

SPRAWOZDANIA
Z POSIEDZEŃ WYDZIAŁU III T.N.W.

SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE

COMPTES-RENDUS
DES SÉANCES DE LA CLASSE III
SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

XLIII^e ANNÉE

1950



VARSOVIE
SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES
1952

<http://rcin.org.pl>

SPRAWOZDANIA
Z POSIEDZEŃ WYDZIAŁU III
NAUK
MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH

ROK XLIII

1950



WARSZAWA

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA SZKOLNICTWA WYSZSZEGO

1952

Redaktor Naczelny wydawnictw T. N. W.

MIECZYŚLAW BRAHMER

Redaktor wydawnictw Wydziału III

WIKTOR KEMULA

Nakład 950 egz. + 100 nadb. Papier dziękowy g 70, 70 × 100
Zam. 175 z dn. 20.III 1952 r. Druk ukończono dn. 25.X 1952 r.
Objętość 8¹/₈ ark. 3-B-52023

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, ul. Śniadeckich 8.

Posiedzenie

z dnia 24 lutego 1950 r.

Wacław Sierpiński

Sur l'extension d'un théorème de M. D. Pompeiu aux nombres transfinis

Communication présentée à la séance du 24 Février 1950.

D'après un théorème de M. D. Pompeiu, pour qu'un nombre naturel n soit composé, il faut et il suffit que n soit une somme de 4 nombres naturels, $n = a + b + c + d$, où $ad = bc$.

Il existe cependant des nombres ordinaux (transfinis) composés qui ne sont pas des sommes de 4 nombres ordinaux positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tels que $\alpha\delta = \beta\gamma$.

En effet, le nombre ordinal $\omega + 2$ est composé, en tant que produit de deux nombres ordinaux plus petits: $\omega + 2 = 2(\omega + 1)$. Or, si l'on avait $\omega + 2 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont positifs et $\alpha\delta = \beta\gamma$, deux au moins des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devraient être transfinis et leur somme serait $\geq \omega \cdot 2$, ce qui est impossible, vu que $\omega + 2 < \omega \cdot 2$.

D'autre part il y a le

Théorème 1. *Si ν est un nombre ordinal tel que $\nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres ordinaux positifs, tels que $\alpha\delta = \beta\gamma$, le nombre ν est composé.*

Démonstration. Vu le théorème de M. Pompeiu il suffira de démontrer qu'un nombre transfini premier ne peut pas être une somme de 4 nombres ordinaux positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, où $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Comme on sait, les nombres premiers transfinis sont ou bien de la forme ω^{ω^ξ} , où ξ est un nombre ordinal ≥ 0 , ou bien de la forme $\omega^\xi + 1$, où ξ est un nombre ordinal > 0 .

Si l'on avait, pour un nombre ordinal $\xi > 0$, $\omega^{\omega^\xi} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres ordinaux positifs, tels que $\alpha\delta = \beta\gamma$, on aurait $\delta = \omega^{\omega^\xi}$ (vu que le nombre ω^λ , où $\lambda > 0$, n'a pas de restes positifs $< \omega^\lambda$), donc $\beta\gamma = \alpha\delta \geq \omega^{\omega^\xi}$. S'il était $\beta < \omega^{\omega^\xi}$ et $\gamma < \omega^{\omega^\xi}$, il existerait des nombres ordinaux $\lambda < \omega^\xi$ et $\mu < \omega^\xi$, tels que $\beta < \omega^\lambda$ et $\gamma < \omega^\mu$, d'où $\beta\gamma < \omega^{\lambda+\mu}$. Or, comme on sait, les inégalités $\lambda < \omega^\xi$ et $\mu < \omega^\xi$ donnent $\lambda + \mu < \omega^\xi$. On aurait ainsi $\beta\gamma < \omega^{\omega^\xi}$, ce qui est impossible. On a donc ou bien $\beta \geq \omega^{\omega^\xi}$, ou bien $\gamma \geq \omega^{\omega^\xi}$, ce qui donne toujours $\beta + \gamma \geq \omega^{\omega^\xi}$ et, vu que $\delta = \omega^{\omega^\xi}$: $\nu \geq \omega^{\omega^\xi} \cdot 2 > \nu$, ce qui est impossible.

Admettons donc qu'on a, pour un nombre ordinal $\xi > 0$, $\omega^\xi + 1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres ordinaux positifs, tels que $\alpha\delta = \beta\gamma$. Le nombre $\omega^\xi + 1$ a, comme on sait, seulement deux restes positifs: 1 et $\omega^\xi + 1$.

S'il était $\delta = 1$, on aurait $\alpha + \beta + \gamma = \omega^\xi$, d'où $\gamma = \omega^\xi$ et, d'après $\beta\gamma = \alpha\delta$, $\alpha = \alpha\delta \geq \gamma = \omega^\xi$, donc $\alpha \geq \omega^\xi$ et $\nu \geq \alpha + \gamma + \delta \geq \omega^\xi \cdot 2 + 1$, ce qui est impossible, vu que $\nu = \omega^\xi + 1 < \omega^\xi \cdot 2 + 1$.

On a donc $\delta \neq 1$, donc $\delta = \omega^\xi + 1 = \nu$. Il en résulte que $\beta\gamma = \alpha\delta = \alpha(\omega^\xi + 1) = \alpha\omega^\xi + \alpha$.

Soient

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} a_1 + \dots, \quad \beta = \omega^{\beta_1} b_1 + \dots, \quad \gamma = \omega^{\gamma_1} c_1 + \dots$$

les décompositions normales des nombres α, β, γ .

Si le nombre γ était fini, $\gamma = n$, on aurait $\beta n = \alpha\delta \geq \delta = \omega^\xi + 1$, d'où $\beta \geq \omega^\xi$, puisque $\beta < \omega^\xi$ donne, comme on sait $\beta n < \omega^\xi < \omega^\xi + 1$. On aurait donc $\nu \geq \beta + \delta \geq \omega^\xi + \omega^\xi + 1 = \omega^\xi \cdot 2 + 1 > \omega^\xi + 1 = \nu$, ce qui est impossible.

On a donc $\gamma \geq \omega$ et par suite $\gamma_1 > 0$. On en trouve $\beta\gamma = (\omega^{\beta_1} b_1 + \dots)(\omega^{\gamma_1} c_1 + \dots) = \omega^{\beta_1 + \gamma_1} c_1 + \dots$ et, comme $\beta\gamma = \alpha\delta = \alpha\omega^\xi + \alpha = \omega^{\alpha_1 + \xi} + \alpha$, on a $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + \xi$. S'il était $\gamma = \omega^{\gamma_1} c_1$, on aurait $\beta\gamma = \omega^{\beta_1 + \gamma_1} c_1 = \alpha\omega^\xi + \alpha$ et, vu que le plus petit reste positif du nombre $\omega^{\beta_1 + \gamma_1} c_1$ est $\omega^{\beta_1 + \gamma_1}$, on aurait $\alpha \geq \omega^{\beta_1 + \gamma_1}$, donc $\alpha_1 \geq \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + \xi > \alpha_1$, ce qui est impossible.

Or, $\gamma > \omega^{\gamma_1} c_1$, donc $\gamma = \omega^{\gamma_1} c_1 + \tau$, où $\tau > 0$, d'où $\beta\gamma = (\omega^{\beta_1} b_1 + \dots)(\omega^{\gamma_1} c_1 + \tau) \geq \omega^{\beta_1 + \gamma_1} c_1 + \omega^{\beta_1} b_1 \tau$ et, comme $\beta\gamma = \omega^{\alpha_1 + \xi} + \alpha$, on trouve $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + \xi$ et $\alpha \geq \omega^{\beta_1}$, d'où $\alpha_1 \geq \beta_1$. On a donc $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1 + \xi \geq \beta_1 + \xi$, d'où $\gamma_1 \geq \xi$, donc $\gamma \geq \omega^{\gamma_1} \geq \omega^\xi$, d'où $\nu \geq \gamma + \delta \geq \omega^\xi + \omega^\xi + 1 > \omega^\xi + 1 = \nu$, ce qui est impossible.

Le nombre ν ne peut donc pas être premier et le théorème 1 se trouve démontré.

La condition de M. Pompeiu est ainsi suffisante mais pas nécessaire pour qu'un nombre ordinal transfini soit composé. Or, on peut démontrer le

Théorème 2. *Pour qu'un nombre transfini ν soit composé, il faut et il suffit qu'il existe 4 nombres ordinaux positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tels que $\nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ et que ou bien $\alpha\delta = \beta\gamma$, ou bien chacun des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soit > 1 et $< \nu$.*

Démonstration. La suffisance de la condition du théorème 2 résulte immédiatement du théorème 1 et du fait qu'un nombre transfini premier n'a aucun reste plus petit que lui-même et > 1 . Il nous reste donc à démontrer sa nécessité.

Soit donc ν un nombre ordinal transfini composé. Il existe, comme on sait, un nombre ordinal positif ξ tel que $\omega^\xi \leq \nu < \omega^{\xi+1}$.

Si $\nu = \omega^\xi$, vu que ν est composé, on a comme on sait $\xi = \beta_1 + \gamma_1$, où $0 < \beta_1 < \xi$ et $0 < \gamma_1 < \xi$ et en posant $\alpha = 1$, $\beta = \omega^{\beta_1}$, $\gamma = \omega^{\gamma_1}$, $\delta = \nu$, on aura $\nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ et $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Si $\nu > \omega^\xi$, on a $\nu = \omega^\xi + \delta$, où $\delta > 0$, et on a $\delta > 1$, puisque $\delta = 1$ donnerait $\nu = \omega^\xi + 1$ et le nombre ν serait premier, contrairement à l'hypothèse. En posant $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = \omega^\xi$ nous aurons évidemment $\nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ et chacun des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est > 1 et $< \nu$.

La condition du théorème 2 est donc nécessaire.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Quant à la condition que le nombre ordinal ν soit une somme de 4 nombres ordinaux qui soient à la fois > 1 et $< \nu$, elle n'est pas nécessaire pour que le nombre ν soit composé, vu qu'elle n'est pas remplie par le nombre composé $\omega^2 = \omega \cdot \omega$.

S. Ludwik Piotrowski

The problem of weights in the least squares solution of non-linear equations

Mémoire présentée à la seance du 24 février 1950.

We suppose that the left-hand sides of observational equations are known non-linear functions of the unknowns and that on their right-hand sides there are only the absolute terms (measured quantities). When certain assumptions are fulfilled the method of differential corrections leads to the values of unknowns minimizing the sum of squares of residuals — and here we have no essential difference in comparison with the case of linear equations. Things are different with weights. The standard formulae of the method of differential corrections lead in the case of non-linear equations, strictly speaking, not to weights of the solution, but to the reciprocals of the sums of squares of the first order derivatives of the absolute terms. The reciprocals of these sums approximate the weights only in the case when we limit ourselves to small errors. Moreover, the derivatives figuring in the mentioned sums are taken, when standard formulae are used, not for really measured values of the absolute terms, but for such values as result [from the substitution for the unknowns into the left-hand sides of observational equations of values used in the computation of the coefficients of normal equations. The application of the formulae given by the writer in *Harvard Reprint* 304 and repeated in this article permits to compute the first order derivatives of the solution with respect to absolute terms for really measured values of these terms.

The method of least squares has a formal foundation in the case of linear equations. Nevertheless we apply this method often to nonlinear equations. In this case the applying of the method of least squares has partly the character of a certain generally accepted convention: when there are more equations than unknowns we agree to accept for the unknowns of the problem such values which, when substituted into the equations, minimize the sum of squares of the residuals. It is, one could

say, a philosophical side of the problem whether such a choice of values for unknowns is the best possible. We shall not discuss this point here. In what follows we simply assume that the unknowns of the problem are determined from the condition of a minimum of the sum of squares of residuals.

As a rule we apply the method of least squares to a non-linear case in the form of the method of differential corrections. We begin by making a very essential simplification: we develop into Taylor series the functions which are on the left-hand sides of the equations and in the resulting developments we drop all terms with second and higher powers of the corrections of starting values. It can be shown that under certain assumptions the equations linearized in this way, when solved by the least squares method, lead to correct values for the corrections. Speaking more strictly: we can prove that when repeating our procedure we obtain in the limit the best values for unknowns (viz., by definition, the values reducing the sum of squares to a minimum). In practice we seldom have to repeat twice the adjustment; as a rule we try to choose the starting values of the unknowns as near to the best ones as not to have to repeat the whole adjustment.

When using the method of differential corrections we determine usually not only the values of the corrections but also their mean errors. It would be more exact to say: the quantities which would be mean errors if the neglected terms were exactly zeros. The question arises: *what is the exact meaning of quantities obtained as weights* and mean errors from standard formulae of the method of differential corrections. The literature concerning the method of least squares is so large that it is difficult to say to what extent the answer given by the writer is new. Anyway, it seems that these things are little known. There is a strict connection between the problem posed above and the question of interpretation and applicability of the formulae for weights proposed by E. B. Wilson¹⁾ and by the writer²⁾.

¹⁾ E. B. Wilson and R. R. Puffer „Least Squares and Laws of Population Growth”, *Proc. Amer. Acad. Arts. Sci.*, 68, No. 9 (1933).

²⁾ S. L. Piotrowski „Some Remarks on the Weights of Unknowns as Determined by the Method of Differential Corrections”, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 34, No. 2 (1948).

In order to avoid unessential complications we shall consider the case of (non-linear) equations with 2 unknowns. It will be clear from further discussion that general conclusions are applicable as well to the case of a greater number of unknowns. Let there be given n functions $f_i(x, y)$; $i = 1, 2, \dots, n$ with continuous second order derivatives. Let us consider a point in the n -dimensional space L_1, L_2, \dots, L_n ; for the sake of brevity we shall denote this point \hat{L}_i . We shall assume that the expression $\sum_i [f_i(x, y) - L_i]^2$ regarded as a function of x and y has for arbitrary L_i at least one minimum — eventually a local one. Using the geometrical language we can express our assumption as follows:

considering the equations:

$$(1) \quad L_i = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

as the parametric form of the equation of a two-dimensional hypersurface imbedded in the n -dimensional space, we assume that for every point \hat{L}_i there exists on our surface a point nearest (locally) to point \hat{L}_i . The values of the parameters x and y corresponding to this nearest point are, by definition, the „best” values for x and y we are searching for. Let us take an arbitrary point \hat{L}_i and a pair of values x, y minimizing the sum of squares $\sum [f_i(x, y) - L_i]^2$; for these x, y, \hat{L}_i the equations:

$$(2) \quad \sum_i (L_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0,$$

$$\sum_i (L_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0,$$

must be fulfilled. The system of equations (2) is a necessary condition for $\sum [f_i(x, y) - L_i]^2$ being a minimum. If the Jacobian of the functions figuring on the left-hand sides of (2), taken with respect to x and y , is different from zero — and this we shall assume — then the system (2) can be solved locally in a unique way with respect to x and y . These values

of x and y are functions of L_1, L_2, \dots, L_n . We shall denote them by $\bar{x}(L_1, L_2, \dots, L_n)$; $\bar{y}(L_1, L_2, \dots, L_n)$. They characterize the dependence on \bar{L}_i of the values of x and y which render the sum $\Sigma [f_i - L_i]^2$ a minimum. Let us compute the first order partial derivatives of the functions $\bar{x}(L_1, L_2, \dots, L_n)$ and $\bar{y}(L_1, L_2, \dots, L_n)$ with respect to L_1, L_2, \dots, L_n . To this end we substitute \bar{x} and \bar{y} into the equations (2) and we differentiate them. After some rearranging we obtain :

$$(3) \quad \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (f - L) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j} + \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (f - L) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} \frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x},$$

$$\left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (f - L) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j} + \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (f - L) \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} \frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j} = \frac{\partial f_j}{\partial y}.$$

The square brackets denote the summation over i from 1 to n . The system of equations (3) is a system of ordinary linear equations in two unknowns: $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j}$ and since its determinant is, by assumption, different from zero, it can be solved with respect to $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j}$ for each j .

In the coefficients of system (3) there appear terms with second order derivatives of f_i 's depending *explicitely* on L_i 's. These are the terms of the type :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} (f_i - L_i), \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} (f_i - L_i), \dots$$

These terms disappear when point \bar{L}_i lies on the hypersurface (1), in other words: when there exists such a pair of values for x and y that :

$$f_i(x, y) = L_i.$$

Such a pair of values minimize of course the sum $\sum [f_i - L_i]^2$, making it equal zero. In this case we have for determining

$\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j}$ and $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j}$, instead of equations (3), the system:

$$(3a) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j} + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x}, \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j} + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j} = \frac{\partial f_j}{\partial y}. \end{cases}$$

If we take now a pair of values for x and y arbitrary, provided that the determinant of (3a) be different from zero, then, solving the system (3a) with respect to $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j}$, we obtain the derivatives of the functions \bar{x} and \bar{y} in point $\hat{L}_i \equiv \hat{f}_i(x, y)$. In particular, if for \bar{x} , \bar{y} we substitute the values $\bar{x}(L_1, L_2, \dots, L_n)$, $\bar{y}(L_1, L_2, \dots, L_n)$ which make the sum $\sum (f_i - L_i)^2$ a minimum, then, denoting by definition:

$$L_i^a = f_i [\bar{x}(L_1, L_2, \dots, L_n), \bar{y}(L_1, L_2, \dots, L_n)],$$

we obtain from equations (3a) $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_j}$ and $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_j}$ taken in point \hat{L}_i^a , viz. for adjusted values of L_i 's.

Summing up: If we consider the pair of values \bar{x} , \bar{y} which minimize the sum of squares $\sum (f_i - L_i)^2$ as functions of L_1, L_2, \dots, L_n : $\bar{x}(L_1, \dots, L_n)$, $\bar{y}(L_1, \dots, L_n)$, then formulae (3) serve to compute the first order derivatives of these functions with respect to L_1, \dots, L_n in point L_1, L_2, \dots, L_n . Formulae (3a) give the same derivatives in point $L_1^a, L_2^a, \dots, L_n^a$. In both cases we have to substitute in the coefficients of equations (3) or (3a) for x, y : \bar{x}, \bar{y} . If one computes from equations (3a) the derivatives of \bar{x} and \bar{y} substituting in the coefficients of these equations an arbitrary pair of values x_0, y_0 for x, y , the derivatives of \bar{x} and \bar{y} will pertain to point $\hat{L}_i^0 \equiv \hat{f}_i(x_0, y_0)$.

When applying the method of differential corrections to the non-linear equations (1) we proceed as a rule by starting with

certain approximate values for x, y — let us denote them by x_0, y_0 — and we compute then the corrections of these values: Δx and Δy , solving by the least squares method the system of equations:

$$(4) \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta x + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta y = L_i - f_i(x_0, y_0).$$

The normal equations pertaining to (4) are:

$$(5) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \Delta y = \left[\frac{\partial f}{\partial x} (L - f) \right],$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \Delta y = \left[\frac{\partial f}{\partial y} (L - f) \right].$$

If the starting values x_0, y_0 were sufficiently approximate, $x_0 + \Delta x$ and $y_0 + \Delta y$ will be practically identical with the values denoted previously by \bar{x} and \bar{y} which make the sum of squares $\sum (f_i - L_i)^2$ a minimum. According to standard formulae of the method of least squares³⁾ we find the weights of the corrections as the reciprocals of the elements standing on the main diagonal of the inverse of the table of coefficients⁴⁾ of equations (5). On the other side, it can be easily proved that the sums of squares of the derivatives $\frac{\partial x}{\partial L_1}, \frac{\partial x}{\partial L_2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial L_n};$ $\frac{\partial y}{\partial L_1}, \frac{\partial y}{\partial L_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial L_n}$, computed from equations (3a) are equal to the elements on the main diagonal of the inverse of the table of coefficients of equations (3a). Now, the table of coefficients of equations (5) is identical with the table of coefficients of equations (3a) provided that the derivatives $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}$ in (3a) were taken in point x_0, y_0 . Hence we have the conclusion:

³⁾ Whittaker, E. T. and Robinson, G. *The Calculus of Observations*, London, 1932, p. 241.

⁴⁾ T. Banachiewicz, *A A c*, 4, p. 26.

the weights of the corrections computed from standard formulae are equal to the reciprocals of the sums of squares of the derivatives $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_i}$ (viz. $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_i}$) taken in point $\hat{L}_i^0 \equiv \hat{f}_i(x_0, y_0)$. If the corrections $\Delta x, \Delta y$ happen to be exactly 0, in other words: if the starting values x_0, y_0 make the sum of squares of residuals a minimum, then the weights computed from standard formulae are equal to the reciprocals of the sums of squares of the derivatives $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_i}$ (viz. $\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_i}$) taken in the adjusted point \hat{L}_i^a . If we want to know the values of the last mentioned sums for the point \hat{L}_i , formulae (3) should be used for computing the derivatives $\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_i}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial L_i}$.

The reader may note that in the case of f_i 's linear in x, y the functions \bar{x}, \bar{y} are linear in L_1, L_2, \dots, L_n and hence the weights of the least squares solution are exactly equal to the reciprocals of the sums of squares $\sum \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial L_i} \right)^2; \sum \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial L_i} \right)^2$. In the case we are interested in, when f_i 's are non-linear in x, y , the functions \bar{x}, \bar{y} , are also non-linear in L_1, L_2, \dots, L_n and therefore the sums of squares of the first order derivatives of \bar{x} and \bar{y} with respect to L_1, \dots, L_n are not equal to the reciprocals of weights of the solution. If we limit ourselves to small errors, the second and higher powers of which are negligible, the reciprocals of the last mentioned sums of squares computed from standard formulae approximate the weights. There is another reason that may compel us to consider only small errors: if the position of point \hat{L}_i is being changed in a continuous way, the position of the points situated nearest to it on the hyper-surface (1) may change discontinuously because of the „folds” on this hyper-surface.

Summing up: In the case of non-linear equations the standard formulae of the method of differential corrections lead, strictly speaking, not to weights of the unknowns but to the quantities approximating these weights for small errors. What we obtain from standard formulae are the reciprocals of the sums of squares of the first order derivatives of the solution

with respect to the right-hand sides of the observational equations (1). These derivatives are taken not in the observed point L_1, \dots, L_n , but in point $\hat{L}_i^0 \equiv \hat{f}_i(x_0, y_0)$, where x_0, y_0 are values of x and y used in the computation of the coefficients of normal equations. To obtain the derivatives of the solution taken in the observed point, formulae given by the writer in *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34, No. 2 = *Harvard Reprint* 304, and repeated in the present article should be used.

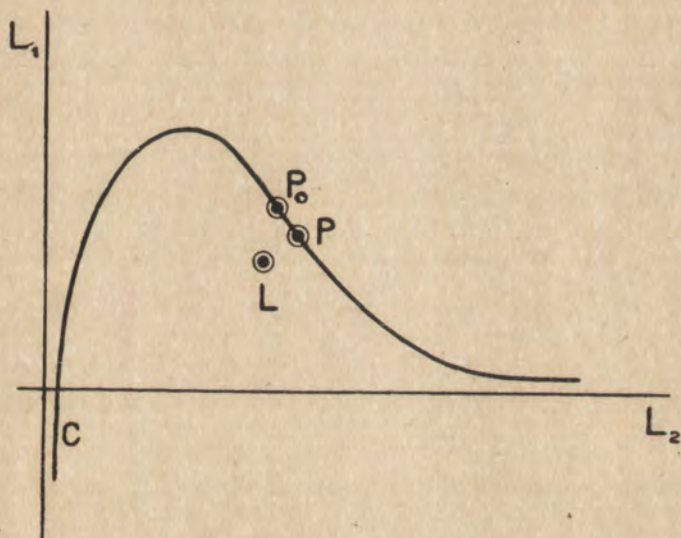


Fig. 1.

Geometrical interpretation of the problem of solving 2 non-linear equations with 1 unknown by the least squares method. L — the observed point; P — the solution; P_0 — the approximate solution. Circles round L , P and P_0 represent small random oscillations of the observed quantities one takes account of when using respectively the author's formulae (L) and standard formulae (P , P_0).

It is clear that if ones aim were to determine from the limits of error of L_i 's the limits of error of the solution, then — provided that these errors be small — only the derivatives taken in point \hat{L}_i ought to be used. Also if the question were to evaluate how much the solution will change when one of L_i 's be subjected to a small variation, the derivative taken in point \hat{L}_i (and not \hat{L}_i^a or $\hat{f}_i(x_0, y_0)$) should be used.

It is worth while to consider the geometrical interpretation of the obtained results. Let us take the possibly simplest case of 2 equations with one unknown. In this case the problem of finding the least squares solution consists in finding on the given plane curve C (see fig. 1) the point P nearest to the observed point L . Now, the standard formulae of the method of differential corrections lead to the „weights” which characterize the uncertainty of the parameter on which depends the position of point P representing the solution when the point representing the right-hand sides of observational equations oscillates in a random fashion in the small circle round point P_0 where P_0 corresponds to the starting value of x or in the circle around P if our first choice was a hit. The „weights” computed from the formulae given by the author⁵⁾ characterize the uncertainty of the position of P when the point representing the absolute terms oscillates in the vicinity of the really observed point L . The situation represented on fig. 1 is greatly exaggerated. In practice, most often — though not always — all three circles will nearly coincide.

It is a pleasant duty for the author to acknowledge his indebtedness to Prof T. Banachiewicz for many stimulating discussions of the problem.

Cracow Observatory,
December 1949.

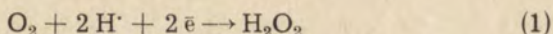
⁵⁾ i. e. „weights” computed as reciprocals of the sums of squares of the partial derivatives of the solution, the derivatives being determined from equations (3).

Wiktor Kemula i Zbigniew R. Grabowski

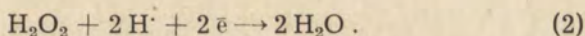
Warunki eksperymentalnego stwierdzenia redukcji tlenu do jonów hydroksylowych

Rozprawa przedstawiona na posiedzeniu dnia 24 lutego 1950 r.

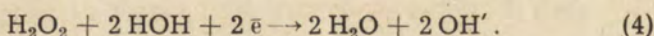
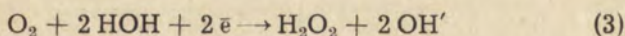
Tlen rozpuszczony w roztworach elektrolitów, redukuje się na kropłowej katodzie rtęciowej dwustopniowo¹⁾. Sumaryczne równania odpowiednich procesów katodowych przedstawiano następująco:



oraz



Kemula i Michalski²⁾, stwierdziwszy zmniejszanie się wysokości fali jonów wodorowych w obecności tlenu, a nawet zanik tej fali, zwrócili uwagę na to, że redukując się w roztworach obojętnych lub alkalicznych tlen pobierać musi jony wodorowe z wody:



Powstające w procesie redukcji tlenu ((3) i (4)) jony hydroksylowe reagować mogą z dyfundującymi do katody kropłowej jonami, wytwarzając np. niezdysocjowane lub trudno-rozpuszczalne wodorotlenki i zmniejszając w ten sposób dopływ owych jonów do elektrody; opisane zostało zmniejszenie prądów granicznych Pb^{\cdot} , Cd^{\cdot} ,³⁾ Fe^{\cdot} , Mn^{\cdot} , NH_4^{\cdot} ⁴⁾ podczas równoczesnej redukcji tlenu.

Przypadki powyższe oraz inne możliwe, analogiczne, objęte zostały przez Kemulę⁴⁾ ogólnym terminem „ukrytych prądów granicznych”. Wówczas, gdy zachodzi reakcja chemiczna między produktami procesu elektrodowego, a innymi jonami lub cząsteczkami zdolnymi do redukcji katodowej, dopływ tych ostatnich do katody może ulec zmniejszeniu. Zmniej-

sza się wówczas prąd graniczny tego składnika roztworu. Różnicę między normalnie znajdowaną wielkością prądu granicznego tego składnika, odpowiadającą jego istotnemu stężeniu w roztworze, a wielkością w ten sposób zmniejszoną, nazywamy ukrytym prądem granicznym.

Wnioski, dotyczące powstawania podczas redukcji tlenu jonów hydroksylowych, wyprowadzone były uprzednio wyłącznie w drodze interpretacji krzywych polarograficznych. Obecnie udało nam się potwierdzić te wnioski drogą bezpośrednich obserwacji mikroskopowych otoczenia kroplowej katody.

Pierwsza seria doświadczeń objęła obserwacje powstawania zabarwień fenoloftaleiny. Zastosowano świeżo przyrządzone roztwory wodne fenoloftaleiny o stężeniu początkowym 10^{-5} — 10^{-4} m. W obojętnych, niebuforowanych roztworach elektrolitów podstawowych: KCl, KNO_3 lub LiCl, przy dostępie powietrza, obserwowano w obecności fenoloftaleiny pojawianie się charakterystycznego zabarwienia tego wskaźnika w otoczeniu kroplowej katody rtęciowej podczas redukcji tlenu.

Zbadano wpływ dodatku fenoloftaleiny na polarograficzną redukcję tlenu. Jak wiele innych związków powierzchniowo-aktywnych, fenoloftaleina w małych stężeniach (rzędu 10^{-6} — 10^{-5} m.) tłumy tylko maximum, występujące na pierwszej fali redukcji tlenu; w stężeniu nieco większym, rzędu 10^{-5} — 10^{-4} m., następuje przesunięcie potencjału pierwszego stopnia redukcji tlenu ku wartościom bardziej ujemnym.

Stwierdzono, że powstawanie zabarwienia nie jest wywołane redukcją katodową fenoloftaleiny, a tylko powstawaniem jonów hydroksylowych na powierzchni katody kroplowej. Zabawienie pojawiało się dopiero od potencjału redukcji tlenu, a intensywność zabarwienia zwiększała się ze wzrostem natężenia prądu redukcji tlenu.

Zabawienie fenoloftaleiny zaobserwowano również i w roztworach kwasywnych. Zgodnie z przewidywaniem w roztworach HCl o stężeniu 10^{-4} — 10^{-3} m., w których fala jonów wodorowych wcale się nie pojawia, przedstawiając tylko ukryty prąd graniczny²⁾, przy potencjałach drugiej fali redukcji tlenu warstwa roztworu dokoła katody kroplowej stawała się wyraźnie alkaliczna.

Zabarwienie fenoloftaleiny występuje również podczas redukcji katodowej innych związków, redukujących się z pobraniem wodoru. Zostało ono zaobserwowane podczas redukcji H_2O_2 , NO_3^- , BrO_3^- , CH_2Br_2 itp.

Zabarwienie to pozwala na łatwą obserwację zakłóceń warstwy dyfuzyjnej, uwidaczniając jej zarys i przesunięcia w roztworze.

Druga seria doświadczeń dotyczyła powstawania trudno-rozpuszczalnych wodorotlenków. Podczas redukcji O_2 w roztworach soli Cd, lub NO_3^- w obecności La^{3+} , zaobserwowano dłuższe niezlewanie się opadłych na anodę kropli rtęci z rtęcią anodową. Efekt taki zauważony został już dawniej podczas redukcji JO_3^- w obecności La^{3+} i został przypisany tworzeniu się na powierzchni elektrody kropłowej warstwy $La(OH)_3$ ⁵⁾. Dokładne obserwacje elektrody kropłowej wykazały w takich przypadkach powstawanie dokoła wylotu kapilary nieruchomego pierścienia wodorotlenku, utrzymującego się na szkle kapilary nawet po wyjęciu jej z otworu i przemyciu, a znikającego dopiero po przemyciu jej kwasem.

Powstawanie takiego osadu zmienia często czas trwania kropli, a co za tym idzie, i wartość prądów granicznych.

Zakład Chemii Nieorganicznej
Uniwersytetu Warszawskiego.

PISMIENNICTWO

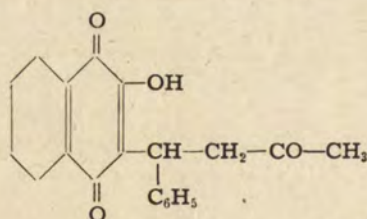
- 1) J. Heyrovsky, Trans. Faraday Soc. **19**, 785 (1924).
- 2) W. Kemula, M. Michalski, Roczn. Chem. **16**, 535 (1936).
- 3) I. M. Kolthoff, C. S. Miller, J. Am. Chem. Soc. **63**, 1013 (1941).
- 4) W. Kemula, Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz., Wydz. III, **40**, 3 (1947).
- 5) E. F. Orlemann, I. M. Kolthoff, J. Am. Chem. Soc. **64**, 1970 (1942).

Irena Chmielewska i Bronisława Jurecka

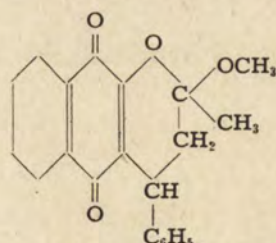
Nowa grupa związków o działaniu antyprotrombinowym

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 24 lutego 1950 r.

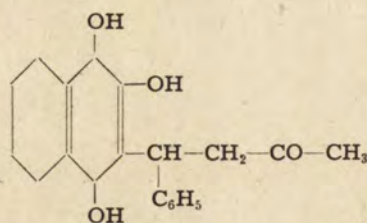
Wobec niemożności otrzymania w wyniku cyklizacji zdolnych do enolizacji łańcuchowych 1.5.dwuketonów⁺), układu . α . β .dwyhydro. α .hydroksy.pyranowego który wg hipotezy jednej z nas jest przyczyną antyprotrombinowego działania dikumarolu, zwróciłyśmy uwagę na ugrupowanie fenolowe, którego kwasowość zostaje wybitnie zwiększona w wyniku oddziaływania grup sąsiadujących. Ta grupa wodorotlenowa łącznie z grupą ketonową, umieszczoną w łańcuchu bocznym zdolna jest do wytworzenia poszukiwanego przez nas układu cyklowego. Dlatego też otrzymaliśmy i przeprowadziłyśmy badania fizjologiczne dwóch związków, opisanych przez Zauga¹⁾: α .fenylo. β .acetylo/.etylo.1.4.naftochinonu (I), oraz jego metyloketalu (II). Zarówno związki te, jak i otrzymane przez nas ich produkty redukcji, a więc odpowiednie hydrochinony (III i IV) wykazują działanie antyprotrombinowe.



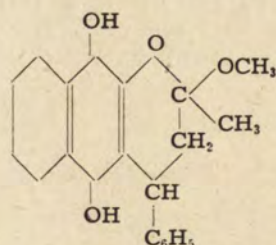
I



II



III



IV

⁺) Komunikat w Tow. Nauk. Warsz. z dn. 27.V. 1949.

¹⁾ Zaug J. Am. Chem. Soc. 71, 1890 (1949).

Ponieważ nie są to pochodne 4-hydroksykumaryny, a posiadają budowę, warunkującą według hipotezy jednej z nas działanie antyprotrombinowe, tym samym hipoteza uzyskała potwierdzenie.

Szczegółowy opis badań, podanych w tym komunikacie, zostanie opublikowany w Biuletynie Głównego Instytutu Chemii Przemysłowej.

Warszawa, Instytut Chemiczny
Oddział Biochemiczny

Zofia Kasprzykówna

Trójterpeny nagietka (*Calendula Officinalis*)

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 24 lutego 1950 r.

W toku badań nad substancjami czynnymi, występującymi w *Calendula officinalis* wyodrębniono z suszonych kwiatów tej rośliny jednowodorotlenowy alkohol, należący do grupy trójterpenów.

Porównanie temperatur topnienia otrzymanego związku oraz jego pochodnych z odpowiednimi danymi dla znanych monoli trójterpenowych wskazuje na to, że jest to związek dotychczas nieopisany.

Występowanie jednowodorotlenowego alkoholu trójterpenowego w kwiatach *Calendula off.* nie jest w zgodzie z regułą podaną przez Zimmermann'a.¹⁾ W wyniku badań porównawczych, przeprowadzonych na szeregu kwiatów i owoców autor ten stwierdził, że typ trójterpenu nieglukozydowego zależy od typu barwnika, występującego w danej roślinie. Tak więc monole znalezione jedynie w kwiatach bezbarwnych, diole łącznie z karotenoidami, a hydroksykwasy z antocjanami i flawonolami. Nie stwierdzono dotychczas występowania w jednej części rośliny równocześnie monoli i dioli trójterpenowych.

Z kwiatów *Calendula off.*, zawierających barwniki karotenoidowe wyodrębniono uprzednio 2 diole: faradiol i arnidiol.²⁾ Otrzymanie obok tych związków monolu wskazuje na możliwość równoczesnego występowania trójterpenów o różnej zawartości grup hydroksylowych.

Rozdzielenie związków przeprowadzono na zasadzie różnicy ich rozpuszczalności w eterze naftowym. Nowy monol kryształuje się z alkoholu w igłach o temp. topn. 193—194°. Rozpuszcza się dobrze w benzynie i eterze, trudniej w alkoholu, eterze naftowym i acetonie.

Z chlorkiem cynawym w chlorku tionylu wykazuje reakcję barwną, charakterystyczną dla grupy trójterpenów.³⁾

W wyniku analizy elementarnej znaleziono:

C—84,44% 84,12% H—11,20% 11,31%.

Dla wzoru $C_{30}H_{50}O$ obliczono: C—84,5% H—11,73%.

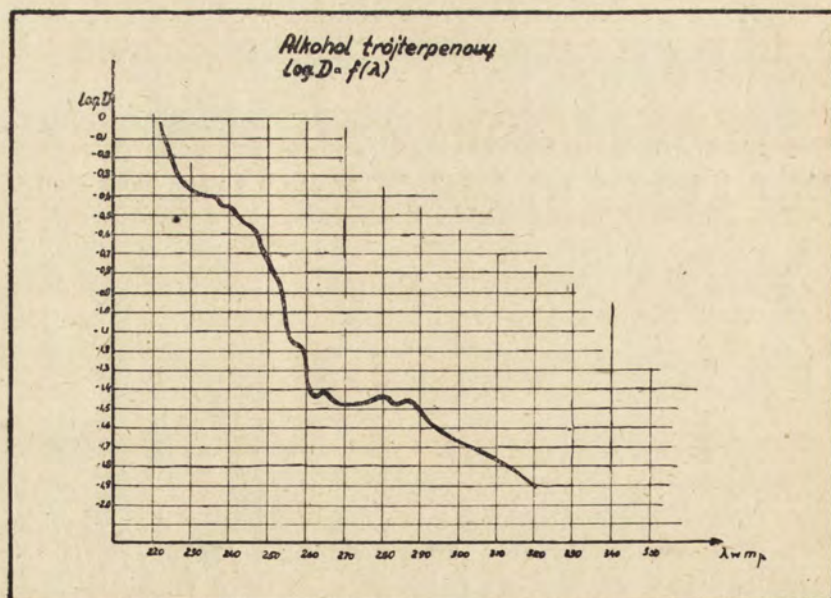
Ciężar cząsteczkowy oznaczony metodą Rast'a wynosi 412 (teoretycznie dla $C_{30}H_{50}O$ —426).

Metodą Cerewitinowa wykazano obecność jednej grupy wodorotlenowej, co zostało potwierdzone przez otrzymanie jednooctanu (temp. topn. 216—217°) tego związku.

Analiza elementarna octanu dała następujące wyniki:

C—82,17% 81,72% H—10,77% 11,06%

dla wzoru $C_{32}H_{52}O_2$ obliczono: C—82,05% H—11,11%.



Widmo absorpcyjne w nadfiolecie otrzymanego monolu jest mało charakterystyczne. brak wyraźnego maximum wskazuje, że w związku tym nie ma sprzężonych wiązań podwójnych.

Obecnie prowadzone badania mają na celu przede wszystkim ustalenie liczby i rodzaju wiązań podwójnych oraz budowy szkieletu węglowego nowego alkoholu trójtterpenowego.

Warszawa, Instytut Chemiczny
Oddział Biochemiczny

PRZYPISY

- 1) Helv. Chim. Acta. **27**, 332 (1944).
 - 2) Helv. Chim. Acta. **29**, 1455 (1946).
 - 3) J. Am. Chem. Soc. **64**, 3047 (1942).
-

Posiedzenie

z dnia 24 marca 1950 r.

Wacław Sierpiński

Sur les produits infinis de nombres ordinaux

Communication présentée à la séance du 24 Mars 1950.

$\{\alpha_\xi\}_{\xi < \varphi}$ étant une suite transfinie du type φ de nombres ordinaux positifs, on définit par l'induction transfinie le produit

$$\prod_{\xi < \varphi} \alpha_\xi$$

comme il suit.

$\prod_{\xi < \varphi} \alpha_\xi$ est le plus petit nombre ordinal $\geq \prod_{\xi < \mu} \alpha_\xi \cdot \alpha_\mu$ pour $\mu < \varphi$ ¹⁾.

En particulier, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ étant une suite infinie (du type ω) de nombres ordinaux, le produit infini $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ est le plus petit nombre ordinal $\geq \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ pour $n = 1, 2, \dots$, et, si $\alpha_n > 0$ pour $n = 1, 2, \dots$ et s'il existe une infinité de nombres naturels n pour lesquels $\alpha_n > 1$, on a

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots = \lim_{n < \omega} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

¹⁾ Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 119.

Si $\alpha_\xi = \alpha$ pour $\xi < \varphi$, on trouve

$$\prod_{\xi < \varphi} \alpha_\xi = \alpha^\varphi.$$

Si l'on définit pour α ordinaux la fonction $\Gamma(\alpha)$ par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \prod_{\xi < \alpha} \xi,$$

et la fonction $\alpha!$ par la formule $\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$, on aura

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \omega, \quad \omega! = \omega^2, \quad \Gamma(\omega \cdot 2) = \omega^\omega, \quad (\omega \cdot 2)! = \omega^{\omega+1} \cdot 2, \\ \Gamma(\omega^2) &= \omega^{\omega^2} = \Gamma(\omega!), \quad (\omega!)! = (\omega^2)! = \omega^{\omega^2+2}, \quad \Gamma(\omega^\omega) = \omega^{\omega^\omega}, \\ (\omega^\omega)! &= \omega^{\omega^\omega+\omega}. \end{aligned}$$

On démontre facilement que le produit d'une suite transfinie de nombres ordinaux est associatif mais pas commutatif. Or, on a le

Théorème 1. *En changeant l'ordre des facteurs d'un produit infini donné (du type ω) de nombres ordinaux, on n'obtient qu'un nombre fini de valeurs distinctes de ce produit¹⁾.*

Démonstration. Il suffira évidemment de démontrer notre théorème dans le cas où la suite infinie de facteurs du produit infini considéré contient une infinité de nombres > 1 , et où tous les facteurs sont positifs. Soit donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ une telle suite.

Nous dirons qu'un terme α_k de notre suite *jouit de la propriété P*, s'il n'existe qu'un nombre fini (ou nul) de nombres naturels n , tels que $\alpha_n \geq \alpha_k$. Comme j'ai démontré²⁾, le nombre de termes α_k jouissant de la propriété *P* est fini. Soient

$$(1) \quad \alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}, \dots, \alpha_{m_s} \quad (\text{où } m_1 < m_2 < \dots < m_s)$$

tous les termes de notre suite jouissant de la propriété *P*.

Posons

¹⁾ Cf. le théorème analogue pour les séries infinies de nombres ordinaux: W. Sierpiński, Fund. Math. 36 (1949), p. 248.

²⁾ l. c. p. 249.

$$(2) \quad \gamma_n = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} \dots \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

On a évidemment $\gamma_n = \alpha_{n+1} \gamma_{n+1} \geq \gamma_{n+1}$, donc

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \dots$$

Le signe $>$ ne peut pas figurer ici une infinité de fois (vu qu'il n'existe aucune suite infinie décroissante de nombres ordinaux): il existe donc un nombre naturel $p > m$, tel que $\gamma_p = \gamma_{p+1} = \gamma_{p+2} = \dots$. On a donc

$$\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} \dots = \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \alpha_{p+3} \dots \quad \text{pour } n \geq p,$$

donc, en posant $\alpha = \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \alpha_{p+3} \dots$:

$$(3) \quad \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} \dots = \alpha \quad \text{pour } n \geq p.$$

La suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ contenant une infinité de termes > 1 , il résulte de la définition du nombre α que

$$(4) \quad \alpha = \lim_{k < \omega} \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \dots \alpha_{p+k}.$$

Soit maintenant ξ un nombre ordinal tel que $0 < \xi < \alpha$. D'après (4) il existe un nombre naturel k tel que

$$\xi < \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \dots \alpha_{p+k}$$

et on a

$$\xi \alpha_{p+k+1} \alpha_{p+k+2} \alpha_{p+k+3} \dots \leq \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \alpha_{p+3} \dots,$$

donc, d'après (3):

$$\xi \alpha \leq \alpha$$

et, comme évidemment $\xi \alpha \geq \alpha$, on trouve $\xi \alpha = \alpha$.

On a ainsi

$$(5) \quad \xi \alpha = \alpha \quad \text{pour } 0 < \xi < \alpha.$$

Nous démontrerons maintenant le

Lemme. Si α est un nombre ordinal transfini jouissant de la propriété (5), on a

$$(6) \quad \xi \beta \alpha = \beta \alpha \quad \text{pour } 0 < \xi < \alpha,$$

quel que soit le nombre ordinal β .

Démonstration du lemme. Si $\beta < \alpha$, on a, d'après (5): $\beta \alpha = \alpha$ et $\xi \beta \alpha = \beta \alpha$ pour $0 < \xi < \alpha$, donc la formule (6).

Si $\beta \geq \alpha$, on a $\beta = \alpha \zeta + \tau$, où $\zeta \geq 1$ et $\tau < \alpha$. Le nombre transfini α jouissant de la propriété (5) est de deuxième espèce. En effet, s'il était $\alpha = \lambda + 1$, on aurait d'après (5) (vu que $2 < \alpha$): $2(\lambda + 1) = 2\alpha = \alpha = \lambda + 1$, ce qui est impossible, puisque $2(\lambda + 1) = 2\lambda + 2 \geq \lambda + 2 > \lambda + 1$. Or, d'après $\tau < \alpha$, on a $\beta = \alpha \zeta + \tau < \alpha \zeta + \alpha = \alpha(\zeta + 1)$ et le nombre α étant de deuxième espèce, on a $(\zeta + 1)\alpha = \zeta \alpha$, ce qui donne $\beta \alpha = \alpha(\zeta + 1)\alpha = \alpha \zeta \alpha$ et, pour $0 < \xi < \alpha$, d'après (5): $\xi \beta \alpha = \xi \alpha \zeta \alpha = \alpha \zeta \alpha = \beta \alpha$. On a ainsi la formule (6) et le lemme est démontré.

Revenons à la démonstration du théorème 1. Soit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ un produit infini de nombres ordinaux positifs dont une infinité est > 1 , et soit $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ un produit infini qui ne diffère que par l'ordre de ses termes du produit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$.

Il résulte de la définition de la suite (1) qu'il existe un indice q tel que, pour $k > q$, β_k n'est pas un terme de la suite (1). Il existe donc pour tout $k \geq q$ une infinité de nombres naturels n tels que $\alpha_n \geq \beta_k$.

Je dis que

$$(7) \quad \beta_{q+1} \beta_{q+2} \beta_{q+3} \dots = \alpha,$$

où α est le nombre ordinal satisfaisant à l'équation (3).

Il existe, en effet, un indice $n_1 > p > m_s$ tel que $\alpha_{n_1} \geq \beta_{q+1}$, ensuite un indice $n_2 > n_1$, tel que $\alpha_{n_2} \geq \beta_{q+2}$, puis un indice $n_3 > n_2$, tel que $\alpha_{n_3} \geq \beta_{q+3}$ et ainsi de suite. On a donc

$$\beta_{q+1} \beta_{q+2} \beta_{q+3} \dots \leq \alpha_{n_1} \alpha_{n_2} \alpha_{n_3} \dots \leq \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \alpha_{p+3} \dots = \alpha.$$

Or, si l'on pose $\beta_{q+1} \beta_{q+2} \beta_{q+3} \dots = \beta$, on démontre de même que $\alpha = \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \alpha_{p+3} \dots \leq \beta$ (puisque les suites $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ et β_1, β_2, \dots ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes). On a donc $\beta = \alpha$, c. à. d. la formule (7), c. q. f. d.

Si β_k n'est pas un terme de la suite (1), il existe une infinité de n tels que $\alpha_n \geq \beta_k$ et on a évidemment $\beta_k < \alpha$. $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q$ est donc un produit dont les facteurs sont des nombres (1) (qui tous figurent dans la suite $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, chacun le même nombre de fois que dans la suite (1)) ou bien sont des

nombres ordinaux $< \alpha$. D'après le lemme de tels facteurs peuvent être omis sans changer la valeur du produit. Il en résulte tout de suite que le produit $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ est un nombre de la forme

$$(8) \quad \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \dots \alpha_{k_s} \alpha,$$

où k_1, k_2, \dots, k_s est une permutation des nombres m_1, m_2, \dots, m_s . Or, l'ensemble des nombres de la forme (8) étant fini, le théorème 1 se trouve démontré.

En particulier, si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots$, il n'existe dans la suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ aucun terme jouissant de la propriété P , et il résulte tout de suite de notre démonstration que la valeur du produit infini $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ est α quel que soit l'ordre de ses termes. On a donc le

Théorème 2. *La valeur du produit infini de nombres ordinaux $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$, où $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots$, ne change pas par un changement quelconque de l'ordre de ses facteurs.*

Il est facile à donner, pour tout n naturel, un exemple d'un produit infini de nombres ordinaux admettant précisément n valeurs distinctes, lorsqu'on change l'ordre de ses facteurs. Tel est par exemple le produit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$, où $\alpha_i = 2$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $\alpha_n = \omega$, et $\alpha_n = 1$ pour $i \geq n + 1$. Les valeurs de ce produit (lorsqu'on change l'ordre de ses facteurs) sont (seulement) les nombres $\omega \cdot 2^{k-1}$, où $k = 1, 2, \dots, n$.

Il est à remarquer que le produit transfini du type $\omega + 1$ peut donner une infinité de valeurs différentes lorsqu'on change l'ordre de ses facteurs. Par exemple le produit (du type $\omega + 1$) $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \omega$, lorsqu'on y échange les facteurs n et ω , donne la valeur $\omega^2 n$ et ces nombres sont différents pour $n = 1, 2, \dots$.

Michał Kamiński

Researches on the origin of the Comet P/Wolf I Part VII

The motion of the comet under the influence of Jupiter and
Saturn during the period

1800 Jan. 4.5 — 1793 Apr. 20.5

Mémoire présentée à la séance du 24 mars 1950.

1. In the author's researches on the motion of the comet P/Wolf I before its discovery in 1884 it was proved that its greatest approaches to Jupiter in the period 1800—1884 were:

1839 Nov. 13.1 $\Delta = 0.5382$

1875 June 8.7 $\Delta = 0.1180$

These approaches influenced very much the systems of elements of the comet.

In accordance with the considerations given in Part VI of the author's „Researches“ which is at present in press in the Comptes Rendus des Séances de la Classe III de la Société des Sciences et de Lettres de Varsovie, it seems to be quite possible and even desirable to continue the path of this comet backwards up to 1750, taking however into consideration the influences of Jupiter and Saturn. Those of the other planets can in this case be neglected, because they have little importance for the problem of the comet's origin.

Now, the theory of the Comet P/Wolf I agrees with its observations during the period 1884—1942 so well that one can rely entirely upon the systems P_i of elements and prolong them backwards even up to 1750, i. e. for the period c. twice as long as that during which the comet has been observed. One can assume that this extrapolation containing of course the perturbations due to Jupiter and Saturn, would give for 1750 the system of elements close enough to the actual one.

The aim of the author's researches mentioned above is the computation of the variations of comet distances from Jupiter as well as detection of its eventual relation to the other comets observed during the said period. A very close approach of the comet to Jupiter could give moreover an indication on the possible role of Jupiter in the origin of this comet. There are however several other considerations which give strong evidence against this theory (v. A. Corlin, Festkrift Tillägrad Östen Bergstrand ten 1 September 1938).

2. The system P_{-16} of elements for 1800 January 4.5 Gr. Mean Time deduced in Part VI of the author's „Researches on the origin of the comet P/Wolf I“ (l. c.) was taken as a basis for further computations:

1800 January 4.5 Fr.M.T.

$$\left. \begin{array}{ll} M = 288^{\circ}16'4''.5 & \Omega = 212^{\circ}54'18''.6 \\ P_{-16} \dots \varphi = 23^{\circ}42'4''.2 & \pi = 12^{\circ}37'16''.7 \\ \mu = 421''.3704 & i = 26^{\circ}46'39''.1 \end{array} \right\} 1950.0$$

With this system the retrograd perturbations in the motion of the comet up to 1793 Apr. 20.5 were computed. The differentials of perturbations are given in the adjacent Tables (p. 28—35). After their integration the author got:

1800 January 4.5 — 1793 April 20.5

	Jupiter	Saturn	Total
δM	+ 1501''.4	— 193''.5	+ 1307''.9
$\delta \varphi$	— 100''.8	+ 36''.9	— 63''.9
$\delta \Omega$	+ 287''.4	— 1''.7	+ 285''.7
$\delta \pi$	— 248''.3	+ 63''.6	— 184''.7
δi	— 43''.4	+ 10''.3	— 33''.1
$\delta \mu$	— 0''.0667	+ 0''.0330	— 0''.0337

As can be seen, the perturbations are not too great. But they ought to be taken into consideration, because the varia-

tions of the systems of its elements however little play an important role with regard to the previous and next approaches of the comet to Jupiter.

Adding the above totals to system P_{-16} , the author derived the following perturbed system P_{-17} of elements:

1793 April 20.5 Gr.M.T.

$$\left. \begin{array}{ll} M = 1^{\circ}51'54''.9 & \Omega = 212^{\circ}59' 4''.3 \\ P_{-17} \dots \varphi = 23^{\circ}41' 0''.3 & \pi = 12^{\circ}34'12''.0 \\ \mu = 421''.3367 & i = 26^{\circ}46' 6''.0 \end{array} \right\} 1950.0$$

This last system was taken as a basis for the further computation of variations in the comet's motion during the periods 1793—1750.

As can be seen from the adjacent Tables, the distances of the comet from Jupiter were large enough in the period 1800—1793. They fluctuated from 10.71 in the autumn of 1797 to 7.01 in the beginning of 1793.

Cracow, February 1950.

JUPITER

1800 Jan. 4.5 — 1793 April 20.5

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
		"	"	"	"	"	"	
1793 Jan.	10.5	+ 0'8	+ 286'4	-- 0'3	-- 42'4	+ 10'1	-- 115'5	7'009
March	1.5	+ 0'7	+ 287'1	-- 0'6	-- 43'0	+ 10'0	-- 105'5	7'247
Apr.	20.5	+ 0'5	+ 287'6	-- 0'8	-- 43'8	+ 9'3	-- 96'2	7'468
June	9.5	0'0	+ 287'6	-- 1'0	-- 44'8	+ 8'3	-- 87'9	7'663
July	30.5	-- 0'6	+ 287'0	-- 1'2	-- 46'0	+ 6'2	-- 80'7	7'835
Sept.	17.5	-- 1'5	+ 285'5	-- 1'4	-- 47'4	+ 6'1	-- 74'6	7'983
Nov.	6.5	-- 2'5	+ 283'0	-- 1'5	-- 48'9	+ 5'4	-- 69'2	8'112
Dec.	26.5	-- 3'6	+ 279'4	-- 1'4	-- 50'3	+ 5'1	-- 64'1	8'226
1794 Feb.	14.5	-- 4'8	+ 274'6	-- 1'3	-- 51'6	+ 4'9	-- 59'2	8'333
Apr.	5.5	-- 6'0	+ 268'6	-- 1'2	-- 52'8	+ 5'1	-- 54'1	8'439
May	25.5	-- 7'1	+ 261'5	-- 0'9	-- 53'7	+ 5'5	-- 48'6	8'544
July	14.5	-- 8'3	+ 253'2	-- 0'6	-- 54'3	+ 6'0	-- 42'6	8'650
Sept.	2.5	-- 9'3	+ 243'9	-- 0'2	-- 54'5	+ 6'7	-- 35'9	8'761
Oct.	22.5	-- 10'3	+ 233'6	+ 0'2	-- 54'3	+ 7'3	-- 28'6	8'874
Dec.	11.5	-- 11'1	+ 222'5	+ 0'7	-- 53'6	+ 8'0	-- 20'6	8'989
1795 Jan.	30.5	-- 11'9	+ 210'6	+ 1'2	-- 52'4	+ 8'6	-- 12'0	9'105
March	21.5	-- 12'5	+ 198'1	+ 1'7	-- 50'7	+ 9'1	-- 2'9	9'224
May	10.5	-- 12'9	+ 185'2	+ 2'3	-- 48'4	+ 9'5	+ 6'6	9'346
June	29.5	-- 13'2	+ 172'0	+ 2'8	-- 45'6	+ 9'8	+ 16'4	9'469
Aug.	18.5	-- 13'3	+ 158'7	+ 3'3	-- 42'3	+ 10'0	+ 26'2	9'591
Oct.	7.5	-- 13'2	+ 145'5	+ 3'8	-- 38'5	+ 10'1	+ 36'5	9'711
Nov.	26.5	-- 13'0	+ 132'5	+ 4'3	-- 34'2	+ 10'0	+ 46'5	9'828
1796 Jan.	15.5	-- 12'6	+ 119'9	+ 4'7	-- 29'5	+ 9'8	+ 56'3	9'942
March	5.5	-- 12'1	+ 107'8	+ 5'0	-- 24'5	+ 9'5	+ 65'8	10'050
Apr.	24.5	-- 11'4	+ 96'4	+ 5'2	-- 19'3	+ 9'0	+ 74'8	10'152
June	13.5	-- 10'6	+ 85'8	+ 5'4	-- 13'9	+ 8'4	+ 83'2	10'247]
Aug.	2.5	-- 9'7	+ 76'1	+ 5'5	-- 8'4	+ 7'7	+ 90'9	10'336
Sept.	21.5	-- 8'7	+ 67'4	+ 5'5	-- 2'9	+ 6'8	+ 97'7	10'418
Nov.	10.5	-- 7'7	+ 59'7	+ 5'4	+ 2'5	+ 5'9	+ 103'6	10'492
Dec.	30.5	-- 6'7	+ 53'0	+ 5'2	+ 7'7	+ 4'9	+ 108'5	10'557
1797 Feb.	18.5	-- 5'6	+ 47'4	+ 5'0	+ 12'7	+ 3'9	+ 112'4	10'610
Apr.	9.5	-- 4'6	+ 42'8	+ 4'6	+ 17'3	+ 2'7	+ 115'1	10'650
May	29.5	-- 3'7	+ 39'1	+ 4'2	+ 21'5	+ 1'6	+ 116'7	10'682
July	18.5	-- 2'8	+ 36'3	+ 3'6	+ 25'1	+ 0'4	+ 117'1	10'702

JUPITER

1800 Jan. 4.5 — 1800 April 20.5

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda d\delta n$	'f	"f	P	'f
1793 Jan.	10.5	— 10'4	— 236'0	— 2'499	+ 0'168	+ 249'923	+ 8'8	+ 1247'0
March	1.5	— 8'6	— 244'6	— 2'397	— 2'229	+ 250'091	+ 5'3	+ 1252'3
Apr.	20.5	— 7'1	— 251'7	— 2'163	— 4'392	+ 247'862	+ 2'0	+ 1254'3
June	9.5	— 6'1	— 257'8	— 1'823	— 6'215	+ 243'470	— 0'4	+ 1253'9
July	30.5	— 6'2	— 264'0	— 1'434	— 7'649	+ 237'255	— 1'7	+ 1252'2
Sept.	17.5	— 7'1	— 271'1	— 1'045	— 8'694	+ 229'606	— 2'0	+ 1250'2
Nov.	6.5	— 8'6	— 279'7	— 0'690	— 9'384	+ 220'912	— 1'4	+ 1248'8
Dec.	26.5	— 10'4	— 290'1	— 0'486	— 9'770	+ 211'528	— 0'5	+ 1248'3
1794 Feb.	14.5	— 12'1	— 302'2	— 0'144	— 9'914	+ 201'758	+ 0'4	+ 1248'7
Apr.	5.5	— 13'5	— 315'7	+ 0'045	— 9'869	+ 191'844	+ 1'1	+ 1249'8
May	25.5	— 14'4	— 330'1	+ 0'186	— 9'683	+ 181'975	+ 1'5	+ 1251'3
July	14.5	— 15'0	— 345'1	+ 0'288	— 9'395	+ 172'292	+ 1'5	+ 1252'8
Sept.	2.5	— 15'0	— 360'1	+ 0'355	— 9'040	+ 162'897	+ 0'9	+ 1253'7
Oct.	22.5	— 14'5	— 374'6	+ 0'397	— 8'643	+ 153'857	— 0'2	+ 1253'5
Dec.	11.5	— 13'7	— 388'3	+ 0'420	— 8'223	+ 145'214	— 1'6	+ 1251'9
1795 Jan.	30.5	— 12'4	— 400'7	+ 0'425	— 7'798	+ 136'991	— 3'5	+ 1248'4
March	21.5	— 10'8	— 411'5	+ 0'418	— 7'380	+ 129'193	— 5'9	+ 1242'5
May	10.5	— 8'9	— 420'4	+ 0'403	— 6'977	+ 121'813	— 8'5	+ 1234'0
June	29.5	— 6'6	— 427'0	+ 0'380	— 6'597	+ 114'836	— 11'5	+ 1222'5
Aug.	18.5	— 4'2	— 431'2	+ 0'353	— 6'244	+ 108'239	— 14'7	+ 1207'8
Oct.	7.5	— 1'7	— 432'9	+ 0'324	— 5'920	+ 101'995	— 18'1	+ 1189'7
Nov.	26.5	+ 1'0	— 431'9	+ 0'294	— 5'626	+ 76'075	— 21'6	+ 1168'1
1796 Jan.	15.5	+ 3'7	— 428'2	+ 0'263	— 5'363	+ 90'449	— 25'2	+ 1142'9
March	5.5	+ 6'4	— 421'8	+ 0'234	— 5'129	+ 85'086	— 28'8	+ 1114'1
Apr.	24.5	+ 9'1	— 412'7	+ 0'206	— 4'923	+ 09'957	— 32'3	+ 1081'8
June	13.5	+ 11'6	— 401'1	+ 0'183	— 4'740	+ 75'034	— 35'6	+ 1046'2
Aug.	2.5	+ 14'1	— 387'0	+ 0'161	— 4'579	+ 70'294	— 38'9	+ 1007'3
Sept.	21.5	+ 16'4	— 370'6	+ 0'141	— 4'438	+ 65'715	— 41'9	+ 965'4
Nov.	10.5	+ 18'4	— 352'2	+ 0'127	— 4'311	+ 61'277	— 44'7	+ 920'7
Dec.	30.5	+ 20'1	— 332'1	+ 0'116	— 4'195	+ 56'966	— 47'0	+ 873'7
1797 Feb.	18.5	+ 21'6	— 310'5	+ 0'108	— 4'087	+ 52'771	— 49'1	+ 824'6
Apr.	9.5	+ 22'8	— 287'7	+ 0'104	— 3'983	+ 48'684	— 50'7	+ 773'9
May	29.5	+ 23'7	— 264'0	+ 0'104	— 3'879	+ 44'701	— 51'9	+ 722'0
July	18.5	+ 24'2	— 239'8	+ 0'108	— 3'771	+ 40'822	— 52'6	+ 669'4

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
		"	"	"	"	"	"	
1797 July	18.5	- 2.8	+ 36.3	+ 3.6	+ 25.1	+ 0.4	+ 117.1	10.02
Sept.	6.5	- 2.0	+ 34.3	+ 3.1	+ 28.2	- 0.7	+ 116.4	10.09
Oct.	26.5	- 1.3	+ 33.0	+ 2.5	+ 30.7	- 1.9	+ 114.5	10.07
Dec.	15.5	- 0.7	+ 32.3	+ 1.8	+ 32.5	- 3.0	+ 111.5	10.92
1798 Feb.	3.5	- 0.3	+ 32.0	+ 1.1	+ 33.6	- 4.0	+ 107.5	10.65
March	25.5	- 0.1	+ 31.9	+ 0.4	+ 34.0	- 5.0	+ 102.5	10.24
May	14.5	0.0	+ 31.9	- 0.2	+ 33.8	- 5.9	+ 96.6	10.573
July	3.5	0.0	+ 31.9	- 0.9	+ 32.9	- 6.7	+ 89.9	10.508
Aug.	22.5	- 0.2	+ 31.7	- 1.5	+ 31.4	- 7.4	+ 82.5	10.433
Oct.	11.5	- 0.6	+ 31.1	- 2.1	+ 29.3	- 7.9	+ 74.6	10.347
Nov.	30.5	- 1.0	+ 30.1	- 2.6	+ 26.7	- 8.4	+ 66.2	10.251
1799 Jan.	19.5	- 1.6	+ 28.5	- 3.0	+ 23.7	- 8.8	+ 57.4	10.145
March	10.5	- 2.3	+ 26.2	- 3.4	+ 20.3	- 9.0	+ 48.4	10.030
Apr.	29.5	- 3.0	+ 23.2	- 3.6	+ 16.7	- 9.0	+ 39.4	9.907
June	18.5	- 3.8	+ 19.4	- 3.8	+ 12.9	- 9.0	+ 30.4	9.775
Aug.	7.5	- 4.6	+ 14.8	- 3.8	+ 9.1	- 9.0	+ 21.4	9.635
Sept.	26.5	- 5.3	+ 9.5	- 3.8	+ 5.3	- 8.8	+ 12.6	9.489
Nov.	15.5	- 6.1	+ 3.4	- 3.6	+ 1.7	- 8.5	+ 4.1	9.339
1800 Jan.	4.5	- 6.8	- 3.4	- 3.4	- 1.7	- 8.1	- 4.0	9.186
Feb.	23.5	- 7.3	- 10.7	- 3.1	- 4.8	- 7.7	- 11.7	9.028

SATURN

1800 Jan. 4.5 — 1793 Apr. 20.5

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
		"	"	"	"	"	"	
1793 Jan.	10.5	0.0	- 1.7	0.0	+ 10.3	+ 1.2	+ 35.0	7.74
March	1.5	0.0	- 1.7	0.0	+ 10.3	+ 1.3	+ 36.3	7.28
Apr.	20.5	0.0	- 1.7	0.0	+ 10.3	+ 1.2	+ 37.5	6.94
June	9.5	0.0	- 1.7	0.0	+ 10.3	+ 0.8	+ 38.3	6.71
July	30.5	0.0	- 1.7	0.0	+ 10.3	+ 0.3	+ 38.6	6.60
Sept.	17.5	- 0.1	- 1.8	- 0.1	+ 10.2	- 0.2	+ 38.4	6.59
Nov.	6.5	- 0.1	- 1.9	- 0.1	+ 10.1	- 0.5	+ 37.9	6.72
Dec.	26.5	- 0.1	- 2.0	- 0.1	+ 10.0	- 0.6	+ 37.3	6.92
1794 Feb.	14.5	- 0.2	- 2.2	- 0.1	+ 9.9	- 0.6	+ 36.7	7.14

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda d\delta n$	'f	"f	P	'f
		"	"	"	"	"	"	"
1797 July	18.5	+ 24.2	"	+ 0.108	"	+ 40.822	- 52.6	"
Sept.	6.5	+ 24.4	- 239.8	+ 0.114	- 3.771	+ 37.051	- 53.0	+ 669.4
Oct.	26.5	+ 24.3	- 215.4	+ 0.122	- 3.657	+ 33.394	- 52.9	+ 616.4
Dec.	15.5	+ 23.9	- 191.1	+ 0.132	- 3.535	+ 29.859	- 52.3	+ 563.5
1798 Feb.	3.5	+ 23.1	- 167.2	+ 0.144	- 3.403	+ 26.456	- 51.4	+ 511.2
March	25.5	+ 22.1	- 144.1	+ 0.157	- 3.259	+ 23.197	- 50.0	+ 459.8
May	14.5	+ 20.7	- 122.0	+ 0.171	- 3.102	+ 20.095	- 48.2	+ 409.8
July	3.5	+ 19.2	- 101.3	+ 0.185	- 2.931	+ 17.164	- 46.2	+ 361.6
Aug.	22.5	+ 17.5	- 82.1	+ 0.198	- 2.746	+ 14.418	- 43.8	+ 315.4
Oct.	11.5	+ 15.6	- 64.6	+ 0.211	- 2.548	+ 11.870	- 41.2	+ 271.6
Nov.	30.5	+ 13.5	- 49.0	+ 0.224	- 2.337	+ 9.533	- 38.4	+ 230.4
1799 Jan.	19.5	+ 11.4	- 35.5	+ 0.237	- 2.113	+ 7.420	- 35.4	+ 192.0
March	10.5	+ 9.2	- 24.1	+ 0.249	- 1.876	+ 5.544	- 32.4	+ 156.6
Apr.	29.5	+ 7.1	- 14.9	+ 0.260	- 1.627	+ 3.917	- 29.2	+ 124.2
June	18.5	+ 5.0	- 7.8	+ 0.273	- 1.367	+ 2.550	- 26.2	+ 95.0
Aug.	7.5	+ 3.0	- 2.8	+ 0.286	- 1.094	+ 1.456	- 23.1	+ 68.8
Sept.	26.5	+ 1.1	+ 0.2	+ 0.305	- 0.808	+ 0.648	- 20.3	+ 45.7
Nov.	15.5	- 0.5	+ 1.3	+ 0.328	- 0.503	+ 0.145	- 17.6	+ 25.4
1800 Jan.	4.5	- 1.9	+ 0.8	+ 0.356	- 0.175	+ 0.030	- 15.2	+ 7.8
Feb.	23.5	- 3.0	- 1.1	+ 0.395	+ 0.181	- 0.151	- 13.1	- 7.4
			- 4.1		+ 0.576			- 20.5

SATURN

1800 Jan. 4.5 — 1793 Apr. 20.5

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda d\delta n$	'f	"f	P	'f
		"	"	"	"	"	"	"
1793 Jan.	10.5	- 1.0	"	- 0.281	"	- 114.507	+ 0.9	"
March	1.5	- 1.4	+ 65.7	- 0.323	+ 2.118	- 112.389	+ 0.8	- 83.9
Apr.	20.5	- 1.5	+ 64.3	- 0.279	+ 1.795	- 110.594	+ 0.5	- 83.1
June	9.5	- 1.9	+ 62.8	- 0.163	+ 1.516	- 109.078	+ 0.5	- 82.6
July	30.5	- 2.5	+ 60.9	- 0.009	+ 1.353	- 107.725	+ 0.9	- 82.1
Sept.	17.5	- 3.3	+ 58.4	+ 0.150	+ 1.344	- 106.381	+ 1.7	- 81.2
Nov.	6.5	- 3.8	+ 55.1	+ 0.259	+ 1.494	- 104.887	+ 2.5	- 79.5
Dec.	26.5	- 4.1	+ 51.3	+ 0.315	+ 1.753	- 103.134	+ 3.2	- 77.0
1794 Feb.	14.5	- 4.0	+ 47.2	+ 0.324	+ 2.068	- 101.066	+ 3.5	- 73.8
			+ 43.2		+ 2.392			- 70.3

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
1794 Feb.	14.5	— 0·2	— 2·2	— 0·1	+ 9·9	— 0·6	+ 36·7	7·14
Apr.	5.5	— 0·2	— 2·4	0·0	+ 9·9	— 0·6	+ 36·1	7·41
May	25.5	— 0·2	— 2·6	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 35·6	7·71
July	14.5	— 0·2	— 2·8	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 35·1	8·03
Sept.	2.5	— 0·1	— 2·9	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 34·6	8·35
Oct.	22.5	— 0·1	— 3·0	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 34·1	8·64
Dec.	11.5	0·0	— 3·0	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 33·6	8·91
1795 Jan.	30.5	0·0	— 3·0	0·0	+ 9·9	— 0·5	+ 33·1	9·16
March	21.5	+ 0·1	— 2·9	0·0	+ 9·9	— 0·6	+ 32·5	9·39
May	10.5	+ 0·1	— 2·8	0·0	+ 9·9	— 0·6	+ 31·9	9·62
June	29.5	+ 0·2	— 2·6	0·0	+ 9·9	— 0·7	+ 31·2	9·84
Aug.	18.5	+ 0·2	— 2·4	0·0	+ 9·9	— 0·8	+ 30·4	10·03
Oct.	7.5	+ 0·2	— 2·2	— 0·1	+ 9·8	— 0·8	+ 29·6	10·22
Nov.	26.5	+ 0·3	— 1·9	— 0·1	+ 9·7	— 0·9	+ 28·7	10·40
1796 Jan.	15.5	+ 0·3	— 1·6	— 0·1	+ 9·6	— 0·9	+ 27·8	10·57
March	5.5	+ 0·3	— 1·3	— 0·1	+ 9·5	— 1·0	+ 26·8	10·71
Apr.	24.5	+ 0·3	— 1·0	— 0·2	+ 9·3	— 1·0	+ 25·8	10·84
June	13.5	+ 0·4	— 0·6	— 0·2	+ 9·1	— 1·1	+ 24·7	10·95
Aug.	2.5	+ 0·4	— 0·2	— 0·2	+ 8·9	— 1·1	+ 23·6	11·06
Sept.	21.5	+ 0·4	+ 0·2	— 0·2	+ 8·7	— 1·2	+ 22·4	11·17
Nov.	10.5	+ 0·4	+ 0·6	— 0·3	+ 8·4	— 1·2	+ 21·2	11·26
Dec.	30.5	+ 0·4	+ 1·0	— 0·3	+ 8·1	— 1·2	+ 20·0	11·34
1797 Feb.	18.5	+ 0·4	+ 1·4	— 0·3	+ 7·8	— 1·1	+ 18·9	11·42
Apr.	9.5	+ 0·3	+ 1·7	— 0·3	+ 7·5	— 1·2	+ 17·7	11·52
May	29.5	+ 0·3	+ 2·0	— 0·4	+ 7·1	— 1·2	+ 16·5	11·60
July	18.5	+ 0·3	+ 2·3	— 0·4	+ 6·7	— 1·2	+ 15·3	11·64
Sept.	6.5	+ 0·3	+ 2·6	— 0·4	+ 6·3	— 1·2	+ 14·1	11·67
Oct.	26.5	+ 0·2	+ 2·8	— 0·4	+ 5·9	— 1·2	+ 12·9	11·70
Dec.	15.5	+ 0·2	+ 3·0	— 0·4	+ 5·5	— 1·2	+ 11·7	11·74
1798 Feb.	3.5	+ 0·1	+ 3·1	— 0·4	+ 5·1	— 1·1	+ 10·6	11·77
March	25.5	+ 0·1	+ 3·2	— 0·4	+ 4·7	— 1·1	+ 9·5	11·79
May	14.5	0·0	+ 3·2	— 0·4	+ 4·3	— 1·1	+ 8·4	11·81
July	3.5	0·0	+ 3·2	— 0·4	+ 3·9	— 1·0	+ 7·4	11·83
Aug.	22.5	— 0·1	+ 3·1	— 0·4	+ 3·5	— 1·0	+ 6·4	11·85
Oct.	11.5	— 0·1	+ 3·0	— 0·4	+ 3·1	— 0·9	+ 5·5	11·86
Nov.	30.5	— 0·2	+ 2·8	— 0·4	+ 2·7	— 0·9	+ 4·6	11·87

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda d\delta n$	'f	"f	P	'f
1794 Feb.	14.5	— 4'0	"	"	"	"	"	"
			+ 43'2	+ 0'324	+ 2'392	— 101'066	+ 3'5	— 70'3
Apr.	5.5	— 3'7	+ 39'5	+ 0'303	+ 2'695	— 98'674	+ 3'6	— 66'7
May	25.5	— 3'1	+ 36'4	+ 0'264	+ 2'959	— 95'979	+ 3'5	— 63'2
July	14.5	— 2'5	+ 33'9	+ 0'216	+ 3'175	— 93'020	+ 3'2	— 60'0
Sept.	2.5	— 2'0	+ 31'9	+ 0'171	+ 3'346	— 89'845	+ 2'8	— 57'2
Oct.	22.5	— 1'4	+ 30'5	+ 0'127	+ 3'473	— 86'499	+ 2'5	— 54'7
Dec.	11.5	— 1'0	+ 29'5	+ 0'090	+ 3'563	— 83'026	+ 2'1	— 52'6
1795 Jan.	30.5	— 0'6	+ 28'9	+ 0'059	+ 3'622	— 79'463	+ 1'8	— 50'8
March	21.5	— 0'3	+ 28'6	+ 0'035	+ 3'657	— 75'841	+ 1'6	— 49'2
May	10.5	— 0'1	+ 28'5	+ 0'010	+ 3'667	— 72'184	+ 1'4	— 47'8
June	29.5	+ 0'1	+ 28'6	— 0'013	+ 3'654	— 68'517	+ 1'2	— 46'6
Aug.	18.5	+ 0'3	+ 28'9	— 0'029	+ 3'625	— 64'863	+ 1'1	— 45'5
Oct.	7.5	+ 0'4	+ 29'3	— 0'043	+ 3'582	— 61'238	+ 1'0	— 44'5
Nov.	26.5	+ 0'4	+ 29'7	— 0'056	+ 3'526	— 57'656	+ 0'9	— 43'6
1796 Jan.	15.5	+ 0'4	+ 30'1	— 0'067	+ 3'459	— 54'130	+ 0'8	— 42'8
March	5.5	+ 0'4	+ 30'5	— 0'076	+ 3'383	— 50'671	+ 0'8	— 42'0
Apr.	24.5	+ 0'4	+ 30'9	— 0'084	+ 3'299	— 47'288	+ 0'8	— 41'2
June	13.5	+ 0'3	+ 31'2	— 0'092	+ 3'207	— 43'989	+ 0'8	— 40'4
Aug.	2.5	+ 0'3	+ 31'5	— 0'099	+ 3'108	— 40'782	+ 0'8	— 39'6
Sept.	21.5	+ 0'2	+ 31'7	— 0'104	+ 3'004	— 37'674	+ 0'8	— 38'8
Nov.	10.5	0'0	+ 31'7	— 0'108	+ 2'896	— 34'670	+ 0'9	— 37'9
Dec.	30.5	— 0'1	+ 31'6	— 0'112	+ 2'784	— 31'774	+ 1'0	— 36'9
1797 Feb.	18.5	— 0'2	+ 31'4	— 0'116	+ 2'668	— 28'990	+ 1'1	— 35'8
Apr.	9.5	— 0'3	+ 31'1	— 0'119	+ 2'549	— 26'322	+ 1'1	— 34'7
May	29.5	— 0'5	+ 30'6	— 0'122	+ 2'427	— 23'773	+ 1'2	— 33'5
July	18.5	— 0'6	+ 30'0	— 0'124	+ 2'303	— 21'346	+ 1'3	— 32'2
Sept.	6.5	— 0'8	+ 29'2	— 0'126	+ 2'177	— 19'043	+ 1'4	— 30'8
Oct.	26.5	— 0'9	+ 28'3	— 0'127	+ 2'050	— 16'866	+ 1'5	— 29'3
Dec.	15.5	— 1'1	+ 27'2	— 0'129	+ 1'921	— 14'816	+ 1'6	— 27'7
1798 Feb.	3.5	— 1'2	+ 26'0	— 0'130	+ 1'791	— 12'895	+ 1'7	— 26'0
March	25.5	— 1'4	+ 24'6	— 0'132	+ 1'659	— 11'104	+ 1'8	— 24'2
May	14.5	— 1'5	+ 23'1	— 0'133	+ 1'526	— 9'445	+ 1'8	— 22'4
July	3.5	— 1'6	+ 21'5	— 0'134	+ 1'392	— 7'919	+ 1'9	— 20'5
Aug.	22.5	— 1'7	+ 19'8	— 0'134	+ 1'258	— 6'527	+ 1'9	— 18'6
Oct.	11.5	— 1'8	+ 18'0	— 0'135	+ 1'123	— 5'269	+ 2'0	— 16'6
Nov.	30.5	— 1'9	+ 16'1	— 0'135	+ 0'988	— 4'146	+ 2'0	— 14'6

	$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
	"	"	"	"	"	"	
1798 Nov. 30.5	— 0·2	+ 2·8	— 0·4	+ 2·7	— 0·9	+ 4·6	1137
1799 Jan. 19.5	— 0·2	+ 2·6	— 0·4	+ 2·3	— 0·8	+ 3·8	1138
March 10.5	— 0·3	+ 2·3	— 0·4	+ 1·9	— 0·8	+ 3·0	1138
Apr. 29.5	— 0·3	+ 2·0	— 0·4	+ 1·5	— 0·7	+ 2·3	1139
June 18.5	— 0·4	+ 1·6	— 0·4	+ 1·1	— 0·6	+ 1·7	1190
Aug. 7.5	— 0·4	+ 1·2	— 0·3	+ 0·8	— 0·6	+ 1·1	1191
Sept. 26.5	— 0·5	+ 0·7	— 0·3	+ 0·5	— 0·5	+ 0·6	1191
Nov. 15.5	— 0·5	+ 0·2	— 0·3	+ 0·2	— 0·4	+ 0·2	1191
1800 Jan. 4.5	— 0·5	— 0·3	— 0·3	— 0·1	— 0·4	— 0·2	1191
Feb. 23.5	— 0·6		— 0·2		— 0·3		1191

		$d\delta\pi$	' f	$\lambda d\delta n$	' f	" f	P	' f
		"	"	"	"	"	"	"
1798 Nov.	30.5	— 1'9	+ 16'1	— 0'135	+ 0'988	— 4'146	+ 2'0	— 14'6
1799 Jan.	19.5	— 2'0	+ 14'1	— 0'135	+ 0'853	— 3'158	+ 2'0	— 12'6
March	10.5	— 2'1	+ 12'0	— 0'135	+ 0'718	— 2'305	+ 2'0	— 10'6
Apr.	29.5	— 2'1	+ 9'9	— 0'135	+ 0'583	— 1'587	+ 2'0	— 8'6
June	18.5	— 2'2	+ 7'7	— 0'134	+ 0'449	— 1'004	+ 2'0	— 6'6
Aug.	7.5	— 2'2	+ 5'5	— 0'132	+ 0'317	— 0'555	+ 2'0	— 4'6
Sept.	26.5	— 2'2	+ 3'3	— 0'130	+ 0'187	— 0'238	+ 1'9	— 2'7
Nov.	15.5	— 2'2	+ 1'1	— 0'126	+ 0'061	— 0'051	+ 1'8	— 0'9
1800 Jan.	4.5	— 2'2	— 1'1	— 0'122	— 0'061	+ 0'010	+ 1'7	+ 0'8
Feb.	23.5	— 2'1		— 0'117		— 0'051	+ 1'6	

Felicjan Kępiński

Ruch komety periodycznej 1906 IV (Kopff'a) i jej pozycja w 1951

Komunikat przedstawiony na posiedzeniu dnia 24 marca 1950.

Kometę tę można uważać za jedną z najciekawszych w rodzinie t. zw. komet Jowiszowych o okresie obiegu dokoła Słońca 5—7 lat, z powodu zdolności znacznego zbliżania się do Jowisza i doznawania wielkich zakłóceń elementów jej orbity. O jednym takim zbliżeniu się komety do Jowisza komunikowałem w IV części pracy o jej ruchu.¹⁾

Będące w toku badania upoważniają mnie do przypuszczenia, że uda mi się wkrótce powiązanie powojennych obliczeń z obliczeniami z okresu wojny, które, z wyjątkiem krótkiej efemerydy dokładnej na 1945 r., uległy przed opublikowaniem zniszczeniu w r. 1944. a oto krótkie sprawozdanie z badań ruchu komety w okresie 1945—1952.

Na razie oparłem się na układzie elementów oskulacyjnych J. Bobone, Cordoba, Arg.²⁾, wyprowadzonych z obserwacji 5.VI., 6.VI i 9.VIII.1945 i, po uwzględnieniu zakłóceń, zgodnych ze wszystkimi obserwacjami 1945 r. w granicach 45“.

Przyjmując za początkową epokę 1945 lipiec 4.0 cz. un. i biorąc pod uwagę zakłócenia ruchu komety przez 6 wielkich planet (Jowisz, Saturn, Ziemia, Wenus, Mars i Uran), przeprowadziłem numeryczne całkowanie układu 6 równań różniczkowych liniowych, w odstępach 20-dniowych do 28 marca 1952 r. Kontrola rachunku wynikała z przebiegu różnic wysokich rzędów wartości składowych sił zakłócających.

W ten sposób otrzymałem układy wartości elementów orbity komety na standartowe epoki 1951/2, a stąd i pozycje komety, w celu jej odszukania. Otrzymana efemeryda okaże się tym dokładniejsza, im bardziej dokładne były elementy wyj-

¹⁾ The motion of the Periodic Comet 1906 IV, part IV, Publications of the Institute of Practical Astronomy (Technical Warsaw University) N 23.

²⁾ J. Bobone, Circ. du Bureau Centr. des télégr. astr., U.A.I., N 1019.

ściowe Bobone'a. Przejście komety przez punkt przysłoneczny nastąpi 22 października 1951 r. W optymalnych warunkach totalna jej jasność przypuszczalnie wyrazi się 13-tą wielkością.

O wyniku tej pracy podałem już krótką notatkę do Monthly Notices of R.A.S., a wyciąg efemerydy prześle niebawem do Kopenhaskiej Centrali Astronomicznej M.U.A.

Warszawa, 15 marca 1950.

Wiktor Kemula i Jerzy Chodkowski

Fala wodorowa w roztworach buforu octanowego

Mémoire présenté a la séance du 24 mars 1950.

WSTĘP

Doświadczenie wykazało, że fale wodoru otrzymane przy polarograficznej elektrolizie jednakowo stężonych roztworów słabych i mocnych kwasów, są w przypadku słabych kwasów mniejsze, niż w roztworach kwasów mocnych.¹⁾ K o l t h o f f w swej monografii²⁾ dyskutuje elektrolityczne wydzielanie się wodoru z roztworów słabych kwasów.

Prąd dyfuzyjny i_d (fala) zależy od stopnia dysocjacji badanego słabego kwasu HA

$$i_d = k_H [H^+] + k_{HA} [HA],$$

gdzie stałe k_H i k_{HA} są proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego ze współczynnika dyfuzji jonów wodorowych H^+ i niedysocjowanych cząsteczek kwasu HA. Rozważania K o l t h o f f a. jak również wcześniejsze prace doświadczalne T o m e š a³⁾ dotyczyły potencjałów półfali wodoru $\pi_{1/2}$. Prac doświadczalnych z dziedziny prądów dyfuzyjnych przed podjęciem badań niniejszych nie było.

Ostatnio ukazała się praca K o r s z u n o w a, K u z n i e c o w e j i S z c z e n n i k o w e j⁴⁾ którzy zbadali redukcję szeregu słabych kwasów na rtęciowej katodzie kroplowej

i stwierdzili istnienie liniowej zależności pomiędzy prądem dyfuzyjnym wodoru a stężeniem słabego kwasu.

Podczas wykonanych przez nas polarograficznych badań zachowania się soli berylu zaszła konieczność zastosowania buforu octanowego. Okazało się, że do chwili obecnej nie ma w literaturze danych, dotyczących fal wodoru w roztworach różnych buforów. Mimo, że bufora takie stosowano jako elektrolity podstawowe przy redukcji nadrenianów⁵⁾ oraz niektórych substancji organicznych, jak kwas askrobinowy^{6),7)}, kwasy maleinowy i fumarowy^{8), 9)}, zbadane one zostały jedynie pod względem wpływu wywieranego na zmiany wartości $\pi_{1/2}$, nie określano zaś wartości i_d wodoru w tych roztworach. Roztwory buforowe zwykle używane są w znacznym nadmiarze w porównaniu do badanej substancji w celu dobrego zbuforowania roztworu, w tych warunkach naogół nie można było zaobserwować fali wodoru.

W celu wypełnienia tej luki zbadano szczegółowo zachowanie się typowego buforu octanowego.

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

1. Aparatura i warunki pomiarów.

Do doświadczeń użyto polarografu firmy Cambridge Instrument Comp. z wmontowanym galwanometrem o czułości $3,93 \cdot 10^{-9}$ amp./mm skali. Elektroda kroplowa, stosowana w niniejszych badaniach wykonana była z kapilary z przewężeniem. Posiadała ona następujące własności:

nie polaryzowana (w wodzie) przy różnicy poziomów rtęci $\Delta h_{\text{Hg}} = 40,0$ cm wydajność wynosiła $m = 1,96$ mg Hg/sek., czas trwania kropli $t = 2,43$ sek. Polaryzowana (na fali wodoru) $t = 1,31$ sek. W ten sposób charakterystyka kroplowej elektrody (w temp. 20°C) wynosiła

$$m^{2/3} \cdot t^{1/6} = 1,628$$

Polarogramy, wykonane w temperaturach różnych od 20°C . ($\pm 1,5^\circ$), przeliczono na temperaturę 20°C ., przyjmując współczynnik 1% na 1°C ¹⁰⁾.

Na wszystkich polarogramach uwidoczniła jest przyłożona siła elektromotoryczna.

Rtęć — tak katodową, jak i anodową starannie oczyszczano przez utlenienie nadmanganianem potasu¹¹⁾ i dwukrotną destylację. Wszystkie badane roztwory pozbawiano tlenu przez przepuszczanie elektrolitycznego wodoru, otrzymywanego z elektrolizera systemu Bayerle — Tamele¹²⁾.

2. Roztwory.

Do badań użyto odczynników najwyższej czystości (B.D.H. Analar). Roztwory mieszanin kwas octowy — octan sodu przyrządzano według Walpole'a¹³⁾. W dalszym ciągu oznaczać będziemy mieszaniny buforowe stosunkiem zawartości w nich kwasu do octanu, przez stężenie buforu będziemy natomiast rozumieć całkowite stężenie octanu.

Tak przyrządzone roztwory posiadają przy całkowitym stężeniu 0,2 n wartości pH podane w tablicy 1.

Tablica 1. Wartości pH buforów octanowych o stężeniu 0,2 n według Walpole'a.

Stosunek $\frac{\text{CH}_3\text{COOH}}{\text{CH}_3\text{COONa}}$	pH
1 : 19	5,894
2 : 18	5,574
3 : 17	5,374
4 : 16	5,227
5 : 15	5,093
6 : 14	4,990
8 : 12	4,802
10 : 10	4,626
12 : 8	4,454
14 : 6	4,27
16 : 4	4,047
18 : 2	3,723
19 : 1	3,416

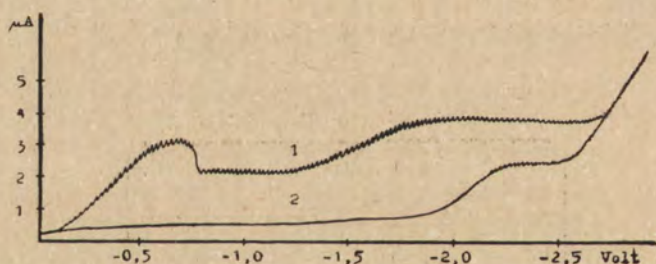
Roztwory te do badań odpowiednio rozcieńczano. Zgodnie z zasadą działania mieszanin buforowych rozcieńczenie powoduje nieznaczny tylko zmianę pH roztworu. Tak na przykład dla buforu 10:10, gdy całkowite stężenie maleje dziesięciokrot-

nie od 0,1n do 0,01n wartość pH roztworu zmienia się nieznacznie od 4,61 do 4,68.¹⁴⁾

Zaznaczyć należy, że pracowano stale ze świeżymi roztworami, gdyż okazało się, że fala wodoru maleje z czasem wskutek wzrostu pleśni (środków ochronnych ze zrozumiałych względów nie dodawano). W roztworach rozcieńczonych ($2 \cdot 10^{-3}$ n) w ciągu dwu miesięcy zaobserwowano zmniejszenie fali wodorowej o około 50%.

3. Wpływ tlenu na falę wodoru.

Elektroliza mieszaniny roztworów kwas octowy — octan sodu daje w atmosferze wodoru krzywą polarograficzną o wyraźnej fali (rys. 1, krzywa 2), która jest wynikiem redukcji jonów wodorowych na kropłowej katodzie rtęciowej.



Rys. 1. Polarogramy, otrzymane w roztworze buforu 10:10 o stężeniu $2 \cdot 10^{-3}$ n (do 2 ccm roztworu dodano kroplę 1% tymolu). Krzywa 1 — na powietrzu, krzywa 2 — w atmosferze wodoru. Czulość galwanometru 1/30.

Dokładne usuwanie tlenu z badanego roztworu jest konieczne, ponieważ zgodnie z podanym przez K e m u l e i M i c h a l s k i e g o¹⁵⁾ schematem redukcji tlenu na kropłowej katodzie rtęciowej obecność jego w roztworze zmniejsza wartość prądu granicznego jonów wodorowych. Jony wodorowe zostają zobojętnione jonami hydroksylowymi, powstającymi wskutek redukcji tlenu.

W przypadku elektrolizy roztworów o nieznacznych stężeniach buforu w obecności tlenu może zdarzyć się, że fala wodorowa nie występuje w tych warunkach wcale (rys. 1, krzywa 1.). Jest to więc przykład ukrytego prądu granicznego.¹⁶⁾

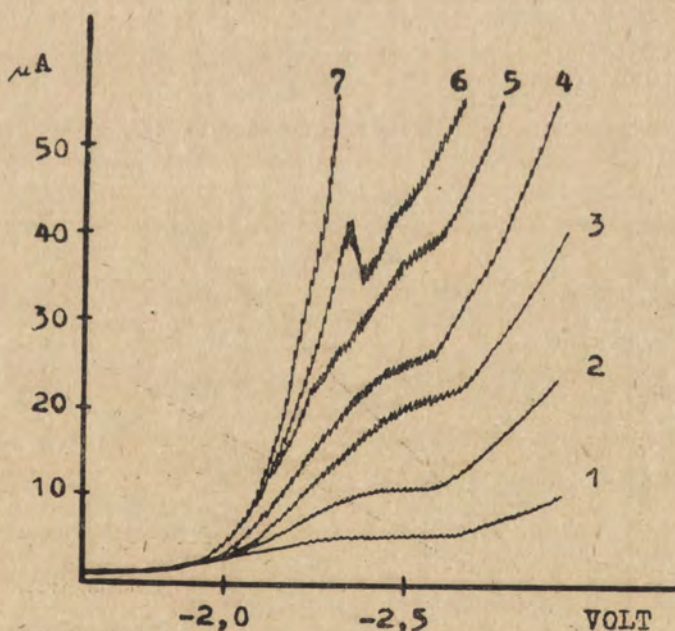
4. Fale wodorowe w roztworach buforu.

Mierzalność fali wodorowej w roztworach buforu octanowego jest naogół dobra, jednak dla stężeń czystych buforów powyżej $2,5 \cdot 10^{-2}$ n pojawia się maksimum (porównaj rys. 2), które bliżej omówimy w dalszym ciągu pracy. Badanie prądów granicznych wodoru w czystych roztworach buforów octanowych przeprowadzono w dwu kierunkach:

1) zależność prądu granicznego od stężenia buforu o niezmiennym stosunku $\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COONa}$,

2) zależność prądu granicznego od składu buforu (a więc przy zmiennym stosunku $\text{CH}_3\text{COOH} / (\text{CH}_3\text{COONa})$ przy niezmiennym stężeniu całkowitym octanu.

W celu wyjaśnienia pierwszej zależności zbadano dwa bufory: 10:10 oraz 6:14. Fale wodorowe zarejestrowane w czystych roztworach buforu 10:10, przedstawia przykładowo rys. 2.

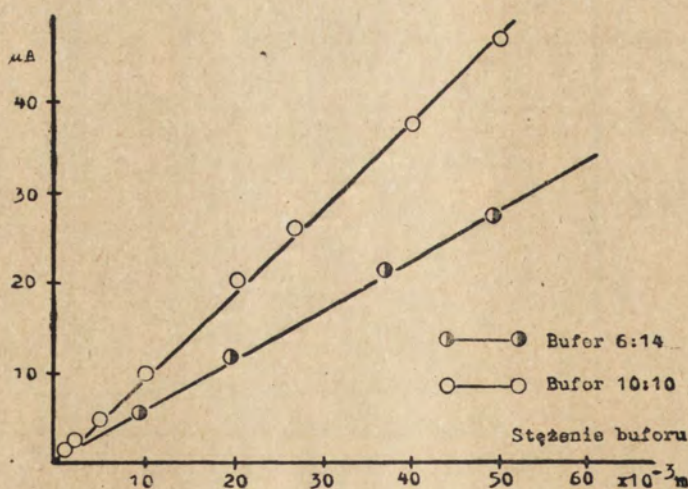


Rys. 2. Fale wodorowe w czystych roztworach buforu 10:10. Wszystkie krzywe rejestrowano od $-1,6$ V. Stężenia: krzywa 1. $5 \cdot 10^{-3}$ m; 2. 10^{-2} m; 3. $2 \cdot 10^{-2}$ m; 4. $2,67 \cdot 10^{-2}$ m; 5. $4 \cdot 10^{-2}$ m; 6. $5 \cdot 10^{-2}$ m; 7. 10^{-1} m. (Roztwory pozbawione tlenu). Czułość galwanometru 1/200.

Tablica 2. Wartości prądów granicznych wodoru w buforach o różnych stężeniach.

Bufor	Stężenie mol/l.	i w mikroamp.
6:14	10^{-2}	5,9
6:14	$2,10^{-2}$	12,1
6:14	$3,75 \cdot 10^{-2}$	21,4
6:14	$5,10^{-2}$	27,4
10:10	10^{-3}	1,1
10:10	$2,10^{-3}$	2,3
10:10	$5,10^{-3}$	4,4
10:10	10^{-2}	9,6
10:10	$2,10^{-2}$	19,9
10:10	$2,67 \cdot 10^{-2}$	26,0
10:10	$4,10^{-2}$	37,5
10:10	$5,10^{-2}$	46,9

Wartości liczbowe prądów otrzymane z tych krzywych zestawione są w tablicy 2. Zależność natężenia prądu od stężenia buforów 10:10 i 6:14 przedstawia rys. 3. Zauważyć można, że współczynniki kierunkowe tak otrzymanych prostych mają się do siebie, jak stosunek ilości kwasu w obydwu buforach, t. zn. jak 6:10.



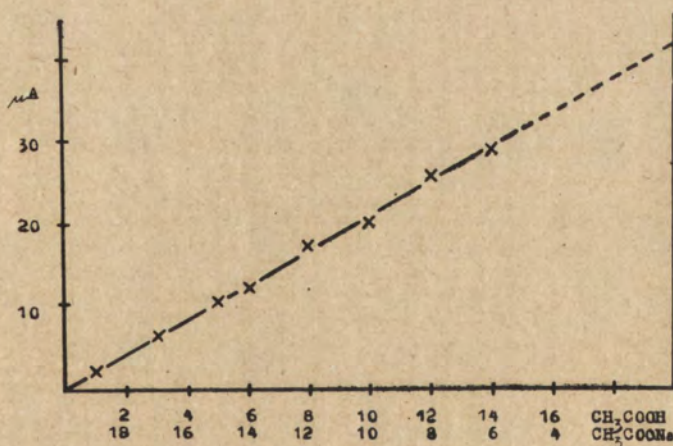
Rys. 3. Zależność natężenia prądu granicznego wodoru od stężenia buforów 10:10 i 6:14.

Następnie zbadano zależność prądu granicznego od składu buforu. W tym celu zbadano szereg z pośród przytoczonych w tabelicy 1 buforów przy zachowaniu całkowitego stężenia octanu $2 \cdot 10^{-2}$ n. Obliczone, według danych W a l p o l e 'a¹³⁾

Tablica 3. Wartości prądów granicznych wodoru w roztworach buforów octanowych o różnym składzie. Całkowite stężenie octanu $2 \cdot 10^{-2}$ n.

Bufor	pH	Obliczone $C_H \cdot 10^6$ n	i w mikroamp.
1 : 19	5,96	1,10	2,1
3 : 17	5,44	3,63	6,5
5 : 15	5,16	6,92	10,3
6 : 14	5,06	8,71	12,1
8 : 12	4,87	13,49	17,0
10 : 10	4,68	20,90	19,9
12 : 8	4,50	31,62	25,4
14 : 6	4,34	45,71	28,7
16 : 4	4,11	.	.

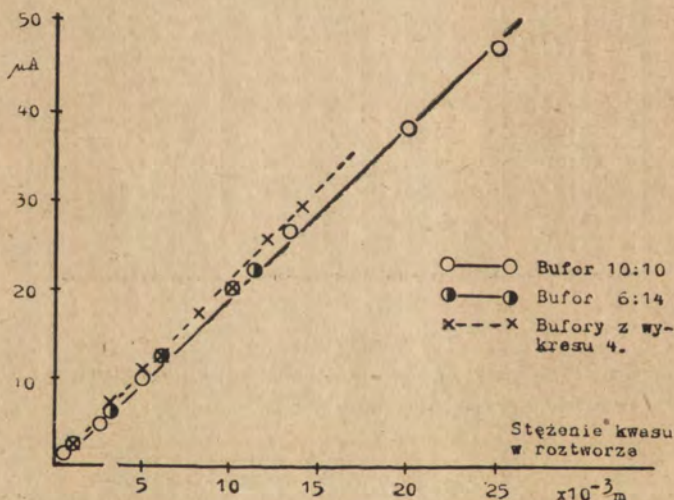
i K o l t h o f f a¹⁴⁾, wartości pH oraz otrzymane przez nas odpowiednie wartości prądów granicznych wodoru dotyczące tych roztworów przedstawia tablica 3.



Rys. 4. Zależność prądu granicznego wodoru od składu buforu przy stężeniu całkowitym octanu $2 \cdot 10^{-2}$ n.

Bufory o składzie 16:4 i dalsze nie dały mierzalnej fali wodorowej gdyż wskutek małego przewodnictwa fala jest bardzo rozciągnięta. Zależność natężenia prądu granicznego wodoru od składu buforu przedstawiono graficznie na rys. 4. Jest ona liniowa.

Z danych przytoczonych dla roztworów czystych mieszanin kwas octowy — octan sodu wynika, że wartość prądu granicznego jest wprost proporcjonalna do stężenia kwasu octowego w tych roztworach.

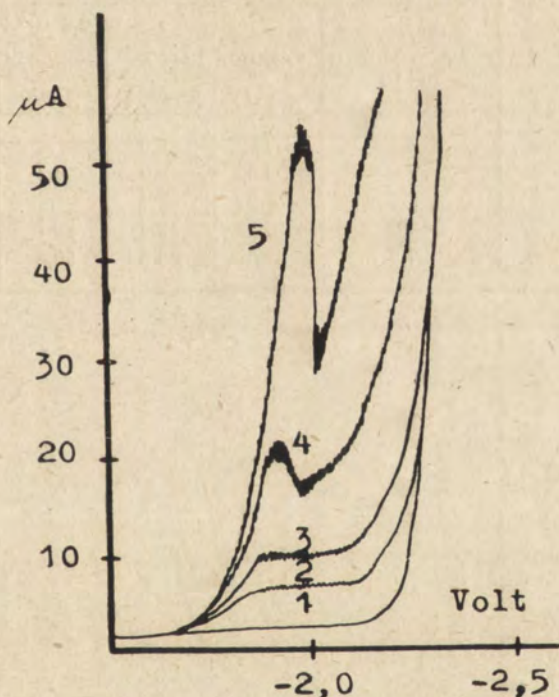


Rys. 5. Zależność prądu granicznego wodoru od stężenia kwasu octowego w buforach różnych składów i stężeń.

Z wartości prądów granicznych przytoczonych w tablicach 2 i 3 zestawiono wykres rys. 5. Linia ciągła odtwarza zależność $i_d = f(C_{\text{HA}})$. Linia przerywana podaje przebieg analogicznej zależności fali wodoru od stężenia kwasu dla roztworów, których prądy graniczne są zawarte na wykresie rys. 4. Roztwory te odznaczały się malejącą zawartością octanu sodu. Odchylenia nie są duże, ale można stwierdzić tendencję do wzrostu prądu przy spadku stężenia octanu w buforze (por. punkty dla buforów z wykresu 4).

5. Fale wodorowe w roztworach buforu w nadmiarze elektrolitów.

Badanie fal wodoru w buforach wobec nadmiaru obojętnego elektrolitu wymaga stosowania soli litu, posiadającego bardziej ujemny potencjał wydzielania, gdyż w przypadku soli potasu fala wodoru jest zaznaczona niewyraźnie przy więk-



Rys. 6. Fale wodoru w roztworach buforu 10:10 w 0,8 n LiCl aq. (Roztwory pozbawione tlenu). Czulość galwanometru 1/200. Krzywe: 1. Roztwór LiCl, stężenia buforu: 2. $4 \cdot 10^{-3}$ m; 3. $8 \cdot 10^{-3}$ m; 4. $2 \cdot 10^{-2}$ m; 5. $4 \cdot 10^{-2}$ m.

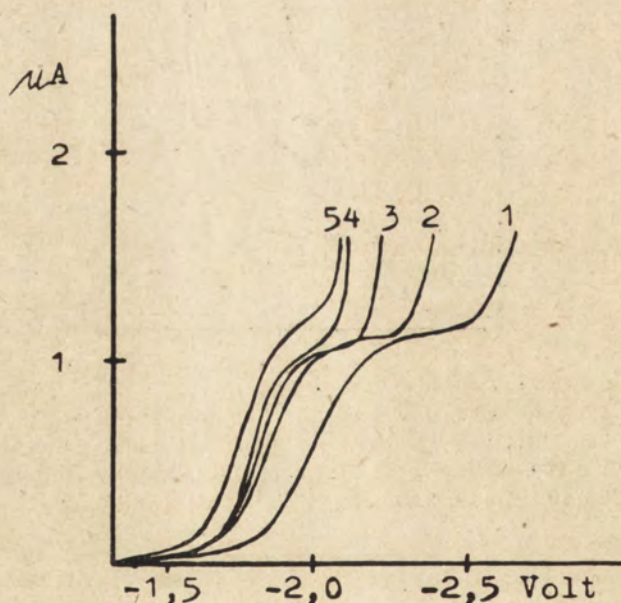
szych stężeniach soli (p. rys. 7 i 8). Wygląd fal, otrzymanych w roztworach buforu 10:10 w 0,8 n LiCl przedstawia rys. 6.

Widać tu maksimum o wiele wyraźniejsze niż w czystych roztworach buforu, które pojawia się już przy mniejszych stężeniach. Również w roztworach samego kwasu octowego w 0,8 n LiCl występuje wyraźne maksimum. Zaznaczyć należy, że

w obszarze maksimum występuje wir w pobliżu elektrody, w momencie spadku prądu obserwuje się zwiększenie częstości kapania kropli rtęci. Fakty te dowodzą, że wartości prądów

Tablica 4. Wartości prądów granicznych wodoru w roztworach kwasu octowego i buforu 10:10 czystych i wobec LiCl.

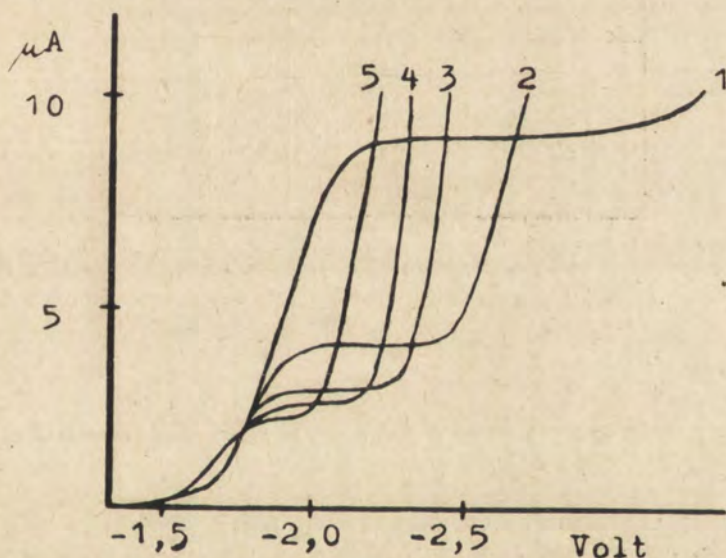
Stężenie kwasu octowego w roztworze n	Wartość prądu w mikroamperach				
	Czysty roztwór buforu 10:10	Roztwory w 0,8 n LiCl			
		Bufor 10:10		CH ₃ COOH	
		na max.	za max.	na max.	za max.
10 ⁻³	2,3	.	3,0	.	.
4.10 ⁻³	7,9	8,5	8,0	8,7	8,3
5.10 ⁻³	9,6	9,9	9,4	.	.
10.10 ⁻³	19,9	19,2	15,8	20,1	18,0
20.10 ⁻³	37,5	51,8	33,5	50,2	36,4



Rys. 7. Fale wodorowe w roztworach buforu octanowego 10:10 o stężeniu 10⁻³ n (5.10⁻⁴ n CH₃COOH) wobec KCl o różnych stężeniach. Roztwory pozbawione tlenu. Stężenia KCl: krzywa 1. 0; 2. 0,001 n; 3. 0,01 n; 4. 0,1 n; 5. 1 n. Na krzywych pominięto oscylacje.

granicznych należy w tych warunkach traktować tylko orientacyjnie.

Wykonane zostały liczne doświadczenia z roztworami buforu octanowego i czystego kwasu octowego o różnych stężeniach. W tabelicy 4 zawarte są przykładowo dane, dotyczące buforu 10:10 i czystego kwasu octowego wobec 0,8 n LiCl. W celu porównania kolumna 2 tabelicy 4 zawiera wyniki otrzymane bez LiCl. W tabelicy — na skutek omówionych wyżej trudności —



Rys. 8. Fale wodorowe w roztworach $5 \cdot 10^{-4}$ n HCl wobec KCl o różnych stężeniach. Roztwory pozbawione tlenu. Stężenia KCl: krzywa 1. 0; 2. 0,001 n; 3. 0,01 n; 4. 0,1 n; 5. 1 n. Na krzywych pominięto oscylacje.

podano wartości prądów mierzone na maksimum oraz na prądzie dyfuzyjnym za maksimum. Liczby powyższe nie pozwalają z omówionych przyczyn na wyciąganie dalej idących wniosków. Oczywisty jest jednak fakt, że fala wodoru w roztworach buforu octanowego nie ulega zjawisku tłumienia. Widać to bezpośrednio z rys. 7 i 8 oraz tabelicy 5. Rys. 7 przedstawia falę, otrzymane w roztworze 10^{-3} n buforu 10:10 ($5 \cdot 10^{-4}$ n CH_3COOH), rys. 8 — w roztworze $5 \cdot 10^{-4}$ n HCl, w miarę kolejnego doda-

wania takich samych ilości chlorku potasu. Tłumienie fali wodorowej w HCl jest znaczne, w roztworze buforu natomiast praktycznie nie występuje. W tablicy 5 ujęto te fakty liczbowo,

Tablica 5. Wysokość fal wodoru w roztworach kwasu solnego i buforu 10:10 w obecności nadmiaru elektrolitu tłumiącego. Wysokość fali w roztworze czystym = 100.

Stężenie KCl n	Wysokość fali	
	HCl	CH ₃ COOH + + CH ₃ COONa
0	100	100
0,001	44	98
0,01	31	95
0,1	25	95
0	22	95

przyjmując za 100 wysokość fali bez obojętnego elektrolitu. Powyższa własność roztworów buforu octanowego wykorzystana została przy amperometrycznym miareczkowaniu tlenu w roztworach.¹⁷⁾

6. Obliczenie współczynnika dyfuzji kwasu octowego.

Z otrzymanych danych doświadczalnych obliczono współczynnik dyfuzji dla 0,004 n CH₃COOH w 0,8 n LiCl w temperaturze 20°C. i otrzymano wartość $D = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{sek}^{-1}$.

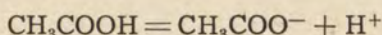
W tych samych warunkach w 0,01 n buforze octanowym (0,005 n CH₃COOH) wartość współczynnika dyfuzji $D = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{sek}^{-1}$.

Öholm¹⁸⁾ w temperaturze 12,5°C. znalazł wartość współczynnika dyfuzji dla 0,01 n CH₃COOH aq. $D = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{sek}^{-1}$.

OMÓWIENIE WYNIKÓW

Jak wynika z przytoczonych danych wysokość fali wodorowej w roztworach buforowych octan sodu — kwas octowy jest zależna liniowo od analitycznego stężenia kwasu w roztworze. Należy więc przypuszczać, że w warstwie przykatodowej

następuje dysocjacja dochodzących wskutek dyfuzji cząsteczek kwasu octowego, powodowana naruszeniem równowagi



przez redukcję istniejących w roztworze jonów wodorowych.

Na prąd graniczny wodoru w buforze składają się:

1 — prąd dyfuzyjny i migracyjny wolnych jonów wodorowych, których stężenie w roztworze buforowym jest nieznaczne,

2 — prąd dyfuzyjny wodoru, dostarczanego przez dyfuzję cząsteczek kwasu octowego, co jest zgodne z podanym we wstępie wzorem K o l t h o f f a.

Nieznaczny wzrost prądu granicznego wodoru, zaobserwowany przy malejącym stężeniu octanu (p. rys. 5 — krzywa przerywana) staje się zrozumiałą, w tym przypadku wzrasta bowiem stężenie wolnych jonów wodorowych.

Jednocześnie staje się oczywiste, co również zgodne jest z wynikami doświadczeń, że obecność nadmiaru elektrolitu nie powoduje tłumienia fali wodorowej w roztworze buforu. Dostawanie się bowiem wodoru w buforze do katody uzależnione jest od szybkości dyfuzji cząsteczek kwasu octowego. Słuszność wspomnianego wzoru K o l t h o f f a dla roztworów słabych kwasów nie zbuforowanych stwierdzili ostatnio K o r s z u n o w, K u z n i e c o w a i S z c z e n n i k o w a.⁴) Badali oni roztwory nie pozbawione tlenu, uważając z badań wstępnych, że jest to zbyt techniczne. Z rysunku 2 wspomnianej pracy wynika, że fala wodoru w roztworach kwasu octowego pojawia się dopiero przy stężeniu ok. 0,001 molarnym, co autorzy tłumaczą brakiem proporcjonalności wysokości fali wodoru do stężenia słabego kwasu przy zbyt małych stężeniach.

W rzeczywistości jak wynika z rys. 1 pracy niniejszej, dla stężeń rzędu 0,001 m CH_3COOH , fala wodorowa wbudowuje się (tworzy ukryty prąd graniczny¹⁶) w fale redukcji tlenu i nie daje się zaobserwować. Usuwanie tlenu z polarografowanych roztworów jest w tym przypadku konieczne wobec wtórnych reakcji przy elektrodzie mimo, że pozornie fala tlenu nie przeszkadza w obserwowaniu fali wodoru, pojawiającej się przy potencjale bardziej ujemnym.

STRESZCZENIE

Zbadano prądy graniczne wodoru w roztworach mieszanin buforowych kwas octowy — octan sodu w obecności i bez objętego elektrolitu.

Stwierdzono, że wysokość fali wodorowej jest w tych roztworach proporcjonalna do analitycznego stężenia kwasu octowego w nich zawartego, zgodnie z równaniem

$$i_d = k_H [H^+] + k_{HA} [HA]$$

W przypadku, gdy $[HA] \gg [H^+]$, co zachodzi w obecności octanu sodu, prąd graniczny wodoru jest proporcjonalny do stężenia kwasu

$$i_d \approx k_{HA} [HA]$$

Wykazano, że w obecności tlenu wodór jonowy i z niedysocjowanego kwasu tworzy ukryty prąd graniczny.

Fala wodoru w roztworach buforów octanowych nie ulega tłumieniu.

Wartość współczynnika dyfuzji kwasu octowego w roztworze buforowym wynosi $D = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{sek}^{-1}$ przy stężeniu 0,01 n buforu 10:10 w 0,8 n LiCl w temperaturze 20°C.

Uniwersytet Warszawski
Zakład Chemii Nieorganicznej.

LITERATURA

1. J. Heyrovský, *Polarographie*. Springer Verlag, Wien 1941. Str. 126.
2. I. M. Kolthoff, J. J. Lingane, *Polarography*. Interscience Publishers, New York 1946. Str. 204—206.
3. J. Tomeš, *Collection* 9, 150 (1937).
4. I. A. Korszunow, Z. B. Kuzniecowa, M. K. Szczennikowa, *Žurn. Fizycznej Chimii* 23, 1292 (1949).
5. J. Heyrovský, *Rozpr. Il. Ces. Akad.* 45, N 8 (1935).
6. K. Schwarz, *Z. Analyt. Chem.* 115, 161 (1939).
7. D. Cozzi, *Ann. Chim. Applicata* 29, 434 (1939).
8. E. Vopička, *Collection* 8, 349 (1936).
9. Ph. J. Elving, Ch. Teitelbaum, *J. Am. Chem. Soc.* 71, 3916 (1949).

10. I. M. Kolthoff, J. J. Lingane, loc. cit. str. 76.
11. J. Cueilleuron, P. Meyer, R. Schneider, J. J. Zeiger, Bull. Soc. Chim. (5), 16, 628 (1949).
12. V. Bayerle, V. Tamele, Chem. Listy 18, 389 (1924).
13. G. S. Walpole, J. Chem. Soc. 105, 2501 (1914).
14. I. M. Kolthoff, Biochem. Z. 195, 238 (1928).
15. W. Kemula, M. Michalski, Roczniki Chem. 16, 535 (1936);
W. Kemula, Z. R. Grabowski, Spraw. Tow. Nauk. Warsz. (Wydział III) 43, 13 (1950).
16. W. Kemula, Spraw. Tow. Nauk. Warsz. (Wydz. III) 40, 3 (1947).
17. W. Kemula, S. Siekierski, Spraw. Tow. Nauk. Warsz. (Wydz. III) 43, 86 (1950).
18. L. W. Öholm, Z. Physik. Chem. 50, 309 (1905).

Posiedzenie

z dnia 26 maja 1950 r.

Dov Jarden (Jerusalem, Israel)

Existence of an infinitude of composite n for which

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

Communication présentée a la séance du 26 mai 1950.

In Colloquium Mathematicum I (1947), p. 9, W. Sierpiński proved the existence of an infinitude of composite values n satisfying the congruence $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, using the fact that, if $2^{n-1} - 1$ is divisible by n , then $2^{2^n-2} - 1$ is divisible by $2^n - 1$. The aim of the present note is to prove Sierpiński's result by the following two very simple properties of the Fermat-numbers $F_n = 2^{2^n} + 1$:

(1) $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for every $n = F_a$.

(2) $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for $n = F_a F_b \dots F_h$, if F_a, F_b, \dots, F_h are primes and $a < b < \dots < h < 2^a$.

(Compare Dickson, History of the Theory of Numbers I, p. 94).

Now, the number of composite F_n is either infinite or finite. In the first case, (1) proves Sierpiński's result. In the second case it follows that, for a certain positive integer $a > 1$, all numbers F_n , $n = a, a + 1, a + 2, \dots$, are primes. Then, supposing $n = F_i F_{i+1}$, where $i \geq a$, and noting that $i + 1 < 2^i$ for every positive integer $i > 1$, we obtain Sierpiński's result by (2).

Henryk Greniewski

Groups and Fields definable in the Propositional Calculus

Mémoire présentée par A. Mostowski à la seance du 26 mai 1950.

1.

By the „propositional calculus“ is meant in this paper the bi-valued propositional calculus involving implication and negation and containing among its primitive terms neither quantifiers nor the constants „falsum“ and „verum“.

The language of the propositional calculus is, as it seems, the largest common part of the languages of all the classical mathematical theories.¹⁾ It is thus the „poorest“ language with which mathematicians have to do.²⁾ As a rule, it seems interesting to investigate what tasks can be performed with given means, e. g., what geometrical problems can be solved by means of a ruler and a pair of compasses. In particular it seems interesting to investigate what mathematical notions can be built exclusively by means of the „poorest“ mathematical language, i. e. the language of the propositional calculus.

The subject-matter of the present paper is a small fragment of the problem formulated above, namely the building of examples of the Abelian groups and of the Galois field as well as of the general notion of the Abelian group (of a finite order) and of the Galois field, in the language of the propositional calculus without resorting to means other than nominal definitions. Thus the task of this paper does not consist in building a new group or field or in proving an unknown property of an already known group or field. It is much more modest and consists in building certain well known and thoroughly investigated examples of groups and of a field and in building the well known notion of the Abelian group and of the Galois field, yet by means of a much simpler language „material“ than it has been done before.³⁾

It appears that for every natural number n such definition of the notion of the group (or in particular of the Abelian group) can be so built that

- 1) such definition is built in the language of the propositional calculus,
- 2) no group satisfying such definition contains more than 2^n elements.

The case is analogous with the fields (in particular with the Galois fields). Thus the method used in the present paper fails completely in the case of building groups or fields containing an infinite number of elements.

An obvious consequence of the result presented above can also be emphasized: every machine — provided that it has sufficient capacity — which serves for proving the tautologies of the propositional calculus — can be used for making calculations referring to a finite Abelian group or a Galois field.

In this place I should also like to express my thanks to Professor Andrzej Mostowski for his valuable suggestions which he was kind enough to give me during the preparation of this paper.

2.

Propositional variables are letters:

$pp_1p_2 \dots qq_1q_2 \dots rr_1r_2 \dots ss_1s_2 \dots tt_1t_2 \dots uu_1u_2 \dots vv_1v_2 \dots ww_1w_2 \dots$

The symbols of negation, sum (alternation), product (conjunction), implication, and equivalence are respectively as follows:

$$' \quad + \quad \cdot \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

The following rules for the omission of parentheses are applied:

Instead of

$$p \leftrightarrow (q + r), \quad (p \cdot q) \rightarrow r, \quad (p_1 \cdot q_2) + (q_1 \cdot q_2)$$

it is written respectively

$$p \leftrightarrow q + r, \quad p \cdot q \rightarrow r, \quad p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$$

The following definitions (of „falsum“ and „verum“) are introduced:

$$2.11 \quad \Delta p =_{Df} (p \rightarrow p)' \qquad 2.12 \quad \nabla p =_{Df} p \rightarrow p$$

Hence, of course

$$2.21 \quad \vdash \Lambda p \leftrightarrow \Lambda q \qquad 2.22 \quad \vdash \forall p \leftrightarrow \forall q$$

so that further abbreviations may be introduced

$$2.31 \quad \Lambda =_{Dt} \Lambda p \qquad 2.32 \quad \forall =_{Dt} \forall p$$

Should, however, anyone raise objections pertaining to the last two definitions, he may abstain from using them, and that without detriment to the further course of exposition.

The method of introducing the particular and the general quantifiers (Σ , Π) into the propositional calculus was demonstrated in the present author's paper read at the Sixth Congress of Polish Mathematicians, Warsaw 1948.

Definitions of three propositional functions, each containing two propositional variables, are introduced.

$$2.41 \quad p | q =_{Dt} p \rightarrow q' \qquad (\text{Sheffer's function})$$

$$2.42 \quad p - q =_{Dt} p \cdot q' \qquad (\text{difference})$$

$$2.43 \quad p \dot{-} q =_{Dt} p \leftrightarrow q' \qquad (\text{symmetric difference})$$

Hence the following lemmata:

$$2.51 \quad \vdash (p - q) \rightarrow (p + q)$$

$$2.52 \quad \vdash (p \dot{-} q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)'$$

$$2.53 \quad \vdash (p \dot{-} q) \leftrightarrow (p - q) + (q - p)$$

$$2.54 \quad \vdash (\Lambda \dot{-} p) \leftrightarrow p \qquad (\text{see 2.52})$$

$$2.55 \quad \vdash (p \dot{-} q) \leftrightarrow (q \dot{-} p) \qquad (\text{see 2.52})$$

$$2.56 \quad \vdash [(p \dot{-} q) \dot{-} r] \leftrightarrow [p \dot{-} (q \dot{-} r)]$$

$$2.57 \quad \vdash [p \dot{-} q] \leftrightarrow r \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \dot{-} r)]$$

$$2.58 \quad \vdash p \cdot (q \dot{-} r) \leftrightarrow [(p \cdot q) \dot{-} (p \cdot r)] \qquad (\text{see 2.53})$$

In connection with lemma 2.56 (associativity of the symmetric difference) the definition

$$2.61 \quad p \dot{-} q \dot{-} r =_{Dt} (p \dot{-} q) \dot{-} r$$

is also introduced.

As is well known, in every Boolean algebra a commutative ring can be built by means of symmetric difference and product (conjunction). If the Boolean algebra in question has two elements then such ring is a commutative field. Hence in the propositional calculus the propositional functions

$$p \dot{-} q, p \cdot q$$

satisfy the set of postulates characterizing a commutative field (cf. lemmata 2.54—2.58), if the expression of the form „ $a=b$ “, which appears in the postulates characterizing the commutative field, will be interpreted as „ $\vdash p \leftrightarrow q$ “ Other examples of commutative fields can, however, be easily built in the language of the propositional calculus. One of the simplest of such examples will be given in the present paper.

3.

Every propositional variable can take only one of the two constant values, namely: Λ (falsum) or V (verum), hence every pair of propositional variables can take only one of the four constant values, viz.:

$$\Lambda\Lambda, V\Lambda, \Lambda V, VV$$

If in given formula both variables are placed side by side, then in substituting such constants it may appear convenient to use the following abbreviations:

$$3.11 \quad 0 =_{Df} \Lambda\Lambda$$

$$3.13 \quad 2 =_{Df} \Lambda V$$

$$3.12 \quad 1 =_{Df} V\Lambda$$

$$3.14 \quad 3 =_{Df} VV$$

Should anyone raise some (e. g. methodological) objections pertaining to the last four definitions, he may in the further course of exposition eliminate the definienda, without detriment to the results demonstrated below.

Now two recursive definition schemata are introduced: each of them formulates the method of defining propositional function containing an even number of propositional variables:

$$3.21 \quad (p_1 = q_1) =_{Df} (p_1 \leftrightarrow q_1)$$

$$3.22 \quad (p_1 \dots p_n p_{n+1} = q_1 \dots q_n q_{n+1}) =_{Df} (p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_n) \cdot (p_{n+1} = q_{n+1})$$

$$3.23 \quad (p_1 \neq q_1) =_{Df} (p_1 \dot{-} q_1)$$

$$3.24 \quad (p_1 \dots p_n p_{n+1} \neq q_1 \dots q_n q_{n+1}) =_{Df} (p_1 \dots p_n \neq q_1 \dots q_n) + (p_{n+1} \neq q_{n+1})$$

Hence after application of the above recursive schemata

$$3.25 \quad (p_1 p_2 = q_1 q_2) =_{Df} (p_1 \leftrightarrow q_1) \cdot (p_2 \leftrightarrow q_2)$$

$$3.26 \quad (p_1 p_2 \neq q_1 q_2) =_{Df} (p_1 \dot{-} q_1) + (p_2 \dot{-} q_2)$$

The recursive proof of the following schema presents no difficulties:

$$3.27 \quad \vdash^* (p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_n) \dot{-} (p_1 \dots p_n \neq q_1 \dots q_n)$$

Finally definitions of three propositional functions, each containing four propositional arguments, will be introduced; these functions will further play but an auxiliary role:

$$3.31 \quad \alpha(p_1 p_2, q_1 q_2) =_{Df} p'_1 \cdot p'_2 + q'_1 \cdot q'_2$$

$$3.32 \quad \beta(p_1 p_2, q_1 q_2) =_{Df} (p_1 - p_2) \cdot (q_1 + q_2) + (p_1 + p_2) \cdot (q_1 - q_2)$$

$$3.33 \quad \gamma(p_1 p_2, q_1 q_2) =_{Df} (\forall p_1) \cdot p_2 (\forall q_1) \cdot q_2$$

Hence, of course, the lemmata

$$3.41 \quad \vdash \alpha(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow \alpha(q_1 q_2, p_1 p_2)$$

$$3.42 \quad \vdash \beta(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow \beta(q_1 q_2, p_1 p_2)$$

$$3.43 \quad \vdash \gamma(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow \gamma(q_1 q_2, p_1 p_2)$$

Beside this, by means of breaking up each of the three functions α , β , γ into their constituents, the lemma 3.44

$$3.44 \quad \vdash \alpha(p_1 p_2, q_1 q_2) \dot{-} \beta(p_1 p_2, q_1 q_2) \dot{-} \gamma(p_1 p_2, q_1 q_2)$$

can easily be proved.

Beside this there are the lemmata:

- 3.51 $\vdash \alpha(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow (p_1 p_2 = 0) + (q_1 q_2 = 0)$
 3.52 $\vdash \beta(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow (p_1 p_2 = 1) \cdot (q_1 q_2 \neq 0) + (p_1 p_2 \neq 0) \cdot (q_1 q_2 = 1)$
 3.53 $\vdash \gamma(p_1 p_2, q_1 q_2) \leftrightarrow [(p_1 p_2 = 2) + (p_1 p_2 = 3)] \cdot [(q_1 q_2 = 2) + (q_1 q_2 = 3)]$

4.

The definitions of two propositional functions will now be introduced. Each function contains six propositional variables; the first function will be called „complex addition“, and the second „complex multiplication“:

$$4.11 \quad (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2) =_{Df} [r_1 r_2 = (p_1 \dot{+} q_1)(p_2 \dot{+} q_2)]$$

$$4.12 \quad (r_1 r_2 = p_1 p \cdot q_1 q_2) =_{Df} \\ =_{Df} \{ \alpha(p_1 p_2, q_1 q_2) \rightarrow [r_1 r_2 = (p_1 \cdot q_1)(p_2 \cdot q_2)] \} \cdot \\ \cdot \{ \beta(p_1 p_2, q_1 q_2) \rightarrow [r_1 r_2 = (p_1 \cdot q_1)(p_2 + q_2)] \} \cdot \\ \cdot \{ \gamma(p_1 p_2, q_1 q_2) \rightarrow [r_1 r_2 = (p_1 | q_1)(p_1 \leftrightarrow q_1)] \}$$

The graph „=“ in the definiendum of definition 4.11 (or 4.12) must not be confused with the functor „=“ in the definiens of the same definition and in the definiendum of definition 3.25. The graph „=“ in the definiendum of definition 4.11 (or 4.12) plays no independent role at all, but is merely a component part of the functor „=+“ (or of the functor „=·“). this graph is being used solely on account of the tradition, and should anyone consider such method of definitioning to be incorrect, he may write for instance

$$\sigma(r_1 r_2, p_1 p_2, q_1 q_2) \text{ instead of } (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2)$$

$$\pi(r_1 r_2, p_1 p_2, q_1 q_2) \text{ instead of } (r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2)$$

without detriment to the further course of exposition. Similarly in the propositional function „ $a \equiv b \pmod{M}$ “, often met with in algebra and in the theory of numbers, there is neither the

functor „ \equiv “ nor the functor „mod“ but only the functor „ $\equiv \text{ mod}$ “.

It can easily be proved that both the complex multiplication can always be univocally performed, i. e.

$$4.21 \quad \vdash \sum_{r_1, r_2} (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2)$$

$$4.22 \quad \vdash \sum_{r_1, r_2} (r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2)$$

and besides

$$4.31 \quad \vdash (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2) \cdot (s_1 s_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2) \rightarrow (r_1 r_2 = s_1 s_2)$$

$$4.32 \quad \vdash (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2) \cdot (s_1 s_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2) \rightarrow (r_1 r_2 = s_1 s_2)$$

If now in the expression

$$r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2$$

or in the expression

$$r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2$$

(1) for the propositional variables $p_1 p_2$ all four constants which this pair of variables may assume, i. e., 0, 1, 2, 3, are substituted;

(2) for the propositional variables $q_1 q_2$ independently of the substitution (1) the constants 0, 1, 2, 3 are substituted as well,

then in consequence of (1) and (2) sixteen substitutions are obtained, each of them being propositional function containing two propositional variables, i. e. the pair $r_1 r_2$. In consequence of thesis 4.21 (4.22) for each of these sixteen propositional functions there is at least one such substitution for the variables $r_1 r_2$ after which this propositional function becomes a true proposition (tautology of the propositional calculus), and in consequence of thesis 4.31 (or 4.32) for each of these sixteen propositional functions there is no more than one such substitution for the propositional variables $r_1 r_2$. These substitutions are specified in Table I (or Table II).

TABLE I
Complex Addition
 $r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2$

$q_1 q_2 \backslash p_1 p_2$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

TABLE II
Complex Multiplication
 $r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2$

$q_1 q_2 \backslash p_1 p_2$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

5.

Follow the theses:

$$5.11 \quad \vdash p_1 p_2 = 0 + p_1 p_2$$

(proved by lemma 2.54 and definitions 3.11, 4.11)

$$5.12 \quad \vdash p_1 p_2 = 1 \cdot p_1 p_2$$

(proved by definition 3.12, lemmata 3.51, 3.52, and definition 4.12)

$$5.21 \quad \vdash 0 = p_1 p_2 + p_1 p_2$$

(see Table I)

$$5.22 \quad \vdash (p_1 p_2 \neq 0) \rightarrow \sum_{q_1, q_2} (1 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2)$$

(see Table II)

5.31 (commutability of the complex addition)

$$\vdash (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2) \rightarrow (r_1 r_2 = q_1 q_2 + p_1 p_2)$$

(see lemma 2.55 and definition 4.11)

5.32 (commutability of the complex multiplication)

$$\vdash (r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2) \rightarrow (r_1 r_2 = q_1 q_2 \cdot p_1 p_2)$$

(see definition 4.12)

5.41 (associativity of the complex addition)

$$\vdash (p_1 p_2 = t_1 t_2 + r_1 r_2) \cdot (q_1 q_2 = t_1 t_2 + u_1 u_2) \cdot \\ \cdot (r_1 r_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2) \rightarrow (p_1 p_2 = q_1 q_2 + v_1 v_2)$$

(see lemma 2.56 and definition 4.11)

5.42 (associativity of the complex multiplication)

$$\vdash (p_1 p_2 = t_1 t_2 \cdot r_1 r_2) \cdot (q_1 q_2 = t_1 t_2 \cdot u_1 u_2) \cdot \\ \cdot (r_1 r_2 = u_1 u_2 \cdot v_1 v_2) \rightarrow (p_1 p_2 = q_1 q_2 \cdot v_1 v_2)$$

Demonstration of the thesis 5.42, long and laborious as it may be, presents no real difficulties.

$$5.51 \quad \vdash \sum_{p_1 p_2} (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2)$$

(see Table I)

$$5.52 \quad \vdash (p_1 p_2 = p_1 p_2 + p_1 p_2) \leftrightarrow (p_1 p_2 = 0)$$

(see Table I)

$$5.53 \quad \vdash (q_1 q_2 \neq 0) \rightarrow \sum_{p_1 p_2} (r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2)$$

(see Table II)

$$5.61 \quad \vdash (s_1 s_2 = p_1 p_2 + r_1 r_2) \cdot (s_1 s_2 = q_1 q_1 + r_1 r_2) \rightarrow (p_1 p_2 = q_1 q_2)$$

(see 2.43, 2.55, 2.57, 3.25, 4.11)

$$5.62 \quad \vdash (r_1 r_2 \neq 0) \cdot (s_1 s_2 = p_1 p_2 \cdot r_1 r_2) \cdot (s_1 s_2 = q_1 q_2 \cdot r_1 r_2) \rightarrow \\ \rightarrow (p_1 p_2 = q_1 q_2)$$

(see Table II)

5.71 (distributive law)

$$\vdash (u_1 u_2 = q_1 q_2 + r_1 r_2) \cdot (v_1 v_2 = p_1 p_2 \cdot u_1 u_2) \cdot \\ \cdot (w_1 w_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2) \cdot (t_1 t_2 = p_1 p_2 \cdot r_1 r_2) \rightarrow \\ \rightarrow (v_1 v_2 = w_1 w_2 + t_1 t_2)$$

(see Table I and Table II)

The following theses belonging to the propositional meta-calculus can now be considered as proved:

5.81 The propositional function $r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2$ containing three pairs of propositional variables: $p_1 p_2, q_1 q_2, r_1 r_2$ satisfies the set of postulates characterizing the Abelian group (proof by 4.21, 4.31, 5.31, 5.41, 5.51, 5.61).

5.82 The propositional functions $r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2$ and $r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_2 q_2$, both containing three pairs of propositional variables $p_1 p_2, q_2 q_2, r_1 r_2$, satisfy the set of postulates characterizing the commutative field (proof by 5.81, 4.22, 4.32, 5.32, 5.42, 5.52, 5.53, 5.62, 5.71).

6.

Theses 5.81 and 5.82 belong, as pointed out above, not to the propositional calculus but to the propositional meta-calculus. The question arises, whether it would not be possible to formulate their analoga in the language of the propositional calculus.

This can be achieved in the following way:

(1) Formulation of the definition of the Abelian group and of the commutative field by means of a certain formalized language.

(2) Building the interpretation of this system in the propositional calculus.

(3) After application of the interpretation (2) to the definition (1). the definition of the Abelian group and of the commutative field in the language of the propositional calculus will be obtained.

The definitions of the Abelian group and of the commutative field will be formulated in the language of the simplified theory of logical types.

An auxiliary notion, viz. that of the Abelian quasi-group, will also be introduced. The definition of the expression „set A is an Abelian quasi-group with reference to the ternary relation U ” (symbolized „ $A \overline{QAB}U$ ”) is as follows:

$$\begin{aligned}
6.11 \quad (A \overline{QAb1} U) =_{Df} & \left\{ \sum_x (x \in A) \cdot \right. \\
& \cdot \prod_{xy} [(x, y \in A) \rightarrow \sum_z (z Uxy)] \cdot \\
& \cdot \prod_{xyz} [(x, y \in A) \cdot (z Uxy) \rightarrow (z \in A)] \cdot \\
& \cdot \prod_{xyz} [(x, y \in A) \cdot (z Uxy) \rightarrow (z Uyx)] \cdot \\
& \cdot \prod_{xyz, z_1} [(x, y \in A) \cdot (z_1 Uxy) \cdot (z_2 Uxy) \rightarrow (z_1 = z_2)] \cdot \\
& \left. \cdot \prod_{abcxyz} [(a, b, c \in A) \cdot (x Uab) \cdot (y Ubc) \cdot (z Uay) \rightarrow (z Uxc)] \right\}
\end{aligned}$$

The definition of the expression „the set A is an Abelian group with respect to the ternary relation U ” (symbolized „ $A \overline{Ab1} U$ ”) is as follows:

$$\begin{aligned}
6.12 \quad (A \overline{Ab1} U) =_{Df} & \{(A \overline{QAb1} U) \cdot \\
& \cdot \prod_{yz} [(y, z \in A) \rightarrow \sum_x (x \in A) \cdot (z Uxy)]\}
\end{aligned}$$

Finally the definition of the expression „the set A is a commutative field with respect to the ternary relations U and W ” (symbolized: „ $A \overline{Gls} U, W$ ”):⁴

$$\begin{aligned}
6.13 \quad (A \overline{Gls} U, W) =_{Df} & \{(A \overline{QAb1} U) \cdot (A \overline{QAb1} W) \cdot \\
& \cdot \sum_x [(x \in A) \cdot (x Uxx)'] \cdot \\
& \cdot \prod_{yz} [(y, z \in A) \rightarrow \sum_x (x \in A) \cdot (z Uxy)] \cdot \\
& \cdot \prod_{yz} [(y, z \in A) \cdot (y Uyy)' \rightarrow \sum_x (x \in A) \cdot (z Wxy)] \cdot \\
& \cdot \prod_{abcx_1, x_2, yz} [(a, b, c \in A) \cdot (x_1 Wab) \cdot (x_2 Wac) \cdot \\
& \quad \cdot (y Ubc) \cdot (z Way) \rightarrow (z Ux_1 x_2)]\}
\end{aligned}$$

Analysis of the definitia of definitions 6.11, 6.12 and 6.13 shows that they contain the following kinds of expressions:

I) variables of the type⁵⁾

$$1) * : a b c x y z,$$

$$2) (*) : A,$$

$$3) (*, *, *) : UW,$$

II) compound expressions of the type

$$1) x = y$$

$$2) x \in A$$

$$3) z Uxy$$

$$4) \sum_{x_1, \dots, x_n}$$

$$5) \prod_{x_1, \dots, x_n}$$

In the initial stage of the interpretation of the expressions specified above the recursive terminological explanation of the notion of the propositional line (in the typographical sense) is first introduced:

- 6.21 Each propositional variable is a line of propositional variables.
- 6.22 When a propositional variable is added in writing to a line of propositional variables, a line of propositional variables is obtained.
- 6.23. Each of the two constants: Λ (falsum) and V (verum) is a line of propositional constants.
- 6.24 When a propositional constant is added in writing to a line of propositional constants, a line of propositional constants is obtained.
- 6.25 By the „propositional line“ is meant an expression which is either a line of propositional variables or a line of propositional constants.

The next preparatory step toward the intended interpretation is the recursive definition schema:

$$6.31 \quad (p_1 \in q_1 q_2) =_{Df} (p'_1 \rightarrow q_1) \cdot (p_1 \rightarrow q_2)$$

$$6.32 \quad (p_1 \dots p_n p_{n+1} \in q_1 \dots q_2^{n+1}) =_{Df} \\ =_{Df} [p_{n+1} \in (p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_2^n) (p_1 \dots p_n \in q_2^{n+1} \dots q_2^{n+1})]$$

e. g. for $n = 2$ the definition is

$$6.33 \quad (p_1 p_2 \in q_1 q_2 q_3 q_4) =_{Df} [p_2 \in (p_1 \in q_1 q_2) (p_1 \in q_3 q_4)]$$

Now, the above mentioned interpretation can begin:

- I. A natural number n is selected (where $n > 0$).
- II. The variables are interpreted as follows:
 - 1) of the type $*$, as the lines containing n propositional variables,
 - 2) of the type $(*)$, as the lines containing 2^n propositional variables,
 - 3) of the type $(*, *, *)$, as the lines containing $2^{3 \cdot n}$ propositional variables.
- III. Compound expressions will be interpreted as follows:
 - 1) „ $x = y$ ” as „ $p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_n$ ” (see the recursive schema 3.21, 3.22),
 - 2) „ $x \in A$ ” as „ $p_1 \dots p_n \in q_1 \dots q_{2^n}$ ” (see the recursive schema 6.31, 6.32),
 - 3) „ $z Uxy$ ” as the expression

$$r_1 \dots r_n p_1 \dots p_n q_1 \dots q_n \in s_1 \dots s_{2^3 \cdot n}$$

(see the recursive schema 6.31, 6.32).

- 4) „ $\sum_{x^1 \dots x_n}$ ” as the expression

$$\sum_{\substack{p_{11} \dots p_{n1} \\ \dots \dots \dots \\ p_{1m} \dots p_{nm}}}$$

and the general quantifier in an analogous way.

In the above interpretation every tautology of the simplified theory of logical types becomes a tautology of the propositional calculus (on the contrary, the postulate of infinity in this interpretation becomes false). Besides, in this interpretation the meaning of the following three expressions raises no doubts: They belong, of course, to the language of the propositional calculus.

- (1) $p_1 \dots p_{2^n} \overline{QAbI} q_1 \dots q_{2^{3 \cdot n}}$ (see definition 6.12)
- (2) $p_1 \dots p_{2^n} \overline{AbI} q_1 \dots q_{2^{3 \cdot n}}$ (see definition 6.12)
- (3) $p_1 \dots p_{2^n} \overline{GIs} q_1 \dots q_{2^{3 \cdot n}} r_1 \dots r_{2^{3 \cdot n}}$ (see definition 6.13)

In this way the definition of the Abelian group and of the commutative field (the Galois field) in the language of the propositional calculus are obtained. In the case discussed here it will be assumed that $n=2$, and hence $2^n=4$, and $2^{3 \cdot n}=64$

7.

As previously (see definitions 3.11, 3.12, 3.13, 3.14), it will now be suitable to introduce abbreviations of certain lines of propositional constants (see 6.23 and 6.24).

$$7.11 \quad \mathfrak{A} =_{Df} VVVV$$

$$7.12 \quad \mathfrak{B} =_{Df} \underline{VVVV}$$

Demonstration of the following two theses presents no difficulties:

$$7.21 \quad \vdash p_1 p_2 \in \mathfrak{A}$$

$$7.22 \quad \vdash (p_1 p_2 \in \mathfrak{B}) \leftrightarrow (p_1 p_2 \neq 0)$$

Now the complex addition and the complex multiplication will be given the ϵ -form; for that purpose abbreviations of each of the two lines of propositional constants concerned will be introduced; each of the lines has $2^{3 \cdot n}$, i. e. in the case discussed here 64 propositional constants.

$$7.31 \quad \mathfrak{C} =_{Df} \begin{array}{l} VAAA \ \ AVAA \ \ AAVA \ \ AAAV \\ AVAA \ \ VAAA \ \ AAAV \ \ AAVA \\ AAVA \ \ AAAV \ \ VAAA \ \ AVAA \\ AAAV \ \ AAVA \ \ AVAA \ \ VAAA \end{array}$$

$$7.32 \quad \mathfrak{D} =_{Df} \begin{array}{l} VAAA \ \ VAAA \ \ VAAA \ \ VAAA \\ VAAA \ \ AVAA \ \ AAVA \ \ AAAV \\ VAAA \ \ AAVA \ \ AAAV \ \ AVAA \\ VAAA \ \ AAAV \ \ AVAA \ \ AAVA \end{array}$$

Demonstration of the following two theses (by means of breaking them up into their constituents) is merely a matter of patience:

$$7.41 \quad \vdash \neg (r_1 r_2 p_1 p_2 q_1 q_2 \in \mathfrak{E}) \leftrightarrow (r_1 r_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2)$$

$$7.42 \quad \vdash \neg (r_1 r_2 p_1 p_2 q_1 q_2 \in \mathfrak{P}) \leftrightarrow (r_1 r_2 = p_1 p_2 \cdot q_1 q_2)$$

Besides there are theses:

$$7.51 \quad \vdash \mathfrak{A} \overline{QAbI} \mathfrak{E}$$

(proof based on theses 7.21, 7.41, 4.21, 4.31, 5.31, 5.41, and the interpreted definition 6.11)

$$7.52 \quad \vdash \mathfrak{A} \overline{QAbI} \mathfrak{P}$$

(proof based on theses 7.21, 7.42, 4.22, 4.32, 5.32, 5.42, and the interpreted definition 6.11)

$$7.61 \quad \vdash \mathfrak{A} \overline{AbI} \mathfrak{E}$$

(proof based on theses 7.51, 5.51, and the interpreted definition 6.12).

$$7.71 \quad \vdash \mathfrak{A} \overline{Gls} \mathfrak{E}, \mathfrak{P}$$

(proof based on theses 7.51, 7.52, 7.61, 5.52, 5.53, 5.71 and the interpreted definition 6.13).

The theses 7.61 and 7.71, belonging to the propositional calculus, are just the analoga of the theses 5.81 and 5.82, belonging to the propositional meta-calculus.

PRZYPISY

¹ The language of the functional calculus in the latter's narrower sense is not the Boolean product of the languages of the classical mathematical theories, since certain classical theories possess simplified variations in which quantifiers and other expressions of the functional calculus in its narrower sense can be dispensed with.

² The language of the propositional calculus involving only implication is, of course, a proper part of the language of the propositional calculus in the meaning used throughout this paper, it cannot, however, serve as a sufficient basis of any classical mathematical theory.

³⁾ As generally known, abstract algebras are usually formulated in the language of the simplified theory of logical types or in the language of the theory of sets (e. g. van der Waerden).

⁴⁾ If a full set of individuals is finite (the case met with in the interpretation to be presently applied), then the definition of the commutative field is identical with the definition of the Galois field, hence the symbol „ \overline{Gls} “ which is an abbreviation of the name „Galois“, like the symbol „ \overline{Abl} “ which is an abbreviation of the name „Abel“.

⁵⁾ Symbols of logical types as used in this paper are those introduced by Professor Mostowski (cf. A. Mostowski, *Mathematical Logic*, Warsaw—Wrocław 1948 (in Polish), Chap. VIII).

⁶⁾ The properties of the ϵ — function were formulated in the Report read at the Sixth Congress of Polish Mathematicians (Warsaw 1948) and in the Report read at the Joint Seventh Congress of Polish Mathematicians and the Third Congress of Czechoslovakian Mathematicians (Praha 1949), by the present author.

Michał Kamiński

**Researches on the origin of the Comet P/Wolf I
Part VIII**

Perturbations in the motion of the Comet due to Jupiter and
Saturn during the period

1793 Apr. 20.5 — 1784 Oct. 24.5

Mémoire présentée à la séance du 26 mai 1950.

1. The present paper is a continuation of the author's works on the investigations of the orbit of the comet P/Wolf I before its discovery in 1884. It contains the results of computations of the perturbations in its motion during the period 1793—1784, due to the influence of two mighty planets of the solar system, i. e. Jupiter and Saturn. Since the aim of the researches in question is the explanation the origin of this comet as well its eventual relation to some other comets, the relatively small perturbations due to the influence of the other planets were not taken into consideration.

In the V-th, VI-th and VII-th Parts of the author's „Researches on the origin of the comet Wolf I“, presented toward the end of 1949 and in the beginning of 1950 for publication in the Reports of the Warsaw Scientific Society, there were given in detail the reasons owing to which the undersigned decided to prolong his researches on the orbit of this comet backwards up to 1750. There was also proved the possibility of still exact computations of the backward perturbations for the period 1884—1750, on the basis of its systems of elements which satisfy the apparitions in the period 1884—1942. These researches may be considered as quite right, the more so as in the period 1800—1750 there were no close approaches of the comet to Jupiter which could provoke great variations in the elements

of its orbit. This statement can however not be regarded as a definitive one because the approaches of the comet to Jupiter during 1784—1750 have not yet been duly investigated. Their results will be given in subsequent papers of the author on this problem.

2. All the computations were done by the method of variation of arbitrary constants with perpetual change of the systems of elements every 50 days. It appeared that such an interval is quite sufficient for the period 1793—1784 because of comparatively considerable distances of the comet from Jupiter. They are given in the adjacent Tables. One can see that the distances in question begin to diminish only at the end of the period mentioned, being however no less than 2.9.A.U.

The system P_{-17} of elements deduced in Part VII of our Researches was taken as a basis for the computations:

1793 Apr. 20.5 G. M. T.

$$\left. \begin{array}{ll}
 M \ 361^{\circ}51'54''.9 & \Omega \ 212^{\circ}59' \ 4''.3 \\
 P_{-17} \dots \varphi \ 23^{\circ}41' \ 0''.3 & \pi \ 12^{\circ}34'12''.0 \\
 \mu \ 421''.3367 & i \ 26^{\circ}46' \ 6''.0
 \end{array} \right\} 1950.0$$

The perturbations due to Jupiter and Saturn up to 1784 Oct. 24.5 were computed with the above system. They are given in the Table below:

	Jupiter	Saturn	Total
δM	— 3562''.6	+ 163''.1	— 3399''.5
$\delta \varphi$	+ 290''.0	— 27''.9	+ 262''.1
$\delta \Omega$	— 100''.1	+ 15''.3	— 84''.8
$\delta \pi$	+ 111''.8	— 68''.3	+ 43''.5
δi	+ 60''.3	— 10''.2	+ 50''.1
$\delta \mu$	+ 0''.9646	— 0''.0145	+ 0''.9501

Adding the above totals to the system P_{-17} , we got the following perturbed system P_{-18} of elements:

1784 Oct. 24.5 G. M. T.

M	$358^{\circ}06'11''.6$	Ω	$212^{\circ}57'39''.5$	}	1950.0
$P_{-18} \dots \varphi$	$23^{\circ}45'22''.4$	π	$12^{\circ}34'55''.5$		
μ	$422''.2868$	i	$26^{\circ}46'56''.1$		

This last system was taken as a basis for further computations of variations in the comet's motion during the period 1784—1750.

3. The formulae used for all the computations of perturbations are widely known. They are to be found in several treatises of Theoretical Astronomy, among others in the well known manual of J. Bauschinger „Die Bahnbestimmung der Himmelskörper“. Having however in view that this book is at present difficult to obtain and taking into consideration that there exists a certain variety of the formulae in question, not given generally in the manuals — the author considered it useful to quote these formulae here, completing them with drawings. The drawings grant the reader a survey imagination and realization of certain quantities given in the analytical formulae. In such a way an additional check of computations may be easily obtained. Finally, some control formulae and notes are added which are very useful during the actual computations.

The author pays much attention to the problem of verification of his computations. It taken him 30% or even more of the time used for performing the actual work. He considers this problem as the most important one. The stories of some astronomers who illo tempore computed according to wrong formulae, are handed down from one generation of astronomers to the other, since it is no desirable to publish them in the History of Astronomy. Errare humanum est. On the other part, during some last decennials we witnessed several times publications of ephemeris of the comets which gave great deviations from the observations. because of computing errors done by the authors.

Let us use the denotations given below:

- I. t Time
 M Mean anomaly of the comet
 E Eccentric anomaly of the comet
 f True anomaly of the comet
 $e = \sin \varphi$. Eccentricity of its orbit
 Ω Longitude of its ascending Node
 π Longitude of its Perihelion
 $\omega = \pi - \Omega$
 $u = \omega + f$
 i inclination of its orbit to the Ecliptic
 μ The mean daily motion of the comet
 r Its radius-vector
 a Its semi-major axis
 $p = a \cos^2 \varphi$ Its parameter
 λ The interval given in the mean days
 k The Gaussian constant; $\lg k'' = 3.550007$
 $h = k/\sqrt{p} = k/\sqrt{a} \cdot \cos \varphi$
 $A'' = -3 a \lambda \mu \sin 1''$
 m' The mass of the disturbing planet
 $N = \lambda h m'$
- II. ν' Longitude of the disturbing planet in its orbit
 λ' Its heliocentric longitude
 β' Its heliocentric latitude
 r' Its radius-vector
 Ω' Longitude of its ascending node
 i' Inclination of its orbit to the Ecliptic
 I Inclination of the comet's orbit to the planet's orbit
 Δ Distance of the comet from the disturbing planet

Let us denote further:

- Ψ — Arc of the great circle of the comet's orbit between its ascending node Ω on the Ecliptic and the ascending node A of the comet's orbit on the orbit of the planet (v. Fig. 1). $\Phi = \Omega A$.

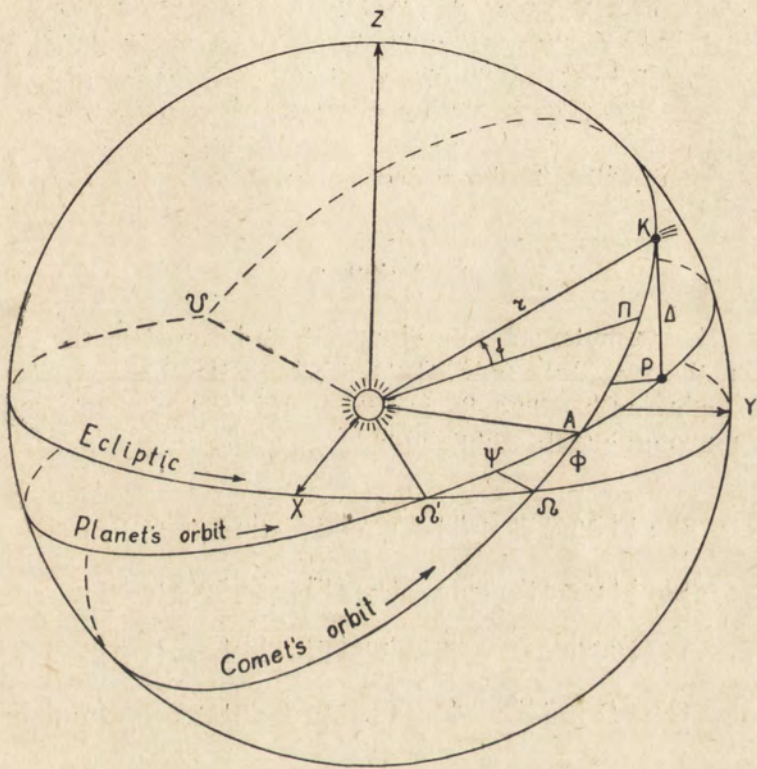


Fig. 1

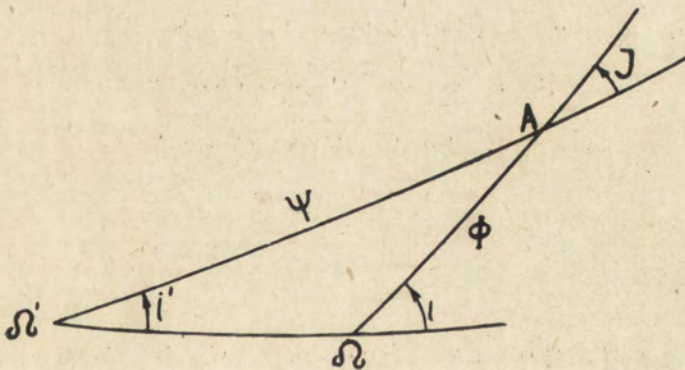


Fig. 2

Φ — Arc of the great circle of the planet's orbit recorded from the ascending node Ω' of its orbit on the Ecliptic up to the ascending node A of the orbit of comet on the planet's orbit. $\Psi = \Omega' A$.

There exist the two groups of formulae:

4. Group A.

The formulae of this group are to be used in the cases when the first order perturbations are so small that those of the higher order may be neglected. One can use them also for the approximate computations.

$$\sin \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) = \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i + i')$$

$$\sin \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) = \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i - i')$$

$$\cos \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) = \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i + i')$$

$$\cos \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) = \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i - i')$$

In practice we compute

$$tg \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) = tg \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i + i') \operatorname{Cosec} \frac{1}{2} (i - i')$$

$$tg \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) = tg \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i + i') \operatorname{Sec} \frac{1}{2} (i - i')$$

$$\sin I = \sin (\Omega - \Omega') \sin i' \operatorname{Cosec} \Phi$$

$$\sin I = \sin (\Omega - \Omega') \sin i \operatorname{Cosec} \Psi$$

$$\Pi = \pi - \Omega - \Phi$$

Verification:

$$\sin (\Omega - \Omega') \operatorname{Cotg} \Phi = \sin i \operatorname{Cotg} i' - \cos (\Omega - \Omega') \cos i$$

$$\cos I = \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos (\Omega - \Omega')$$

Further

$$\operatorname{tg} L' = \operatorname{Cos} I \operatorname{tg} [v' - (\Omega' + \Psi)]$$

$$\operatorname{Sin} B' = \operatorname{Sin} I \operatorname{Sin} [v' - (\Omega' + \Psi)]$$

Note 1. L' is always close enough to $[v' - (\Omega' + \Psi)]$

Note 2. Since B' is small, $\operatorname{Cos} B'$ differs in practice but little from 1.

We compute further:

$$\xi' = r' \operatorname{Cos} B' \operatorname{Cos} (f' + \Pi - L')$$

$$\eta' = r' \operatorname{Cos} B' \operatorname{Sin} (f' + \Pi - L')$$

$$\zeta' = r' \operatorname{Sin} B'$$

$$\Delta^2 = (\xi' - r)^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

$$K = \Delta^{-3} - r'^{-3}$$

The projections of the perturbing forces on the axes of co-ordinates are:

$$R = N(K \xi' - r \Delta^{-3})$$

$$S = -NK \eta'$$

$$T = -NK \zeta'$$

The formulae for finding the differentials of perturbations with the help of R, S, T are given at the end of the next paragraph.

5. Group B.

In those cases when the perturbations of higher order ought to be strictly taken into consideration, the formulae of this group are to be used:

$$\cos B \sin L = \sin i \sin \beta' + \cos i \cos \beta' \sin (\lambda' - \Omega)$$

$$\cos B \cos L = \cos \beta' \cos (\lambda' - \Omega)$$

$$\sin B = \cos i \sin \beta' - \sin i \cos \beta' \sin (\lambda' - \Omega)$$

Note: After obtaining $\sin B$, we found immediately $\cos B$. It must agree closely with the $\cos B$ deduced from the first two formulae above.

Further:

$$\xi = r' \cos B \cos (L - u) \quad R = N(K\xi - r\Delta^{-3})$$

$$\eta = r' \cos B \sin (L - u) \quad S = NK\eta$$

$$\zeta = r' \sin B \quad T = N\lambda\zeta$$

The R , S , T found according to the formulae given in § 4 must agree entirely with those given here.

We compute further:

$$L = -Rp \cos f + S(p + r) \sin f$$

$$P = -L \cot g \varphi - 2Rr \cos \varphi$$

Finally, we get the differentials of perturbations:

$$d\delta i = Tr \cos (f + \pi - \Omega)$$

$$d\delta \Omega = Tr \sin (f + \pi - \Omega) \operatorname{Cosec} i$$

$$d\delta \pi = L \operatorname{Cosec} \varphi + 2 \sin^2 i/2 d\delta \Omega$$

$$d\delta \varphi = a \cos \varphi [R \sin f + S(\cos f + \cos E)]$$

$$\lambda d\delta \mu = A(Re \sin f + p/r \cdot S)$$

$$\delta M = \int P d\mu + \lambda \iint d\delta \mu \cdot d\mu^2$$

In all our researches, the integration is done between the limits $n=0$ and $n=i$. The integral is then equal to zero for the epoch $n=0$. The constants of integration are to be found with the formulae:

$$f(a \pm 0.5\lambda) = \pm 0.5 f(a) + \frac{1}{24} [f'(a + 0.5\lambda) + f'(a - 0.5\lambda)] + \dots$$

$$f''(a) = -\frac{1}{12} f''(a) + \frac{1}{240} f'''(a) + \dots$$

The sums of the differentials are:

$$\int_0^i f(a + n\lambda) dn = +0.5 [f(a + \overline{i + 0.5\lambda}) + f(a + \overline{i - 0.5\lambda})] - \\ -\frac{1}{24} [f'(a + \overline{i + 0.5\lambda}) + f'(a + \overline{i - 0.5\lambda})] + \dots$$

$$\int_0^i \int_0^i f(a + n\lambda) dn^2 = f(a + i\lambda) + \frac{1}{12} f'(a + i\lambda) - \frac{1}{240} f''(a + i\lambda) + \dots$$

In practice, third differences are generally neglected. When they become too great, the interval must be diminished.

Cracow, Apr. 11 1950.

JUPITER

1793 Apr. 20.5 — 1784 Oct. 24.5

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
1784 July	16.5	— 30'5	— 75'6	+ 9'9	+ 45'4	— 15'8	+ 330'6	2'859
Sept.	4.5	— 19'3	— 94'9	+ 10'3	+ 55'7	— 25'6	+ 305'0	2'973
Oct.	24.5	— 9'3	— 104'2	+ 8'9	+ 64'6	— 30'4	+ 274'6	3'166
Dec.	13.5	— 2'6	— 106'8	+ 6'5	+ 71'1	— 29'4	+ 245'2	3'428
1785 Feb.	1.5	+ 0'7	— 106'1	+ 4'1	+ 75'2	— 24'6	+ 220'6	3'741
March	23.5	+ 1'6	— 104'5	+ 2'2	+ 77'4	— 18'7	+ 201'9	4'082
May	12.5	+ 1'3	— 103'2	+ 1'0	+ 78'4	— 13'4	+ 188'5	4'429
July	1.5	+ 0'5	— 102'7	+ 0'2	+ 78'6	— 9'5	+ 179'5	4'772
Aug.	20.5	— 0'4	— 103'1	— 0'1	+ 78'5	— 6'9	+ 172'1	5'100
Oct.	9.5	— 1'0	— 104'1	— 0'2	+ 78'3	— 5'6	+ 166'5	5'408
Nov.	28.5	— 1'3	— 105'4	— 0'2	+ 78'1	— 5'1	+ 161'4	5'696
1786 Jan.	17.5	— 1'3	— 106'7	— 0'1	+ 78'0	— 5'3	+ 156'1	5'960
March	8.5	— 1'1	— 107'8	— 0'1	+ 77'9	— 5'9	+ 150'2	6'199
Apr.	27.5	— 0'6	— 108'4	0'0	+ 77'9	— 6'8	+ 143'4	6'414
June	16.5	0'0	— 108'4	0'0	+ 77'9	— 7'9	+ 135'5	6'608
Aug.	5.5	+ 0'8	— 107'6	— 0'1	+ 77'8	— 9'0	+ 126'5	6'782
Sept.	24.5	+ 1'6	— 106'0	— 0'2	+ 77'6	— 10'2	+ 116'3	6'934
Nov.	13.5	+ 2'5	— 103'5	— 0'4	+ 77'2	— 11'4	+ 104'9	7'065
1787 Jan.	2.5	+ 3'4	— 100'1	— 0'6	+ 76'6	— 12'4	+ 92'5	7'175
Feb.	21.5	+ 4'2	— 95'9	— 1'0	+ 75'6	— 13'4	+ 79'1	7'266
Apr.	12.5	+ 4'9	— 91'0	— 1'3	+ 74'3	— 14'2	+ 64'9	7'340
June	1'5	+ 5'5	— 85'5	— 1'7	+ 72'6	— 15'0	+ 49'9	7'396
July	21.5	+ 6'0	— 79'5	— 2'1	+ 70'5	— 15'6	+ 34'3	7'434
Sept.	9.5	+ 6'4	— 73'1	— 2'5	+ 68'0	— 16'1	+ 18'2	7'454
Oct.	29.5	+ 6'7	— 66'4	— 2'9	+ 65'1	— 16'3	+ 1'9	7'461
Dec.	18.5	+ 6'8	— 59'6	— 3'3	+ 61'8	— 16'5	— 14'6	7'452
1788 Feb.	6.5	+ 6'8	— 52'8	— 3'6	+ 58'2	— 16'4	— 31'0	7'427
March	27.5	+ 6'6	— 46'2	— 3'9	+ 54'3	— 16'3	— 47'3	7'388
May	16.5	+ 6'3	— 39'9	— 4'2	+ 50'1	— 15'9	— 63'2	7'337
July	5.5	+ 6'0	— 33'9	— 4'4	+ 45'7	— 15'5	— 78'7	7'273
Aug.	24.5	+ 5'5	— 28'4	— 4'6	+ 41'1	— 14'9	— 93'6	7'198
Oct.	13.5	+ 5'0	— 23'4	— 4'6	+ 36'5	— 14'0	— 107'6	7'110
Dec.	2.5	+ 4'4	— 19'0	— 4'6	+ 31'9	— 13'1	— 120'7	7'103
1789 Jan.	21.5	+ 3'7	— 15'3	— 4'6	+ 27'3	— 12'1	— 132'8	6'908

JUPITER

1793 Apr. 20.5 — 1784 Oct. 24.5

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda d\delta\pi$	'f	"f	P	'f
1784 July	16.5	— 25.6	"	"	"	"	"	"
Sept.	4.5	— 15.9	+ 134.2	+ 2.954	+ 39.037	— 2617.932	— 0.1	— 1025.9
Oct.	24.5	— 12.8	+ 118.3	+ 5.702	+ 44.739	— 2578.895	— 3.5	— 1029.4
Dec.	13.5	— 13.0	+ 105.5	+ 7.097	+ 51.836	— 2534.156	+ 2.0	— 1027.4
1785 Feb.	1.5	— 13.0	+ 92.5	+ 6.984	+ 58.820	— 2482.320	+ 10.3	— 1017.1
March	23.5	— 12.1	+ 80.4	+ 5.856	+ 64.676	— 2423.500	+ 16.0	— 1001.1
May	12.5	— 8.7	+ 71.7	+ 4.324	+ 69.000	— 2358.824	+ 17.1	— 984.0
July	1.5	— 3.1	+ 68.6	+ 2.885	+ 71.885	— 2289.824	+ 14.2	— 969.8
Aug.	20.5	+ 3.5	+ 72.1	+ 1.640	+ 73.525	— 2217.939	+ 9.1	— 960.7
Oct.	9.5	+ 10.2	+ 82.3	+ 0.657	+ 74.182	— 2144.414	+ 3.1	— 957.6
Nov.	28.5	+ 16.2	+ 98.5	— 0.088	+ 74.094	— 2070.232	— 2.7	— 960.3
1786 Jan.	17.5	+ 21.4	+ 119.9	— 0.637	+ 73.457	— 1996.138	— 7.9	— 968.2
March	8.5	+ 25.4	+ 145.3	— 1.031	+ 72.426	— 1992.681	— 12.2	— 980.4
Apr.	27.5	+ 28.4	+ 173.7	— 1.320	+ 71.106	— 1850.255	— 15.6	— 996.0
June	16.5	+ 30.6	+ 204.3	— 1.520	+ 69.586	— 1779.149	— 18.1	— 1014.1
Aug.	5.5	+ 31.8	+ 236.1	— 1.653	+ 67.933	— 1709.563	— 19.6	— 1033.7
Sept.	24.5	+ 32.3	+ 268.4	— 1.740	+ 66.193	— 1641.630	— 20.4	— 1054.1
Nov.	13.5	+ 32.1	+ 300.5	— 1.786	+ 64.407	— 1575.437	— 20.3	— 1074.4
1787 Jan.	2.5	+ 31.1	+ 331.6	— 1.803	+ 62.604	— 1511.030	— 19.5	— 1093.9
Feb.	21.5	+ 29.6	+ 361.2	— 1.798	+ 60.806	— 1448.426	— 18.0	— 1111.9
Apr.	12.5	+ 27.7	+ 388.9	— 1.779	+ 59.027	— 1387.620	— 16.0	— 1127.9
June	1.5	+ 25.4	+ 414.3	— 1.749	+ 57.278	— 1328.593	— 13.5	— 1141.4
July	21.5	+ 22.8	+ 437.1	— 1.710	+ 55.568	— 1271.315	— 10.5	— 1151.9
Sept.	9.5	+ 19.8	+ 456.9	— 1.666	+ 53.902	— 1215.747	— 7.2	— 1159.1
Oct.	29.5	+ 16.6	+ 473.5	— 1.618	+ 52.284	— 1161.845	— 3.6	— 1162.7
Dec.	18.5	+ 13.2	+ 486.7	— 1.569	+ 50.715	— 1109.561	+ 0.2	— 1162.5
1788 Feb.	6.5	+ 9.8	+ 496.5	— 1.520	+ 49.195	— 1058.846	+ 4.3	— 1158.2
March	27.5	+ 6.2	+ 502.7	— 1.471	+ 47.724	— 1009.651	+ 8.5	— 1149.7
May	16.5	+ 2.7	+ 505.4	— 1.427	+ 46.297	— 961.927	+ 12.7	— 1137.0
July	5.5	— 0.9	+ 504.5	— 1.382	+ 44.915	— 915.630	+ 17.0	— 1120.0
Aug.	24.5	— 4.4	+ 500.1	— 1.342	+ 43.573	— 870.715	+ 21.3	— 1098.7
Oct.	13.5	— 7.8	+ 492.3	— 1.304	+ 42.269	— 827.142	+ 25.5	— 1073.2
Dec.	2.5	— 11.0	+ 481.3	— 1.269	+ 41.000	— 784.873	+ 29.6	— 1043.6
1789 Jan.	21.5	— 14.1	+ 467.2	— 1.237	+ 39.763	— 743.873	+ 33.5	— 1010.1
		— 16.9	+ 450.3	— 1.210	+ 38.553	— 704.110	+ 37.2	— 972.9

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
1789 Jan.	21.5	+ 3.7	- 15.3	- 4.6	+ 27.3	- 12.1	- 132.8	6.908
March	12.5	+ 3.1	- 12.2	- 4.4	+ 22.9	- 10.9	- 143.7	6.796
May	1.5	+ 2.5	- 9.7	- 4.2	+ 18.7	- 9.6	- 153.3	6.677
June	20.5	+ 1.8	- 7.9	- 3.9	+ 14.8	- 8.1	- 161.4	6.554
Aug.	9.5	+ 1.3	- 6.6	- 3.6	+ 11.2	- 6.7	- 168.1	6.426
Sept.	28.5	+ 0.8	- 5.8	- 3.2	+ 8.0	- 5.1	- 173.2	6.296
Nov.	17.5	+ 0.4	- 5.4	- 2.7	+ 5.3	- 3.5	- 176.7	6.165
1790 Jan.	6.5	+ 0.1	- 5.3	- 2.2	+ 3.1	- 1.8	- 178.9	6.032
Feb.	25.5	- 0.2	- 5.5	- 1.8	+ 1.3	- 0.1	- 178.6	5.902
Apr.	16.5	- 0.3	- 5.8	- 1.2	+ 0.1	+ 1.6	- 177.0	5.776
June	5.5	- 0.3	- 6.1	- 0.8	- 0.7	+ 3.3	- 173.7	5.656
July	25.5	- 0.2	- 6.3	- 0.4	- 1.1	+ 4.8	- 168.9	5.544
Sept.	13.5	0.0	- 6.3	- 0.1	- 1.2	+ 6.3	- 162.6	5.441
Nov.	2.5	+ 0.2	- 6.1	+ 0.2	- 1.0	+ 7.5	- 155.1	5.352
Dec.	22.5	+ 0.4	- 5.7	+ 0.4	- 0.6	+ 8.5	- 146.6	5.280
1791 Feb.	10.5	+ 0.5	- 5.2	+ 0.5	- 0.1	+ 9.3	- 137.3	5.223
Apr.	1.5	+ 0.7	- 4.5	+ 0.5	+ 0.4	+ 9.7	- 127.6	5.186
May	21.5	+ 0.7	- 3.8	+ 0.5	+ 0.9	+ 9.7	- 117.9	5.173
July	10.5	+ 0.6	- 3.2	+ 0.4	+ 1.3	+ 9.5	- 108.4	5.186
Aug.	29.5	+ 0.5	- 2.7	+ 0.2	+ 1.5	+ 9.2	- 99.2	5.222
Oct.	18.5	+ 0.3	- 2.4	+ 0.1	+ 1.6	+ 8.6	- 90.6	5.286
Dec.	7.5	+ 0.1	- 2.3	0.0	+ 1.6	+ 8.1	- 82.5	5.383
1792 Jan.	26.5	- 0.1	- 2.4	0.0	+ 1.6	+ 7.6	- 74.9	5.508
March	16.5	- 0.2	- 2.6	0.0	+ 1.6	+ 7.4	- 67.5	5.659
May	5.5	- 0.2	- 2.8	0.0	+ 1.6	+ 7.4	- 60.1	5.837
June	24.5	- 0.1	- 2.9	0.0	+ 1.6	+ 7.8	- 52.3	6.043
Aug.	13.5	+ 0.1	- 2.8	0.0	+ 1.6	+ 8.4	- 43.9	6.269
Oct.	2.5	+ 0.4	- 2.4	- 0.1	+ 1.5	+ 9.1	- 34.8	6.512
Nov.	21.5	+ 0.6	- 1.8	- 0.2	+ 1.3	+ 10.0	- 24.8	6.759
1793 Jan.	10.5	+ 0.8	- 1.0	- 0.3	+ 1.0	+ 10.1	- 14.7	7.036
March	1.5	+ 0.7	- 0.3	- 0.6	+ 0.4	+ 10.0	- 4.7	7.247
Apr.	20.5	+ 0.5	+ 0.2	- 0.8	- 0.4	+ 9.3	+ 4.6	7.468
June	9.5	0.0	+ 0.2	- 1.0	- 1.4	+ 8.3	+ 12.9	7.663
July	30.5	- 0.6		- 1.2		+ 7.2		7.835

		$d\delta\pi$	' f	$\lambda d\delta n$	' f	" f	P	' f
1789 Jan.	21.5	— 16'9	+ 450'3	— 1'210	+ 38'553	— 704'110	+ 37'2	— 972'9
March	12.5	— 19'5	+ 430'8	— 1'186	+ 37'367	— 665'557	+ 40'6	— 932'3
May	1.5	— 21'8	+ 409'0	— 1'163	+ 36'204	— 628'190	+ 43'7	— 888'6
June	20.5	— 23'8	+ 385'2	— 1'141	+ 35'063	— 591'986	+ 46'4	— 842'2
Aug.	9.5	— 25'4	+ 359'8	— 1'122	+ 33'941	— 556'923	+ 48'7	— 793'5
Sept.	28'5	— 26'6	+ 323'2	— 1'103	+ 32'838	— 522'982	+ 50'6	— 742'9
Nov.	17.5	— 27'4	+ 305'8	— 1'083	+ 31'755	— 490'144	+ 51'9	— 691'0
1790 Jan.	6.5	— 27'6	+ 278'2	— 1'060	+ 30'695	— 458'389	+ 52'6	— 638'4
Feb.	25.5	— 27'4	+ 250'8	— 1'035	+ 29'660	— 427'694	+ 52'8	— 585'6
Apr.	16.5	— 26'5	+ 224'3	— 1'005	+ 28'655	— 398'034	+ 52'2	— 533'4
June	5.5	— 25'2	+ 199'1	— 0'973	+ 27'682	— 369'379	+ 51'2	— 482'2
July	25.5	— 23'3	+ 175'8	— 0'934	+ 26'748	— 341'697	+ 49'3	— 432'9
Sept.	13.5	— 20'9	+ 154'9	— 0'888	+ 25'860	— 314'949	+ 46'8	— 386'1
Nov.	2.5	— 18'2	+ 136'7	— 0'843	+ 25'017	— 289'089	+ 43'7	— 342'4
Dec.	22.5	— 15'1	+ 121'6	— 0'797	+ 24'220	— 264'072	+ 40'0	— 302'4
1791 Feb.	10.5	— 11'9	+ 109'7	— 0'755	+ 23'465	— 239'852	+ 36'1	— 266'3
Apr.	1.5	— 8'8	+ 100'9	— 0'720	+ 22'745	— 216'387	+ 31'9	— 234'4
May	21.5	— 6'1	+ 94'8	— 0'705	+ 22'040	— 193'642	+ 28'0	— 206'4
July	10.5	— 4'0	+ 90'8	— 0'715	+ 21'325	— 171'602	+ 24'4	— 182'0
Aug.	29.5	— 2'6	+ 88'2	— 0'755	+ 20'570	— 150'277	+ 21'4	— 160'6
Oct.	18.5	— 2'1	+ 86'1	— 0'834	+ 19'736	— 129'707	+ 19'1	— 141'5
Dec.	7.5	— 2'5	+ 83'6	— 0'961	+ 18'775	— 109'971	+ 17'7	— 123'8
1792 Jan.	26.5	— 3'7	+ 79'9	— 1'132	+ 17'643	— 91'196	+ 16'9	— 106'9
March	16.5	— 5'5	+ 74'4	— 1'342	+ 16'301	— 73'553	+ 16'6	— 90'3
May	5.5	— 7'6	+ 66'8	— 1'582	+ 14'719	— 57'252	+ 16'6	— 73'7
June	24.5	— 9'6	+ 57'2	— 1'845	+ 12'874	— 42'533	+ 16'4	— 57'3
Aug.	13.5	— 11'1	+ 46'1	— 2'098	+ 10'776	— 29'659	+ 15'7	— 41'6
Oct.	2.5	— 11'9	+ 34'2	— 2'316	+ 8'460	— 18'883	+ 14'3	— 27'3
Nov.	21.5	— 11'6	+ 22'6	— 2'462	+ 5'998	— 10'423	+ 12'0	— 15.3
1793 Jan.	10.5	— 10'4	+ 12'2	— 2'498	+ 3'500	— 4'425	+ 8'8	— 6'5
March	1.5	— 8'6	+ 3'6	— 2'395	+ 1'105	— 0'925	+ 5'3	— 1'2
Apr.	20.5	— 7'0	— 3'4	— 2'162	— 1'057	+ 0'180	+ 2'0	+ 0'8
June	9.5	— 6'1	— 9'5	— 1'823	— 2'880	— 0'877	— 0'4	+ 0'4
July	30.5	— 6'2		— 1'434		— 3'757	— 1'7	

SATURN

1793 Apr. 20.5 — 1784 Oct. 24.5

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
1784 July	16.5	— 0'3	"	"	"	"	"	8'70
Sept.	4.5	— 0'1	+ 15'4	+ 0'1	— 10'3	— 0'6	— 27'4	9'16
Oct.	24.5	0'0	+ 15'3	+ 0'1	— 10'2	— 0'4	— 27'8	9'65
Dec.	13.5	0'0	+ 15'3	0'0	— 10'2	— 0'2	— 28'0	10'15
1785 Feb.	1.5	0'0	+ 15'3	0'0	— 10'2	0'0	— 28'0	10'63
March	23.5	— 0'1	+ 15'3	— 0'1	— 10'3	+ 0'2	— 27'8	11'08
May	12.5	— 0'1	+ 15'2	— 0'1	— 10'4	+ 0'3	— 27'5	11'51
July	1.5	— 0'2	+ 15'1	— 0'1	— 10'6	+ 0'4	— 27'1	11'92
Aug.	20.5	— 0'3	+ 14'9	— 0'1	— 10'6	+ 0'4	— 26'7	12'30
Oct.	9.5	— 0'3	+ 14'6	— 0'1	— 10'7	+ 0'4	— 26'3	12'63
Nov.	28.5	— 0'4	+ 14'2	— 0'1	— 10'8	+ 0'4	— 25'9	12'90
1786 Jan.	17.5	— 0'5	+ 13'7	— 0'1	— 10'9	+ 0'4	— 25'5	13'15
March	8.5	— 0'6	+ 13'1	— 0'1	— 11'0	+ 0'4	— 25'1	13'38
Apr.	27.5	— 0'6	+ 12'5	0'0	— 11'0	+ 0'3	— 24'8	13'58
June	16.5	— 0'7	+ 11'8	0'0	— 11'0	+ 0'3	— 24'5	13'76
Aug.	5.5	— 0'7	+ 11'1	0'0	— 11'0	+ 0'3	— 24'2	13'93
Sept.	24.5	— 0'8	+ 10'3	+ 0'1	— 10'9	+ 0'3	— 23'9	14'08
Nov.	13.5	— 0'8	+ 9'5	+ 0'1	— 10'8	+ 0'4	— 23'5	14'21
1787 Jan.	2.5	— 0'8	+ 8'7	+ 0'1	— 10'7	+ 0'4	— 23'1	14'33
Feb.	21.5	— 0'8	+ 7'9	+ 0'2	— 10'5	+ 0'4	— 22'7	14'44
Apr.	12.5	— 0'8	+ 7'1	+ 0'2	— 10'3	+ 0'4	— 22'3	14'53
June	1.5	— 0'8	+ 6'3	+ 0'2	— 10'1	+ 0'4	— 21'9	14'62
July	21.5	— 0'8	+ 5'5	+ 0'2	— 9'9	+ 0'4	— 21'5	14'69
Sept.	9.5	— 0'8	+ 4'7	+ 0'3	— 9'6	+ 0'5	— 21'0	14'74
Oct.	29'5	— 0'8	+ 3'9	+ 0'3	— 9'3	+ 0'5	— 20'5	14'79
Dec.	18.5	— 0'7	+ 3'2	+ 0'3	— 9'0	+ 0'5	— 20'0	14'84
1788 Feb.	6.5	— 0'7	+ 2'5	+ 0'3	— 8'7	+ 0'5	— 19'5	14'89
March	27.5	— 0'7	+ 1'8	+ 0'4	— 8'3	+ 0'5	— 19'0	14'93
May	16.5	— 0'6	+ 1'2	+ 0'4	— 7'9	+ 0'6	— 18'4	14'94
July	5.5	— 0'6	+ 0'6	+ 0'4	— 7'5	+ 0'6	— 17'8	14'96
Aug.	24.5	— 0'5	+ 0'1	+ 0'4	— 7'1	+ 0'6	— 17'2	14'98
Oct.	13.5	— 0'5	— 0'4	+ 0'4	— 6'7	+ 0'6	— 16'6	14'98
Dec.	2.5	— 0'4	— 0'8	+ 0'4	— 6'3	+ 0'6	— 16'0	14'96
1789 Jan.	21.5	— 0'4	— 1'2	+ 0'4	— 5'9	+ 0'6	— 15'4	14'92
		— 0'3	— 1'5	+ 0'4	— 5'5	+ 0'6	— 14'8	

SATURN

1793 Apr. 20.5 — 1784 Oct. 24.5

		$d\delta\pi$	'f	$\lambda.d\delta n$	'f	"f	P	'f
1784 July	16.5	+ 0.9	— 69.3	+ 0.157	— 0.857	+ 58.314	— 0.8	+ 106.9
Sept.	4.5	+ 0.7	— 68.6	+ 0.106	— 0.751	+ 57.457	— 0.4	+ 106.5
Oct.	24.5	+ 0.6	— 68.0	+ 0.047	— 0.704	+ 56.706	— 0.2	+ 106.3
Dec.	13.5	+ 0.6	— 67.4	— 0.010	— 0.714	+ 56.002	— 0.2	+ 106.1
1785 Feb.	1.5	+ 0.6	— 66.8	— 0.058	— 0.772	+ 55.288	— 0.4	+ 105.7
March	23.5	+ 0.8	— 66.0	— 0.089	— 0.861	+ 54.516	— 0.6	+ 105.1
May	12.5	+ 0.9	— 65.1	— 0.111	— 0.972	+ 53.655	— 0.8	+ 104.3
July	1.5	+ 1.0	— 64.1	— 0.122	— 1.094	+ 52.683	— 1.0	+ 103.3
Aug.	20.5	+ 1.0	— 63.1	— 0.122	— 1.216	+ 51.589	— 1.2	+ 102.1
Oct.	9.5	+ 1.0	— 62.1	— 0.119	— 1.335	+ 50.373	— 1.3	+ 100.8
Nov.	28.5	+ 1.0	— 61.1	— 0.111	— 1.446	+ 49.038	— 1.4	+ 99.4
1786 Jan.	17.5	+ 0.9	— 60.2	— 0.102	— 1.548	+ 47.592	— 1.4	+ 98.0
March	8.5	+ 0.8	— 59.4	— 0.092	— 1.640	+ 46.044	— 1.5	+ 96.5
Apr.	27.5	+ 0.8	— 58.6	— 0.083	— 1.723	+ 44.404	— 1.5	+ 95.0
June	16.5	+ 0.7	— 57.9	— 0.073	— 1.796	+ 42.681	— 1.5	+ 93.5
Aug.	5.5	+ 0.6	— 57.3	— 0.064	— 1.860	+ 40.885	— 1.6	+ 91.9
Sept.	24.5	+ 0.6	— 56.7	— 0.054	— 1.914	+ 39.025	— 1.6	+ 90.3
Nov.	13.5	+ 0.5	— 56.2	— 0.045	— 1.959	+ 37.111	— 1.6	+ 88.7
1787 Jan.	2.5	+ 0.5	— 55.7	— 0.037	— 1.996	+ 35.152	— 1.6	+ 87.1
Feb.	21.5	+ 0.5	— 55.2	— 0.029	— 2.025	+ 33.156	— 1.6	+ 85.5
Apr.	12.5	+ 0.5	— 54.7	— 0.021	— 2.046	+ 31.131	— 1.7	+ 83.8
June	1.5	+ 0.5	— 54.2	— 0.014	— 2.060	+ 29.085	— 1.7	+ 82.1
July	21.5	+ 0.5	— 53.7	— 0.007	— 2.067	+ 27.025	— 1.8	+ 80.3
Sept.	9.5	+ 0.5	— 53.2	0.000	— 2.067	+ 24.958	— 1.8	+ 78.5
Oct.	29.5	+ 0.5	— 52.7	+ 0.006	— 2.061	+ 22.891	— 1.9	+ 76.6
Dec.	18.5	+ 0.6	— 52.1	+ 0.013	— 2.048	+ 20.830	— 1.9	+ 74.7
1788 Feb.	6.5	+ 0.6	— 51.5	+ 0.019	— 2.029	+ 18.782	— 2.0	+ 72.7
March	27.5	+ 0.6	— 50.9	+ 0.026	— 2.003	+ 16.753	— 2.0	+ 70.7
May	16.5	+ 0.7	— 50.2	+ 0.031	— 1.972	+ 14.750	— 2.1	+ 68.6
July	5.5	+ 0.8	— 49.4	+ 0.037	— 1.935	+ 12.778	— 2.2	+ 66.4
Aug.	24.5	+ 0.9	— 48.5	+ 0.044	— 1.891	+ 10.843	— 2.2	+ 64.2
Oct.	13.5	+ 0.9	— 47.6	+ 0.050	— 1.841	+ 8.952	— 2.3	+ 61.9
Dec.	2.5	+ 1.0	— 46.6	+ 0.056	— 1.785	+ 7.111	— 2.4	+ 59.5
1789 Jan.	21.5	+ 1.1	— 45.5	+ 0.062	— 1.723	+ 5.326	— 2.4	+ 57.1

		$d\delta\Omega$	'f	$d\delta i$	'f	$d\delta\varphi$	'f	Δ
1789 Jan.	21.5	— 0'3	— "	+ 0'4	— "	+ 0'6	— "	14'92
March	12.5	— 0'3	— 1'5	+ 0'4	— 5'5	+ 0'6	— 14'8	14'87
May	1.5	— 0'2	— 1'8	+ 0'4	— 5'1	+ 0'6	— 14'2	14'82
June	20.5	— 0'2	— 2'0	+ 0'4	— 4'7	+ 0'6	— 13'6	14'82
Aug.	9.5	— 0'1	— 2'2	+ 0'4	— 4'3	+ 0'6	— 13'0	14'77
Sept.	28.5	— 0'1	— 2'3	+ 0'4	— 3'9	+ 0'6	— 12'4	14'72
Nov.	17.5	— 0'1	— 2'4	+ 0'4	— 3'5	+ 0'6	— 11'8	14'65
1790 Jan.	6.5	0'0	— 2'5	+ 0'4	— 3'1	+ 0'6	— 11'2	14'55
Feb.	25.5	0'0	— 2'5	+ 0'3	— 2'7	+ 0'6	— 10'6	14'43
Apr.	16.5	+ 0'1	— 2'5	+ 0'3	— 2'4	+ 0'6	— 10'0	14'31
June	5.5	+ 0'1	— 2'4	+ 0'3	— 2'1	+ 0'6	— 9'4	14'19
July	25.5	+ 0'1	— 2'3	+ 0'3	— 1'8	+ 0'5	— 8'9	14'06
Sept.	13.5	+ 0'2	— 2'2	+ 0'3	— 1'5	+ 0'5	— 8'4	13'92
Nov.	2.5	+ 0'2	— 2'0	+ 0'3	— 1'2	+ 0'5	— 7'9	13'75
Dec.	22.5	+ 0'2	— 1'8	+ 0'2	— 1'0	+ 0'4	— 7'5	13'55
1791 Feb.	10.5	+ 0'2	— 1'6	+ 0'2	— 0'8	+ 0'4	— 7'1	13'32
Apr.	1.5	+ 0'2	— 1'4	+ 0'2	— 0'6	+ 0'4	— 6'7	13'10
May	21.5	+ 0'2	— 1'2	+ 0'2	— 0'4	+ 0'3	— 6'4	12'90
July	10.5	+ 0'2	— 1'0	+ 0'1	— 0'3	+ 0'3	— 6'1	12'65
Aug.	29.5	+ 0'2	— 0'8	+ 0'1	— 0'2	+ 0'2	— 5'9	12'40
Oct.	18.5	+ 0'2	— 0'6	+ 0'1	— 0'1	+ 0'2	— 5'7	12'10
Dec.	7.5	+ 0'1	— 0'4	+ 0'1	0'0	+ 0'1	— 5'6	11'74
1792 Jan.	26.5	+ 0'1	— 0'3	0'0	0'0	+ 0'1	— 5'5	11'38
March	16.5	+ 0'1	— 0'2	0'0	0'0	+ 0'1	— 5'4	11'00
May	5.5	+ 0'1	— 0'1	0'0	0'0	+ 0'1	— 5'3	10'60
June	24.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 0'1	— 5'2	10'21
Aug.	13.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 0'2	— 5'0	9'76
Oct.	2.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 0'4	— 4'6	8'26
Nov.	21.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 0'6	— 4'0	8'74
1793 Jan.	10.5	0'0	0'0	0'9	0'0	+ 0'9	— 3'1	8'22
March	1.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 1'2	— 1'9	7'73
Apr.	20.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 1'3	— 0'6	7'29
June	9.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 1'2	+ 0'6	6'94
July	30.5	0'0	0'0	0'0	0'0	+ 0'8	+ 1'4	6'71
						+ 0'3		6'60

		$d\delta\pi$	f	$\lambda d\delta n$	f	$''f$	P	f
1789 Jan.	21.3	+ 1'1	"	+ 0'062	"	+ 5'326	- 2'4	"
March	12.5	+ 1.2	- 45'5	+ 0'068	- 1'723	+ 3'603	- 2'5	+ 57'1
May	1.5	+ 1'3	- 44'3	+ 0'074	- 1'655	+ 1'948	- 2'6	+ 54'6
June	20.5	+ 1'4	- 43'0	+ 0'080	- 1'581	+ 0'367	- 2'6	+ 52'0
Aug.	9.5	+ 1'5	- 41'6	+ 0'086	- 1'501	+ 0'367	- 2'6	+ 49'4
Sept.	28.5	+ 1'6	- 40'1	+ 0'086	- 1'415	- 1'134	- 2'7	+ 46'7
Nov.	17.5	+ 1'7	- 38'5	+ 0'093	- 1'322	- 2'549	- 2'8	+ 43'9
1790 Jan.	6.5	+ 1'8	- 36'8	+ 0'099	- 1'223	- 3'871	- 2'8	+ 41'1
Feb.	25.5	+ 1'9	- 35'0	+ 0'105	- 1'118	- 5'094	- 2'8	+ 38'3
Apr.	16.5	+ 2'0	- 33'1	+ 0'112	- 1'006	- 6'212	- 2'9	+ 35'4
June	5.5	+ 2'1	- 31'1	+ 0'118	- 0'888	- 7'218	- 2'9	+ 32'5
July	25.5	+ 2'2	- 29'0	+ 0'124	- 0'764	- 8'106	- 2'9	+ 29'6
Sept.	13.5	+ 2'3	- 26'8	+ 0'131	- 0'633	- 8'870	- 3'0	+ 26'6
Nov.	2.5	+ 2'4	- 24'5	+ 0'137	- 0'496	- 9'503	- 3'0	+ 23'6
Dec.	22.5	+ 2'5	- 22'1	+ 0'142	- 0'354	- 9'999	- 3'0	+ 20'6
1791 Feb.	10.5	+ 2'5	- 19'6	+ 0'146	- 0'208	- 10'353	- 3'0	+ 17'6
Apr.	1.5	+ 2'6	- 17'1	+ 0'151	- 0'057	- 10'561	- 2'9	+ 14'7
May	21.5	+ 2'6	- 14'5	+ 0'158	+ 0.101	- 10'618	- 2'9	+ 11'8
July	10.5	+ 2'6	- 11'9	+ 0'160	+ 0'261	- 10'517	- 2'8	+ 9'0
Aug.	29.5	+ 2'5	- 9'3	+ 0'160	+ 0'421	- 10'256	- 2'6	+ 6'4
Oct.	18.5	+ 2'3	- 6'8	+ 0'154	+ 0'575	- 9'835	- 2'4	+ 4'0
Dec.	7.5	+ 2'2	- 4'5	+ 0'143	+ 0'718	- 9'260	- 2'1	+ 1'9
1792 Jan.	26.5	+ 2'0	- 2'3	+ 0'133	+ 0'851	- 8'542	- 1'8	+ 0'1
March	16.5	+ 1'7	- 0'3	+ 0'118	+ 0'969	- 7'691	- 1'5	- 1'4
May	5.5	+ 1'3	+ 1'4	+ 0'094	+ 1'063	- 6'722	- 1'2	- 2'6
June	24.5	+ 0'9	+ 2'7	+ 0'062	+ 1'125	- 5'659	- 0'8	- 3'4
Aug.	13.5	+ 0'4	+ 3'6	+ 0'014	+ 1'139	- 4'534	- 0'3	- 3'7
Oct.	2.5	- 0'2	+ 4'0	- 0'049	+ 1'090	- 3'395	+ 0'2	- 3'5
Nov.	21.5	- 0'7	+ 3'8	- 0'126	+ 0'964	- 2'305	+ 0'6	- 2'9
1793 Jan.	10.5	- 1'1	+ 3'1	- 0'212	+ 0'752	- 1'341	+ 0'9	- 2'0
March	1.5	- 1'3	+ 2'0	- 0'286	+ 0'466	- 0'589	+ 1'0	- 1'0
Apr.	20.5	- 1'5	+ 0'7	- 0'320	+ 0'146	- 0'123	+ 0'8	- 0'2
June	9.5	- 1'9	- 0'8	- 0'279	- 0'133	+ 0'023	+ 0'5	+ 0'3
July	30.5	- 2'5	- 2'7	- 0'163	- 0'296	- 0'110	+ 0'5	+ 0'8
				- 0'009		- 0'406	+ 0'9	

Wiktor Kemula i Sławomir Siekierski

Polarometryczne (amperometryczne) miareczkowanie tlenu

Rozprawa przedstawiona na posiedzeniu dnia 26 maja 1950 r.

PODSTAWY TEORETYCZNE

Charakterystyka fal polarograficznych redukcji tlenu

Już w r. 1924 Heyrovsky¹⁾ stwierdził, że tlen rozpuszczony w wodnych roztworach elektrolitów redukuje się na kropłowej elektrodzie rtęciowej dając dwie fale. Redukcja zachodzi w środowisku kwaśnym, jak i alkalicznym.

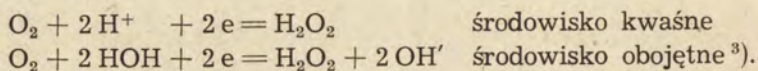
Na pierwszej fali tlenowej występuje charakterystyczne maksimum, kształt i wysokość którego zależą w dużym stopniu od stężenia elektrolitu podstawowego. Maksimum to może zostać całkowicie stłumione dodatkiem niewielkich ilości substancji powierzchniowo aktywnych.

Pierwsza fala tlenowa rozpoczyna się przy potencjale $E = -0,15$ v (nasyć. elektr. kalomel.) w roztworach kwaśnych i obojętnych, a przy $E = 0,0$ v (nasyć. elektr. kalomel.) w roztworach alkalicznych. Potencjał półfali odpowiadający pierwszemu stopniowi redukcji wynosi $E'_{1/2} = -0,05$ v (nasyć. elektr. kalomel.) Prąd dyfuzyjny pierwszej fali zostaje osiągnięty przy $E = -0,5$ v, a już przy potencjale $E = -0,6$ v rozpoczyna się drugi stopień redukcji tlenu dla którego $E_{1/2} = -0,9$ v²⁾.

Drugi prąd dyfuzyjny zostaje osiągnięty dopiero przy potencjale $E = -1,4$ v (nasyć. elektr. kalomel.). Jak widać druga fala tlenowa jest bardziej rozciągnięta od pierwszej, co tłumaczymy większym stopniem nieodwracalności drugiego stadium redukcji tlenu.

Mechanizm redukcji tlenu na kropłowej elektrodzie rtęciowej

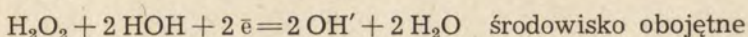
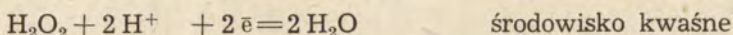
Pierwsza fala tlenowa odpowiada redukcji cząsteczki tlenu z pobraniem dwóch elektronów:



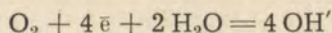
W wyniku redukcji powstaje więc woda utleniona. Można się o tym łatwo przekonać polarografując wywodorowany roztwór

wody utlenionej; otrzymana fala będzie wówczas identyczna z drugą falą tlenową.

Druga fala tlenowa odpowiada dalszej redukcji wody utlenionej do jonów hydroksylowych.



Przy potencjałach katody odpowiadających prądowi dyfuzyjnemu drugiej fali tlenowej zachodzą jednocześnie oba procesy redukcji według równania sumarycznego



Jak widać redukcja tlenu na kropłowej elektrodzie rtęciowej powoduje zwiększenie stężenia jonów hydroksylowych w warstwie przyelektrodowej.

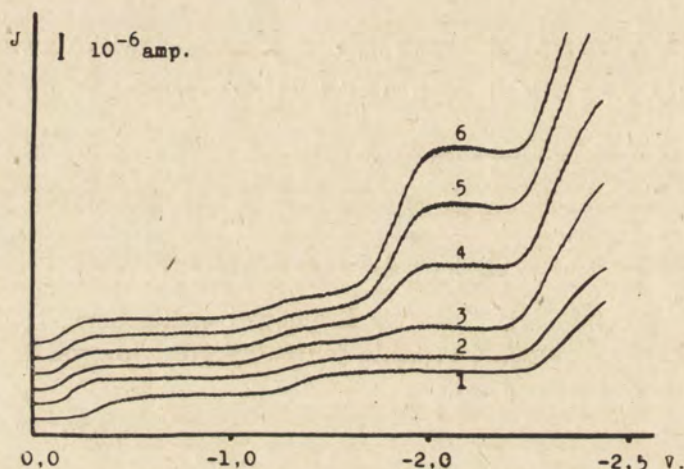
Ukryte prądy graniczne

Zjawisko ukrytych prądów granicznych⁴⁾ powstaje w wyniku reakcji na przedpolu elektrody pomiędzy produktami redukcji jonu lub cząsteczki obojętnej z jonami lub cząsteczkami zdążającymi do elektrody. Jeżeli w wyniku takiej reakcji powstaje związek trudno rozpuszczalny lub słabo zdysocjowany, wysokość fali polarograficznej jednej substancji będzie silnie zmniejszona, a przy odpowiednim stosunku stężeń fala może nawet wogóle nie powstać. I tak np. w obecności tlenu fala jonów Cd^{++} będzie niższa, niż w roztworze wodorowanym, a to na skutek powstawania w warstwie przyelektrodowej trudno rozpuszczalnego $\text{Cd}(\text{OH})_2$.

W. Kemula⁴⁾ podał szereg przykładów zjawiska ukrytych prądów granicznych zachodzących podczas redukcji jonów Pb^{++} , Mn^{++} , Fe^{++} i NH_4^+ w obecności tlenu.

Analogiczne zjawisko do opisanych powyżej występuje w polarograficznej elektrolizie roztworów zawierających silnie lub słabo zdysocjowane kwasy i tlen. W tym przypadku fala wodoru pokazuje się dopiero wtedy, gdy stężenie kwasu osiągnie pewną wartość graniczną, która to wartość, jak zostanie wykazane poniżej jest w prosty sposób związana ze stężeniem tlenu.

Jako ilustracja tego faktu może służyć rys. 1. Rysunek ten przedstawia przebieg krzywych polarograficznych w miarę dodawania 0,01 M HCl do 20 ml 0,001 M KCl zawierającego tlen w stężeniu ok. 0,00025 mola w litrze.



Rys. 1

Celem niniejszej pracy było ustalenie zależności pomiędzy stężeniem tlenu, a minimalnym stężeniem kwasu potrzebnym do ukazania się fali wodorowej, jak również ewentualne wykorzystanie tej zależności do oznaczeń zawartości tlenu w roztworach elektrolitów.

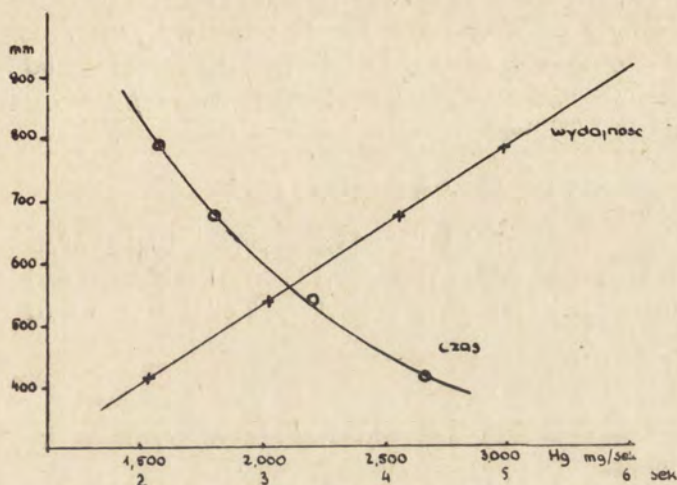
CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Pomiary polarograficzne prowadzono przy użyciu polarografu typu Cambridge.

Do sporządzenia elektrody kropłowej użyto kapilary z przewężeniem, charakterystyka której podana została na rys. 2.

Przez cały czas pracy posługiwano się naczynkiem elektrolitycznym typu zlewkowego o pojemności ok. 40 ml.

Dla jednoczesnego oznaczania zawartości tlenu w roztworach elektrolitów metodą analityczną i amperometrycznego miareczkowania, stosowano specjalną aparaturę. W aparaturze tej z badanego roztworu usuwano częściowo tlen przez wodorowa-



Rys. 2

nie, po czym część tego roztworu wprowadzano do naczynia w którym wykonywano oznaczenie analityczne (metodą Winklera) część zaś ściśle odmierzoną do naczynka elektrolitycznego. W całej aparaturze ciśnienie cząstkowe tlenu było równe ciśnieniu panującemu nad wodorowanym roztworem. Pozwalało to na uniknięcie ewentualnych błędów spowodowanych ustalaniem się równowagi; tlen nad roztworem — tlen w roztworze w trakcie pomiaru. Stężenie tlenu regulowano czasem przepuszczania wodoru. Wodór otrzymywano przy pomocy hydrogenu.

Jako elektrolitów podstawowych używano roztworów KCl o stężeniu 0,001 M, 0,01 M, 0,1 M i 1 M.

Rtęć zarówno katodowa jak anodowa była bardzo starannie oczyszczana.

W trakcie pracy posługiwano się dwoma buforami octanowymi, które oznaczać będziemy przez I i II. Bufory przyrządzone zostały według Walpole'a⁵) z kwasu octowego i octanu sodu.

Bufor I: stosunek kwasu octowego do octanu sodu jak 1:1
Stężenie kwasu 0,04 mola w litrze, pH=4,62.

Bufor II: stosunek kwasu octowego do octanu sodu jak 1:3.
Stężenie kwasu 0,04 mola w litrze, pH=5,09.

W celu przekonania się, czy pomiary stężenia tlenu metodą Winklera były prowadzone w sposób właściwy oznaczono rozpuszczalność tlenu w wodzie destylowanej w zależności od temperatury i otrzymane wyniki porównano z danymi w International Critical Tables.⁶⁾

TABLICA I

t°	13,5	14,5	15,5	16,0	18,0
v zmierzone	7,27	7,12	7,01	6,89	6,61
v Int. Critic. Tabl.	7,27	7,11	7,03	6,89	6,61

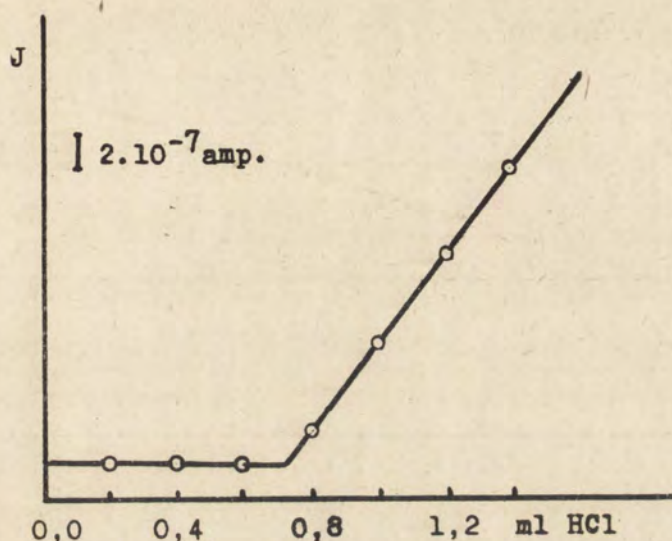
v — objętość tlenu w cm³ sprowadzona do warunków normalnych rozpuszczona w 1000 cm³ wody destylowanej (bez CO₂) w danej temperaturze. Jak widać zgodność wyników jest zupełnie dobra.

WYNIKI POMIARÓW

Doświadczenia wstępne

Do 20 ml elektrolizowanego roztworu 0,001 M KCl zawierającego ok. 0,00025 mola tlenu w litrze dodawano z mikrobiurety porcjami po 0,1, 0,2 ml. 0,01 M HCl i notowano wychylenia galwanometru przy potencjale katody odpowiadającym prądowi dyfuzyjnemu jonu H⁺ w tych warunkach: E = -1,8 v (nasyc. elektr. kalomel.). Stężenie tlenu w obu roztworach (KCl i HCl) można uważać za jednakowe. Otrzymano następującą krzywą zależności wychylenia galwanometru od ilości dodawanego 0,01 M HCl. Rys. 3.

Na odcinku poziomym ilość jonów H dochodząca do elektrody jest mniejsza od ilości jonów OH' powstających z redukcji tlenu. Na przedpolu elektrody następuje reakcja $H^+ + OH' = H_2O$, fali wodorowej nie obserwujemy. W miarę dodawania HCl ilość jonów wodorowych zwiększa się, powodując wreszcie powstanie fali wodorowej, której wysokość jak widać jest wprost proporcjonalna do ilości dodanego kwasu (odcinek wzrostu natężenia prądu). Ilość ml. kwasu solnego w punkcie załamania powinna więc odpowiadać zobojętnieniu w warstwie przyelektrodowej jonów hydroksylowych powstałych z redukcji tlenu jonami wodorowymi.



Rys. 3

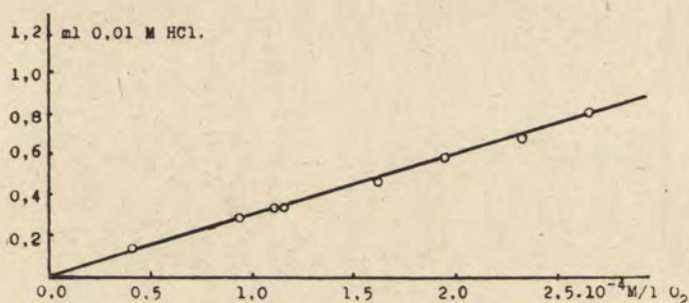
Punkt ten nazywać będziemy punktem zubożenia.

Dla wykorzystania powyższych faktów do ilościowego oznaczania tlenu należało przede wszystkim zbadać, czy i w jaki sposób położenie punktu zubożenia zależy od stężenia tlenu, własności aparatury, własności elektrody kroplowej i stężenia elektrolitu podstawowego.

Zależność położenia punktu zubożenia od stężenia tlenu.

Przy użyciu aparatury opisanej w części doświadczalnej wykonano szereg miareczkowań amperometrycznych roztworów o różnej zawartości tlenu metodą podaną powyżej. Temperatura pomiaru $20^{\circ} \pm 0,1^{\circ}$. Potencjał katody $E = -1,8$ v (nasyć. elektr. kalomel.). Obojętność roztworu 20 ml. Kwas solny 0,01 M. Stężenie tlenu w kwasie było takie same, jak w miareczkowanym roztworze, którym był 0,001 M KCl.

Na rys. 4 podana została zależność pomiędzy stężeniem tlenu (oznaczonym metodą Winklera), a ilością dodanych ml. 0,01 M HCl odpowiadających punktowi zubożenia. Jak widać zależność ta w granicach błędów pomiaru posiada charakter prostoliniowy.



Rys. 4

W celu zbadania wpływu czułości galwanometru na wynik miareczkowania wykonano trzy pomiary z tym samym roztworem tlenu w 0,001 M KCl, używając różnej czułości galwanometru:

$s = 1,34 \cdot 10^{-8}$; $1,92 \cdot 10^{-8}$; $2,88 \cdot 10^{-8}$ amp. na mm na m.

(1/7, 1/10, 1/15 na polarografie Cambridge). Stężenie tlenu 0.00028 mola w litrze. Objętość roztworu 20 ml. Kwas solny 0.01 M. Otrzymano we wszystkich trzech pomiarach wyniki identyczne, a mianowicie w każdym przypadku zużyto 0,845 ml. 0,01 M HCl. Doświadczeń nie można było rozszerzyć na inne czułości, ponieważ przy czułościach większych niż 1/7 nie pozwalały na to wymiary skali galwanometru, a przy czułościach mniejszych od 1/15 dokładność poszczególnych odczytów była zbyt mała.

Wpływ własności kropłowej elektrody rtęciowej.

W celu wykazania, że położenie punktu zobojętnienia nie zależy od własności kropłowej elektrody rtęciowej wykonano cztery miareczkowania z tym samym roztworem tlenu w 0,001 M KCl. Poszczególne pomiary różniły się położeniem zbiornika rtęci: $h_{Hg} = 355, 450, 590$ i 740 mm. Odpowiada to wydajnościom od 1,5 do 3 mg. $Hg s^{-1}$ i czasom trwania kropli od 4 do 2 sek. Otrzymane wyniki były identyczne, jedynie pochylenie odcinka od punktu zobojętnienia zmieniło się nieco wraz z położeniem zbiornika. W przeciwieństwie więc do metody polarograficznej metoda amperometrycznego miareczkowania jest niezależna od własności elektrody.

Wpływ stężeń elektrolitu podstawowego

Wszystkie dotychczasowe pomiary wykonywano w 0,001 M KCl, jako elektrolicie podstawowym. Następną fazą pracy było zbadanie, czy i jaki wpływ posiada stężenie elektrolitu podstawowego na wynik miareczkowania. W tym celu przeprowadzono pomiary w 0,001 M, 0,01 M, 0,1 M i 1 M KCl. Ponieważ roztwory te zawierały różne stężenia tlenu wyniki przeliczono na stężenie tlenu w 0,001 M KCl ($2,85 \cdot 10^{-4}$ mola w litrze), korzystając z faktu, że w danym elektrolicie położenie punktu zobojętnienia jest wprost proporcjonalne do stężenia tlenu.

Okazało się, że ilość 0,01 M HCl potrzebna do zmiareczkowania tej samej ilości tlenu zależy w dużym stopniu od stężenia elektrolitu podstawowego.

Jak widać z tablicy 2 w roztworach bardziej stężonych zużywa się więcej kwasu solnego, niż w roztworach rozcieńczonych o takiej samej zawartości tlenu.

TABLICA II

stęż. KCl	0,001 M	0,01 M	0,1 M	1 M
ml. 0,01 M HCl	0,83	1,03	1,16	1,40

Fakt ten stanie się zrozumiały, jeżeli weźmiemy pod uwagę, że jony H^+ dochodzą do elektrody zarówno przez dyfuzję, jak i migrację, prąd zaś migracyjny jest w miarę wzrostu stężenia elektrolitu podstawowego coraz silniej tłumiony. Ilość więc dochodzących do elektrody jonów H^+ jest mniejsza w 1 M KCl, niż w 0,001 M KCl przy takim samym stężeniu kwasu.

Zastosowanie buforów octanowych

Wyniki badań zreferowane w poprzednim punkcie całkowicie przekreśliły możliwość oznaczania tlenu w wodzie i roztworach soli przez miareczkowanie kwasem solnym ze względu na to, że konieczna byłaby uprzednia znajomość stężenia rozpuszczonych soli w badanym roztworze. Prawdopodobnie nie tylko zresztą stężenie, ale i rodzaj kationu odgrywałby dużą rolę.

W tym stadium pracy postanowiono wykorzystać wyniki badań W. Kemuli i J. Chodkowskiego⁷⁾ nad buforami octano-

wymi. Autorzy ci wykazali, że wysokość fali wodorowej z buforów octanowych jest proporcjonalna nie do stężenia jonów H^+ lecz do stężenia kwasu octowego. Wynika stąd, że wodór dochodzi do elektrody przede wszystkim w postaci cząsteczki CH_3COOH , w niewielkim zaś stopniu tylko jako wolny jon H^+ (H_3O^+). Ponieważ cząsteczka kwasu octowego nie podlega działaniu pola elektrostatycznego w elektrolicie, a dochodzi do elektrody jedynie na skutek dyfuzji wysokość fali wodorowej z buforów octanowych nie powinna zależeć od stężenia elektrolitu podstawowego. Wykonane doświadczenia potwierdziły powyższe przypuszczenie.

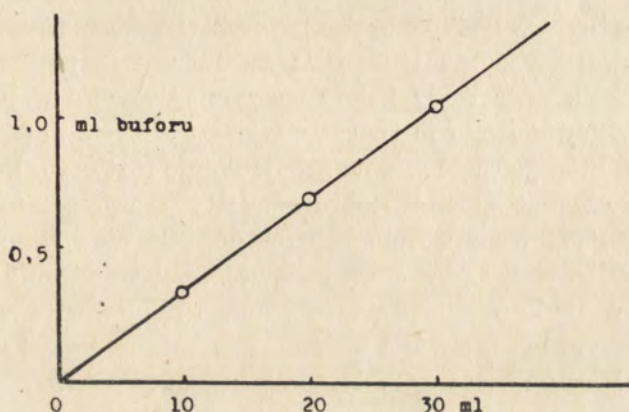
Korzystając z tego faktu w dalszych pomiarach posługiwano się zamiast kwasem solnym buforami octanowymi. I tak używając buforu octanowego I zbadano wpływ objętości miareczkowanego roztworu na wynik oznaczenia. Jak należało się spodziewać ilości buforu zużyte na zmiareczkowanie różnych objętości roztworu o danym stężeniu tlenu są wprost proporcjonalne do tych objętości. W metodzie polarometrycznego miareczkowania w przeciwieństwie do metody polarograficznej oznaczamy więc *ilość, a nie stężenie tlenu*.

Pomiary wykonano z 10, 20 i 30 ml wody destylowanej o jednakowej zawartości tlenu (ok. 0,00027 mola w litrze). Wyniki podano na rys. 5.

Ponieważ bufor octanowy I dawał jeszcze pewne różnice w wysokości fali wodorowej w zależności od stężenia elektrolitu podstawowego w dalszych pracach posługiwano się buforem II, w którym stosunek kwasu do octanu był 1 : 3. W buforze tym udział jonów wodorowych w przewodnictwie był już znikomo mały.

Zastosowanie do celów praktycznych

W dotychczasowych pomiarach przy użyciu buforów octanowych stężenie tlenu w badanym roztworze nie różniło się prawie wcale od stężenia tlenu w buforze, wobec czego poprawka na rozcieńczenie mogła być zaniedbana. W przypadku jednak kiedy stężenie tlenu w obu roztworach różniło się znacznie krzywa miareczkowania przybierała nieco inny charakter (Rys. 6).

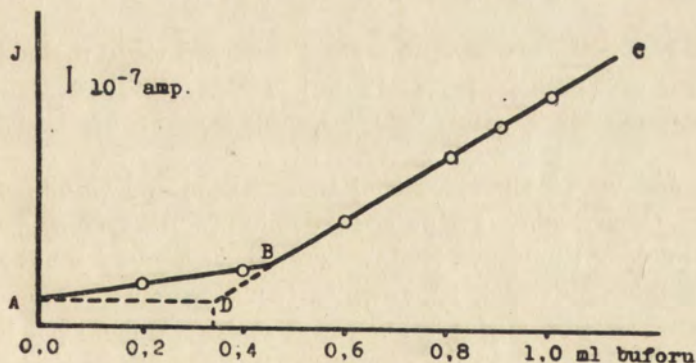


Rys 5

Zależność między ilością zużytego buforu, a objętością roztworu

Część krzywej AB nie jest równoległa do osi odciętych, lecz wznosi się do góry. Wzniesienie to należy tłumaczyć, jako wzrost wysokości fali tlenu na skutek dodawania buforu zawierającego tlen w większym stężeniu. Okazało się również, że przyjęcie punktu B za koniec miareczkowania prowadzi do wyników błędnych (zbyt dużych). Położenie punktu D natomiast zupełnie dobrze odpowiada warunkom ukończenia miareczkowania.

Po osiągnięciu pozytywnych rezultatów w oznaczaniu tlenu w wodzie destylowanej, 0,001 M i 0,01 M KCl bez względu na



Rys. 6

Krzywa miareczkowania przy różnych stężeniach tlenu w roztworze miareczkowanym i buforu

stężenie tlenu przystąpiono do oznaczeń w wodzie zwykłej (wodociągowej). Znaczną trudnością na jaką tu napotkano była silna alkaliczność wody i dość znaczna zawartość w niej węglanów. Powodowało to znacznie większe zużycie buforu octanowego, którego część szła na zobojętnienie roztworu. Udało się jednak osiągnąć zupełnie dobre rezultaty po uprzednim doprowadzeniu pH wody do ok. 5 przez dodanie niewielkich ilości 0,5 M HCl wobec czerwieni metylowej. Miareczkowanie to prowadzono, aż do osiągnięcia identycznego zabarwienia ze wzorcem, którym był roztwór 1 kropli czerwieni metylowej w 20 ml buforu II, pH wzorca 5,09. Dodatek kwasu i czerwieni metylowej w ogólnej objętości ok. 0,1 ml do 20 ml badanego roztworu nie wpływał poważnie na wynik miareczkowania.

TABLICA III

Nr pomiaru	ml buforu II	$[O_2] \cdot 10^{-5}$ analit.	$[O_2] \cdot 10^{-5}$ amper.	% błędu
65	0,33	11,28	11,51	+2,0
59	0,44	16,07	15,75	-2,0
66	0,50	17,95	17,90	-0,3
63	0,54	19,73	19,53	-1,0
53	0,56	20,15	20,05	-0,5
55	0,60	21,41	21,48	+0,2
67	0,74	26,76	26,49	-1,0
60	0,79	28,33	28,33	0,0
56	0,49	29,49	29,53	+0,1

W tabeli 3 zestawiono wyniki oznaczeń tlenu metodą amperometrycznego miareczkowania i metodą Winklera. Oznaczenia odnoszą się do wody destylowanej, wodociągowej i 0,001M KCl.

Jak widać z przytoczonej tablicy zgodność wyników jest dobra. Odchylenia występujące głównie przy małych stężeniach tlenu należy tłumaczyć trudnościami związanymi z mierzaniem niewielkich objętości, jak również trudnościami w operowaniu z roztworami nie będącymi w równowadze z tlenem powietrza. Należy podkreślić, że we wszystkich tych pomiarach używano 20 ml. roztworu do oznaczeń amperometrycznych, a 250 ml. przy oznaczeniach metodą Winklera.

ZESTAWIENIE WYNIKÓW

Zbadano warunki powstawania fali wodorowej z rozcieńzonego HCl i buforów octanowych w zależności od stężenia tlenu i elektrolitu podstawowego.

Opracowano metodę amperometrycznego miareczkowania tlenu buforem octanowym w roztworach, w których stężenie elektrolitu jest mniejsze od 0,1 M. Metoda jest stosunkowo prosta i szybka. Wymaga ona posiadania jedynie galwanometru o czułości ok. 10^{-8} amp. na mm. na m, mikrobiurety i kropłowej elektrody rtęciowej. Metoda pozwala na oznaczanie tlenu w niewielkich objętościach roztworu (ok. 10 ml.). Jak wiadomo oznaczanie tlenu według Winklera dające dużą dokładność wymaga jednak użycia ok. 200 ml roztworu. Metoda pozwala na oznaczanie tlenu w wodach alkalicznych i zawierających węglany.

Dotychczas używana do oznaczania niewielkich stężeń tlenu metoda polarograficzna (mierzenie wysokości fali) obok swoich niezaprzeczalnych zalet jak np. możliwość oznaczania stężenia w sposób ciągły posiada i cały szereg wad, z których głównymi są: mała dokładność i konieczność cechowania roztworami wzorcowymi. Przyczyną małej dokładności jest nie tylko błąd wynikający z pomiaru wysokości fali, ale głównie czynniki nie uwzględnione w równaniu Ilkoviča jak np. wiry w pobliżu elektrody, lub też zależność współczynnika dyfuzji od stężenia elektrolitu podstawowego. Metoda powyższa natomiast jest wolna od tego rodzaju błędów, ponieważ czynnikiem decydującym jest w niej względna szybkość dochodzenia do elektrody obu jonów lub cząsteczek.

PIŚMIENNICTWO:

1. J. Heyrovsky, *Trans. Faraday Soc.* **19**, 785 (1924).
2. I. M. Kolthoff, C. S. Miller, *J. Am. Chem. Soc.* **63**, 1013 (1941).
3. W. Kemula, M. Michalski, *Roczn. Chem.* **16**, 535—41 (1936).
4. W. Kemula, *Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz.* (III) 3—10 (1947).
5. G. S. Walpole, *J. Chem. Soc.* **105**, 2501 (1914).
6. *International Critic. Tabl.* **3**, 258 (1929).
7. W. Kemula, J. Chodkowski, *Spr. Tow. Nauk. Warsz.* (Wydz. III) **43**, 37 (1950).

Halina Milicer-Gruzewska

Sur la répartition des deux variables aléatoires dépendantes

Mémoire présentée à la séance du 26 mai 1950.

Introduction. Soient X et Y les variables aléatoires et $F_1(x)$ et $F_2(x)$ leurs répartitions, $Z = X * Y$ leurs produit cartésien avec la répartitions $F(x, y)^1$. On sait que pour les variables indépendantes on a la relation

$$(1) \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Il n'est pas ainsi pour les variables dépendantes.

Soient A et B les ensembles Boréliens dans R_1^2). Nous écrivons:

$$(2) \quad P(XcA, YcB) = P(XcA) \cdot P(YcB | XcA); \quad P(XcA) \neq 0$$

et la fonction $P(YcB | XcA)$ est nommée probabilité conditionnelles. L'équation (2) définit cette probabilité, si seulement $P(XcA) \neq 0$.

En particulier si $F_1(x) \neq 0$, alors:

$$(3) \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot P(X \leq y | X \leq x), \quad \text{ou:}$$

$$(3') \quad F(x, y) = F_1(x) \delta_x(y)$$

Je nommerai la fonction $\delta_x(y)$ répartition plane de la variable y . Selon l'égalité (2) cette définition est élémentaire.

Au contraire en général la probabilité conditionnelle qu'une des variable ne surpasse pas une constante p. ex. y , tandis que l'autre est égale à une constante p. ex. x , généralement ne peut pas être définie par l'expression (2). Il sagit alors de la probabilité $P(Y \leq y | X = x)$; on a donc: $(-\infty, y) = B$; $(x) = A$ et $P(X = x) = P(XcA) = 0$ des que x est un point de continuité du champ de la probabilité de la variable X .

¹⁾ Si A est un ensemble Borélien, alors $P(XcA)$ est la probabilité que X appartient à A . On écrit aussi:

$$F(x) = P(X \leq x); \quad F_1(x) = P(Y \leq x); \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

²⁾ R_1 c'est l'ensemble de tous les nombres réelles, R_2 — l'ensemble de tout les paires des nombres réelles.

La probabilité conditionnelle $P(Y \leq y | X = x) = F_x(y)$, nommée répartition conditionnelle de la variable Y pour $X = x$ est définie au moyen de l'intégral de Lebesgue — Stieltjes³⁾ p. p. $F_1(x)$ c. à d. partout moyennant un ensemble de probabilité nulle dans le champ de la répartition $F_1(x)$ ⁴⁾, si la fonction $F(x, y)$ est une répartition. Dans ce cas $F_x(y)$ est la résolutions de l'équation intégral:

$$(4) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t);$$

on a alors⁴⁾

$$(5) \quad P(X \leq y | x < X \leq x + \Delta x) \rightarrow F_x(y); \quad 0 < \Delta x \rightarrow 0, \text{ p. p. } F_1(x).$$

Notre bût est de préciser les fonctions $\delta_x(y)$ et $F_x(y)$ qui définissent dans R_2 par les expressions (3) et (4) la répartition $F(x, y)$ pour chaque répartition $F_1(x)$ dans R_1 . L'intégral de l'expression (4) est celle de Lebesgue — Stieltjes.

A savoir $F(x, y)$ est une répartition dans R_2 si elle accompie les conditions suivantes:

- 1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$, 2') $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(y) = P(Y \leq y)$, $y \in R_1$,
- 5) $\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F_1(x)$,⁵⁾
- 6) $F(x, y)$ est comme fonction de chacune des variables x et y continue à droite,
- 7) $\Delta^2 F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in R_2, \Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$

Je dirais au cas où $F(x, y)$ est une répartition dans R_2 , que les fonctions $\delta_x(y)$ ou $F_x(y)$ la définissent par la multiplication ou resp. par l'intégral. Dans ces cas la fonctions

³⁾ v. p. ex. H. Cramer „Mathematical Methods of Statistics”.

⁴⁾ v. Kolmogoroff „Grundbegriffe d. Wahrscheinlichkeitsrechnung” Fünftes Kapitel § 3 p. p. 45—46.

⁵⁾ Selon sa définition $F_1(x)$ est une répartition (p. m. h.).

$\bar{\delta}_x(y)$ sera dite la répartition conditionnelle plane (r. c. p.) et la fonction $F_x(y)$ la répartition conditionnelle linéaire (r. c. l.) du champ de probabilité $F(x, y)$ dans R_2 , avec la probabilité marginal horizontal $F_1(x)$ (p. m. h.) dans R_1 . Mais pour traiter les deux variables X et Y symétriquement on doit écrire, si c'est possible:

$$(3') \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot \bar{\delta}_x(y) = F(y) \cdot \bar{\delta}_y(x)$$

$$(4'') \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t) = \int_{-\infty}^y \bar{F}_t(x) dF(t),$$

Ici $F(y)$ est la répartition de la variable Y et $\bar{\delta}_y(x)$ et $\bar{F}_y(x)$ sont des répartitions conditionnelles resp. plane (r. c. p.) et linéaire (r. c. l.) de la répartition $F(x, y)$ avec la répartition marginal vertical (r. m. v.) $F(y)$. Je nommerai les paires $\bar{\delta}_x(y)$ et $\bar{\delta}_y(x)$ ainsi que $F_x(y)$ et $\bar{F}_y(x)$, et $F_1(x)$ et $F(y)$ correspondantes. Au cas où la répartition $F_1(x)$ et la fonction $\bar{\delta}_x(y)$ ou $F_x(y)$ définissent non seulement les répartitions $F(x, y)$ et $F(y)$ mais encore la r. c. p. $\bar{\delta}_y(x)$ ou la r. c. l. $\bar{F}_y(x)$ nous dirons qu'elles définissent la répartition $F(x, y)$ dans R_2 complètement.

Les deux premiers paragraphes traitent la questions de la répartition conditionnelle linéaire (r. c. l.), les autre celle de la répartition conditionnelle plane (r. c. p.).

I. Je démontre que la répartition $F_1(x)$ et la fonction $F_x(y)$ qui est pour chaque $x = \text{const.} \subset R_1$ une répartition de y dans R_1 et qui est comme fonction de x continue à droite dans R_1 pour $y = \text{const.} \subset R_1$, définissent par l'intégral une répartition $F(x, y)$ dans R_2 complètement c. à d. que $F_x(y)$ accomplit la relation (5) p. p. $F_1(x)$ et que l'on a par analogie:

$$(6) \quad \bar{F}_y(x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(X \leq x, y < Y \leq y + \Delta y) \quad \text{p. p. } F(y)$$

De plus je démontre que $F_x(y)$ vérifie la condition (5) non seulement p. p. $F_1(x)$ mais pour chaque point qui n'est un point de stabilité de $F_1(x)$ c. à d. où $F_1(x + \Delta x) > F_1(x)$,

$\Delta x > 0$. Pareillement $\bar{F}_y(x)$ est définie partout où la répartition $F(y)$ n'est pas une constante c. à d. où $F(y + \Delta y) > F(y)$, $\Delta y > 0$.

II. Je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que la répartition $F_1(x)$ et la fonctions $\bar{F}_x(y)$ définissent par multiplication la répartition $F(x, y)$ dans R_2 complètement.

§ 1. Les répartitions conditionnelles (r.c.l.) du champ dans R_2 .

Théorème I. Une fonction de x et de y : $F_x(y)$ qui est continue à droite, pour chaque y constant, et qui est une répartition de y pour chaque x constant définie dans R_2 une répartition $F(x, y)$ par l'intégral pour chaque répartition $F_1(x)$ dans R_1 .

L'épreuve.

Écrivons.

$$(1) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t)$$

Cette intégral existe parce que

$$0 \leq F_t(y) \leq 1$$

et $F_t(y)$ est continue à droite, donc c'est une fonction mesurable B.

Nous prouverons que $F(x, y)$ est une répartition dans R_2 c'est à dire que $F(x, y)$ vérifie les conditions 1) ... 7) de l'Introduction. Les conditions 1) i 2) sont remplies — c'est évident; de même la condition 2'), parceque:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F_t(y) = 0, \quad t = \text{const}$$

car $F_t(y)$ est une répartition, et le passage à la limite sous le signe de l'intégral et ici permet, comme la fonction $F_t(y)$ est bornée par une constante. Il est de même pour la condition (3). En réalité nous avons ici :

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

$$\begin{aligned}
0 \leq 1 - F(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF_1(t) - \int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_t(y)] \cdot dF_1(t) + \int_x^{\infty} F_t(y) dF_1(t);
\end{aligned}$$

Soient maintenant α et β les constantes convenables pour lesquelles on a, pour $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_t(y)] dF_1(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour } y \geq \beta$$

$$0 \leq \int_x^{\infty} F_t(y) dF_1(t) \leq F_1(+\infty) - F(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour } x \geq \alpha, \text{ c. à d. :}$$

$$0 \leq 1 - F(x, y) \leq \varepsilon, \text{ pour } x \geq \alpha, y \geq \beta, \quad \text{c. à d. :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

De là résultent les égalités

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^x dF_1(t) = F_1(x) - F_1(-\infty) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty \text{ c. à d.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_t(y) dF_1(t) = F(y) \quad \text{c. à d. :}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF_1(t) = 1$$

De ces deux dernières égalités résulte la condition 4), car $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$ et $F_t(y)$ est une fonction de y continue à droite, elle est bornée, et

$$\Delta F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta F_t(y) dF_1(t) \geq 0, \quad \text{car}$$

$$\Delta F_t(y) = F_t(y + \Delta y) - F_t(y) \geq 0, \quad \Delta y \geq 0, \quad \text{c. d. f. d. .}$$

La conditions 5) résulte de la première de ces quatre passages à la limites.

La condition 6) résulte de la définition même de la fonction $F(x, y)$ et des suppositions sur les fonctions $F_x(y)$ et $F_1(x)$.

La condition 7) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Delta^2 F(x, y) &= \int_x^{x+\Delta x} F_t(y + \Delta y) dF_1(t) - \int_x^{x+\Delta x} F_t(y) dF_1(t) = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) \geq 0, \quad \text{c. q. f. d. .} \end{aligned}$$

Mais il sagit ici à ce que la répartition $F(x, y)$ doit définir dans chaque bande infinie $(x, x + \Delta x)$, $\Delta x > 0$, la répartition conditionnelle qui approche $F_x(y)$ avec $\Delta x \rightarrow 0$, si seulement $F(x + \Delta x) > F(x)$, $\Delta x > 0$. En réalité c'est notre cas, car nous pouvons écrire:

$$P(x < X \leq x + \Delta x, Y \leq y) = \int_x^{x+\Delta x} F_t(y) dF_1(t), \quad \text{et aussi con-}$$

venablement à l'expression (2) de l'Introduction:

$$\begin{aligned} P(x < X \leq x + \Delta x, Y \leq y) &= P(x < X \leq x + \Delta x) \cdot \\ &\cdot P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) \end{aligned}$$

d'où nous trouvons:

$$\begin{aligned} (2,1) \quad P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) &= \\ &= \int_x^{x+\Delta x} F_t(y) dF_1(t) : [F_1(x + \Delta x) - F_1(x)] \end{aligned}$$

dès que :

$$\Delta F_1(x) = F_1(x + \Delta x) - F_1(x) > 0 \quad \text{mais :}$$

$$\int_x^{x+\Delta x} F_t(y) dF_1(t) = \int_x^{x+\Delta x} [F_t(y) - F_x(y)] dF_1(t) + \int_x^{x+\Delta x} F_x(y) dF_1(t) =$$

$$= F_x(y) \cdot \Delta F_1(x) + \Theta \cdot \text{Max}_{x \leq t \leq x + \Delta x} |F_t(y) - F_x(y)| \cdot \Delta F_1(x), \quad 0 \leq \Theta \leq 1.$$

Il résulte de l'expression (2,1) l'expression (4,1) :

$$(4,1) \quad P(Y \leq y | x < X < x + \Delta x) = F_x(y) +$$

$$+ \Theta \text{Max}_{x \leq t \leq x + \Delta x} |F_t(y) - F_x(y)|, \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$

et de la continuité à droite de la fonction $F_x(y)$ on a pour $\Delta x > 0, \Delta x \rightarrow 0$:

$$(5,1) \quad \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) = F_x(y), \quad (x, y) \subset R_2, \text{ c.q.f.d.}$$

Remarquons que si $\Delta F_1(x) = 0$, alors :

$$P(x < X \leq x + \Delta x, Y \leq y) = 0 \quad \text{c. à d.}$$

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = 0$$

on peut donc nommer la droite $X = x$ la droite de stabilité de la répartition $F(x, y)$. Nous avons donc prouvé le théorème suivant :

Théorème II. La répartition $F(x, y)$ définie par l'intégral avec les fonctions $F_1(x)$ et $F_x(y)$, qui remplissent les conditions du Théorème I, désigne la probabilité conditionnelle $P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) \rightarrow F_x(y), \Delta x \rightarrow 0$ si la droite $X = x$ n'est pas une droite de la stabilité de la répartition $F(x, y)$.

Remarque I. D'autant plus les fonctions $F_1(x)$ et $F_x(y)$ du Théorème II désignent la probabilité conditionnelle

$$P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) \rightarrow F_x(y), \quad \Delta x \rightarrow 0 \text{ p. p. } F_1(x).$$

§ 2. Les composantes complètes du champ dans R_2 .

Théorème III. Si les fonctions $F_1(x)$ et $F_x(y)$ accomplissent les conditions du théorème I elles définissent par l'intégral une répartition $F(x, y)$ dans R_2 complètement, et on a ;

$$(1,2) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t) = \int_{-\infty}^y \bar{F}_t(x) dF(t), \quad \text{où}$$

$$(2,2) \quad F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_t(y) dF_1(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y),$$

est une répartition de y dans R_1 et :

$$(3,2) \quad \bar{F}_y(x) = \overline{\lim}_{0 < \Delta y \rightarrow 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta y) \quad \text{dès que:}$$

$$P(y < Y \leq y + \Delta y) \neq 0 \quad \text{pour chaque } \Delta y > 0$$

est une répartition de la variable x , pour $y = \text{const.}$ non pas seulement p. p. dans le champ de $F(y)$: dans l'ensemble où $F(y)$ n'est pas constant, $\bar{F}_y(x)$ est une répartition, si seulement elle est continue à droite comme fonction de x . Elle l'est, si on l'augmente de sa fonction des sauts sur un ensemble au plus dénombrable.

L'épreuve. Comme les fonctions $F_x(y)$ et $F_1(x)$ accomplissent les suppositions du Théorème I les fonctions $F(x, y)$ et $F(y)$ sont des répartitions. Mais selon le théorème de Lebesgue⁶⁾ la résolution de l'équation intégral :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y F_t^*(x) dF(t)$$

existe partout, moyennant un ensemble H de probabilité nul dans le champ de $F(y)$ à s. on a⁶⁾

⁶⁾ v. Kolmogoroff loc cit sub 3); v. aussi H. Lebesgue. Leçons sur l'intégration, p. p. 301—302, 1928.

$$F_y^*(x) = \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} [F(x, y + \Delta y) - F(x, y)] : \\ : [F(y + \Delta y) - F(y)], y \subset \overline{H^6}, \quad \text{c. à d.}$$

$$(1', 2) \quad F_y^*(x) = \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta y), y \subset \overline{H}$$

Il résulte de la définition de la probabilité conditionnelle de l'Introduction, de la première égalité (1,2) et de la définition (3,2) que :

$$(4,2) \quad \overline{F}_y(x) = \overline{\lim}_{-\infty} \left\{ \int_{-\infty}^x [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) : \right. \\ \left. : \int_{-\infty}^{+\infty} [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) \right\},$$

dès que $y \subset \overline{K}$ où K est l'ensemble de la stabilité de la répartition $F(y)$ c. à d. sous la supposition que :

$$(5,2) \quad \Delta F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) > 0,$$

pour chaque $\Delta y > 0$.

Il résulte de l'expression (4,2) que

$$(5,2) \quad 0 \leq \overline{F}_y(x) \leq 1, \quad y \subset \overline{K}$$

Je prouverai aussi que $\overline{F}_y(x)$ est comme fonction de y mesurable B pour $y \subset \overline{K}$. En effet les intégrals :

$$\int_{-\infty}^x F_t(y) dF_1(t) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_t(y) dF_1(t), \quad x = \text{const.} \subset R_1,$$

sont des fonctions de y continues à droite parce que la fonction $F_t(y)$ est continue à droite, et que $F_t(y)$ est bornée par une constante donc :

$$\int_{-\infty}^x [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) \rightarrow 0, \quad 0 < \Delta y \rightarrow 0$$

⁶⁾ c. à d. y n'appartient pas à H ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F_t(y + \Delta y) - F_t(y)] dF_1(t) \rightarrow 0, \quad 0 < \Delta y \rightarrow 0$$

$\bar{F}_y(x)$ pour $x = \text{const.}$ et $y \subset \bar{K}$ est donc la limite superieure du cotien, qui est borné, des différences des fonctions de y , qui sont continues à droite; $\bar{F}_y(x)$ est donc la limite supérieure des ensembles des valeurs des fonctions de y mesurables \bar{B} et bornées sur l'ensemble \bar{K} . Donc $\bar{F}_y(x)$ est mesurable B sur \bar{K} .

La fonction $\bar{F}_y(x)$ diffère de la fonction $F_y^*(x)$ au plus sur l'ensemble H , de probabilité nul dans le champ de $F(y)$,

C'est pourquoi l'intégral :

$$\int_{-\infty}^y \bar{F}_t(x) dF(t), \quad (x, y) \subset R_2$$

existe et :

$$\int_{-\infty}^y \bar{F}_t(x) dF(t) = \int_{-\infty}^y F_t^*(x) dF(t),$$

donc

$$(6,2) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \bar{F}_t(x) dF(t), \quad \text{c. q. f. d..}$$

Comme la relation (1, 2) est prouvée, il suffit pour prouver complètement le Théorème III de démontrer que la composante $\bar{F}_y(x)$, pour $y \subset \bar{K}$ est une répartition de x dans R_1 , ou diffère d'une telle fonction que par sa fonction des sauts.

Premièrement nous prouverons que, pour $y \subset \bar{K}, \Delta \bar{F}_y(x) \geq 0$, puis que $\bar{F}_y(+\infty) - \bar{F}_y(-\infty) = 1$ et ensuite que $\bar{F}_y(x)$ est comme fonction de x continue à droite ou diffère d'une telle fonction que par sa fonction des sauts.

1) Soit $\Delta'y$ une suite des accroissement de Δy pour lesquels :

$$\lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta'y) = \bar{F}_y(x)$$

Nous aurons pour cet accroissement :

$$\overline{\lim}_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta y) \leq \\ \lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta y) = \overline{F}_y(x + \Delta x),$$

donc on aura pour les accroissements $\Delta'y$ convenablement choisis de la suite des $\Delta'y$:

$$\overline{\lim}_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta'y) = \\ = \lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X < x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta'y)$$

et aussi :

$$\lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta'y) = \overline{F}_y(x)$$

Nous avons donc :

$$\overline{F}_y(x + \Delta x) - \overline{F}_y(x) \geq \lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta'y) - \\ - \lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta'y)$$

donc

$$\overline{F}_y(x + \Delta x) - \overline{F}_y(x) \geq \lim_{0 < \Delta'y \rightarrow 0} P(x < X \leq x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta'y),$$

c. à d. :

$$(7,2) \quad \overline{F}_y(x + \Delta x) - \overline{F}_y(x) \geq 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

2) Les inégalités (5,2) et (7,2) permette d'écrire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{F}_y(x) = \overline{F}_y(-\infty) = \overline{\lim}_{\Delta y \rightarrow 0} P(-\infty | y < Y \leq y + \Delta y) = 0, \quad y \subset \overline{K}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{F}_y(x) = \overline{F}_y(+\infty) = \overline{\lim}_{\Delta y \rightarrow 0} P(+\infty | y < Y \leq y + \Delta y) = 1, \quad y \subset \overline{K},$$

c. à d.

$$(8,2) \quad \overline{F}_y(+\infty) - \overline{F}_y(-\infty) = 1, \quad y \subset \overline{K}$$

3) En démontrant (7,2) nous avons aussi démontré que l'ensemble des points de discontinuité de la fonction de $x, \overline{F}_y(x)$, est au plus dénombrable. Il résulte aussi de l'expression (1,2) que :

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_{-\infty}^y [\bar{F}_t(x + \Delta x) - \bar{F}_t(x)] dF(t),$$

mais comme $F(x, y)$ est continue à droite, donc :

$$(9,2) \quad \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^y [\bar{F}_t(x + \Delta x) - \bar{F}_t(x)] dF(t) \equiv 0, \quad (x, y) \subset R_2$$

Outre celà, et à cause de (7,2), la fonction $\bar{F}_t(x + \Delta x) - \bar{F}_t(x)$ est une fonction de Δx non décroissante; c'est pourquoi

$$(10,2) \quad \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} [\bar{F}_t(x + \Delta x) - \bar{F}_t(x)] = a_t(x) \geq 0$$

existe, et (9,2) donne :

$$(11,2) \quad \int_{-\infty}^y a_t(x) dF(t) \equiv 0, \quad (x, y) \subset R_2, \quad \text{c. à d.}$$

$$a_t(x) \equiv 0, \quad x \subset R_1, \quad \text{p. p. } F(t); \quad \text{c. à d.}$$

$a_t(x) = 0$, moyennant au plus les points d'un ensemble E_x . avec $P(E_x) = 0$. Outre celà $a_t(x) \neq 0$ pour un ensemble des x , soit \mathfrak{A}_t , au plus dénombrable.

Il résulte de (8,2) que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \downarrow [F_t(x + \Delta x) - \bar{F}_t(x)] = 0, \quad \Delta x \geq 0$$

uniformément en Δx ; nous avons donc

$$(12,2) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_t(x) = 0$$

Posons :

$$\bar{F}_y^*(x) = \begin{cases} \bar{F}_y(x) & , \quad x \subset \bar{\mathfrak{A}}_y, y \subset \bar{K} \\ \bar{F}_y(x) + a_y(x), & x \subset \mathfrak{A}_y, y \subset \bar{K}, \end{cases}$$

ou

$$(13,2) \quad \bar{F}_y^*(x) = \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \bar{F}_y(x + \Delta x), \quad y_j^* \subset \bar{K}$$

On a donc, selon (8,2), (12,2) et (13,2)

$$\bar{F}_y^*(+\infty) - \bar{F}_y^*(-\infty) = 1$$

$$0 \leq F_y^*(x) \leq 1$$

Outre cela $\bar{F}_y^*(x)$ est une fonction de $x \subset R_1$ non-décroissante et continue à droite dès que $y \subset \bar{K}$; elle vérifie à cause de l'égalité (11,2) l'équation (6,2) de même que la fonction $\bar{F}_y(x, y)$, c. à d. on a :

$$(14,2) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^y \bar{F}_t^*(x) dF(t), \quad (x, y) \subset R_2$$

Le Théorème III et donc prouvé.

Corrolaire I. Les composantes $F_x(y)$, $\bar{F}_y(x)$ du champ dans R_2 , définies par les Théorèmes II et III, sont dans ce champ des probabilités conditionnelles p. p. $F_1(x)$ et p. p. $F(y)$ respectivement.

Le Corrolaire I résulte immédiatement des Théorèmes II et III.

Remarque II. Il résulte des équations (13,2) et (14,2) qu'en changeant légèrement la définition de la probabilité conditionnelle (3,2) à s. en l'écrivant comme il suit :

$$(15,2) \quad \bar{F}_y^*(x) = \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \overline{\lim}_{0 < \Delta y \rightarrow 0} P(X < x + \Delta x | y < Y \leq y + \Delta y), \quad y \subset \bar{K}$$

on a le

Théorème III'. Les fonctions $F_1(x)$ et $F_x(y)$, qui accomplissent les conditions du Théorème I définissent par l'intégral la répartition $F(x, y)$ dans R_2 complètement. Les composantes $F_x(y)$ et $\bar{F}_y^*(x)$ de ce champ sont des probabilités conditionnelles partout, outre les droites de stabilité de la répartition $F(x, y)$.

§ 3. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\tilde{\delta}_x(y)$ soit une répartition conditionnelle plane $\tilde{\delta}_x^{\sim}$ (r. c. p.)

Il résulte de l'Introduction que $\tilde{\delta}_x(y)$ est la répartition conditionnelle plane de la variable y d'une répartition $F(x, y)$, dans R_2 avec la répartition marginal horizontal $F_1(x)$, si

$$(1,3) \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot \tilde{\delta}_x(y)$$

accomplie les conditions 1) 2) ... 7) de l'Introduction.

S'il y a $F_1(x_0) = 0$, alors $F_1(x) = 0$, $x \leq x_0$; on a alors aussi $F(x, y) = 0$, $x \leq x_0$, pour chaque fonction $\tilde{\delta}_x(y)$. Mais si $F(x, y)$ doit être une répartition pour chaque répartition marginale $F_1(x)$, alors $\tilde{\delta}_x(y)$ ne peut pas être arbitraire sur aucune des demis droites $x \leq x_0$. Nous prouverons le Théorème IV.

Théorème IV. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $\tilde{\delta}_x(y)$ soit la répartition plane d'une répartition $F(x, y)$ dans R_2 , avec une répartition marginale horizontale $F_1(x)$ dès que $F_1(x) \neq 0$ sont:

- 1* $\tilde{\delta}_x(y)$ est une répartition de y
- 2* $\tilde{\delta}_x(y)$ est comme fonction de x continue à droite, et ses points de discontinuités appartiennent à l'ensemble des points de discontinuités de la fonction $F_1(x)$.
- 3* $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_x(y) = F(y)$ existe et $F(y)$ est une répartition de y ; la convergence doit être uniforme, si $F(y)$ est continue.
- 4* $[\tilde{\delta}_{x+\Delta x}(y + \Delta y) - \tilde{\delta}_{x+\Delta x}(y)] F_1(x + \Delta x) \geq$
 $\geq [\tilde{\delta}_x(y + \Delta y) - \tilde{\delta}_x(y)] F_1(x)$.

A. Les conditions 1* 2* 3* 4* son suffisantes. La démonstration est élémentaire. En effet: les conditions 1), 2), 2') et 3) de l'Introduction résultent de la supposition que $F_1(x)$ et $\tilde{\delta}_x(y)$ sont des répartitions, et les 4) et 5) sont prouvées comme il suit:

$$F(x, y) - F(y) = F_1(x) [\tilde{\delta}_x(y) - F(y)] - F(y) [1 - F_1(x)], \quad \text{c. à d.}$$

$$|F(x, y) - F(y)| \leq |\tilde{\delta}_x(y) - F(y)| + (1 - F_1(x)) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

à cause de 3* et de la supposition que $F_1(x)$ est une répartition.

$0 \leq F_1(x) - F(x, y) = F_1(x) [1 - \delta_x(y)] \rightarrow 0, y \rightarrow \infty,$
a cause de 1*. La condition 6) résulte du 4*, où on suppose, $y \rightarrow -\infty$ et $y + \Delta y \rightarrow z$, et qu'on observe qu'on a 1*.

La condition 7) ne diffère pas essentiellement de 4* c. q. f. d.

B. Les conditions 1*, 2*, 3*, 4* sont nécessaires. En effet: Il résulte des suppositions 1), 6) et 7) de l'Introduction qu'il doit être:

$$(2,3) \quad 0 \leq \delta_x(y)$$

et que $\delta_x(y)$ doit être une fonction de y *nondécroissante et continue à droite*.

Il résulte des suppositions 2') et 5) de l'Introduction, que

$$(3,3) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \delta_x(y) = 1$$

$$(4,3) \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \delta_x(y) = 0$$

$$(5,3) \quad 0 \leq \delta_x(y) \leq 1 \quad \text{donc que}$$

c. à d. que $\delta_x(y)$ est une répartition de la variable y dès que $F_1(x) \neq 0$. Mais nous savons qu'une suite de répartition qui converge vers une répartition continue, converge uniformément c'est pourquoi la convergence 3 doit être uniforme, si $F(y)$ est continue. La convergence 3* résulte de la condition 4) de l'Introduction.*

Nous montrerons maintenant que la condition 2* est nécessaire. La répartition $F(x, y)$ définit la probabilité $P(S)$ sur chaque ensemble Borelien $S \subset R_2$. Elle définit de même pour $F_1(x + \Delta x) - F_1(x) \neq 0, \Delta x > 0$, la probabilité conditionnelle:

$$0 \leq P(Y \leq y | x < X \leq x + \Delta x) = P(x < X \leq x + \Delta x, Y \leq y) : \\ : P(x < X \leq x + \Delta x) \leq 1.$$

Nous recevons donc l'inégalité'

$$0 \leq \delta_{x+\Delta x}(y) F_1(x+\Delta x) - \delta_x(y) F_1(x) \leq F_1(x+\Delta x) - F_1(x), \text{ c. à d.}$$

$$0 \leq [\delta_{x+\Delta x}(y) - \delta_x(y)] F_1(x + \Delta x) + \\ + \delta_x(y) [F_1(x + \Delta x) - F_1(x)] \leq F_1(x + \Delta x) - F_1(x)$$

d'où et de la supposition que $F_1(x)$ est une répartition résulte:

$$\lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \bar{\delta}_{x+\Delta x}(y) = \bar{\delta}_x(y) \text{ dès que } F_1(x) \neq 0, \text{ et}$$

$$\lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \bar{\delta}_{x-\Delta x}(y) = \bar{\delta}_x(y) \text{ ,, ,, } \lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} F_1(x-\Delta x) = F_1(x),$$

$$F_1(x) \neq 0.$$

Nous avons donc prouvé que la condition 2* est nécessaire pour les points x qui ne sont pas les points de stabilité de $F_1(x)$.

Mais pour les points de stabilité la continuité à droite de la fonction $\bar{\delta}_x(y)$ résulte immédiatement de la continuité à droite de la fonction $F(x, y)$.

Nous avons démontré en même temps le corrolaire suivant.

Corrolaire II. *La condition nécessaire pour que la fonction $\bar{\delta}_x(y)$ multipliée par chacune des répartitions $F_1(x)$ représente dans R_2 une répartition, est qu'elle soit une fonction continue de la variable x .*

La condition 4* ne diffère pas de la condition 7) de l'Introduction. Elle est donc nécessaire.

Le Théorème IV est donc prouvé.

Remarquons que si la répartition $\bar{\delta}_x(y)$ possède une densité continue $f_x(y) = \frac{\partial \bar{\delta}_x(y)}{\partial y} \neq 0$ alors la condition 4* revient à la suivante:

$$(6,3) \quad f_{x+\Delta x}(y) : f_x(y) \geq F_1(x) : F_1(x+\Delta x), \Delta x \geq 0 \text{ parce que:}$$

$$\Delta F(x, y) = [F_1(x+\Delta x) \cdot f_{x+\Delta x}(y + \Theta \Delta y) - F_1(x) f_x(y + \Theta' \Delta y)] \Delta y,$$

$$0 \leq \Theta, \Theta' \leq 1, \quad \text{c. à d.}$$

$$F_1(x+\Delta x) \cdot f_{x+\Delta x}(y) \geq F_1(x) f_x(y), \quad \text{d'où le (6,3)}$$

La condition (6,3) et d'autent plus 4* serait remplie par la répartition $\bar{\delta}_x(y)$ qui possède la densité continue $f_x(y)$ si cette densité est une fonction non décroissante de x , car alors $f_{x+\Delta x}(y) : f_x(y) \geq 1$, et $F_1(x) : F_1(x+\Delta x) \leq 1$. En même temps on voit que la condition (6,3) n'est pas toujours remplie si la densité $f_x(y)$ soit une fonction décroissante de x , p. ex. si pour $x = x_0$ elle décroisse si vite que:

$$f_{x_0+\Delta x}(y) : f_{x_0}(y) < F_1(x_0) : F_1(x_0 + \Delta x).$$

P. ex. on a si $\frac{\partial f_x(y)}{\partial x}$ existe, au voisinage de point (x_0, y_0) et si $F_1(x)$ possède pour $x = x_0$ la densité $f_1(x_0)$.

$$\left[\frac{\partial f_x(y)}{\partial x} : f_x(y) \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} < -f_1(x_0) : F_1(x_0), \quad \text{c. à d. :}$$

$$\left[\left| \frac{\partial f_x(y)}{\partial x} \right| : f_x(y) \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} > f_1(x_0) : F_1(x_0).$$

Il suffit si nous posons outre celà $F_1(x_0) \geq \frac{1}{2}$ pour avoir:

$$f_1(x_0) < 2 \left[\left| \frac{\partial f_x(y)}{\partial y} \right| : f_x(y) \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Si donc $\delta_x(y)$ est différentiable en x et y séparément et la densité de $F_1(x)$, qui existe pour $x = x_0$, où $F(x_0) \geq \frac{1}{2}$ (p. ex. $x_0 = \text{Mediane } F_1(x)$), vérifie l'inégalité:

$$f_1(x_0) < 2 \left[\left| \frac{\partial f_x(y)}{\partial x} \right| : f_x(y) \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

alors la condition (6,3) n'a pas de place et $\Delta F(x_0, y_0) < 0$.

On voit donc qu'en général la fonction $\delta_x(y)$ qui vérifie les conditions 1*, 2* et 3* ne définit pas la répartition dans R_2 avec chaque répartition $F_1(x)$. Nous avons outre celà le Théorème V.

Théorème V. La répartition de y : $\delta_x(y)$ pour laquelle: 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_x(y) = F(y)$ existe et est une répartition, et 2) qui possède comme densité $f_x(y)$ une fonction non décroissante et continue de x , qui est une fonction continue de y , définie une répartition dans R_2 avec chaque répartition $F_1(x)$.

§ 4. Sur les répartitions planes qui sont complètes

Supposons que les fonctions $F_1(x)$ et $\delta_x(y)$ accomplissent les suppositions du Théorème IV § 3, c. à d. que

$$(1,4) \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot \delta_x(y)$$

est une répartition dans R_2 . Nous savons qu'alors :

$$(1,4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\delta}_x(y) = F(y)$$

est une répartition.

Conformément à l'Introduction nous disons que $\bar{\delta}_x(y)$ définit $F(x, y)$ complètement si

$$(2,4) \quad F(x, y) = F(y) \cdot \bar{\delta}_y(x)$$

définie $\bar{\delta}_y(x)$ comme une répartition de $x \subset R_1$, pour $y = \text{const.} \subset R_1$.

Si $F(y) \neq 0$ nous trouvons :

$$\bar{\delta}_y(x) = \frac{F_1(x) \cdot \bar{\delta}_x(y)}{F(y)}$$

mais si $F(y) = 0$ on pose :

$$(3,4) \quad \bar{\delta}_y(x) = \Phi(x)$$

où $\Phi(x)$ est une répartition de x , qui n'est pas encore précisée.

Si $F(y) \neq 0$, alors $\bar{\delta}_y(x)$ qui est définie par (3,4) est une répartition en x pour $y = \text{const.}$ En vérité :

$$\bar{\delta}_y(x) \geq 0; \quad \bar{\delta}_y(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty; \quad \bar{\delta}_y(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty;$$

$$\bar{\delta}_y(x + \Delta x) - \bar{\delta}_y(x) \geq 0;$$

$\bar{\delta}_x(y)$ est une fonction de x continue à droite ⁷⁾, et comme

$\bar{\delta}_y(x) = P(X \leq x, Y \leq y) : P(X \leq +\infty, Y \leq y)$ alors $\bar{\delta}_y(x) \leq 1$ c. q. f. d.

Il est aussi facile de vérifier que $\bar{\delta}_y(x)$ vérifie une condition qui est un analogue du 4* :

$$(4^*,4) \quad [\bar{\delta}_{y+\Delta y}(x+\Delta x) - \bar{\delta}_{y+\Delta y}(x)] : [\bar{\delta}_y(x+\Delta x) - \bar{\delta}_y(x)] > F(y) : F(y+\Delta y).$$

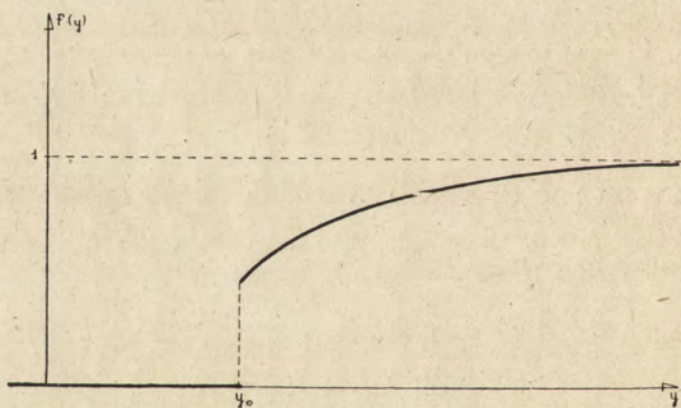
En effet, la partie droite de cette inégalité donne :

$$\frac{F_1(x+\Delta x) \bar{\delta}_{x+\Delta x}(y+\Delta y) - F_1(x) \cdot \bar{\delta}_x(y+\Delta y)}{F_1(x+\Delta x) \bar{\delta}_{x+\Delta x}(y) - F_1(x) \bar{\delta}_x(y)} \cdot \frac{F(y)}{F(y+\Delta y)}$$

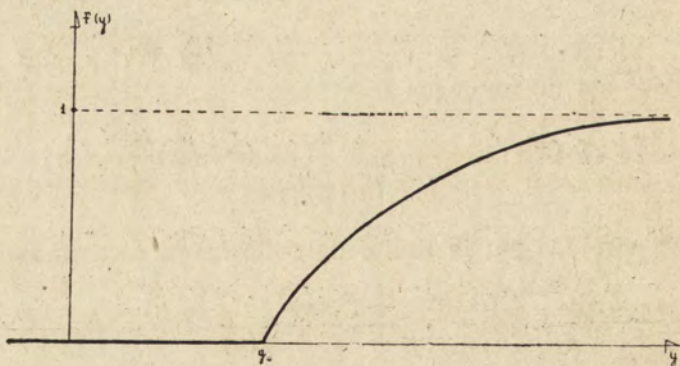
⁷⁾ v. aussi p. 119.

et il suffit que le composant gauche de ce produit ne surpasse pas l'unité, ce qui nous donne la condition 4*. Si $F(y) \neq 0$ alors $\bar{\delta}_y(x)$ est une fonction continue à droite de y , et l'ensemble des points de discontinuités de la fonction $\bar{\delta}_y(x)$ est compris dans l'ensemble de points de discontinuités de la fonction $F(y)$ (v. p. 119).

S'il serait: $F(y_0) = 0$, alors on aurait aussi $F(y) = 0$, $y \leq y_0$. Mais il existe un y_1 , pour lequel $F(y_1) \neq 0$ (car $F(y)$ est une répartition). Soit y_0 la borne inférieure des valeurs y , pour lesquels $F(y) \neq 0$. Si y_0 est un point de discontinuité de $F(y)$ alors $F(y_0) \neq 0$ parce que $F(y_0) = F(y_0+0)$, s'il est un



g. 1



g. 2

point de continuité alors $F(y_0) = 0$. Selon ces cas nous accepterons pour $y \leq y_0$,

$$(4,4) \quad \bar{\delta}_y(x) = \begin{cases} F(x, y_0) : F(y_0); 0 = F(y_0 - 0) \neq F(y_0) \neq 0, \\ \quad \quad \quad y \leq y_0, \text{ (g. 1)} \\ \Phi(x) \text{ une répartition, } 0 = F(y_0 - 0) = \\ \quad \quad \quad = F(y_0), \text{ (g. 2)} \end{cases}$$

Pour les deux cas et pour une répartition $\Phi(x)$ arbitraire on aura:

$$F(x, y) = \bar{\delta}_y(x) \cdot F(y) = F_1(x) \cdot \delta_x(y)$$

il doit être $\delta_x(y) = 0, y < y_0$ ou pour $y \leq y_0$.

Mais si la fonction de $y \therefore \bar{\delta}_y(x)$ doit être continue à droite alors il faut qu'il soit:

$$\bar{\delta}_{y_0 + \Delta y}(x) - \bar{\delta}_{y_0}(x) \rightarrow 0, 0 < \Delta y \rightarrow 0 \quad \text{c. à d.}$$

$$F(x, y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) - \Phi(x) \rightarrow 0, 0 < \Delta y \rightarrow 0, \quad \text{c. à d.}$$

$$(5,4) \quad \begin{aligned} \Phi(x) &= \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} F(x, y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) = \\ &= F_1(x) \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} \bar{\delta}_x(y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y). \end{aligned}$$

Mais $F(x, y_0 + \Delta y) \leq F(y_0 + \Delta y), x \subset R_1$, donc

$$F(x, y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) \leq 1, x \subset R_1, \text{ et } \Phi(x) \leq 1,$$

S'il serait $F_1(x) = 0, x = x_0$ alors $F_1(x) \equiv 0, x \leq x_0$ et $F(x, y) \equiv 0, x \leq x_0$ et $\Phi(x) \equiv 0, x \leq x_0$, donc

$$\bar{\delta}_y(x) \equiv 0, x \leq x_0.$$

Mais nous supposons tout le temps $F_1(x) \neq 0$.

Comme la limite (5,4) doit existé alors il doit être:

$$\lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} \bar{\delta}_x(y_0 + \Delta y) \equiv 0, x \subset R_1 \quad \text{et aussi}$$

$$\delta_x(y) \equiv 0, x \subset R_1, y \leq y_0, \text{ dès que } F(y_0 - 0) = F(y_0) = 0.$$

Selon celà nous complètons la définition (3,4) et (4,4) comme il suit:

$$(4'', 4) \quad \bar{\delta}_y(x) = \begin{cases} F(x, y_0) : F(y_0), & \text{si } 0 = F(y_0 - 0) < F(y_0), y \leq y_0 \\ F_1(x) \cdot \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} \bar{\delta}_x(y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) & \text{si} \\ F(y_0) = 0, y \leq y_0. \end{cases}$$

Nous supposons donc l'existence de la limite :

$$(6, 4) \quad \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} \bar{\delta}_x(y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) = \varphi(x).$$

Mais $\bar{\delta}_y(x)$ doit être une répartition de x . La fonction $F_1(x) \cdot \varphi(x)$ doit être une répartition, c. à d. il doit être :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1 \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \leq \text{const.}$$

Il est facile de démontrer que $\varphi(x)$ doit être une fonction de x continue à droite⁸⁾ et que

$$(7, 4) \quad F_1(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) \geq F_1(x) \cdot \varphi(x), \quad x \in R_1.$$

Ce serait remplie pour sûre si $\varphi(x)$ serait une fonction non décroissante de la variable x . Si $\bar{\delta}_y(x)$ doit être une répartition pour chaque composante $F_1(x)$ alors c'est naturel que $\varphi(x)$ doit être une fonction non décroissante de x parce que (7, 4) doit prendre place sur les intervalles de stabilité de la composante $F_1(x)$ qui peuvent être arbitraires.

Nous prouverons maintenant deux Théorèmes suivants.

Théorème VI. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\bar{\delta}_x(y)$ soit une composante complète d'une répartition dans R_2 avec la répartition marginale horizontale $F_1(x)$ est qu'elle vérifie outre les conditions du Théorème IV la condition :*

$$5^* \quad \begin{aligned} \bar{\delta}_x(y) &\equiv 0, y < y_0, \text{ si } F(y) = 0, y < y_0, \text{ et} \\ \bar{\delta}_x(y) &\equiv 0, y \leq y_0, \text{ ,, } F(y) = 0, y \leq y_0. \end{aligned}$$

Preuve. Il est en effet, conformément à l'expression 3') de l'Introduction :

⁸⁾ Si $F_1(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) \geq F_1(x) \varphi(x)$ alors il doit être $\varphi(x + \Delta x) \geq \varphi(x)$ ce qui donne : $F_1(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) - F_1(x) \cdot \varphi(x) = [F_1(x + \Delta x) - F_1(x)] \varphi(x + \Delta x) + F_1(x) [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] \infty F_1(x) [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)]$.

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot \delta_x(y) = F(y) \cdot \bar{\delta}_y(x), \quad (x, y) \subset R_2,$$

alors la condition 5* est nécessaire.

Nous prouverons que les conditions 1*... 5* sont suffisantes.

Si $F(y) \neq 0$ alors

$$1^0 \quad \bar{\delta}_y(x) = F_1(x) \cdot \delta_x(y) : F(y)$$

est une répartition de x et elle vérifie aussi les conditions analogues de 2*, 3* et 4*. En effet

$$2^0 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{\delta}_y(x) = F_1(x)$$

3⁰ $\bar{\delta}_y(x)$ est une fonction continue à droite de y et l'ensemble de ses points de discontinuités fait partie de l'ensemble des points de discontinuités de $F(y)$. En effet il est ainsi, s'il ne sont pas ses points de stabilités parceque :

$$P(X \leq x | y < Y \leq y + \Delta y) = P(X \leq x, y < Y \leq y + \Delta y) : \\ : P(y < Y \leq y + \Delta y) \leq 1, \quad \text{c. à d.}$$

$$0 \leq \bar{\delta}_{y+\Delta y}(x) F(y + \Delta y) - \bar{\delta}_y(x) F(y) \leq F(y + \Delta y) - F(y), \dots$$

$$0 \leq [\bar{\delta}_{y+\Delta y}(x) - \bar{\delta}_y(x)] F(y + \Delta y) + \bar{\delta}_y(x) [F(y + \Delta y) - F(y)] \leq F(y + \Delta y) - F(y), \text{ et}$$

$$0 \leq [\bar{\delta}_y(x) - \bar{\delta}_{y-\Delta y}(x)] F(y) + \bar{\delta}_{y-\Delta y}(x) [F(y) - F(y - \Delta y)] \leq F(y) - F(y - \Delta y), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Au contraire si y est le point de stabilité de $F(y)$, la continuité à droite de la fonction $\bar{\delta}_y(x)$ résulte de la continuité à droite de $F(x, y)$.

4⁰ $\bar{\delta}_y(x)$ accomplit la condition (4*,4) comme nous l'avons vu, c. q. f. d..

Si $F(y) = 0, y < y_0$ où $y \leq y_0$ nous avons poser :

$$\bar{\delta}_y(x) = \Phi(x)$$

où $\Phi(x)$ est une répartition de x , et alors :

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot \delta_x(y) = F(y) \cdot \bar{\delta}_y(x)$$

est vérifié, en vertu de 5*, aussi pour $y < y_0$ ou aussi pour $y \leq y_0$ c. q. f. d.

Nous avons prouvé en même temps, conformément aux égalités (5,4), (6,4) et (7,4), le

Théorème VII. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\delta_x(y)$ soit une composante complète d'une répartition dans R_2 avec une répartition marginale horizontale $F_1(x)$, et qu'elle définisse la composante correspondante $\bar{\delta}_y(x)$ comme fonction de y continue à droite partout, est que $\delta_x(y)$ vérifie outre les conditions du Théorème VI, la condition suivante au cas où $F(y_0) = 0$, mais $F(y_0 + \Delta y) > 0$, $\Delta y > 0$:*

$$(6,4) \quad \lim_{0 < \Delta y \rightarrow 0} \delta_x(y_0 + \Delta y) : F(y_0 + \Delta y) = \varphi(x) \quad \text{existe et}$$

$\varphi(x) \cdot F_1(x)$ soit une répartition ($\varphi(x)$ doit être donc une fonction de x continue à droite).

Des conditions (6,4) et (7,4), des Théorème VI et VII et du Corrolaire II résultent les Corrolaires III et IV.

Corrolaire III. *La condition nécessaire pour que la fonction $\delta_x(y)$ soit une composante complète d'une répartition dans R_2 avec chaque r. m. h. $F_1(x)$ est qu'elle soit une fonction continue de x et qu'il soit si $F(y) = 0$, $y < y_0$, $\delta_x(y) \equiv 0$, $y < y_0$ ou si $F(y) = 0$, $y \leq y_0$, $\delta_x(y) \equiv 0$, $y \leq y_0$.*

Dans ce dernier cas il est nécessaire pour que la répartition correspondante $\bar{\delta}_y(x)$ soit comme fonction de y continue à droite que la fonction $\varphi(x)$ définie par l'expression (6,4) soit une fonction non décroissante, continue à droite et que $\varphi(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$.

Corrolaire IV. *Si $\delta_x(y)$ est une composante complète d'une répartition dans R_2 avec la r. m. h. $F_1(x)$ alors l'ensemble de points de discontinuité en y du quotient: $F_1(x) \cdot \delta_x(y)$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_x(y)$ est compris dans l'ensemble de points de discontinuités de la fonction $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_x(y) = F(y)$, pour lesquelles $F(y) > 0$.*

P o s i e d z e n i e

z dnia 30 czerwca 1950 r.

J a n S a m s o n o w i c z

Interglacjał morski (eemski) nad dolną Wisłą

Komunikat przedstawiony dn. 30 czerwca 1950 r.

Z miejscowości Tychnowy na północ od Kwidzyna w roku ubiegłym uzyskano dwa profile przez cały pleistocen, który spoczywa wprost na senonie i ma w punkcie pierwszym 190 m, a w drugim 168 m grubości.

W punkcie pierwszym (na 18°58' dług. E. i 53°47'35" szer. półn.) górna część pleistocenu składa się z dwu kompleksów moreny grubości 70,4 m, przedzielonych i pokrytych łałami warwowymi. W ich stropie i spągu leżą grube serie piasków. Są to utwory jednego glacjału o paru wahniciach.

W punkcie drugim, położonym o kilkaset metrów od pierwszego, dwa grube kompleksy moreny są przedzielone grubym kompleksem łałów warwowych i pokryte piaskami. Utwory te, 69,5 m grubości, należą do tegoż glacjału z parokrotnymi oscylacjami.

W omawianych punktach poniżej 70,4 m, względnie 69,5 m (co odpowiada 6,4 m, względnie 5,5 m poniżej poziomu morza) próby rdzeniowe okazały się m a r g l a m i z fauną e e m s k ą, mającymi 3 m, względnie 4,3 m grubości. W ich spągu spoczywa warstwa 1,6 m (względnie 1,9 m) gruba piasków z licznymi ułamkami drewna, które zrzadka trafiają się również w dolnej części margli eemskich.

Poniżej stwierdzono potężnej grubości morenę denną, spoczywającą na senonie i zawierającą w górnej połowie dwa (względnie trzy) pakiety ilów warwowych, a w dolnej — kry miocenu i oligocenu. Materiał mioceni i oligoceni, obok senoni, przepelnia nadto morenę, nadając jej cechy moreny lokalnej.

Margle eemskie są popielate, w stanie wilgotnym plastyczne i obfitują w faunę. *In situ* występują cienkoskorupowe *Mytilus lineatus* Gm., *Syndesmya alba* Wood, *Tapes senescens* Döderl. (młodociana), *Eulimella nitidissima* Poli i liczne otwornice. Jako namyte z pobliskiego litoralu (wraz z ziarnami kwarcu) i tworzące nagromadzenia gniazdowe występują m. inn. *T. senescens*, *Cardium edule* L., *C. paucicostatum* Sow., *Corbula gibba* Olivi, *Ostrea edulis* L., *Nassa reticulata* L., *Bittium reticulatum* D. C.

O wieku eemskim margli świadczy obecność form l u z y t a ń s k i c h, jak *T. senescens*, *M. lineatus* i *Eul. nitidissima*.

Charakter tych osadów, ich występowanie na tym samym poziomie w dwu odległych o kilkaset metrów punktach, wreszcie stan zachowania fauny dowodzą, że są to osady *in situ*.

Stwierdzenie tego faktu nad dolną Wisłą, gdzie liczne znaleziska fauny eemskiej były dotychczas znane głównie na złożu wtórnym, a na pierwotnym — w nielicznych zaledwie miejscach, przy tym w trudnych do ustalenia stosunkach stratygraficznych, które w naszym przypadku są zupełnie wyraźne, — ma poważne znaczenie dla stratygrafii i paleogeografii pleistocenu. — Zalew eemski, przypadający na *maximum* eustatycznego podniesienia się poziomu wód w oceanach, nad dolną Wisłą był poważniejszy, niż dotychczas przypuszczano, a ilość form południowych, która z tym zalewem wkroczyła nad dolną Wisłę, znacznie większa.

W glacialu nad osadami eemskimi w jednym tylko poziomie, mianowicie na głęb. 46,2—49,1 m w morenie dennej, a więc na złożu wtórnym, znaleziono skąpe szczątki fauny (eemskiej?). Żadne inne poziomy z fauną morską w grubych i pełnych profilach pleistocenu obu omawianych punktów pod Tychnowami nie zostały stwierdzone.

Władysław Pożaryski

Fauna otwornicowa z eemu nad dolną Wisłą

Komunikat przedstawiony przez czł. J. Samsonowicza dn. 30 czerwca 1950 r.

Materiał do badań pochodzi z okolic Kwidzyna i został mi użyczony do opracowania przez prof. J. Samsonowicza. Otwornice zostały wydobyte z ilów marglistych, których wiek na podstawie makrofauny prof. Samsonowicz określił jako eemski.

Występuje tu następujący zespół otwornic:

<i>Nonion orbiculare</i> (Brady)	liczny
„ <i>depressulum</i> (Walker et Jacob)	bardzo liczny
<i>Elphidium lidoense</i> Cushman	nieliczny
„ <i>incertum</i> (Williamson)	nieliczny
„ „ var. <i>clavatum</i> (Cushman)	bardzo liczny
„ <i>excavatum</i> (Terquem)	nieliczny
„ (<i>Elphidiella</i>) aff. <i>asklundi</i> Brotzen	nieliczny
<i>Eponides frigidus</i> var. <i>calidus</i> Cushman et Cole	nieliczny
<i>Rotalia beccarii</i> (Linné)	* bardzo liczny

Zbadałem przeszło 800 okazów otwornic. Żaden z gatunków nie występował w ilości mniejszej niż 10 okazów. Stan zachowania fauny bardzo dobry. Wszystkie wyżej wymienione gatunki żyją jeszcze obecnie. Należą one do grupy otwornic *Perforata*. Zwraca uwagę w tym zespole brak form zlepieńcowatych, oraz niewielka ogólnie ilość gatunków.

Większość form żyje obecnie w Atlantyku zarówno w wodach zimnych, jak i w ciepłych. *Rotalia beccarii* występująca tu masowo charakteryzuje wody ciepłe. Okazy tego gatunku w porównaniu z typowymi okazami z Adriatyku są nieco mniejsze i skorupkę mają cieńszą.

Gatunki *Nonion orbiculare* i *Elphidium incertum* są uważane za charakteryzujące wody zimne, jednak nie są tu one bardzo liczne, a w wodach oceanu Atlantyckiego występują dziś zarówno na północy, jak i w strefie umiarkowanej.

Ogólnie można wysnuć wniosek, iż morze w którym otwornice żyły miało temperaturę umiarkowaną.

Mikrofauna morza eemskiego nie była w ostatnich dziesiątkach lat opracowana, a z terenów nad dolną Wisłą nie była dotychczas wogóle cytowana. W pracach Madsena i Munthe'go z Pomorza Zachodniego i Danii znajdują się listy otwornic z osadów Eemu, z parokrotnie większą ilością gatunków niż podano wyżej. Wskazywałyoby to na zubożenie fauny w części wschodniej tego morza.

Bronisław Halicki

Korelacja eemu z nad dolnej Wisły z eemem duńsko-holenderskim i jego stanowisko stratygraficzne

Komunikat przedstawiony dn. 30 czerwca, 1950 r.

W swej pracy na temat stratygrafii czwartorzędu na Niziu Europejskim¹⁾ autor zajął stanowisko, że trójdzielność, a nawet czwórdzielność plejstocenu niżowego nie wystarcza do datowania wszystkich wyróżnionych przez niego zlodowaceń i dzielących je interglacjałów.

W szczególności, opierając się na studiach Wennberga w Skanii i Danii oraz własnych badaniach w dorzeczu Niemna, wysunął tezę, iż osady zaliczane dotychczas do ostatniego interglacjału należą w rzeczywistości do dwóch niezależnych międzyzłodowcowych okresów. Starszy spośród nich reprezentuje w Europie środkowej fauna eemska w osadach morskich i „facja lipowa“ w lasach liściastych na lądzie; młodszemu interglacjałowi odpowiadałaby fauna borealna typu Skaerumhede w morzu i „facja dębowa“ w organogenicznych osadach lądowych.

¹⁾ B. Halicki. Z zagadnień stratygrafii plejstocenu na Niziu Europejskim = Acta Geologica Polonica I/2. Warszawa 1950.

Znalezienie przez prof. J. Samsonowicza obfitej fauny eemskiej in situ we wsi Tychnowy na N od Kwidzyna rokowało nadzieje na wyjaśnienie jej pozycji stratygraficznej w Polsce.

Wyjazd w teren pozwolił ustalić, że osady eemskie nad dolną Wisłą przykryte są osadami należącymi do dwóch zlodowaceń. Gruba seria piasków, która dzieli w Tychnowach dwie nadeemskie moreny (nb. obie dwudzielne) posiada charakter typowych sedymentów rzecznych: bezwapiennych, dobrze przemytych, które przeszły daleko posuniętą selekcję petrograficzną. Cechy te nie pozwalają na zaliczenie ich do fluwioglacjalnego a nawet interstadialnego typu osadów i przemawiają za wiekiem interglacjalnym.

Niestety wspomniane piaski nie zawierają w Tychnowach szczątków organicznych, lecz, wg uprzejmej informacji prof. S. Zb. Różyckiego, na wyżynie Elbląskiej w analogicznej, jak się zdaje, pozycji stratygraficznej leżą osady morskie z *Cardium edule*, które mogłyby stanowić odpowiednik serii *Skærumhede*. Definitywne rozstrzygnięcie tej kwestii należy odłożyć do chwili ukończenia badań w okolicach Elbląga.

Próbki osadów eemskich z wierceń tychnowskich są badane na zawartość pyłków przez mgr M. Bremównę. Ta część pracy jest w toku, tym nie mniej warto zaznaczyć, że w dotychczas przejrzanym materiale pyłkowym **l i p a j e s t z n a c z n i e o b f i c i e j r e p r e z e n t o w a n a o d d ę b u**. Nawiasem mówiąc, Tychnowy są drugim w Europie punktem (obok Oldenbüttel nad kanałem Kilońskim), gdzie osady eemskie dadzą się korelować z odpowiednią fazą rozwoju lasów interglacjalnych na drodze analizy pyłkowej.

Profile tychnowskie rzucają dalszy snop światła na kwestię zasięgów młodszych zlodowaceń w Europie środkowej: jeśli nad dolną Wisłą osady eemskie, będące, jak dziś wiemy, dobrym przewodnim poziomem stratygraficznym, przykryte są przez dwie serie glacialne, to na półwyspie Jutlandzkim leży na nich już tylko morena bałtycka, w Holandii zaś pozabawione są one jakiegokolwiek przykrycia morenowego.



T R E Ś Ć — T A B L E D E S M A T I È R E S

	Str.
W. SIERPIŃSKI. „Sur l'extension d'un théorème de M. D. Pompeiu aux nombres transfinis”	1
S. L. PIOTROWSKI. „The problem of weights in the least squares solution of non-linear equations”	4
W. KEMULA, Zb. R. GRABOWSKI. „Warunki eksperymentalnego stwierdzenia redukcji tlenu do jonów hydroksylowych”	13
I. CHMIELEWSKA, B. JURECKA. „Nowa grupa związków o działaniu antyprotrombinowym”	16
Z. KASPRZYKÓWNA. „Trójterpeny nagietka (<i>Calendula Officinalis</i>)”	17
W. SIERPIŃSKI. „Sur les produits infinis de nombres ordinaux”	20
M. KAMIENSKI. „Researches on the origin of the Comet P/Wolf I Part VII”	25
F. KĘPIŃSKI. „Ruch komety periodycznej 1906 IV (Kopff'a) i jej pozycja w 1951”	36
W. KEMULA, J. CHODKOWSKI. „Fala wodorowa w roztworach buforu octanowego.	37
D. JARDEN. „Existence of an infinitude of composite n for which $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ”	52
H. GREŃIEWSKI. „Groups and Fields definable in the Propositional Calculus”	53
M. KAMIENSKI. „Researches on the origin of the Comet P/Wolf I Part VIII”	69
W. KEMULA, S. SIEKIERSKI. „Polarometryczne (amperometryczne) miareczkowanie tlenu”	86
H. MILICER-GRUŻEWSKA. „Sur la repartition des deux variables aléatoires dépendantes”	98
J. SAMSONOWICZ. „Interglacjał morski (eemski) nad dolną Wisłą”	121
Wł. POŻARSKI. „Fauna otwornicowa z eemu nad dolną Wisłą”	123
B. HALICKI. „Korelacja eemu z nad dolnej Wisły z eemem duńsko-holenderskim i jego stanowisko stratygraficzne”	124

59 53

50

SPRAWOZDANIA WYDZIAŁU III T. XI. W.