in \mathcal{D}(\Omega) \right\} = \begin{cases} \lambda, & \text{jeśli } p_{1\alpha\beta}^* \mathcal{A}_{\alpha\beta} + \lambda B = 0, \text{ w } \Omega, \\ \infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Powróćmy teraz do (7.85). Całkując przez części dostajemy

$$F^*(-\mathcal{L}p^*) = \lambda + \sup \left\{ - \int_{\Omega} (p_{1\alpha\beta}^* \mathcal{A}_{\alpha\beta} v + \lambda Bv) dx + \int_{\Gamma_0} [-p_2^* - b_1(p_1^*)] \mathcal{B}_1(v) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [b_0(p_1^*) - \lambda \mathcal{D}^0] \mathcal{B}_0(v) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [-b_1(p_1^*) + p_3^*] \mathcal{B}_1(v) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial v}{\partial n})^+ (-p_3^* + \lambda M_n^0) d\Gamma \mid (v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+) \in V \right\}.$$

Uwzględniając (7.86) i wiedząc, że  $v$  i  $(\frac{\partial v}{\partial n})^+$  są funkcjami niezależnymi ostatecznie otrzymujemy

$$(7.87) \quad F^*(-\mathcal{L}^*p^*) = \begin{cases} \lambda, & (\text{jeśli } p_1 \alpha \beta + \lambda B = 0, \text{ w } \Omega, \\ b_1(p_1^*) = -p_2^*, & \text{na } \Gamma_0, \\ b_0(p_1^*) = \lambda D^0, \quad p_3^* = b_1(p_1^*) = \lambda M_n^0, & \text{na } \Gamma_1); \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę (7.80) - (7.82) i (7.87) w ogólnej postaci zadania  $(RP_{LA}^*)$  i kładąc  $p_1^* = \underline{M}$  wnioskujemy, że  $IP_{LA}^* = RP_{LA}^*$ ; tym samym mamy

$$(7.88) \quad \inf IP_{LA} = \sup IP_{LA}^* = \sup RP_{LA}^*.$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie wyznaczenia infimum po  $(\frac{\partial v}{\partial n})^+$  w zadaniu  $RP_{LA}^*$ . W tym celu dla ustalonego  $v$  musimy rozważyć zadanie

$$(P_v) \quad \inf_{\Gamma_1} \left\{ \int_{\Gamma_1} d[\mathcal{F}((\frac{\partial v}{\partial n})^+ - \mathcal{F}_1(v))] d\Gamma \mid \hat{\mathcal{L}}[v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+] = 1, \right. \\ \left. (\frac{\partial v}{\partial n})^+ \in L^1(\Gamma_1) \right\}.$$

Korzystając, jak zwykle, z teorii dualności Rockafellara wyznaczmy zadanie dualne  $P_v^*$ .

Położmy  $\mathcal{L}[(\frac{\partial v}{\partial n})^+] = (\frac{\partial v}{\partial n})^+$ , oraz

$$G(p) = \int_{\Gamma_1} d[\mathcal{F}(p - \mathcal{F}_1(v))] d\Gamma,$$

$$F[(\frac{\partial v}{\partial n})^+] = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \hat{\mathcal{L}}[v, (\frac{\partial v}{\partial n})^+] = 1, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Obliczamy funkcje sprzężone. Mamy

$$(7.89) \quad G^*(p^*) = \sup_{p \in L^1(\Gamma_1)} \left\{ \langle p^*, p \rangle_{\mathcal{L}(\Gamma_1) \times L^1(\Gamma_1)} - \int_{\Gamma_1} d[\mathcal{F}(p - \mathcal{F}_1(v))] d\Gamma \right\} = \\ = \begin{cases} \langle p^*, \mathcal{F}_1(v) \rangle_{\mathcal{L}(\Gamma_1) \times L^1(\Gamma_1)}, & \text{jeśli } p^* \in \mathcal{C}_b(s), p.w. s \in \Gamma_1, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie

$$(7.90) \quad \mathcal{C}_b(s) = \mathcal{C} \cdot \underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s) = \{ z \mid \exists \underline{M} \in \mathcal{C}, M_n = z \}.$$

Zauważmy, że zbiór  $\mathcal{C}_b$  plastycznie dopuszczalnych momentów zginających na  $\Gamma_1$  zależy w ogólności od  $s \in \Gamma_1$ , ponieważ wektor jed-

nostkowy normalnej zewnętrznej  $\underline{n}$  jest funkcją s. Dalej mamy

$$\begin{aligned}
 (7.91) \quad F^*(-\mathcal{L}^*p^*) &= \sup \left\{ \langle -p^*, \mathcal{L}(\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ \rangle_{L^\infty(\Gamma_1) \times L^1(\Gamma_1)} \mid \right. \\
 &\quad \left. \mathcal{L}[v, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+] = 1, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ \in L^1(\Gamma_1) \right\} = \\
 &= \sup \left\{ \langle -p^*, (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ \rangle_{L^\infty(\Gamma_1) \times L^1(\Gamma_1)} + \right. \\
 &\quad \left. g [1 - L(v) + \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ M_n^0 d\Gamma] \mid (\frac{\partial v}{\partial \underline{n}})^+ \in L^1(\Gamma_1) \right\} = \\
 &= \begin{cases} g(1 - L(v)), & \text{jeśli } p^* = g M_n^0, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę (7.89) i (7.92) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (P_V^*) \quad \sup \left\{ \langle -p^*, \mathcal{V}_1(v) \rangle_{L^\infty(\Gamma_1) \times L^1(\Gamma_1)} - g(1 - L(v)) \mid p^* \in L^\infty(\Gamma_1), \right. \\
 \left. p^*(s) \in \mathcal{C}_b(s), s \in \Gamma_1, p^* = g M_n^0 \right\} = \lambda_b |1 - \mathcal{L}(v)|,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(7.92) \quad \lambda_b = \sup \{ g \in \mathbb{R} \mid g M_n^0(s) \in \mathcal{C}_b(s), \text{ p.w. } s \in \Gamma_1 \}.$$

### 7.4.2. Homogenizacja

W punkcie 7.3.3 rozwiązaliśmy zagadnienie homogenizacji płyt idealnie plastycznych przy założeniu, że  $M_n^0 = 0$  (na  $\Gamma_1$ ). Załóżmy teraz, że wzdłuż  $\Gamma_1$  działają dodatkowo momenty zginające  $M_n^0 \in \mathcal{C}_0(\Gamma_1)$ . Widzimy, że poprzednie założenie  $M_n^0 \in L^\infty(\Gamma_1)$  z punktu 7.4.1 musimy wzmocnić; dlatego, to pokażą dalsze rozwiązania. Zauważmy już teraz, że rozszerzenie poniższych rezultatów na przypadek obciążeń ogólniejszych niż  $M_n^0 \in \mathcal{C}_0(\Gamma_1)$  pozostaje problemem otwartym.

Zadanie  $RP_{LA}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )

Znaleźć

$$\lambda^\varepsilon = \inf \left\{ \int_{\Omega} j_D \left[ \frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{L}(v) \right] dx + \int_{\Gamma_0} j_D \left[ \frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{F}(-\mathcal{V}_1(v)) \right] d\Gamma + \right.$$



$$+ \int_{\Gamma_1} j_d \left[ \frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{F} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^+ - \delta_1(v) \right) \right] d\Gamma \quad | v \in V_1, \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^+ \in L^1(\Gamma_1) \} .$$

Korzystając z rezultatów przedstawionych w poprzednim punkcie możemy napisać

$$(7.93) \quad \lambda^\varepsilon = \inf \left\{ \int_{\Omega} j_d \left[ \frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{E}(v) \right] dx + \int_{\Gamma_0} j_d \left[ \frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{F}(-\delta_1(v)) \right] d\Gamma + \lambda_b^\varepsilon |1 - \mathcal{L}(v)| \mid v \in V_1 \right\},$$

gdzie, por.(7.92)

$$(7.94) \quad \lambda_b^\varepsilon = \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi M_n^0 \in \mathcal{C}_b^\varepsilon(s), s \in \Gamma_1 \},$$

$$(7.95) \quad \mathcal{C}_b^\varepsilon(s) = \mathcal{C}^\varepsilon \cdot \underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s) = \{ z \mid \exists M \in \mathcal{C}^\varepsilon(x), x \in \Omega, M_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega), M_n(s) = z \}.$$

Za Temamem [162] możemy przyjąć, że w ostatniej zależności  $M_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta} \in L^1(\Omega)$  (a nawet  $M_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta} \in \mathbb{M}^1(\Omega)$ ).

Oznaczając przez  $\lambda^h$  graniczny mnożnik obciążenia dla płyty zhomogenizowanej mamy

$$(7.96) \quad \lambda^h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda^\varepsilon = \min Q \mathbb{P}_{LA}^h,$$

gdzie

$$(Q \mathbb{P}_{LA}^h) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} j_d^h [\mathcal{E}(v)] + \int_{\Gamma_0} j_d^h [\mathcal{F}(-\delta_1(v))] d\Gamma + \lambda_b^h |1 - \mathcal{L}(v)| \mid v \in \mathcal{K}_0^h \right\},$$

przy czym

$$(7.97) \quad \lambda_b^h = \sup \{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \varphi M_n^0(s) \in \mathcal{C}_b^h(s) \cap \Delta(s), \forall s \in \Gamma_1 \}.$$

Tutaj  $\mathcal{C}_b^h(s) = \mathcal{C}^h \cdot \underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s)$ , por. (7.59) i (7.90).

Przypomnijmy, że  $M_n^0 \in C_0(\Gamma_1)$ .

Delikatniejszy i jedynie częściowo rozwiązany jest problem wyznaczenia zbioru  $\Delta(s)$ . Rezultaty Bouchitté [22, rozdział III, tw.4.8] pozwalają wyznaczyć ten zbiór przy założeniu, że  $\mathcal{C}^\varepsilon(x)$  przyjmuje jedynie dwie wartości:  $\mathcal{C}_1$  i  $\mathcal{C}_2$ . Fizycznie oznacza to, że płyta - o strukturze periodycznej - zbudowana jest z dwóch materiałów. Dla jednego materiału zbiorem stanów plastycznie dopuszczalnych jest zbiór  $\mathcal{C}_1$ , a dla drugiego -  $\mathcal{C}_2$ .

Zatrzymajmy się najpierw nad rezultatami Bouchitté, które podamy w dogodnej do naszych rozważań formie. Niech  $\mathcal{O}$  będzie zwartą przestrzenią metryczną albo przestrzenią lokalnie zwartą. W zastosowaniach  $\mathcal{O}$  jest zazwyczaj jakimś obszarem. Weźmy:

$$\mu \in \mathbb{M}_+^1(\mathcal{O}), \quad \text{supp } \mu = \mathcal{O};$$

$\{\mathcal{A}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  - rodzina podzbiorów Borela zbioru  $\mathcal{O}$  takich, że  $\mu(\partial \mathcal{A}_\varepsilon) = 0$ ;

$C_1, C_2$  - wielowartościowe odwzorowania ciągłe, których wartościami są zbiory wypukłe w  $\mathbb{R}^d$ , przy czym  $0 \in \text{int } C_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ),

$$(7.98) \quad C^\varepsilon(x) = \begin{cases} C_1(x), & \text{jeśli } x \in \mathcal{A}_\varepsilon, \\ C_2(x), & \text{jeśli } x \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon, \end{cases}$$

$$(7.99) \quad \mathcal{K}^\varepsilon = \{ \underline{f} \in C_0(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d) \mid \underline{f}(x) \in C^\varepsilon(x), \mu \text{ p.w. na } \mathcal{O} \}.$$

Interesujące jest oczywiście przejście graniczne  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Lemat 7.7 [22]. Jeśli  $\text{int } \mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}$  i  $\text{int}(\mathcal{O} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{B}$  gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  to  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  są domkniętymi zbiorami wypukłymi, takimi że  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{O}$ . Ponadto ciąg  $\{\mathcal{K}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest silnie zbieżny w sensie Kuratowskiego do zbioru wypukłego  $\mathcal{K}_1$  określonego następująco

$$(7.100) \quad \mathcal{K}_1 = \{ \underline{f} \in C_0(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d) \mid \underline{f}(x) \in C(x), \forall x \in \mathcal{O} \},$$

gdzie  $C$  jest dolnie półciągłym odwzorowaniem wielowartościowym, przy czym

$$(7.101) \quad C(x) = \begin{cases} C_1(x) \cap C_2(x), & \text{jeśli } x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \\ C_1(x), & \text{jeśli } x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}, \\ C_2(x), & \text{jeśli } x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

Uwaga. Zbieżność w sensie Kuratowskiego i jej związek z homogenizacją szczegółowo rozważył Attouch [6]. Wiele informacji na temat odwzorowań wielowartościowych zawierają książki [10, 33].

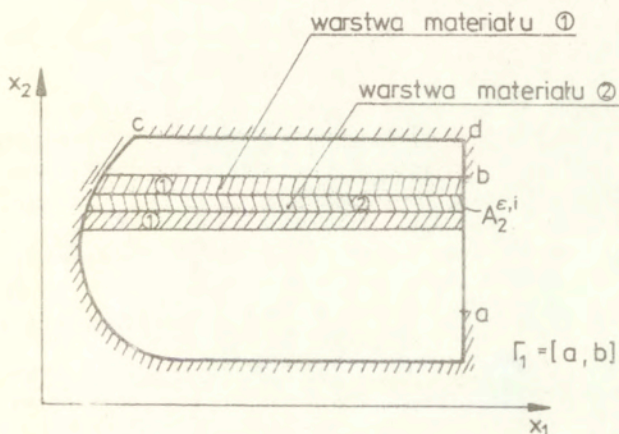
Kolejny lemat podaje warunki wystarczające na to aby  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{O}$  [22]. Oznaczmy przez  $\chi^\varepsilon = \chi_{\mathcal{A}_\varepsilon}$  funkcję charakterystyczną zbioru  $\mathcal{A}_\varepsilon$ .

Lemat 7.8. Jeśli ciąg funkcji charakterystycznych  $\{\chi^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  jest zbieżny w topologii  $\sigma(L_\mu^\infty, L_\mu^1)$  do funkcji  $\theta(x)$  takiej, że  $0 < \|\theta\|_{L_\mu^\infty} < 1$  to zbiory  $\text{int} A_\varepsilon$  i  $\text{int}(\theta \setminus A_\varepsilon)$  są zbieżne do  $\theta$ .

Przy oznaczeniach z poprzedniego lematu mamy wówczas

$$A = B = \theta, \quad C(x) = C_1(x) \cap C_2(x), \quad \forall x \in \theta.$$

Przykład 7.2. Rozpatrzmy prosty przypadek ilustrujący ostatni lemat w odniesieniu do interesującego nas zagadnienia homogenizacji płyt plastycznych. Przypuśćmy, że  $\theta = \Gamma_1$  jest przedziałem  $[a, b]$ , por. rys.13. Jest to przypadek płyty warstwowej, z



Rys. 13

warstwami ułożonymi prostopadle do powierzchni środkowej. Niech komórka bazowa  $Y$  ma postać

$$Y = (0, 1) = (0, a_1] \cup (a_1, a_2] \cup (a_2, 1),$$

gdzie  $0 < a_1 < a_2 < 1$ .

Funkcja charakterystyczna zbioru  $A_2 = (a_1, a_2]$  ma postać

$$(7.102) \quad \chi_{A_2}(y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } a_1 < y \leq a_2, \\ 0, & \text{jeśli } y \in Y \setminus A_2. \end{cases}$$



Zbiory  $\mathcal{A}_\varepsilon$  są sumą odcinków  $A_2^{\varepsilon, i} = (a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon]_i$ , czyli

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i \in I(\varepsilon)} A_2^{\varepsilon, i}$$

Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  zbiór  $\mathcal{A}_\varepsilon$  przedstawia część brzegu  $\Gamma_1$  zajmowaną przez materiał ②. Ciąg funkcji charakterystycznych  $\chi^\varepsilon$  zmierza do  $(a_2 - a_1)$  w \*-słabej topologii przestrzeni  $C^\infty(\Gamma_1)$ , por. [41, s.2][117]. Widzimy więc, że w tym przypadku  $\Theta(x) = a_2 - a_1$  jest funkcją stałą taką, że  $0 < a_2 - a_1 < 1$ . Sprawdziwszy założenia ostatniego lematu, wnioskujemy, że  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \Gamma_1$ . Należy jeszcze tylko dodać, że  $\mu$  oznacza tutaj 1-wymiarową miarę (długość). Ponadto lemat 7.8 daje

$$\Delta(s) = [\mathcal{C}_1 \cdot \underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s)] \cap [\mathcal{C}_2 \cdot \underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s)], \quad \forall s \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \Gamma_1,$$

gdzie  $\underline{n}(s) = (1, 0)$ . W tym przypadku zbiór  $\Delta$  nie zależy od  $s \in \Gamma_1$ , ponieważ  $\Gamma_1$  jest odcinkiem a nie krzywą. Przypomnijmy, iż  $\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_2)$  oznacza zbiór stanów plastycznie dopuszczalnych dla warstwy ① (②).

■

Wróćmy do zadania nośności granicznej  $(QP_{LA}^h)$ . Położmy

$$(7.103) \quad J_{\Gamma_1}^\varepsilon [(\frac{\partial v}{\partial \Omega})^+ - \mathcal{F}_1(v)] = \int_{\Gamma_1} d[\frac{x}{\varepsilon}, \mathcal{F}((\frac{\partial v}{\partial \Omega})^+ - \mathcal{F}_1(v))] d\Gamma.$$

W tym przypadku funkcjonał  $J_{\Gamma_1}^\varepsilon$  jest funkcjonałem sprzężonym:

$$(7.104) \quad J_{\Gamma_1}^\varepsilon = (I_{\tilde{\mathcal{C}}_b^\varepsilon})^*$$

w sensie dualności  $\langle \dots \rangle_{\mathbb{M}^1(\Gamma_1) \times C_0(\Gamma_1)}$ , gdzie

$$(7.105) \quad \tilde{\mathcal{C}}_b^\varepsilon = \{ \varphi \in C_0(\Gamma_1) \mid \varphi(s) \in \mathcal{C}_b^\varepsilon(s), \text{ p.w. } s \in \Gamma_1 \}.$$

Z lematu 7.7 wynika, że ciąg  $\{I_{\tilde{\mathcal{C}}_b^\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$  jest epi-zbieżny do  $I_{\tilde{\mathcal{C}}_b}$  w silnej topologii przestrzeni  $C_0(\Gamma_1)$ , gdzie

$$(7.106) \quad \tilde{\mathcal{C}}_b = \{ \varphi \in C_0(\Gamma_1) \mid \varphi(s) \in \Delta(s), \quad \forall s \in \Gamma_1 \}.$$

Oznaczmy przez  $d_{\Gamma_1}(s, \cdot)$  funkcję podpierającą zbioru wypukłego  $\Delta(s)$ . Można ją oczywiście rozszerzyć do wypukłej funkcji miary  $\mu \in \mathbb{M}^1(\Gamma_1)$ , por. punkt 7.1. Możemy więc napisać

$$(7.107) \quad J_{\Gamma_1}(\mu) = \int_{\Gamma_1} d_{\Gamma_1}(s, \mu), \quad \mu \in \mathbb{M}^1(\Gamma_1).$$

Ponieważ przestrzeń  $\mathbb{M}^1(\Gamma_1)$  jest przestrzenią dualną do przestrzeni ośrodkowej  $C_0(\Gamma_1)$ , więc możemy zastosować tw.2.3. Wnioskujemy stąd, iż ciąg  $\{J_{\Gamma_1}^\varepsilon\}$  jest epi-zbieżny ciągowo do funkcjonału

$J_{\Gamma_1}$  w topologii  $\mathcal{G}(\mathbb{M}^1(\Gamma_1), C_0(\Gamma_1))$ .

Podsumujmy powyższe rozważania

Twierdzenie 7.5. Przy założeniu, że  $M_n^0 \in C_0(\Gamma_1)$ , ciąg mnożników obciążenia  $\lambda^\varepsilon$  jest zbieżny do mnożnika  $\lambda^h$ , gdzie

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}P_{LA}^h) \quad \lambda^h = \inf \{ & \int_{\Omega} j_d^h(x, \underline{z}(v)) + \int_{\Gamma_0} j_d^h[\underline{z}(-\delta_1^*(v))] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} d_{\Gamma_1}[s, \mu - \delta_1^*(v) d\Gamma] \mid \hat{z}(v, \mu) = 1, v \in \mathcal{X}_0, \mu \in \mathbb{M}^1(\Gamma_1) \}. \end{aligned}$$

Ciąg funkcjonałów

$\int_{\Omega} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(v)] dx + \int_{\Gamma_0} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}(-\delta_1^*(v))] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{z}((\frac{\partial v}{\partial n})^+ - \delta_1^*(v))] d\Gamma$   
 $(v \in W^{2,1}(\Omega), (\frac{\partial v}{\partial n})^+ \in L^1(\Gamma))$  jest epi-zbieżny ciągowo w topologii  $[w\text{-HB}(\Omega)] \times \mathcal{G}(\mathbb{M}^1(\Gamma_1), C_0(\Gamma_1))$  do funkcjonału

$$(7.108) \quad \int_{\Omega} j_d^h(\underline{z}(v)) + \int_{\Gamma_0} j_d^h[\underline{z}(-\delta_1^*(v))] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} d_{\Gamma_1}[s, \mu - \delta_1^*(v) d\Gamma].$$

Stosując podejście analogiczne do tego, które prowadzi do ostatecznej postaci zadania  $P_V^*$  widzimy, że zadanie  $\mathbb{Q}P_{LA}^h$  otrzymujemy z zadania  $\mathbb{R}P_{LA}^h$  jeśli w tym ostatnim obliczymy infimum po zmiennej  $\mu \in \mathbb{M}^1(\Gamma_1)$ . W takim przypadku na  $\Gamma_1$  dualność należy rozumieć w sensie  $\langle \dots \rangle_{\mathbb{M}^1(\Gamma_1) \times C_0(\Gamma_1)}$ .

Z powyższych rozważań wysnuwamy wniosek, że

$$(7.109) \quad \lambda^h = \min(\lambda_{\Omega}^h, \lambda_b^h),$$

gdzie  $\lambda_b^h$  dane jest zależnością (7.97) oraz

$$(7.110) \quad \lambda_{\Sigma}^h = \inf \left\{ \int_{\Sigma} j_d^h(\underline{x}(v)) + \int_{\Gamma_0} j_d^h[\underline{x}(-\delta_1(v))] \, d\mu \mid \underline{x}(v)=1, v \in \mathcal{X}_0 \right\}.$$

Zwróćmy bowiem uwagę, że w ogólności  $\mathcal{C}_b^h(s) \cap \Delta(s) \subset \mathcal{C}_b^h(s)$ , przy czym inkluzja może być silna. Oznacza to, że nośność graniczna płyty zhomogenizowanej jawnie zależy od rozkładu materiału na części  $\Gamma_1$  brzegu obciążonej momentami zginającymi. Z powodu tak obciążonego brzegu słabszy materiał obniża nośność graniczną płyty efektywnej.

Jak już wspomnieliśmy, wpływ brzegu  $\Gamma_1$  zależy od tego jak rozłożone są niejednorodności (materiały) wzdłuż tej części brzegu. Wracając do rys.13 widzimy, że jeśli  $\Gamma_1 = [c, d]$  to zbiór  $\Delta(s)$  będzie zależał od tego czy wzdłuż tej części brzegu jest materiał o wyższej czy niższej granicy plastyczności.

Na zakończenie rozszerzymy tw.7.4 uwzględniając momenty zginające działające wzdłuż  $\Gamma_1$ .

Zadanie  $P_{\lambda}^{\epsilon}$

Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} j \left[ \frac{x}{\epsilon}, \underline{x}(u) \right] dx - \lambda \mathcal{L}(u) \mid u \in W^{2,1}(\Omega), \delta_0^{\epsilon}(u) = 0, \delta_1^{\epsilon}(u) = 0, \text{ na } \Gamma_0 \right\},$$

gdzie funkcjonal obciążeń zewnętrznych jest dany zależnością (7.76) oraz  $M_0^0 \in C_0(\Gamma_1)$ . Poniższe twierdzenie daje odpowiedź na pytanie o płytę zhomogenizowaną.

#### Twierdzenie 7.6

Dla każdego mnożnika obciążenia  $\lambda$  takiego, że  $0 \leq \lambda < \lambda^h$ , gdzie  $\lambda^h$  wynika z zadania  $RP_{LA}^h$ , ciąg zadań  $P_{\lambda}^{\epsilon}$  jest epi-zbieżny do następującego zadania opisującego płytę ze zhomogenizowanego materiału Hencky-Nadaia-Iliuszyna:

$$(P_{\lambda}^h) \quad \inf \left\{ \int_{\Omega} j^h[\underline{x}(u)] - \lambda \mathcal{L}(u) \mid u \in HB(\Omega), \delta_0^{\epsilon}(u) = 0, \delta_1^{\epsilon}(u) = 0, \text{ na } \Gamma_0 \right\}.$$

Mówiąc w powyższym twierdzeniu o zbieżności zadań  $P_{\lambda}^{\epsilon}$  mamy oczywiście na myśli epi-zbieżność wchodzących do tego zadania ciągu funkcjonałów. Twierdzenie to należy rozumieć w ten sposób, że aby przejść do epi-granicy najpierw wykonujemy relaksację zadania  $P_{\lambda}^{\epsilon}$ . Formułujemy więc zadanie:



$$\begin{aligned}
 (\text{RP}_\lambda^\varepsilon) \quad \inf \{ & \int_{\Omega} j[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{x}(u)] dx + \int_{\Gamma_0} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{f}(-\varphi_1(u))] d\Gamma + \\
 & \int_{\Gamma_1} j_d[\frac{x}{\varepsilon}, \underline{f}((\frac{\partial u}{\partial n})^+ - \varphi_1(u))] d\Gamma - \lambda \hat{\mathcal{L}}[u, (\frac{\partial u}{\partial n})^+] \mid u \in W^{2,1}(\Omega), \\
 & \varphi_0(u) = 0, \text{ na } \Gamma_0; (\frac{\partial u}{\partial n})^+ \in L^1(\Gamma_1) \}.
 \end{aligned}$$

Ciąg funkcjonałów wchodzących do ostatniego zadania jest epi-zbieżny w topologii  $[W - \text{HB}(\Omega)] \times \mathcal{C}(\mathbb{M}^1(\Gamma_1), C_0(\Gamma_1))$ ; otrzymujemy w ten sposób zadanie:

$$\begin{aligned}
 (\text{RP}_\lambda^h) \quad \inf \{ & \int_{\Omega} j^h[\underline{x}(u)] + \int_{\Gamma_0} j_d^h[\underline{f}(-\varphi_1(u))] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} d_{\Gamma_1}[s, \mu - \varphi_1(u)] d\Gamma - \\
 & - \lambda \hat{\mathcal{L}}(u, \mu) \mid u \in \text{HB}(\Omega), \varphi_0(u) = 0, \text{ na } \Gamma_0; \mu \in \mathbb{M}^1(\Gamma_1) \}.
 \end{aligned}$$

Zadanie  $\text{RP}_\lambda^h$  przedstawia zrelaksowaną postać zadania  $\mathbb{P}_\lambda^h$  oraz

$$(7.111) \quad \inf \mathbb{P}_\lambda^h = \inf \text{RP}_\lambda^h.$$

#### Uwaga

Na konieczność niezależnego traktowania "ślada zewnętrznego" jako miary zwracał już uwagę Ferro [59,60] rozpatrując zagadnienia minimalizacji funkcjonałów określonych na przestrzeni BV. Przestrzeń ta odgrywa istotną rolę w analizie zagadnień kapilarności i przy poszukiwaniu powierzchni minimalnych [70].

## WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w dwóch rozdziałach rezultaty wskazują jasno, jak sędzę, na istotną rolę metod wariacyjnych i analizy wypukłej w badaniu zagadnień kontaktowych i homogenizacji ośrodków i konstrukcji. Wszystkie rozważania przeprowadzono w ramach teorii geometrycznie liniowej. Interesujące byłoby rozszerzenie uzyskanych wyników - tam gdzie miałyby to sens fizyczny - na przypadek teorii geometrycznie nieliniowych, nawet uproszczonych. Na przykład, nieznaną jest teoria dualności pozwalająca budować odpowiedniki zadań  $P_d^*$  i  $Q_d^*$  z rozdziału pierwszego w przypadku dużych przemieszczeń.

Jak pokazaliśmy na początku rozdziału pierwszego, szeroką klasę niekoniecznie izotropowych praw tarcia można przedstawić w postaci subrózniczkowej, bardzo wygodnej do otrzymywania sformułowania wariacyjnego. Zbudowanie teorii dualności w sensie M-CD-M dla niejawniej nierówności wariacyjnej jak i dla układu złożonego z N.N.W. sprzężonej z N.W. było możliwe przy poczynionych założeniach o wypukłości, a wyeliminowanie zmiennej pierwotnej z zadania dualnego wymagało, praktycznie rzecz biorąc, użycia operatora Greena. Możliwe jest więc zastosowanie tej teorii dualności nie tylko do ośrodków sprężystych, jak uczyniliśmy to w rozdziale pierwszym. Oprócz możliwości zastosowania do ośrodków lepkosprężystych istnieje możliwość zastosowania do zagadnień kontaktowych dla ośrodka sprężysto-plastycznego w ramach opisu prędkościowego (przyrostowego). Praktyczna realizacja konkretnych zadań brzegowych i początkowo-brzegowych, nawet w przypadku analizy sprężystej, wymagać zazwyczaj będzie odpowiednich procedur numerycznych. Metody numeryczne zaczęto opracowywać w Linköping Institute of Technology (Szwecja).

Teoria nośności granicznej jest zazwyczaj formułowana w ten sposób, że albo pomija się siły masowe albo mnożnik obciążenia jest związany zarówno z siłami masowymi jak i powierzchniowymi. W zaproponowanych rozszerzeniach twierdzeń o nośności granicznej przyjęliśmy, że mnożnik ten związany jest jedynie z obciążeniem powierzchniowym, co wydaje się sensowniejsze fizycznie. Otrzymane rezultaty łatwo przeformułować na przypadek gdy obciąż-

zenie jest jednoparametrowe, a ciało obciążone jest siłami masowymi i powierzchniowymi. Zaproponowana w punkcie 9.3 teoria nośności granicznej pozwalająca uwzględnić warunki Signoriniego z tarciami jest taka, że podejście kinematyczne jest zawsze sprzężone ze statycznym poprzez normalne naprężenia kontaktowe. Po drobnych i oczywistych modyfikacjach pozostaje ona słuszna i wtedy gdy nie uwzględnia się warunków Signoriniego, a jedynie tarcie. Wątpliwe wydaje się zbudowanie teorii nośności granicznej uwzględniającej warunki kontaktowe z tarciami bez tego rodzaju sprzężenia. Wiąże się to z niestandardowym charakterem praw tarcia; przynajmniej tak jak się je zwykle rozumie.

Przyjęty w punkcie 9.5 model podłoża lepkiego nie pozwolił nam zbudować jednoparametrowej teorii nośności granicznej jak w punktach poprzednich. Jednakże udało się zbudować parę zasad ekstremalnych, które mogą mieć znaczenie praktyczne. Stosując teorię dualności Rockafellara można wykazać, że jest to para zasad dualnych.

W ramach modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego nie można uwzględnić, ściśle rzecz biorąc, luzów pomiędzy ciałem a podłożem. Wynika to stąd, że aby mówić o luzach musimy operować przemieszczeniami, których w tym modelu nie ma. Luzy można uwzględnić, ale trzeba analizować ciało sprężysto-plastyczne. Analizie układów z luzami poświęcona jest praca Gawęckiego [68].

Rozpatrzone w rozdziale drugim zagadnienia homogenizacji ośrodków i płyt, w których nie uwzględniamy tarcia, rozwiązałyśmy metodą epi-zbieżności. Po to aby móc stosować teorię  $\Gamma$ -zbieżności, której epi-zbieżność jest przypadkiem szczególnym, trzeba mieć ciąg funkcjonałów, na przykład całkowitej energii potencjalnej układu. Ogólnie rzecz biorąc metodę tę można stosować i do układów o strukturze nieperiodycznej, ale wówczas otrzymujemy zbyt ogólne - z praktycznego punktu widzenia - rezultaty. Mianowicie w takim przypadku możemy jedynie powiedzieć, że ośrodek efektywny (lub belka, płyta, etc.) istnieje, ale nie znamy jawnie jego struktury. Dlatego też w ostatnich latach rozwijane są metody szacowania własności efektywnych. Są to rezultaty ograniczone do zagadnień liniowych [29,57,64,81,82,102,109,110] i pewnej klasy zagadnień nieliniowych [57,81,125,126,145,146,164,170]. Należy spodziewać się, że jednym z przyszłoś-



ciowych kierunków badań będzie połączenie metod homogenizacji z metodami stochastycznymi, por. [29,82]. Na przykład, interesujące byłoby znalezienie efektywnych modeli ośrodków i płyt spękanych, przy założeniu losowego rozkładu szczelin i uwzględnieniu warunków Signoriniego. Istotną rolę w tych rozważaniach odgrywają metody wariacyjne typu Hashina-Shtrikmana i metody analizy wypukłej, takie jak na przykład pojęcie funkcjonału sprzężonego. Rozszerzenie metod stosowanych do szacowania własności efektywnych na ośrodki i płyty spękanе bez założenia o periodyczności pozostaje problemem otwartym.

Metody  $\Gamma$ -zbieżności nie można stosować do zagadnień homogenizacji ośrodków i konstrukcji spękanych przy uwzględnieniu tarcia na szczelinach, nawet przy założeniu o ich periodycznym rozkładzie. W takim bowiem przypadku, nie dysponujemy zasadami ekstremalnymi. Problem staje się jeszcze bardziej skomplikowany jeśli chcemy uwzględnić ewolucję szczelin, nawet pomijając tarcie.

Rozważania dotyczące spękaną płytę dwuwarstwową mają charakter modelowy. W podobny sposób można rozpatrywać problem wyznaczania własności makroskopowych płyty rzeczywiście dwuwarstwową, o różnych własnościach sprężystych w warstwach górnej i dolnej. Te same idee dają się zastosować do wyznaczania własności efektywnych np. tarcz trójwarstwowych, przy czym jedna warstwa jest periodycznie spękana. Zastosowane podejście wariacyjne i metoda epi-zbieżności (bezpośrednia i dualna) wydają się być klarowne, a na pewno są precyzyjne. Dodatkową zaletą zastosowanych przez nas metod jest uwzględnienie jednostronnych warunków typu Signoriniego, modelujących otwieranie i zamykanie się szczelin, niekoniecznie całkowite. Wyznaczenie własności makroskopowych wymaga rozwiązania odpowiednich zadań na komórce bazowej.

Przeprowadzona w podrozdziale siódmym rozdziału drugiego homogenizacja płyt idealnie plastycznych dowodzi, jak skomplikowany matematycznie jest taki model płyt. Precyzyjna metoda epi-zbieżności pozwoliła zbudować model efektywny płyty o strukturze periodycznej z materiału Hencky-Nadaia-Iliuszyna, a także wyznaczyć graniczny mnożnik obciążenia  $\lambda^h$ . Jeśli brzeg płyty jest obciążony momentami zginającymi to mnożnik ten jest inny

niż można by intuicyjnie sądzić. Wskazuje to na użyteczność nowoczesnych metod matematycznych (czasami niestety znużonych). Następnym problemem byłaby analiza asymptotyczno-wariacyjna "cienkiego" ciała idealnie plastycznego scharakteryzowanego przez dwa małe parametry: grubość  $h$  i parametr periodyczności  $\xi$ . Zbudowanie modeli dwuwymiarowych ( $h \rightarrow 0, \xi \rightarrow 0$ ), przy różnych kombinacjach tych parametrów, pozostaje problemem otwartym. Najbliższe lata przyniosą zapewne rozwiązanie tego problemu.

W pracach [94,96a,98,99] rozwiązano zagadnienie homogenizacji powłok sprężystych o strukturze periodycznej. Mamy wówczas do czynienia z homogenizacją niejednorodną (ang. non-uniform), inaczej zwaną kwasi-periodyczną. Wynika to z wpływu samej geometrii powłoki na proces homogenizacji i zadanie lokalne. Zbadano zarówno powłoki liniowe jak i nieliniowe. Jeśli chodzi o powłoki nieliniowe, to najogólniejszy model jaki rozpatrywano to model z umiarkowanie dużymi obrotami wokół stycznej do powierzchni środkowej powłoki. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej takiej powłoki jest niewypukły, ale energia sprężysta jest wypukła względem najwyższych pochodnych. Przyjęto, że powłoki o strukturze  $\xi Y$ -periodycznej są opisane niesprężonymi równaniami konstytutywnymi. Równania makroskopowe pozostają niesprężone dla powłok małowyniosłych, i to zarówno liniowych jak i nieliniowych. Sytuacja ulega zmianie w przypadku powłok, które nie są małowyniosłe. Wówczas równania konstytutywne powłok zhomogenizowanych są sprężone bez względu na to czy powłoka jest liniowa czy nieliniowa.

W pracy [157] rozwiązano metodą  $\Gamma$ -zbieżności zagadnienie homogenizacji kwasi-periodycznej ośrodka piezoelektrycznego. Zasugerowano możliwość zastosowania otrzymanych wzorów na współczynniki zhomogenizowane do wyznaczania efektywnych własności materiałów biologicznych takich jak kości, które wykazują właściwości piezoelektryczne i mają regularną budowę. Maugin i Turbé [167] rozpatrzyli to samo zagadnienie homogenizacji, ale w przypadku dynamicznym, stosując metodę rozwinieć Blocha. Otrzymane przez tych autorów wzory na współczynniki zhomogenizowane pokrywają się z zależnościami wyprowadzonymi w pracy [157].



## LITERATURA

1. P. Alart, A. Curnier, Contact discret avec frottement: unicité de la solution. Convergence de l'algorithme, Document, Laboratoire de Mécanique Appliquée, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1987.
2. A. Alexiewicz, Analiza funkcjonalna, PWN, Warszawa, 1969.
3. A. Ambrosetti, C. Sbordone,  $\Gamma$ -convergenza e G-convergenza per problemi di tipo ellittico, Boll. Un. Mat. Ital., 13-A, 1976, 352-362.
4. L.-E. Andersson, A global existence result for a quasistatic contact problem with friction, LiTH-MAT-R-89-00, May 1989, Depart. of Math., Linköping University, Sweden (również: Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applics, w druku).
5. S. Andrieux, Y. Bamberger, J.-J. Marigo, Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches, J. Méc. théorique et appl., 2, 1986, 471-510.
6. H. Attouch, Variational convergence for functions and operators, Pitman, Boston-London-Melbourne 1984.
7. H. Attouch, Variational properties of epi-convergence. Applications of limit analysis problems in mechanics and duality theory. W: "Multifunctions and Integrands", G. Salinetti (red.), Lecture Notes in Mathematics, t. 1091, Springer-Verlag, Berlin 1984, s. 80-104.
8. H. Attouch, Epi-convergence and duality. Convergence of sequence of marginal and Lagrangian functions. Applications to homogenization problems in mechanics, Publications AVAMAC(\*), Université de Perpignan, No 84-11, 1984.
9. H. Attouch, F. Murat, Homogenization of fissured elastic materials, Publications AVAMAC, Université de Perpignan, No 85-03, 1985.
10. J.P. Aubin, D. Cellina, Differential inclusions, Springer-Verlag, Berlin 1984.
11. D. Azé, Epi-convergence et dualité. Application à la convergence de variables primales et duales pour des suites de problèmes d'optimization convexe, Publications AVAMAC, Université de Perpignan, No 84-12, 1984.
12. D. Azé, Convergence des variables duales dans des problèmes de transmission à travers des couches minces par des méthodes d'épiconvergence, Ricerche di Mat., 35, 1986, 125-159.
13. N.S. Bahvalov, G.P. Panasenko, Osrednenie processov v periodiceskikh sredah, Nauka, Moskva 1984.
14. J. Barros-Neto, Inhomogeneous boundary value problems in a half space, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, 19, 1965, 331-365.
15. M.P. Bendsøe, Generalized plate models and optimal design. W: "Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media", J.L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, J.-L. Lions (red.),

(\*) AVAMAC = Analyse Variationnels et Applications en Mécanique, Automatiques et Contrôle.



Springer-Verlag, New York 1986, s.1-26.

16. A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam 1978.
17. D.Bergman, J.L.Lions, G.Papanicolaou, F.Murat, L.Tartar, E.Sanchez-Palencia, Les méthodes de l'homogénéisation: théorie et application en physique, Eyrolles, Paris 1985.
18. W.R.Bielski, J.J.Telega, A contribution to contact problems for a class of solids and structures, Arch.Mech., 37, 1985, 303-320.
- 18a. P.O.Boström, Collapse models of a rigid-plastic beam on a rigid-plastic foundation, Int.J.Mech.Sci., 17, 1975, 73-84.
19. M.Boucher, Problème de Signorini dans l'hypothèse d'un support déformable, These de 3-eme cycle, Université Paris VI, 1973.
20. M.Boucher, Signorini's problem in viscoelasticity. W: "The Mechanics of the Contact Between Deformable Bodies", A.D. de Pater, J.J.Kalker (red.), Delft University Press, 1975, s.41-53.
21. G.Bouchitté, Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. Application à l'homogénéisation en plasticité, Ann.Fac.Sci. Toulouse, 8, 1986-1987, 7-36.
22. G.Bouchitté, Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesure. Application en plasticité et homogénéisation, Thèse d'Etat, Université de Perpignan, 1987.
23. G.Bouchitté, P.Suquet, Charges limites, plasticité et homogénéisation: le cas d'un bord chargé, C.R.Acad.Sci. Paris, Ser.I, 305, 1987, 441-444.
24. G.Bouchitté, M.Valadier, Integral representation of convex functionals on a space of measures, J.Funct.Analysis, 80, 1988, 398-420.
25. A.Braides, Homogenization of some almost periodic coercive functional, Rend.Accad.Naz. delle Scienze, Memorie di Mat., 103, 1985, vol.IX, 313-322.
26. H.Brézis, Operateurs maximaux monotones, North-Holland, Amsterdam 1973.
27. H.Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris 1983.
28. D.H.Buckley, Surface effects in adhesion, friction, wear and lubrication, Elsevier, Amsterdam 1981.
29. R.Burridge, S.Childress, G.Papanicolaou (red.), Macroscopic properties of disordered media, Lecture Notes in Physics, vol. 154, Springer-Verlag, Berlin 1982.
30. G.Buttazzo, Semicontinuity and integral representation in the calculus of variations, Pitman, London 1989.
31. D.Caillerie, Thin elastic and periodic plates, Math.Meth.in the Appl.Sci., 6, 1984, 159-191.

32. I.Capuzzo Dolcetta, M.Matzeu, Duality for implicit variational problems and numerical applications, Università degli Studi, Roma, Istituto Matematico "G.Castelnuovo", 6 marzo 1980, s.13-49.
33. C.Castaing, M.Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, Springer-Verlag, Berlin 1977.
34. R.M.Christensen, Mechanics of composite materials, Wiley-Interscience, New York 1979.
35. E.Christiansen, Limit analysis in plasticity as a mathematical programming problem, *Calcolo*, 17, 1980, 41-65.
36. E.Christiansen, On the collapse solution in limit analysis, *ARMA*, 91, 1986, 119-135.
37. P.G.Ciarlet, E.Sanchez-Palencia (red.), Applications of multiple scaling in mechanics, RMA 4, Masson, Paris 1987.
38. D.Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Reinforced and honeycomb structures, *J.Math. pures et appl.*, 65, 1986, 403-422.
39. D.Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Structures très minces en élasticité linéarisée: tours et grillages, *C.R.Acad.Sci. Paris. Sér.I*, 308, 1989, 41-46.
40. F.H.Clarke, Optimization and nonsmooth analysis, John Wiley and Sons, New York 1983.
41. B.Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations, Springer-Verlag, Berlin 1989.
42. G.Dal Maso, G.F.Dell'Antonio (red.), Composite media and homogenization theory, Proc.of the Workshop on Composite Media and Homogenization Theory, 15-26 January 1990, Trieste, Birkhäuser Verlag, w druku.
43. M.Degiovanni, A.Matino, M.Tosques, General properties of  $(p,q)$ -convex function and  $(p,q)$ -monotone operators, *Ricerche di Mat.*, 3, 1983, 285-319.
44. G.Del Piero, F.Maceri (red.), Unilateral problems in structural Analysis, CISM Courses and Lectures No 288, Springer-Verlag, Wien-New York 1985.
45. G.Del Piero, F.Maceri (red.), Unilateral problems in structural analysis - 2, CISM Courses and Lectures No 304, Springer-Verlag, Wien-New York 1987.
46. F.Demengel, Problèmes variationnels en plasticité parfaite des plaques, Thèse de 3-ème cycle, Université Paris Sud, 1982 (patrz również: *Funct.Anal.and Optimiz.*, 6, 1983, 73-119).
47. F.Demengel, Fonctions à hessien borné, *Ann.Inst.Fourier de l'Univ.Sci. et Med. de Grenoble*, 34, 1984, 155-190.
48. F.Demengel, Fonctions convexes de mesure et problèmes variationnels. Application en mécanique nonlinéaire (élasticité, plasticité), Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris-Sud, 1986.
49. F.Demengel, Compactness theorems for spaces of functions with bounded derivatives and applications to limit analysis problems in plasticity, *ARMA*, 105, 1989, 123-161.



50. F. Demengel, R. Temam, Convex functions of a measure and applications, *Indiana Univ. Math. J.*, 33, 1984, 673-709.
51. D. Duvaut, Cours sur les méthodes variationnelles et la dualité. W: "Duality and Complementarity in Mechanics of Solids", A. Borkowski (red.), Ossolineum, Wrocław 1979, s. 173-272.
52. G. Duvaut, Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, *C.R. Acad. Sci. Paris*, A290, 1980, 263-265.
53. G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris 1972.
54. G. Duvaut, J.L. Lions, Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques - I. Le cas stationnaire, *J. Méc.*, 13, 1974, 51-74; II. Le cas d'évolution, *ibid.*, s. 245-266.
55. G. Duvaut, A.-M. Metellus, Homogénéisation d'une plaque mince en flexion de structure périodique et symétrique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, A 283, 1976, 947-950.
56. I. Ekeland, R. Temam, Convex analysis and variational problems, North-Holland, Amsterdam 1976.
57. J.L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, J.-L. Lions (red.), Homogenization and effective moduli of materials and media, Springer-Verlag, New York 1986.
58. E. Felder, Formulation thermodynamique des interactions superficielles entre deux corps, *J. Méc. théorique et appl.*, 4, 1985, 283-303.
59. E. Felder, Etude expérimentale de l'anisotropie de frottement de tôles d'acier doux, *J. Méc. théorique et appl.*, 7, 1988, 479-504.
60. F. Ferro, Variational functionals defined on spaces of BV functions and their dependence on boundary data, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, 122, 1979, 269-287.
61. F. Ferro, Lower semicontinuity of integral functionals and applications, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 1-8, 1982, 753-762.
62. G. Fichera, Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. W: *Handbuch der Physik*, Band VIa/2, Springer-Verlag, Berlin 1972.
63. G.A. Francfort, Two variational problems in thermoelasticity: 1. homogenization, 2. material momenta, Dissertation, Stanford University, 1982 (wersja skrócona: "Homogenization and linear thermoelasticity", *SIAM J. Math. Anal.*, 14, 1983, 696-708).
64. G.A. Francfort, F. Murat, Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *ARMA*, 94, 1986, 307-334.
65. J. Francô, Homogenization of linear elasticity equations, *Aplikace Matematiky*, 27, 1982, 96-117.
66. A. Gałka, Parametry mikrolokalne w teorii cienkich laminowanych powłok sprężystych, *Prace Naukowe Inst. Inż. Łąd. Pol.* Wrocł., Nr 12, Konferencje Nr 34, 1986, s. 57-62.
67. K.W. Garret, J.E. Bailey, Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester, *J. Mater. Science*, 12, 1977, 157-168.



68. A.Gawęcki, Sprężysto-plastyczne konstrukcje prętowe z luzami, Rozprawy Nr 185, Pol.Poznańska, Poznań 1987.
69. M.Giaquinta, G.Modica, J.Souček, Functionals with linear growth in the calculus of variations, Comment.Math. Univ. Carolinae, 20, 1979, 143-172.
70. E.Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1984.
71. P.Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitmar, London 1985.
72. T.Hadhri, Présentation et analyse mathématique et numérique de quelques modèles pour des structures élastoplastique homogène ou hétérogènes, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1986.
- 72a. Z.Hashin, The differential scheme and its application to cracked materials, J.Mech.Phys.Solids, 36, 1988.
73. M.Janas, J.A.König, A.Sawczuk, Analiza plastyczna konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1972.
74. J.Jarušek, Contact problems with bounded friction. Coercive case, Czech.Mat.J., 33, 1983, 237-261. Semicoercive case, *ibid.* 34, 1984, 619-629.
75. A.L.Kalamkarov, B.A.Kudriavcev, W.Z.Parton, Asimptoticeskij metod osrednija v mehanike kompozitov regularnoj struktury. W: "Mehanika Iverdogo Tela", Itogi Nauki i Tehniki, t.19, VINITI, Moskwa 1987, s.78-147.
76. N.Kikuchi, A class of Signorini's problems by reciprocal variational inequalities. W: "Computational techniques for interface problems", AMD, 30, K.C.Park, D.K.Gartling (red.), Am.Soc.Mech.Eng., New York 1978, s.135-153.
77. N.Kikuchi, J.T.Oden, Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods, SIAM, Philadelphia 1988.
78. D.Kinderlehrer, G.Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York 1980.
79. D.Klarbring, A.Mikelič, M.Shillor, On friction problems with normal compliance, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applic., 13, 1989, 935-955.
80. A.Klarbring, A.Mikelič, M.Shillor, Duality applied to contact problems with friction, w druku.
81. R.V.Kohn, Recent progress in mathematical modeling of composite materials. W: Proc.of a Workshop on Composite Material Response: Constitutive Relations and Damage Mechanisms, G.C.Sih, G.F.Smith, I.H.Marshall, J.J.Su (red.), Glasgow 1987.
82. R.V.Kohn, G.W.Milton (red.), Random media and composites, SIAM, Philadelphia 1989.
83. R.V.Kohn, M.Vogelius, A new model for thin plates with rapidly varying thickness. Part I, Int.J.Solids Struct., 20, 1984, 335-350; Part II. A convergence proof, Quart.Appl.Math., 43, 1985, 1-12; Part III. Comparison of different scalings,

- Quart. Appl. Math., 44, 1986, 35-48.
84. S.M.Kozlov, O dvoistvennosti odnogo tipa funkcionalov, Funkc. Analiz i Priloženija, 17, 1983, 9-14.
85. S.M.Kozlov, Usrednenije raznostnykh schem, Mat.Sbornik, 129(171), 1986, 338-357.
86. E.Z.Lajtai, A.M.Gadi, Friction on a granite to granite interface, Rock Mech. and Rock Eng., 22, 1989, 25-49.
87. P.J.Laurent, Approximation et optimisation, Herrmann, 1972.
88. J.-W.Lee, D.H.Allen, C.E.Harris, Internal state variable approach to predicting stiffness reductions in fibrous laminated composites with matrix cracks, J.Comp.Mater., 23, 1989, 1273-1291.
89. D.Leguillon, E.Sanchez-Palencia, On the behaviour of cracked elastic body with (or without) friction, J.Méc.theorique et appl., 1, 1982, 195-209.
90. F.Léné, Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1984.
91. T.Lewiński, On the interrelation between microlocal parameter and homogenization approaches to the periodic elastic solids, Bull.Pol.Acad.Sci., Techn.Sci., 35, 1987, 383-391.
92. T.Lewiński, Effective models of composite periodic plates, Part I, Part II, Part III. Int.J.Solids Struct., w druku.
93. T.Lewiński, J.J.Telega, On homogenization of fissured elastic plates, Mech.Res.Comm., 12, 1985, 271-281.
94. T.Lewiński, J.J.Telega, Sztywności zastępcze niejednorodnych powłok małowyniosłych o periodycznej strukturze, Prace Naukowe Instytutu Inż. Łąd. Pol.Wrocł., Nr 12, 1986, Konferencje Nr 34, s.93-99.
95. T.Lewiński, J.J.Telega, Asymptotic method of homogenization of fissured elastic plates, J.Elasticity, 19, 1988, 37-62.
96. T.Lewiński, J.J.Telega, Homogenization of fissured Reissner-like plates. Part I: Method of two-scale asymptotic expansions, Arch.Mech., 40, 1988, 97-117; Part III. Some particular cases and illustrative example, ibid, s.295-303.
- 96a. T.Lewiński, J.J.Telega, Asymptotic method of homogenization of two models of elastic shells, Arch.Mech., 40, 1988, 705-723.
97. T.Lewiński, J.J.Telega, Overall properties of plates with partially penetrating fissures, C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.II, 309, 1989, 951-956.
98. T.Lewiński, J.J.Telega, Non-uniform homogenization and effective properties of a class of non-linear elastic shells. W: "Trends and Applications of Mathematics, to Mechanics", Longman, w druku.
99. T.Lewiński, J.J.Telega, Effective properties of plates and shells of periodic structure, w druku.



100. T.Lewiński, J.J.Telega, Homogenization and effective properties of plates weakened by partially penetrating fissures. Part I: Asymptotic analysis, *Int.J.Eng.Sci.*, złożona do druku.
101. J.L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris 1969.
102. K.A.Łuric, A.V.Czerkajev, Effektivnyje charakteristiki kompozicionnych materialov i optimalnoje projektirovanije elementov konstrukciji, *Uspehi Mechaniki*, 2, 1986, 3-81.
103. A.Lutoborski, J.J.Telega, Effective moduli for an elastic arch, *Bull.Acad.Pol.Sci., Sér.sci.techn.*, 30, 1982, 165-170.
104. A.Lutoborski, J.J.Telega, Homogenization of a plane elastic arch, *J.Elasticity*, 14, 1984, 65-77.
105. B.Makaya, Influence de l'état de rugosité a une interface solide-solide sur la transmission de la chaleur d'un milieu a un autre, Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1983.
106. M.Marcus, H.Minc, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn and Bacon, Boston 1984.
107. J.A.C.Martins, J.T.Oden, F.M.F.Simões, A study of static and kinetic friction, *Int.J.Eng.Sci.*, 28, 1990, 29-92.
108. R.Michałowski, Z.Mróz, Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems, *Arch.Mech.Stos.*, 39, 1978, 259-276.
109. G.W.Milton, On characterizing the set of possible effective tensors of composites: the variational method and the translation method, *Comm.on Pure and Appl.Math.*, 43, 1990, 63-125.
110. G.W.Milton, R.V.Kohn, Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites, *J.Mech.Phys.Solids*, 36, 1988, 597-629.
111. J.J.Moreau, On unilateral constraints, friction and plasticity. W: "New Variational Techniques in Mathematical Physics", G.Capriz, G.Stampacchia (red.), Edizioni Cremonese, Roma 1974, s.172-322.
112. J.J.Moreau, Champs et distributions sur un ouvert de connexité quelconque, Séminaire d'Analyse Convexe, Exposé No 6, Montpellier 1976.
113. J.J.Moreau, Bounded variation in time. W: "Topics in Nonsmooth Mechanics", J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos, G.Strang (red.), Birkhäuser, Verlag, Basel 1988, s-1-74.
114. J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos (red.), *Nonsmooth mechanics and applications*, Springer Verlag, Wien-New York 1988.
115. J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos, G.Strang (red.), *Topics in nonsmooth mechanics*, Birkhäuser Verlag, Basel 1988.
116. U.Mosco, Dual variational inequalities, *J.Math.Anal.Appl.*, 40, 1972, 202-206.



117. F.Murat, A survey on compensated compactness. W: "Contributions to Modern Calculus of Variations", L.Cesari (red.), Pitman, Longman Harlow 1987, s.145-183.
118. S.Müller, Homogenization of nonconvex elastic integral functionals and cellular elastic materials, ARMA, 99, 1987, 189-212.
119. J.Nečas, I.Hlaváček, Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981.
120. W.Nowacki, Teoria sprężystości, PWN, Warszawa, 1970.
121. J.T.Oden, T.L.Lin, On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder, Comp. Meth.Appl.Mech.Eng., 57, 1986, 297-367.
122. J.T.Oden, J.A.C.Martins, Model of computational methods for dynamic friction phenomenon, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 52, 1985, 527-634.
123. P.D.Panagiotopoulos, Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions, Birkhäuser Verlag, Boston-Basel 1985.
124. L.Paris, Etude de la régularité d'un champ de vitesses à partir de son tenseur de déformation, Séminaire d'Analyse Convexe, Exposé No 12, Montpellier 1976.
125. P. Ponte Castañeda, The overall constitutive behaviour of nonlinearly elastic composites, Proc.R.Soc.London, A 422, 1989, 147-171.
126. P.Ponte Castañeda, J.R.Willis, On the overall properties of nonlinearly viscous composites, Proc.R.Soc.London, A 416, 1988, 217-244.
127. M.Raous (red.), Numerical methods in mechanics of contact involving friction, J.Méc.théorique et appl., supplément No 1, 7, 1988.
128. R.T.Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton 1970.
129. R.T.Rockafellar, The theory of subgradients and its applications to problems of optimization: convex and nonconvex functions, Heldermann Verlag, 1981.
130. J.Salencq, Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non standard. W: "Problems of Plasticity", A.Sawczuk (red.), Noordhoff Int.Publ., Leyden 1974, s.432-439.
131. E.Sanchez-Palencia, Non-homogeneous media and vibration theory, Springer-Verlag, Berlin 1980.
132. E.Sanchez-Palencia, Homogenization in mechanics. A survey of solved and open problems, Rend.Sem.Mat., Univ.Politecn. Torino, 44, 1986, 1-45.
133. E.Sanchez-Palencia, A.Zaoui (red.), Homogenization techniques for composite media, Lecture Notes in Physics 272, Springer-Verlag, Berlin 1987.

134. M.A.Save, C.E.Massonet, Plastic analysis and design of plates, shells and disks, North-Holland, Amsterdam 1972.
135. A.Sawczuk, Plasticité des plaques, E.N.S.M. Nantes, Mai-Juin, 1982, 106 s.
136. A.Sawczuk, S.Kaliszky, On the limit analysis of plates supported by a nonhomogeneous plastic subgrade under rotational symmetry conditions, Acta Tech.Acad.Sci.Hung., 48, 1964, 185-201.
137. J.Sokół-Supel, Elastoplastic bending of plates resting on elastic subgrade under rotational symmetry conditions, J.Strct.Mech., 13, 1985, 323-341.
138. F.J.M. Starmans, On friction in forming. An experimental-numerical method to quantify contact behaviour, Thesis, Technische Universiteit, Eindhoven, 1989.
139. P.M.Suquet, Une méthode duale en homogénéisation: application aux milieux élastiques, J.Méc.théorique et appl., supplément, 1, 1982, 79-98.
140. P.M.Suquet, Plasticité et homogénéisation, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1982.
141. P.M.Suquet, Approach by homogenization of some linear and nonlinear problems in solid mechanics. W: "Plastic Behaviour of Anisotropic Solids", J.-P.Boehler (red.), Editions du CNRS, Paris 1985, s.77-117.
142. P.M.Suquet, Discontinuities and plasticity. W: "Nonsmooth Mechanics and Applications", J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos (red.), Springer-Verlag, Wien-New York 1988, s.278-340.
143. A.Tadlaoui, Homogénéisation et calcul des microcontraintes d'une plaque thermoélastique perforée dans son épaisseur. Etude théorique et numérique, Le doctorat de 3-ème cycle, Université Claude Bernard - Lyon I, 1986.
144. A.Tadlaoui, R.Tapiero, Calcul par homogénéisation des microcontraintes dans une plaque hétérogène dans son épaisseur, J.Méc.théorique et appl., 7, 1988, 573-595.
145. D.R.S.Talbot, J.R.Willis, Variational principles for inhomogeneous non-linear media, IMA J.Appl.Math., 35, 1985, 39-54.
146. D.R.S.Talbot, J.R.Willis, Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites, IMA J.Appl.Math., 39, 1987, 215-240.
147. J.J.Telega, On variational formulations for non-linear, non-potential operators, J.Inst.Math.Applics, 24, 1979, 175-195.
148. J.J.Telega (red.), Metody analizy funkcjonalnej w plastyczności, Ossolineum, Wrocław 1981.
149. J.J.Telega, Limit analysis theorems in the case of Signorini's boundary conditions and friction, Arch.Mech., 37, 1985, 549-562.
150. J.J.Telega, Variational methods and extremum principles for some non-classical problems of plasticity: unilateral boundary conditions, friction, discontinuities. W: "Variational Method in Engineering", C.A.Brebbia (red.), Springer-



-Verlag, Berlin 1985, s.(8-27)-(8-36).

151. J.J.Telega, Variacionnyje metody v kontaknyh zadačach mehaniki, Uspehi Mehaniki, 10, 1987, s.3-95.
152. J.J.Telega, Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity. W: "Nonsmooth Mechanics and Applications", J.J.Moreau, P.D.Panagiotopoulos (red.), Springer-Verlag, Wien-New York 1988, s.341-462.
153. J.J.Telega, Nierówności wariacyjne w zagadnieniach kontaktowych mechaniki. W: "Mechanika Kontaktowa Powierzchni", Z.Mróz (red.), Ossolineum, Wrocław 1988, s.51-165.
154. J.J.Telega, Homogenization of fissured elastic solids in the presence of unilateral conditions and friction, Comp. Mech., 6, 1990, 109-127.
155. J.J.Telega, Some results of homogenization in plasticity: plates and fissured solids. W: "Inelastic Solids and Structures", M.Kleiber, J.A.König (red.), Pineridge, London 1990, s.343-360.
156. J.J.Telega, Quasi-static Signorini's contact problem with friction and duality. W: "Unilateral Problems in Structural Analysis - 3", G.del Piero, F.Maceri (red.), Birkhäuser Verlag, 1990, w druku.
157. J.J.Telega, Piezoelectricity and homogenization. Application to biomechanics. W: "Continuum Models and Discrete Systems", G.A.Maugin (red.), Longman, London 1990, w druku.
158. J.J.Telega, Homogenization and effective properties of plates weakened by partially penetrating fissures. Part II: Convergence and duality, Int.J.Eng.Sci., złożona do druku.
159. J.J.Telega, Epi-limit on HB and homogenization of heterogeneous perfectly plastic plates, złożona do druku.
160. J.J.Telega, W.R.Bielski, Variational formulation of the transient motion of a rolling cylinder undergoing finite deformations, Mech.Res.Comm., w druku.
161. J.J.Telega, T.Lewiński, Homogenization of fissured Reissner-like plates. Part II: Convergence, Arch.Mech., 40, 1988, 119-134.
162. R.Temam, Mathematical problems in plasticity, Gauthier-Villars, Paris, Trans-Inter-Scientia, Tonbridge 1985.
163. R.Temam, G.Strang, Duality and relaxation in the variational problems of plasticity, J.Méc., 19, 1980, 493-527.
164. J.F.Loland, J.R.Willis, Duality for families of natural variational principles in nonlinear elastostatics, SIAM J. Math.Anal., 20, 1989, 1283-1292.
165. Tribology-friction, lubrication and wear. Fifty years on, t.I-II, Int.Conf., 1-3 July 1987, London, published for the Institution of Mechanical Engineers by Mechanical Engineering Publications Ltd, London 1987.
166. T.E.Tullis (red.), Friction and faulting, Birkhäuser Verlag, Basel 1987.
167. N.Turbé, G.A.Maugin, On the linear piezoelectricity of com-



- posite materials, Math.Meth. in the Appl.Sci., w druku.
168. M.Uesugi, Friction between dry sand and construction materials, Thesis, Tokyo Institute of Technology 1987.
169. P.R.Vergottis, Implementation of variational methods for problems of frictional contact, Thesis, Department of Mathematics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London 1988.
170. J.R.Willis, The structure of overall constitutive relations for a class of nonlinear composites, IMA J.Appl.Math., 43, 1989, 231-242.
171. Cz.Woźniak, Nonstandard analysis in mechanics, Uspehi Mech., 9, 1986, 3-35.
172. K.Yosida, Functional analysis, Springer Verlag, Berlin 1978.
173. A.Zmitrowicz, On the thermodynamics of contact friction and wear, ZN Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, Studia i Materiały, Gdańsk, 287/12<sup>12</sup>/89, 190 s.
174. V.V.Žikov, Voprosy shodimosti, dvoistvennosti i usrednenija dlja funkcionoŭ variacionnogo isczislenija, Izv.AN SSSR, Ser.Mat., 47, 1983, 961-998.

SPIS TREŚCI

	strona
WPROWADZENIE	5
ROZDZIAŁ I. Dualność dla zagadnień kontaktowych z tarciem. Rozszerzenie twierdzeń o nośności granicznej	13
1. Wstęp	13
2. Warunki tarcia i prawa tarcia	14
2.1. Warunki tarcia i subróżniczkowe prawa tarcia	14
2.2. Nielokalne prawa tarcia	19
3. Przemieszczeniowe i naprężeniowe sformułowania wariacyjne zagadnienia Signoriniego z tarciem: przypadek statyczny	22
4. Teoria dualności w sensie M-CD-M dla niejawnych nierówności wariacyjnych	25
5. Zastosowanie teorii dualności w sensie M-CD-M do zagadnienia Signoriniego z tarciem w przypadku statycznym	33
5.1. Kontakt ciała sprężystego ze sztywnym	33
5.2. Kontakt dwóch ciał sprężystych	38
6. Zagadnienie Signoriniego z tarciem: przypadek kwasi-statyczny	43
7. Rozszerzenie teorii dualności w sensie M-CD-M na przypadek niejawnej nierówności wariacyjnej sprzężonej z nierównością wariacyjną	48
8. Zadanie dualne do zadania $Q_d$	50
9. Rozszerzenie twierdzeń o nośności granicznej na przypadek jednostronnych zagadnień kontaktowych	52
9.1. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku warunków Signoriniego bez tarcia	53
9.2. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku tarcia i zadanych naprężeniach normalnych na powierzchni kontaktu	59
9.3. Nośność graniczna w przypadku warunków Signoriniego z tarciem	61
9.4. Twierdzenia o nośności granicznej w przypadku kontaktu ze sztywno-idealnie plastycznym podłożem	65
9.5. Zasady ekstremalne dla ciała idealnie-plastycznego w przypadku kontaktu z podłożem nieliniowo lepkiem	68

ROZDZIAŁ II. Wybrane nieliniowe zagadnienia	strona
homogenizacji	73
1. Wstęp	73
2. Niezbędne wiadomości z zakresu epi-zbieżności i dualności	74
2.1. Epi-zbieżność	74
2.2. Epi-zbieżność a dualność	77
3. Własności efektywne spękanego ośrodka sprężystego	80
3.1. Podejście przemieszczeniowe	91
3.2. Podejście naprężeniowe - homogenizacja dualna	91
4. Homogenizacja spękanego ośrodka sprężystego przy uwzględnieniu tarcia na mikroszczelinach: przypadek statyczny	96
4.1. Podejście przemieszczeniowe	96
4.2. Wyprowadzenie potencjału dopełniającego dla zadanych naprężeń normalnych $\sigma_N$	101
4.3. Postać potencjału dopełniającego w przypadku ogólnym	106
5. Homogenizacja spękanego ośrodka sprężystego przy uwzględnieniu tarcia na mikroszczelinach: przypadek kwasi-statyczny	108
6. Homogenizacja sprężystych płyt spękanych	113
6.1. Podstawowe równania dwuwarstwowego modelu płyty	116
6.2. Płyta dwuwarstwowa osłabiona szczeliną w warstwie dolnej	121
6.3. Homogenizacja płyty osłabionej periodycznie rozłożonymi szczelinami w warstwie dolnej	124
6.4. Zagadnienia zbieżności	129
6.5. Homogenizacja dualna	139
6.6. Przykład	149
7. Homogenizacja płyt idealnie plastycznych	156
7.1. Przestrzeń $HB(\Omega)$ . Wypukłe funkcje i funkcjonały miary	157
7.2. Analiza sprężysto-plastyczna i nośność graniczna: aspekty matematyczne	162
7.3. Homogenizacja w przypadku gdy brzeg płyty nie jest obciążony momentami zginającymi	167
7.3.1. Epi-zbieżność na przestrzeni $W^{1,1}(\Omega)$ ciągu funkcjonałów o wzroście liniowym	168
7.3.2. Epi-zbieżność i relaksacja jednego warunku brzegowego	169
7.3.3. Homogenizacja płyt idealnie plastycznych	173



	strona
7.4. Przypadek ogólny: część brzegu płyty jest obciążona momentami zginającymi	178
7.4.1. Sformułowanie zadań, relaksacja	178
7.4.2. Homogenizacja	184
WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE	192
LITERATURA	196
Spis treści	207



56735