SPRAWOZDANIA
Z POSIEDZEŃ WYDZIAŁU III T. N. W.

SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE VARSOVIE

COMPTES-RENDUS DES SÉANCES DE LA CLASSE III SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

XLI^e ANNÉE 1948

VARSOVIE
SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES
1950

TOWARZYSTWO NAUKOWE WARSZAWSKIE

SPRAWOZDANIA Z POSIEDZEŃ WYDZIAŁU III NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH

ROK XLI 1948

WARSZAWA
NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO
Z ZASIŁKU MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI
1950

Redaktor naczelny wydawnictw T. N. W.

MIECZYSŁAW BRAHMER

Redaktor wydawnictw Wydziału III

WIKTOR KEMULA

Nakład 1.100 egz. Papier dziełowy satynowany B_1, g 80. Listopad 1950 r.

Drukarnia Naukowa TNW pod zarządem PZWS. Warszawa, ul. Śniadeckich 8.

Zam. 271 B - 75303

Posiedzenie

dnia 21 listopada 1947 r.

Kazimierz Zarankiewicz.

Images réciproques de fonctions continues univoques et le principe de Dirichlet.

Communication présentée par M. W. Sierpiński à la séance du 21 novembre 1947.

Soit $f(t)$ une fonction univoque, continue, définie pour tout point t d'un ensemble donné A et dont les valeurs sont des points d'un espace métrique R. Toute valeur $x=f(t)$ sera dite *image du point* t dans R, donnée par la fouction $f(t)$. L'ensemble des images de tous les points t appartenant à A s'appellera *image de l'ensemble* A dans R et sera désignée par $f(A)$.

Inversement, étant donné un point x de R, tout point t de A qui satisfait à l'équation $f(t)=x$ sera dit *image réciproque du point* x (donnée par la fonction f). L'ensemble de toutes les images réciproques d'un point x sera désigné par $f^{-1}(x)$ et celui de toutes les images réciproques des points x appartenant à un sous-ensemble donné $E \subset f(A)$ sera désigné par $f^{-1}(E)$.

Soit A un segment rectiligne de longueur 1. Appelons *continu de Peano* tout continu borné C pour lequel il existe une fonction f univoque, continue, définie pour les points du segment A et telle que $f(A)=C$.

Soit B une circonférence de rayon 1. Il est facile de voir que, C étant un continu de Peano arbitraire, il existe toujours une fonction φ univoque, continue, définie pour les points de

B et telle que $\varphi(B)=C$; réciproquement, si une telle fonction φ existe, le continu donné C est péanien.

On peut donc définir le continu borné de Peano comme l'image univoque et continue non pas du segment, mais de la circonférence. Un tel mode de procéder présente cet avantage que, sur la circonférence, tous les points ont les mêmes propriétés topologiques par rapport à leur totalité, tandis que, sur le segment, les propriétés topologiques des extrémités diffèrent de celles des points intérieurs.

Soit C un continu péanien borné. Considérons les fonctions univoques et continues f, définie sur la circonférence B et telles que

$$C=f(B). \tag{1}$$

Si C n'est pas lui-méme une courbe simple fermée, il existe pour toute fonction f satisfaisant à (1) au moins un point x de C dont l'image réciproque $f^{-1}(x)$ se compose de plus d'un point. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la fonction continue f serait biunivoque et, en vertu de (1), le continu C serait donc une courbe simple férmée.

La question s'impose: quelles sont les propriétés topologiques que doit avoir le point x de C pour que son image réciproque $f^{-1}(x)$ contienne plus d'un point, quelle que soit la fonction f univoque, continue est satisfaisant à (1).

Ce problème a été envisagé pour la première fois par S. Mazurkiewicz [1]) qui a démontré que si C est une „courbe remplissant le carré" (c'est à dire l'ensemble des points d'un carré plan, intérieur et contour), il existe sur C pour toute fonction f en question un ensemble dense de points x dont chacun admet au moins 3 images réciproques. Puis, il y a des travaux de Hurewicz [2]) concernant le nombre d'images réciproques pour les points des continus C de dimen-

---

[1]) S. Mazurkiewicz, Prace Mat.-Fizyczne, **26**, (1913), p. 114. Confronté aussi: H. Hahn, Annali di Matematica, Ser. III. 21, (1913) p. 33; G. Polya, Bull. de l'Acad. d. Scien. Cracovie, Serie A, 1913 p. 305; W. Sierpiński, Prace Mat.-Fizyczne, **23**, 1912, p. 193; Bull. d. Acad. Cracovie, 1912, p. 462.

[2]) W. Hurewicz, *Über stetige Bilder von Punktmengen*, Proc. Akad. Amsterdam, V. **30**, p. 161. (1927).

sion n. Enfin, Nöbeling [3]) a démontré plusieurs théorèmes sur les images réciproques de points des courbes régulières.

Nous allons montrer que l'une des propriétés topologiques qui répond au problème posé est celle que le point x divise le continu C, intégralement ou localement, en plus d'une partie connexe; la démonstration sera basée sur l'ainsi dit *principe de Dirichlet*.

Nous disons qu'un point x *divise* C *intégralement* en n (nombre naturel) parties connexes, si $C-x$ est somme de n ensembles séparés et n'est pas somme de plus que n de tels ensembles. Le point x *divise* C *localement* en n parties connexes s'il y a des entourages U_x du point x arbitrairement petits et tels que l'ensemble $C\cdot U_x - x$ est somme de n ensembles connexes séparés et que pour chaque entourage V_x suffisament petit l'ensemble $C\cdot V_x - x$ est somme de n au moins ensembles connexes séparés non vides.

Le *principe de Dirichlet* [4]) peut être formulé en termes de la Théorie des ensembles comme il suit:

Etant donné n ensembles non vides disjoints $B_1, B_2, \ldots, B_n$ et $m < n$ ensembles disjoints $L_1, L_2, \ldots, L_m$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} B_i \subset \sum_{j=1}^{m} L_j,$$

il existe au moins 1 indice j_0 et au moins 2 indices i_1 et i_2 pour lesquels on a à la fois:

$$B_{i_1}\cdot L_{j_0} \neq 0 \quad et \quad B_{i_2}\cdot L_{j_0} \neq 0\,.$$

---

[3]) G. Nöbeling, *Reguläre Kurven als Bilder der Kreislinie*, Fundam. Math. 20 (1933), p. 30.

[4]) Cf. H. Minkowski, *Diophantische Approximationen*, Leipzig Teubner 1901, p. 1, où l'énoncé intuitif suivant de ce principe est donné: si $n+1$ objets se trouvent dans n tiroirs, il y a au moins 1 tiroir contenant au moins 2 de ces objets.

On peut baser sur le principe de Dirichlet les démonstrations de plusieurs théorèmes de la théorie des ensembles et de la topologie; il me semble de plus que le principe de Dirichlet et le principe d'induction sont equivalents. L'étude de cette question lmportante serait d'un grand interes.

Théorème. *Prémisses: Le point x divise le continu péanien C $\begin{matrix}\text{(i) } \textit{intégralement} \\ \text{(ii) } \textit{localement}\end{matrix}$ en n parties connexes. La fonction f définie sur la circonférence B est univoque, continue et sitisfaisant à* (1).

Thèse: L'ensemble $f^{-1}(x)$ se compose tout au moins de $\begin{matrix}\text{(i) } n \\ \text{(ii) } E\left(\frac{n+1}{2}\right)\end{matrix}$ *points* [5]).

Démonstration. (i) [6]). Soit

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{2}$$

la décomposition de C déterminée par x, c'est à dire:

$$C_i - x \quad \textit{sont connexes et séparés pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$C_i \cdot C_k = x \quad \textit{pour tout} \quad k \neq i. \tag{4}$$

Admettons que l'image réciproque de x se compose de m points:

$$f^{-1}(x) = b_1 + b_2 + \cdots + b_m, \tag{5}$$

et posons:

$$B_i = f^{-1}(C_i - x) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

La fonction f étant univoque, on a en vertu de (4)

$$B_i \cdot B_k = 0 \quad \textit{pour tout} \quad k \neq i \tag{7}$$

et par suite de sa continuité et d'aprés (3)

$$\textit{tout } B_i \textit{ est férme dans } B - f^{-1}(x). \tag{8}$$

En outre, on a d'après (3)

$$B_i \neq 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Les m points (5) divisent la circonférence B en autant d'arcs sans extrémités. Désignons les par $L_1, L_2, \ldots, L_m$. On a en vertu de (1) et (6)

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{j=1}^{m} L_j. \tag{10}$$

---

[5]) E désigne ici l'entier du nombre en parenthèses.

[6]) Une autre démonstration du cas (1) a été donnée par G. Nöeling, loc. cit., p. 31.

Supposons que $m < n$.

En vertu du principe de Dirichlet, il existe donc des indices i_1, i_2 et j_0 tels que

(11) $$B_{i_1} \cdot L_{j_0} \neq 0 \neq B_{i_2} \cdot L_{j_0}$$

et l'égalité (10) donne

(12) $$L_{j_0} = L_{j_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i = L_{j_0} \cdot B_1 + L_{j_0} B_2 + \cdots + L_{j_0} B_n .$$

En vertu de (5) et (8), les ensembles $L_{j_0} \cdot B_i$ sont fermés dans $B - f^{-1}(x)$, donc aussi dans l'ensemble L_{j_0}, puisque ce dernier est fermé dans $B - f^{-1}(x)$; en vertu de (7), ils sont disjoints deux à deux; enfin, en vertu de (11), au moins 2 d'entre eux ne sont pas vides. Par conséquent (12) serait une décomposition de l'ensemble connexe L_{j_0} en un nombre fini (non inférieur à 2) d'ensembles non vides, disjoints et fermés dans lui, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $m \geqslant n$.

(ii) Soit
$$U_x \cdot C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$
la décomposition de $U_x \cdot C$ déterminée par le point x dans son entourage U_x, c'est à dire pour laquelle les conditions (3) et (4) sont réalisées. Admettons aussi la formule (5); nous allons évaluer m.

Attachons à tout point b_j de la circonférence B deux arcs de cette circonférence ayant b_j pour le seul point commun. La fonction f étant continue, on peut choisir ces arcs asser petits pour que leurs images dans C tombent entièrement dans $U_x \cdot C$. Pour $j = 1, 2, ..., m$, il y aura donc $2m$ arcs en question. Soit

(13) $$L_1, L_2, ..., L_{2m}$$

la suite de ces arcs, pris sans les extrémités, et rangés d'ailleurs dans un ordre quelconque.

En désignant par B_i l'ensemble des points de $\sum_{j=1}^{2m} L_j$ dont les images appartiennent à $C_i - x$, les propriétés (7), (8) et (9) des B_i pour $i = 1, 2, ..., n$ se trouvent vérifiées, tout comme dans le cas (i). On en déduit aussitôt l'égalité

(14) $$\sum_{i=1}^{n} B_i \subset \sum_{j=1}^{2m} L_j .$$

En supposant que

(15) $$2m < n ,$$

le principe de Dirichlet peut être appliqué et on en déduit, comme auparavant, l'existence d'indices satisfaisant à (11). Mais alors la formule (12) représenterait une décomposition de l'ensemble connexe L_{j_0} (arc sans extrémités) en un nombre fini d'ensembles fermés dans lui dont au moins 2 ne sont pas vides. Ainsi, en admettant (5), le nombre m ne peut pas satisfaire à l'inégalité (15).

On a par conséquent $2m \geqslant n$, d'où $m \geqslant n/2$, c'est à dire $m \geqslant E\left(\frac{n+1}{2}\right)$, puisque m est un entier par définition.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Ajoutons-y les trois exemples:

1. Le continu C se compose de 4 segments rectilignes n'ayant en commun qu'une extrémité (lettre X). Désignons par x cette extrémité. Le point x divise C intégralement en 4 ensembles connexes. Pour toute fonction univoque et continue, définie sur la circonférence B et dont C est l'ensemble des valeurs, le point x admet donc au moins 4 images réciproques sur B.

2. L'origine des axes des coordonnées divise la lemniscate de Bernoulli localement en 4 parties connexes. Pour toute fonction univoque et continue sur la circonférence B dont l'image est cette lemniscate, ce point admet donc au moins 2 images réciproques sur B.

3. Soit C le continu composé d'une circonférence et de son diamètre. Une extrémité x de ce diamètre divise C localement en 3 parties connexes (sans diviser C intégralement). Par conséquent, quelle que soit la fonction univoque et continue qui transforme la circonférence B en continu C tout entier, le point x admet au moins 2 images réciproques sur B.

Kazimierz Zarankiewicz.

O przeciwobrazach funkcji ciągłych i jednowartościowych oraz zasadzie Dirichleta.

Streszczenie

Autor, opierając się na tzw. zasadzie Dirichleta, dowodzi twierdzenia:

Jeżeli punkt x rozcina kontinuum Peany C na n części spojnych a) integralnie b) lokalnie, wówczas dla każdej funkcji jednowartościowej i ciągłej, która odwzorowywuje okręg koła B na C, ilość przeciwobrazów punktu x w okręgu B jest w przypadku a) conajmniej n, w przypadku b) conajmniej $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

E. Marczewski.

Twierdzenie S. Mazurkiewicza o przestrzeniach zmiennych ewentualnych.

Komunikat przedstawiony dnia 21 listopada 1947 r.

Streszczenie

Przestrzenią zmiennych ewentualnych (espace de variables aléatoires, w skrócie *EVA)* nazywa Mazurkiewicz[1]) zbiów M elementów — zwanych zmiennymi ewentualnymi — w którym każdemu układowi $x_1, x_2, \dots x_n \in M$ przyporządkowana jest funkcja $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ n zmiennych rzeczywistych — zwana dystrybuantą zmiennych $x_1, \dots, x_n$ — spełniająca następujące warunki:

(A_1) dla każdej permutacji $i_1, \dots, i_n$ liczb $1, \dots, n$

$$F_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}}(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = F_{1, \dots, n}(t_1, \dots, t_n);$$

---

[1]) W pracy *Sur les espaces de variables aléatoires,* której tekst, pochodzący z r. 1939, zachował się w stanie niekompletnym, a która ukaże się (uzupełniona i skomentowana przez E. Marczewskiego) w Fundamenta Mathematicae.

(A$_2$) $F_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)$ jest ciągła z lewej strony;

(A$_3$) jeżeli $a_j \leqslant b_j$, $j=1,\ldots,n$ to $\Delta_{a_1,\ldots,a_n}^{b_1,\ldots,b_n} F_{x_1,\ldots,x_n} \geqslant 0$;

(A$_4$) $\lim\limits_{t\to+\infty} F_x(t)=1$;

(A$_5$) $\lim\limits_{t\to+\infty} F_{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}}(t_1,\ldots,t_n,t) = F_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)$;

(A$_6$) $\lim\limits_{t_j\to-\infty} F_{x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n)=0$ dla $j=1,\ldots,n$;

przyczym symbol występujący we wzorze (A$_3$) określony jest przez formuły:

$$\Delta_j^h f(t_1,\ldots,t_n) = f(t_1,\ldots,t_{j-1},t_j+h,t_{j+1},\ldots,t_n) - f(t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_n).$$

$$\Delta_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{b_1,b_2,\ldots,b_n} f = \Delta_1^{b_1-a_1}\left(\Delta_2^{b_2-a_2}\left(\ldots\Delta_{n-1}^{b_{n-1}-a_{n-1}}\left(\Delta_n^{b_n-a_n} f(a_1,\ldots,a_n)\right)\ldots\right)\right).$$

Przy pomocy dystrybuanty $F_{x_1,\ldots,x_n}$ definiuje się prawo prawdopodobieństwa $P_{x_1,\ldots,x_n}(U)$ kładąc dla $a_j \leqslant b_j$ i $j=1,2,\ldots,n$:

$$P_{x_1,\ldots,x_n}\left(\prod_{j=1}^{n} \underset{\xi_1,\ldots,\xi_n}{E} (a_j \leqslant \xi_j < b_j)\right) = \Delta_{a_1,\ldots,a_n}^{b_1,\ldots,b_n} F_{x_1,\ldots,x_n}$$

i rozszerzając tę funkcję na wszystkie podzbiory borelowskie przestrzeni katezjańskiej n-wymiarowej jako przeliczalnie addytywną funkcję zbioru.

Przy pomocy dystrybuanty określa się następnie stosunek zawierania stochastycznego między dwiema *EVA*.

Każdą *EVA* potraktować można jako przestrzeń metryczną, definiując odległość stochastyczną $\rho_s(x_1,x_2)$ (dla $x_1, x_2 \epsilon M$)

$$\rho_s(x_1,x_2) = \operatorname*{Inf}_{\lambda>0}\left[\lambda + P_{x_1,x_2}\left(\underset{\xi_1,\xi_2}{E}|\xi_1-\xi_2| \geqslant \lambda\right)\right].$$

Gdy określona w ten sposób dla danej *EVA* przestrzeń metryczna jest zupełna, ośrodkowa, etc., Mazurkiewicz nazywa daną *EVA* zupełną, ośrodkową etc. Określa on następnie *EVA dla gry w orła i reszkę* i udowadnia

Twierdzenie. *Rozszerzenie zupełne EVA dla gry w orła i reszkę zawiera stochastycznie każdą EVA ośrodkową.*

Okazuje się, że rozszerzenie zupełne EVA dla gry w orła i reszkę nie różni się w istocie od przestrzeni funkcyj mierzalnych w odcinku $< 0, 1 >$ i, że twierdzenie Mazurkiewicza można udowodnić przy pomocy twierdzenia orzekającego, że miara Lebesgue'a w odcinku $< 0, 1 >$ jest w pewnym sensie uniwersalna dla wszystkich miar ośrodkowych [1]).

E. Marczewski.

Un théorème de S. Mazurkiewicz sur les espaces de variables aléatoires.

Présenté le 21 novembre 1947.

Résumé

Remarques sur un théorème (encore non publié [2])) de S. Mazurkiewicz concernant la notion d'espace de variables aléatoires et le jeu de pile et face.

T. Ważewski.

Sur les systèmes de deux équations différentielles linéaires dont les intégrales tendent asymptotiquement vers une ellipse.

Communication présentée à la séance du 21 novembre 1947.

Le but de la présente note est une généralisation des résultats de plusieurs auteurs [3]) relatifs à l'allure asymptotique des intégrales de l'équation

$$y''(t) + f(t) \cdot y(t) > 0$$

où $f(t) > 0$.

---

[1]) Por. np. E. Marczewski, *Sur l'isomorphie des mesures séparables*, Colloquium Mathematicum I, 1 (1947), str. 39—40.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur les espaces de variables aléatoires*, Fund. Math., à paraître.

[3]) Osgood, Biernacki, Cacciopoli, Kneser, Ascoli, Caligo Cf. E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. T. 1 (Leipzig 1944 p. 129).

Notre théorème comprend une catégorie d'équations plus vaste, car il concerne le *système* de deux équations qui est en outre non homogène.

Voici notre théorème.

Considérons le système

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot y(t) + f(t),$$

$$y'(t) = c(t) \cdot x(t) + d(t) \cdot y(t) + g(t).$$

Nous supposons que, dans l'intervalle $0 \leqslant t < +\infty$ on ait les propriétés suivantes:

1) Les fonctions a, b, c, f, g, sont continues.

2) Pour chaque t les racines s de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a(t) - s, & b(t) \\ c(t), & d(t) - s \end{vmatrix} = 0$$

sont purement imaginaires (leur partie réelle est nulle) et

$$|s| > \rho > 0 \qquad (\rho \text{ fixe})\text{[1]}.$$

3) Les fonctions a, b, c, d, possèdent une variation totale finie dans l'intervalle $0 \leqslant t < +\infty$, c-à-d.

$$\int_0^{+\infty} |d(a(t))| < +\infty, \text{ etc.}$$

4) $$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt < +\infty.$$

Nous supposons que t désigne le temps.

Ceci étant admis pour $t \to +\infty$ on a

$$a(t) \to \alpha, \quad b(t) \to \beta, \quad c(t) \to \gamma, \quad d(t) \to -\alpha,$$

où α, β et γ sont certains nombres fixes.

---

[1]) Ceci revient à ce que

$$a(t) + d(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad -a(t) \cdot d(t) + b(t) \cdot c(t) < -\rho < 0.$$

Chaque intégrale de notre système se condense asymptotiquement (pour $t \to +\infty$) sur une ellipse de la famille dépendant d'un paramètre C

$$-\gamma \cdot x^2 + 2\alpha x y + \beta y^2 = C.$$

(L'ellipse dégénère en un point pour $C = 0$).

La classe des intégrales se condensant sur une quelconque de ces ellipses non dégénérées forme un tuyau homéomorphe d'un cylindre. Une seule intégrale tend vers l'origine (0, 0).

Si $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ est la suite des valeurs consécutives de t pour lesquelles une intégrale (ne tendant pas vers l'origine) coupe une demidroite fixe issue de l'origine alors $t_{n+1} - t_n$ tend vers une limite positive liée avec l'ellipse limite.

L'idée directrice de la démonstration consiste à prouver que, pour toute intégrale $x(t)$, $y(t)$ de notre système, la fonction auxiliaire

$$\varphi(t) = -c(t) \cdot [x(t)]^2 + 2\,a(t) \cdot x(t) \cdot y(t) + b(t) \cdot [y(t)]^2$$

tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$.

Dans le cas particulier où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ sont absolument continues, on le démontre en s'appuyant sur certaines inégalités différentielles relatives à la fonction $\varphi(t)$ qui sont bien faciles à résoudre.

Le cas général se ramène au cas précédent au moyen d'un changement de la variable t de la forme $t = \psi(T)$.

T. Ważewski.

O układach dwóch równań różniczkowych, których całki kondensują się na elipsach.

Komunikat przedstawiony dnia 21 listopada 1947 r.

Streszczenie

Odnośnie do układu równań

$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,y(t) + f(t),$$

$$y'(t) = c(t)\,x(t) + d(t)\,y(t) + g(t)$$

zakładamy, że:

1°) a, b, c, d, f, g są ciągłe w przedziale $(0, +\infty)$,

2°) a, b, c, d posiadają skończoną wariację totalną w tym przedziale,

3°) $\int\limits_0^\infty |f(t)|\, dt$ oraz $\int\limits_0^\infty |g(t)|\, dt$ są skończone,

4°) dla każdego t równanie charakterystyczne $(a - b)(d - s) - bc = 0$ posiada pierwiastki czysto urojone.

Przy tych założeniach dla $t \to +\infty$ istnieją granice $a \to \alpha$, $b \to \beta$, $c \to \gamma$, $d \to -\alpha$ oraz każda całka układu, dla $t \to +\infty$, kondensuje się na (ewentualnie zdegenerowanej) elipsie należącej do rodziny $-\gamma x^2 + 2\alpha x y + \beta y^2 = k$.

Twierdzenie to i związane z nim wyniki obejmują jako szczególny przypadek kilka znanych rezultatów odnoszących się do asymptotycznego zachowania się całek równania $z'' + A(t) z = 0$.

Posiedzenie

z dnia 16 stycznia 1948 r.

Wiktor Kemula.

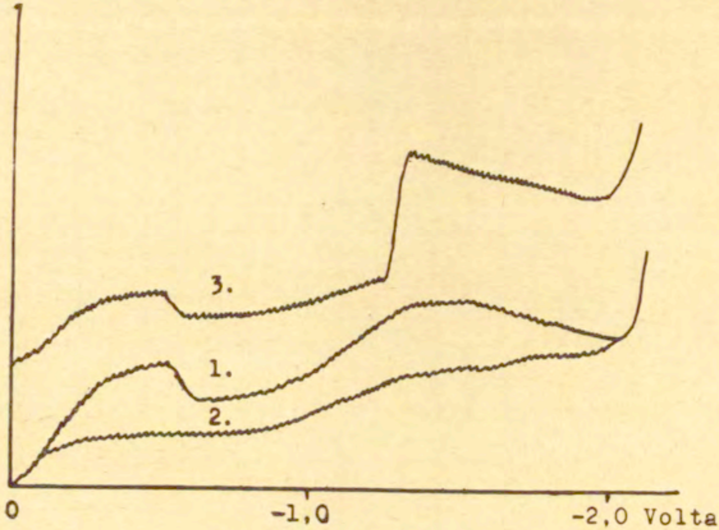
Katalityczny wpływ jonów $Pb^{\cdot\cdot}$ na elektro-redukcję tlenu w obecności powierzchniowo-aktywnych ciał.

WSTĘP

Studiując wpływ różnych ciał powierzchniowo-aktywnych na przebieg krzywych polarograficznych, stwierdziłem, że ten wpływ jest często odmienny i zależny od natury powierzchniowo-aktywnego ciała. Porównajmy przykładowo np. wpływ fuksyny, kofeiny, zieleni metylowej, jodeozyny oraz kamfory na przebieg krzywych polarograficznych nasyconego powietrzem wodnego roztworu chlorku potasowego.

Rys. 1 obrazuje nam przebieg elektrolizy 1 n. czystego roztworu KCl aq. (krzywa 1), tegoż roztworu, zadanego 1 kroplą 0,1% roztworu zieleni metylowej (krzywa 2) i roztworu KCl, zadanego 1 kroplą 0,1% roztworu jodeozyny (krzywa 3 — przesunięta do góry).

Jak wynika z przebiegu krzywych (2) i (3) wpływ dodanych barwników jest różny. Na ten temat istnieją liczne publikacje, których tutaj cytować nie sposób. Stwierdzić można było, że działanie „tłumiące" barwników stoi w związku z ich zdolnością tworzenia jonów lub koloidów o znaku dodatnim lub ujemnym, oraz w związku z ładunkiem powierzchni rtęci, tworzącej elektrodę. Z powodu tego działania barwniki mogą adsorbować się na powierzchni elektrody, co w konsekwencji pociąga za sobą zanik „maksimum". „Maksimum" tlenowe na krzywej (1) jest „okrągłe", jak to na ogół bywa w roztworach soli o stężeniu, zbliżonym do molarnego.

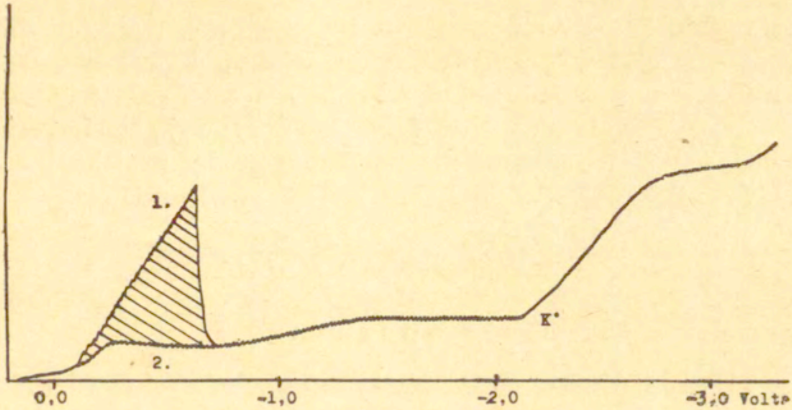


Rys. 1.

1. 1 norm. KCl aq. (na powietrzu). Cz. galw. 1/80.
2. To samo + 1 kropla 0,1% roztw. zieleni metylowej.
3. Jak pod 1. + 1 kropla 0,1% roztw. jodeozyny.

W roztworach rozcieńczonych — np. w 0,001 n. KCl aq. „maksimum" to jest „ostre" (patrz Rys. 2, krzywa 1). Dawniej często było polecane dodawanie wodnego roztworu fuksyny, celem „przytłumienia" maksymów, a w szczególności maksymum tlenowego[1] (Rys. 2). Okazało się jednak przy bliższym zbadaniu działania „tłumiącego" fuksyny, jak o tym będzie jeszcze mowa dalej, że działanie to jest niezupełne, bowiem przez dodanie kamfory, która działa „tłumiąco" o wiele silniej, kształt krzywej polarograficznej ulega dalszej, jeszcze głębszej zmianie. (Rys. 3. — krzywa 1 : 0,001 n. KCl zadany fuksyną, — krzywa 2 — zadany kamforą).

Fuksyna „tłumi" maksymum i wygładza przebieg krzywej, usuwając maksymum (Rys. 2). Sądzono powszechnie dotychczas, że taki przebieg świadczy o zniesieniu (zaniku) sił adsorbcyjnych elektrody, powodujących ruch cieczy i że w tym przypadku dostęp tlenu do katody, odbywa się jedynie drogą dyfuzji.



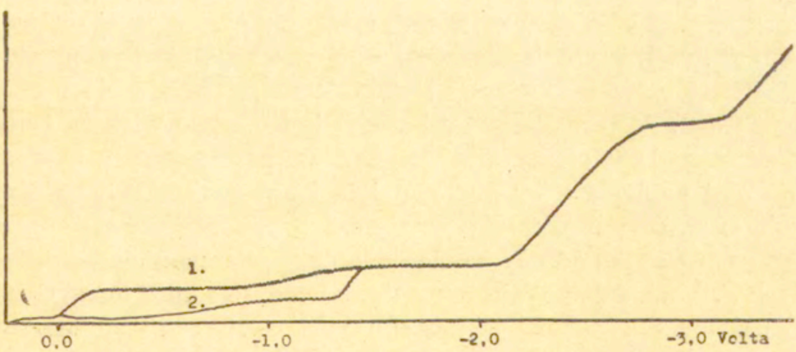
Rys. 2.

1. 0,001 norm. KCl aq. (na powietrzu).
2. To samo + 5 kropli 0,1% fuksyny.

Działanie jednak kamfory, o wiele radykalniej zmieniające przebieg krzywej polaryzacji, a mianowicie obniżające dodatkowo wartości prądu redukcji (Rys. 3), — nie potwierdza tego przypuszczenia.

Należało więc zbadać doświadczalnie, jaka jest przyczyna odmiennego przebiegu krzywej polaryzacji w obecności kamfory, w porównaniu do działania fuksyny.

Ponieważ uprzednio już stwierdzonym zostało [2], że tworzenie się maksymów jest natury elektrycznej i polega na po-



Rys. 3.

1. 0,001 norm. KCl aq. (na powietrzu w obecności fuksyny).
2. To samo + kamfora.

wstawaniu ruchów cieczy w pobliżu elektrody, poddano bliższemu zbadaniu wymienione wyżej roztwory, biorąc pod uwagę dodatkowo poznane uprzednio fakty.

Celem wyjaśnienia działania kamfory wykonano szereg doświadczeń. Do badań zastosowano metodę projekcyjnego uwidaczniania ruchów cieczy w warstwie przykatodowej.

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Opis aparatury

Do badań użyto zwykłej aparatury polarograficznej [3]. Naczyńko do elektrolizy miało ścianki płasko-równoległe i było przystosowane do pozbawiania roztworów tlenu z powietrza przez przepuszczanie gazowego wodoru. Powiększenia stosowano 30 do 60 krotnie (liniowo). Wiry uwidaczniano przez dodawanie minimalnych ilości węgla drzewnego (Carbo medicinalis Merck). Potencjały, uwidocznione na polarogramach są liczone względem normalnej elektrody kalomelowej.

Doświadczenia i pomiary

Działanie ciał powierzchniowo-aktywnych:

a) Wpływ fuksyny. Wyżej wspomniałem, że obecność fuksyny, (a tak samo kofeiny) powoduje zniknięcie maksymum na krzywej polarograficznej i to zarówno w roztworach elektrolitów stężonych (Rys. 1), jak i rozcieńczonych (Rys. 2).

Rzutując na ekran warstwę przykatodową w tych roztworach w chwili istnienia maksymum, można zauważyć energiczne ruchy tej warstwy (wiry). Dzięki temu mieszaniu się cieczy ilość tlenu, dostarczanego do katody, jest o wiele większa i natężenie prądu wielokrotnie wzrasta. Po przekroczeniu pewnej wartości napięcia wiry nagle maleją i natężenie prądu, a tym samym maksymum to nagle maleje.

Zauważono od dawna, że dodanie powierzchniowo-aktywnych ciał, np. fuksyny, kofeiny itp. powoduje zanik maksymum (patrz Rys. 2) i sądzono, że następuje całkowity zanik sił adsorbcyjnych, a tym samym i wirów.

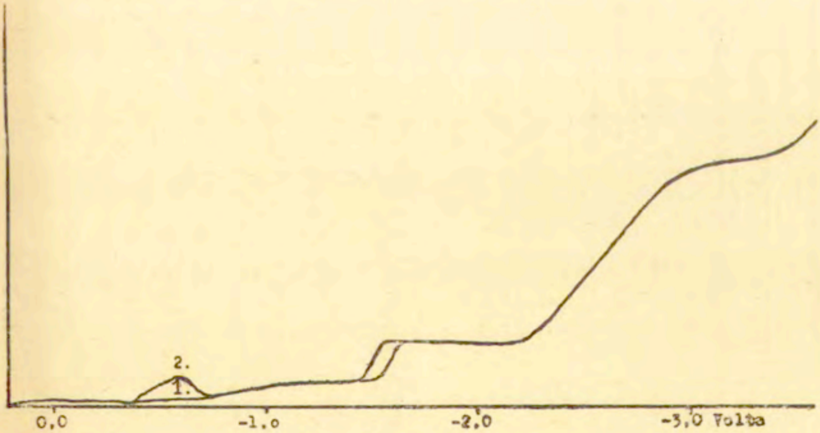
Układ zachowuje się jednak inaczej: skutkiem dodania fuksyny zanikają gwałtowne wiry, ale nadal utrzymuje się ruch cieczy deformujący kształt krzywej polarograficznej. Fakt ten stwierdziłem wielokrotnie metodą projekcyjną. Dostarczanie ciała redukującego się do kroplowej elektrody rtęciowej, odbywa się więc bardzo często nie wyłącznie drogą dyfuzji, lecz również mieszania się cieczy. Wiemy na przykład, że dwie fale redukcji tlenu nie są równej wielkości, właśnie z tego powodu.

Przyczyna mieszania się cieczy jest i tutaj natury elektrycznej, pochodzącej pośrednio z tak zwanej tangencjalnej różnicy potencjałów, wynikającej ze specyficznej budowy warstwy podwójnej, oraz z oddziaływania pomiędzy ścianami naczynia a powierzchnią rtęci, podobnie jak w przypadku istnienia maksymum.

b) Wpływ kamfory. Kamfora jest bardzo silnym czynnikiem powierzchniowo-aktywnym. Jej działanie jest tak silne, że ruch cieczy wokół elektrody kroplowej całkowicie ustaje i tlen dostarczany jest do katody jedynie drogą dyfuzji i to prawdopodobnie poprzez warstewkę kamfory.

W ten sposób wytłumaczyć można przebieg krzywej polaryzacji na rys. 3, krzywa 2. Ilość redukującego się tlenu maleje o powierzchnię między krzywymi.

Po osiągnięciu potencjału około — 1,7 Volta działanie kamfory nagle ustaje (prawdopodobnie kamfora się desorbuje) i tlen



Rys. 4.

1. 0,001 norm. KCl aq. (na powietrzu) + kamfora.
2. To samo + 0,2 cm³ 0,01 norm. $PbCl_2$.

(ewentualnie H_2O_2) redukuje się energicznie. Zaobserwować można intensywne mieszanie się cieczy na zewnątrz nie objawiające się w postaci maksymum.

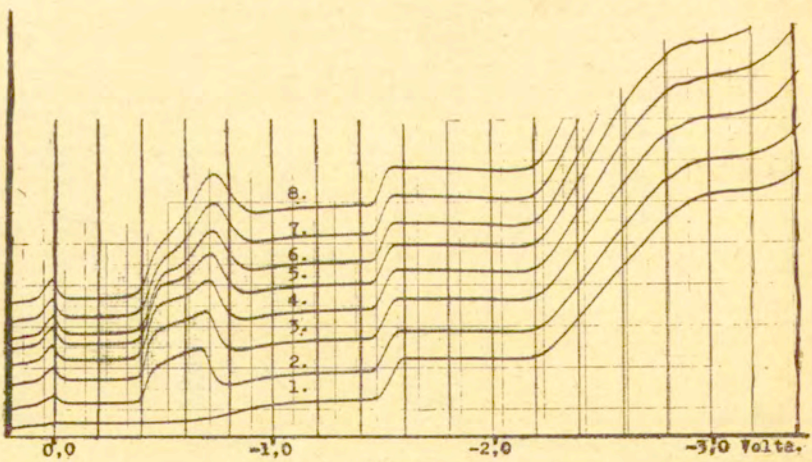
W interesujący sposób przebiega — w obecności kamfory— elektroliza roztworu 0,001 n. KCl, zawierającebo tlen z powietrza, gdy dodać minimalne ilości jonów Pb˙˙.

Rys. 4 unaocznia nam przebieg elektrolizy tego roztworu bez jonów Pb˙˙ (krzywa 1), oraz w obecności minimalnej — 0,0001 n. — ich ilości (krzywa 2). Powstaje tutaj małe maksymum (krzywa 2), spowodowane obecnością jonów Pb˙˙.

Wytłumaczyć taki przebieg można, przypuszczając, że kamfora desorbuje się w okolicy elektro-kapilarnego zera rtęci w obecności jonów Pb˙˙.

W zakresie potencjałów od —0,4 do —0,7 Volta (patrz Rys. 4, krzywa 2) obraz projekcyjny wykazuje żywy ruch cieczy wokół elektrody kroplowej.

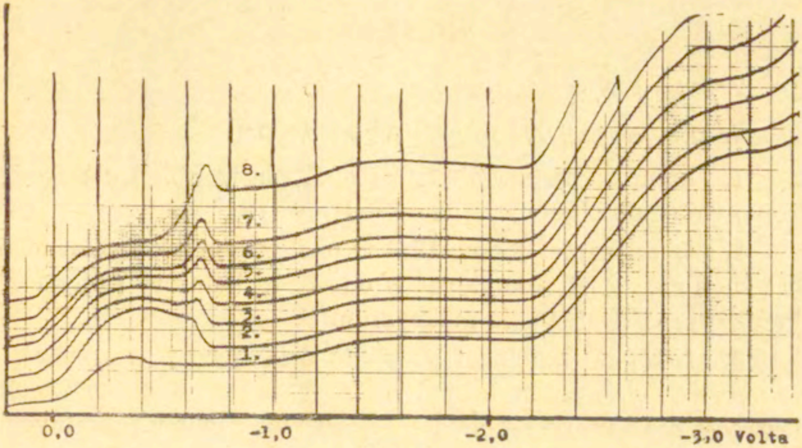
W celu przekonania się o słuszności tego przypuszczenia wykonano dwie serie doświadczeń. Obrazują je Rys. 5 i 6. W nich do 0,001 n. roztworu KCl w obecności kamfory i fuksyny, dodawano kolejno jednakowe ilości nasyconego roztworu $PbCl_2$ aq.



Rys. 5.

1. 0,001 norm. KCl aq. (na powietrzu) + kamfora.

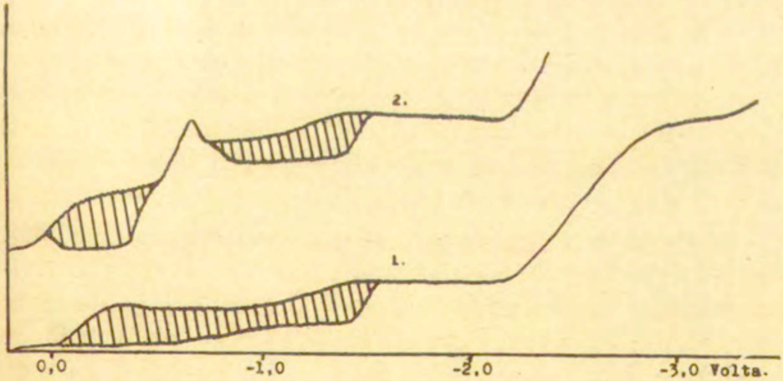
2—8. Do powyższego roztworu dodawano kolejno kroplami nasycony roztwór $PbCl_2$ aq.



Rys. 6.

1. 0,001 norm. KCl aq. + 8 kropli 0,1% roztworu fuksyny.
2—8. Do powyższego roztworu dodawano kolejno kroplami nasycony roztwór $PbCl_2$ aq.

Z wyników na Rys. 5 i 6 można (jeżeli dla przykładu wziąć krzywe 1 i 8) skonstruować Rys. 7, przez odpowiednie odjęcie powierzchni między odpowiednimi górnymi i dolnymi krzywymi a osią XX-ów. Na tym rysunku przez zakreskowanie widać, jaki efekt powoduje kamfora, w porównaniu do fuksyny, w obecności jonów Pb˙˙ (krzywa 2) i bez ich obecności (krzywa 1). (Porównaj z Rys. 3).



Rys. 7.

Wpływ kamfory i fuksyny na przebieg redukcji tlenu (z powietrza) w 0,001 norm. roztworze KCl aq.: 1. Bez obecności jonów Pb˙˙ i
2. W obecności jonów Pb˙˙.

WNIOSKI

Z powyższych doświadczeń wynikają następujące wnioski:

W roztworze 0,001 n. KCl na powietrzu:

1. kamfora całkowicie znosi ruch cieczy wokół elektrody kroplowej aż do potencjału około —1,7 Volta,

2. w obecności jonów Pb¨ w okolicy elektrokapilarnego zera ruch cieczy istnieje nawet w obecności kamfory (jony Pb¨ „katalizują" powstawanie maksymum).

3. fuksyna (kofeina i podobnie działające powierzchniowo-aktywne ciała) niweczy jedynie szybkie ruchy cieczy wokół elektrody, nie hamuje natomiast istniejących ruchów powolnych. Istnienie tych ruchów i ich szybkość zależy od potencjału elektrody kroplowej.

Porównując początkowe fazy elektrolizy roztworu KCl w obecności fuksyny, widzimy, że maksymum wzrasta po dodaniu pierwszej kropli $PbCl_2$, czyli i w tym przypadku jony Pb¨ „katalizują" ruch cieczy, a tym samym redukcję tlenu, a dopiero dodanie większej ilości $PbCl_2$ ponownie je obniża (patrz Rys. 6, krzywa 2, 3, 4, 5, 6 licząc od dołu. Można również zauważyć, że obecność fuksyny nie przeszkadza tworzeniu się maksymum jonów Pb¨.

W świetle powyższych wniosków „katalityczny" wpływ niektórych jonów na powstawanie maksymów polega przypuszczalnie na większej lub mniejszej zdolności niektórych jonów do adsorbowania się w warstwie międzyfazowej elektroda-roztwór. Spowodowana tym asymetria elektryczna warstwy w niejednorodnym polu elektrycznym elektroda kroplowa — roztwór — elektroda nieruchoma powoduje silniejszy lub słabszy ruch tej warstwy, a z nią i głębszych partii elektrolizowanego roztworu [2].

W związku z powyższym, celem wytłumaczenia redukcji tlenu przy obserwowanych potencjałach, nie wydaje się potrzebnym, zakładać istnienia odmiennego cyklu reakcyj, jak to zrobił F. Strnad [4], który wykrył „katalityczny" wpływ różnych jonów na redukcję tlenu, — w y s t a r c z y f a k t, ż e c i e c z s i ę m i e s z a: ilości tlenu dostarczane katodzie są wtedy większe, redukcja idzie żwawiej, ale mechanizm redukcji jest taki sam [5].

Na poparcie powyższego przypuszczenia wystarczy chociażby stwierdzenie F. Strnada (loc. cit. str. 394), że podobne działania wywierają jony $Fe^{\cdot\cdot}$, $Co^{\cdot\cdot}$, $Ni^{\cdot\cdot}$, a trudno przypuścić, że tlenki tych metali tak łatwo się tworzą i rozpadają jak to przypuszcza F. Strnad dla jonów $Pb^{\cdot\cdot}$.

Taki sam zapewne jest mechanizm działania katalitycznego innych substancji, nieorganicznych, a również i ciał organicznych.

Wielkość „katalitycznego" wpływu różnych ciał zapewne zależy od ich zdolności adsorbcyjnej w przestrzeni międzyfazowej.

PIŚMIENNICTWO

1. **B. Rayman**, Collection **3**, 314—327, (1931). **W. Kemula**, Zeit. Elektrochemie, **37**, 779—795 (1931).

2. **A. Frumkin** i **B. Bruns**, Acta physicochimica U. S. S. R. **1**, 232—246 (1934). **A. Antweiler**, Zeit. Elektrochemie, **44**, 719, 831, 888 (1938). **T. A. Kriukowa** i **B. N. Kabanow**, Żurn. Fiziczeskoj Chimii, **13**, 1454—1467 (1939) i inni.

3. Opis aparatury i podstawowych pojęć o metodzie polarograficznej w języku polskim, np. patrz: **W. Kemula**, Przegląd Elektrotechniczny, **23**, 170 (1947).

4. **F. Strnad**, Collection, **11**, 391—402 (1939).

5. **W. Kemula** i **M. Michalski**, Roczniki Chemii **16**, 535—541 (1936).

Zakład Chemii Nieorganicznej
Uniwersytetu Warszawskiego

W. Kemula.

The catalytic influence of the plumbous ions on the electro-reduction of the oxygen in the presence of the surface — active substances.

Measuring the influence of different surface — active substances on the electro-reduction of the oxygen on the dropping mercury electrode, by means of the polarograph it was possible to state, that „suppressing" action of these substances on the „maxima" of the oxygen was not only quantitative, but olso qualitative one (see Fig. 1).

The detailed study of the phenomena occuring in the interface in the presence of different surface-active substances between the dropping electrode and solution by means of projection methode, could state, that after the suppression of the sharp „maximum" (see Fig. 2) only the v i g u r o u s stirring of the liquid does not more occur, but (very often) it remains further the other kind of stirring of the electrolyte. This stirring influences the height of „wave" (diffusion current).

For exemple, after the fuchsine or coffein solution have been added, the stirring of the solution was not stopped. The camphor is very active and stopes the stirring completely between 0,0 and —1,7 Volts of the applied voltage (see Fig. 3).

The presence of the Pb'' ions catalyses the reduction of the oxygen the camphor have ben added previously (see Fig. 5 and 6).

The fig. 7, derived from the figs. 5 and 6, shows, that the catalytic action of the Pb'' — ions occurs between —0,4 and —0,7 Volts, that is in the neighbourhood of the electrocapillary zero of the mercury.

It follows from the received results, that observed catalytic action of different ions on the reduction of oxygen constists only on the existence of the stirring of the electrolyte but not as result of forming of the peroxyde ions, as supposed F. Strnad.

Institut of Inorganic Chemistry
of the University of Warsaw

Prace Andrzeja Alexiewicza i Jana Kalickiego, przedstawione 16 stycznia i 12 marca 1948 r., ze względów technicznych przesunięte być musiały na koniec zeszytu.

P o s i e d z e n i e

z dnia 30 kwietnia 1948 r.

K a r o l B o r s u k

Sur la notion cinématique d'une courbe

Mémoire présenté à la séance du 30 avril 1948.

1. Le terme „courbe" est employé en mathématiques dans un double sens. Dans le premier sens (qui peut être nommé *géométrique*) il est employé dans les diverses branches de la géométrie et il désigne un ensemble de points de dimension 1, qui est souvent supposé connexe et quelquefois compact. Dans un autre sens (qui peut être nommé *cinématique*) le terme „courbe" est employé dans la mécanique rationnelle ainsi que dans l'analyse et la géométrie différentielle. On y entend par courbe une classe de fonctions continues d'un paramètre parcourant un intervalle de nombres réels (dans la cinématique ce paramètre est interprété en général comme le temps) dont les valeurs sont des points de l'espace envisagé. On obtient différentes notions cinématiques de la courbe en choisissant de différentes manières les classes des fonctions en question. Le but de ce travail est de trouver une relation entre deux notions cinématiques de la courbe.

2. Termes et notations. Etant donnés deux nombres réels $a<b$, nous désignerons par $<a,b>$ l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$.

Etant donnée une fonction f transformant un ensemble X en un sous-ensemble d'un ensemble Y, nous désignons:

pour tout ensemble $A \subset X$, par $f(A)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$ où $x \varepsilon A$,

pour tout ensemble $B \subset Y$ par $f^{-1}(B)$ l'ensemble de tous les $x \varepsilon X$ tels que $f(x) \varepsilon B$.

Nous ne faisons aucune différence dans nos notations entre un ensemble composé d'un seul élément et cet élément même. Or, dans le cas où B ne contient qu'un point b, nous allons écrire $f^{-1}(b)$ au lieu de $f^{-1}(B)$. Pareillement, dans le cas où l'ensemble $f(A)$ ne contient qu'un point b, nous allons écrire b au lieu de $f(A)$. Dans le cas où f est une transformation biunivoque de X en Y, $f^{-1}(y)$ est une transformation univoque inverse à f.

Dans le cas où les arguments de f sont des nombres réels nous disons qu'un élément $y \varepsilon Y$ est une *c-valeur* de f, lorsque $f^{-1}(y)$ contient un intervalle $< a, b >$. Dans ce cas nous disons que $< a, b >$ est pour f un *c-intervalle*.

3. Nous entendons par un *parcours* dans un espace [1]) E une fonction continue $x(t)$ dont les arguments t parcourent l'intervalle $< 0, 1 >$ et les valeurs $x(t)$ appartiennent à E. Deux parcours $x(t)$ et $y(t)$ dans l'espace E sont dits *équivalents* (en symboles $x \sim y$) lorsqu'il existe deux fonctions réelles $\alpha(t)$, $\beta(t)$ non décroissantes, transformant l'intervalle $< 0, 1 >$ en soi d'une manière continue et satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad x[\alpha(t)] = y[\beta(t)] \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >.$$

Dans le cas où il existe deux fonctions continues α et β croissantes et satisfaisant à la condition (1), nous dirons que les parcours x et y sont *fortement équivalents* (en symboles $x \simeq y$).

Il est clair que l'équivalence, ainsi que l'équivalence forte, sont des relations symétriques et que la deuxième entraîne la première. On voit en outre que l'équivalence forte est une relation transitive. En effet, lorsqu'on a trois parcours x, y et z dans l'espace E tels que $x \simeq y$ et $y \simeq z$, c. à d. lorsqu'il existe quatre fonctions continues croissantes α, β, γ, δ transformant $< 0, 1 >$ en soi et satisfaisant à la condition (1) et à la condition

$$y[\gamma(t)] = z[\delta(t)] \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >,$$

alors, en posant

$$\varepsilon(t) = \delta\gamma^{-1}\beta(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >,$$

[1]) topologique arbitraire.

on obtient une fonction continue croissante transformant l'intervalle $<0,1>$ en soi et telle que

$$z[\varepsilon(t)] = z[\delta\gamma^{-1}\beta(t)] = y[\gamma\gamma^{-1}\beta(t)] = y[\beta(t)] = x[\alpha(t)].$$

Or les parcours x et z sont fortement équivalents.

La relation de l'équivalence forte étant symétrique et transitive, on conclut que l'ensemble de tous les parcours dans E se décompose en classes disjointes de parcours fortement équivalents. Si on appelle courbes dans l'espace E les classes des parcours fortement équivalents, on obtient une notion de la courbe le plus souvent rencontrée dans les applications. Lorsqu'on veut introduire la notion de la courbe basée d'une façon analogue sur la relation de l'équivalence ordinaire, on rencontre certaines difficultées, car la démonstration que la relation d'équivalence est transitive est un peu compliquée. Cette démonstration constitue un des buts de ce travail.

4. Il existe quelques raisons prouvant que la notion de la courbe basée sur la relation de l'équivalence forte semble être moins commode que celle basée sur la relation de l'équivalence ordinaire. La plus importante de ces raisons est celle que l'équivalence forte — à l'opposé de l'équivalence ordinaire — n'est pas invariante envers la convergence uniforme. Ainsi p. ex. les parcours définis dans l'ensemble des nombres réels par les formules

$$x_n(t) = \frac{3(n+1)}{2(n+3)} \cdot t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3},$$

$$x_n(t) = \frac{6}{n+3} \cdot t + \frac{n-3}{2(n+3)} \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3},$$

$$x_n(t) = \frac{3(n+1)}{2(n+3)} \cdot t + \frac{3-n}{2(n+3)} \qquad \text{pour} \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1$$

sont tous fortement équivalents et ils convergent uniformément vers le parcours $x_0(t)$ défini par les formules:

$$x_0(t) = \frac{3}{2}t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3},$$

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3},$$

$$x_0(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1,$$

qui cependant n'est pas fortement équivalent à eux.

Or, si nous considérons les parcours dans l'espace E comme points de l'espace des transformations continues de l'intervalle $<0,1>$ en sous-ensembles de E, nous voyons que les classes des parcours fortement équivalents ne sont pas fermées. Dans la suite nous allons voir qu'à ce point de vue la situation est plus simple pour l'équivalence ordinaire.

5. Lemme 1. *Etant donné un sous-ensemble Y de l'intervalle $<0,1>$ tout au plus dénombrable, il existe une fonction continue f non croissante et transformant $<0,1>$ en soi pour laquelle l'ensemble des c-valeurs coïncide avec Y.*

Démonstration. Lorsque l'ensemble Y est fini, la thèse du lemme est évidente. Or nous pouvons admettre que Y est dénombrable. Rangeons les éléments de Y en une suite

(2) $$y_1, y_2, \dots y_n, \dots \quad \text{où} \quad y_m \neq y_n \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

Remarquons qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où 0 et 1 appartiennent à Y. En effet, an admettant que la thèse du lemme subsiste dans ce cas et en posant

$$Y_1 = Y + (0) + (1)$$

nous concluons qu'il existe une fonction continue f_1 non décroissante transformant $<0,1>$ en soi pour laquelle l'ensemble des c-valeurs coïncide avec Y_1.

Soit $<0,a'> = f_1^{-1}(0)$ et $<b',1> = f_1^{-1}(1)$. Désignons par a le nombre 0 lorsque $0 \varepsilon Y$ et le nombre a' lorsque $0 \,\overline{\varepsilon}\, Y$ et par b le nombre 1 lorsque $1 \varepsilon Y$ et le nombre b' lorsque $1 \,\overline{\varepsilon}\, Y$ et posons:

$$f(t) = f_1((b-a)t + a) \quad \text{pour tout} \quad t \varepsilon <0,1>.$$

Il est évident que la fonction f ainsi définie satisfait à la thèse du lemme.

Or, dans la suite nous allons admettre que $0, 1 \varepsilon Y$, à savoir

(3) $$y_1 = 0; \quad y_2 = 1.$$

Pour tout n naturel désignons par P_n l'ensemble de tous les indices k tels que $y_k < y_n$ et posons:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(y_n + \sum_{k \varepsilon P_n} \frac{1}{2^k}\right), \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{1}{2^n} + \sum_{k \varepsilon P_n} \frac{1}{2^k}\right). \tag{5}$$

On a alors

$$a_1 = 0; \quad b_2 = 1 \tag{6}$$

et

$$0 \leqslant a_n < b_n \leqslant \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n}\right] = 1 \tag{7}$$

pour tout $n = 1, 2 \ldots$.

En outre on a

$$b_m \leqslant a_n - \frac{1}{2}(y_n - y_m) \quad \text{lorsque} \quad y_m < y_n, \tag{8}$$

car dans ce cas P_m est contenu dans $P_n - (m)$, donc

$$b_m = \frac{1}{2}\left(y_m + \frac{1}{2^m} + \sum_{k \varepsilon P_m} \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(y_m + \sum_{k \varepsilon P_n} \frac{1}{2^k}\right) =$$

$$= a_n - \frac{1}{2}(y_n - y_m).$$

D'après (7) et (8) tous les intervalles $< a_n, b_n >$ sont disjoints deux-à-deux et contenus dans $< 0, 1 >$. En tenant compte de (6) on en conclut que la fonction f définie dans l'ensemble

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} < a_n, b_n > \subset < 0, 1 >$$

par la formule

$$f(t) = y_n \quad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < a_n, b_n >, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

a Y comme l'ensemble des valeurs. En vertu de (8) cette fonction est non décroissante. Démontrons que f satisfait à la condition

$$|f(t) - f(t')| \leqslant 2\,|t - t'| \quad \text{pour tout couple} \quad t, t' \varepsilon A. \tag{10}$$

Il suffit de prouver cette inégalité en admettant qu'on a $f(t) < f(t')$.

Soit $t \varepsilon < a_m, b_m >$ et $t' \varepsilon < a_n, b_n >$. D'après (8) et (9) on a

$$|t - t'| = t' - t \geqslant a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2}(y_n - y_m) = \frac{1}{2}|f(t) - f(t')|.$$

L'inégalité (10) implique que f est dans A uniformément continue et par conséquent [2]) elle se laisse prolonger d'une façon continue sur la farmeture $\bar{A}$ de A de manière que la fonction prolongée soit continue, non décroissante et qu'elle satisfasse à la condition (10). En la prolongeant d'une façon linéaire sur tout intervalle-composant de l'ensemble $< 0, 1 > - \bar{A}$, on obtient une fonction f continue et non décroissante transformant $< 0, 1 >$ en soi. En vertu de (9), Y est contenu dans l'ensemble de c-valeurs de f. Il ne reste donc qu'à montrer que toute c-valeur de f est contenu dans Y, c. à d. que l'égalité $f(t) = f(t')$ où $t \neq t'$ entraîne que t et t' appartiennent à un des intervalles $< a_n, b_n >$.

Supposons par contre qu'il existe deux nombres différents t et t' qui n'appartiennent à aucun des intervalles $< a_n, b_n >$ et tels qu'on a $f(t) = f(t')$. Lorsqu'il existe un intervalle $< a_n, b_n >$ tel que $< a_n, b_n > \cdot < t_n, t' > \neq 0$, on a $f(t) = f(t') = y$. En tenant compte de (2) on en conclut que tout autre intervalle $< a_m, b_m >$ est disjoint à $< t, t' >$. Il en résulte qu'un des nombres a_n et b_n appartient à l'intérieur de l'intervalle $< t, t' >$ en le divisant en deux intervalles dont l'un ne contient dans son intérieur aucun point de A. En désignant cet intervalle par $< t_0, t_0' >$, on a

$$(11) \qquad f(t_0) = f(t_0'); \quad < t_0, t_0' > \cdot \bar{A} = (t_0) + (t_0').$$

Il en résulte qu'il existe deux suites d'indices $\{m_\nu\}$ et $\{n_\nu\}$ telles que

$$(12) \qquad \begin{aligned} a_{m_\nu} &\geqslant a_{m_{\nu+1}}; \quad \lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu} = t_0', \\ b_{n_\nu} &\leqslant b_{n_{\nu+1}}; \quad \lim_{\nu=\infty} b_{n_\nu} = t_0. \end{aligned}$$

---

[2]) voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin, Springer 1921, p. 136, VII.

On en conclut d'après (4) et (5):

$$a_{m_\nu} - b_{n_\nu} = \frac{1}{2}(y_{m_\nu} - y_{n_\nu}) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k \varepsilon P_{m_\nu}} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n_\nu}} - \sum_{k \varepsilon P_{n_\nu}} \frac{1}{2^k}\right).$$

La fonction f étant continue, on obtient des formules (11) et (12) que

$$y_{m_\nu} = f(a_{m_\nu}) \to f(t_0'); \quad y_{n_\nu} = f(b_{n_\nu}) \to f(t_0)$$

d'où, en tenant compte de (11) on a

(13) $$y_{m_\nu} - y_{n_\nu} \to 0.$$

D'après la définition des ensembles P_n, l'ensemble $P_{m_\nu} - P_{n_\nu}$ coïncide avec l'ensemble des indices k pour lesquels $y_{n_\nu} \leqslant y_k < y_{m_\nu}$ c. à d. (selon (8), (4) et (5)) tels que

$$b_{n_\nu} \leqslant a_k < a_{m_\nu}.$$

On en conclut, d'après (11), que $P_{m_\nu} - P_{n_\nu} = (n_\nu)$, donc

(14) $$\sum_{k \varepsilon P_{m_\nu}} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n_\nu}} = \sum_{k \varepsilon P_{n_\nu}} \frac{1}{2^k}.$$

Les formules (13) et (14) impliquent que $a_{m_\nu} - b_{n_\nu} \to 0$, d'où, en tenant compte des formules (12) il vient $t_0 = t_0'$, contrairement à l'hypothèse $t_0 < t_0'$. La démonstration du lemme est ainsi terminée.

6. Lemme 2. *Etant données deux fonctions f et g continues et non décroissantes, transformant $<0,1>$ en soi, il existe deux fonctions continues non décroissantes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ transformant $<0,1>$ en soi de la manière que les ensembles des c-valeurs pour les fonctions $f\alpha(t)$ et $g\beta(t)$ sont les mêmes.*

Démonstration. Soit X l'ensemble des c-valeurs pour f et Y l'ensemble des c-valeurs pour g. Evidemment les ensembles

$$R = f^{-1}(Y - X); \quad S = g^{-1}(X - Y)$$

sont au plus dénombrables. D'après le lemme 1 il existe des fonctions continues non décroissantes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ transformant

$< 0,1 >$ en soi telles que R est l'ensemble des c-valeurs pour α et S pour β. Il est évident que tout nombre $y \varepsilon X + Y$ est une c-valeur pour $f\alpha(t)$ ainsi que pour $g\beta(t)$. En outre, si $y \,\overline{\varepsilon}\, X + Y$ il n'existe qu'un seul point $x \varepsilon < 0,1 >$ tel que $f(x) = y$. Le point x n'appartient pas à R. Or il n'existe qu'un seul point $t \varepsilon < 0,1 >$ tel que $f(x) = y$. Le point x n'appartient pas à R, et il n'existe qu'un seul point $t \varepsilon < 0,1 >$ tel que $\alpha(t) = x$. Par conséquent y n'est pas une c-valeur pour la fonction $f\alpha(t)$. D'une façon pareille on montre que y n'est pas une c-valeur pour la fonction $g\beta(t)$. La démonstration du lemme 2 est ainsi terminée.

7. **Lemme 3.** *Etant données deux fonctions f et g continues, non décroissantes, transformant $< 0,1 >$ en soi et ayant les mêmes ensembles des c-valeurs, il existe une fonction continue et croissante $\gamma(t)$ transformant $< 0,1 >$ en soi et satisfaisant à la condition*

(15) $$f\gamma(t) = g(t).$$

Démonstration. Rangeons l'ensemble de c-valeurs des fonctions f et g en une suite (en général infinie)

$$y_1, y_2, \dots$$

et posons

$$< a_i, a_i' > = f^{-1}(y_i); \quad < b_i, b_i' > = g^{-1}(y_i).$$

Posons maintenant

(16) $$\gamma(t) = f^{-1} g(t) \quad \text{pour} \quad t \varepsilon < 0,1 > - \sum_i < b_i, b_i' >,$$

en prolongeant cette fonction linéairement sur tout l'intervalle $< b_i, b_i' >$ de la manière que $\gamma(b_i) = a_i$, $\gamma(b_i') = a_i'$.

Afin de prouver que $\gamma(t)$ est une fonction croissante, il suffit de démontrer qu'elle est croissante dans l'ensemble $< 0,1 > - \sum_i < b_i, b_i' >$. Pour deux nombres $t_1 < t_2$ appartenant à cet ensemble, les nombres $g(t_1)$ et $g(t_2)$ ne sont pas des c-valeurs pour f et on a $g(t_1) < g(t_2)$. Par conséquent $\gamma(t_1) = f^{-1} g(t_1) < f^{-1} g(t_2) = \gamma(t_2)$.

Pour prouver que la fonction $\gamma(t)$ est continue, il suffit de montrer qu'elle prend toute valeur $y \varepsilon < 0,1 >$. Dans le cas où $y \varepsilon < a_i, a_i' >$ c'est une conséquence immédiate de la définition de γ dans l'intervalle $< b_i, b_i' >$. Dans le cas où $y \varepsilon < 0,1 > - \sum_i < a_i, a_i' >$ le nombre $f(y)$ n'est pas une c-valeur pour g, donc il existe un nombre $t \varepsilon < 0,1 > - \sum_i < b_i, b_i' >$ tel que $g(t) = f(y)$, d'où $\gamma(t) = f^{-1} g(t) = y$.

Il ne reste qu'à démontrer que γ satisfait à la condition (15). Si $t \varepsilon < 0,1 > - \sum_i < b_i, b_i' >$, alors (15) est une conséquence directe de (16). Si $t \varepsilon < b_i, b_i' >$, alors $g(t) = y_i$ et $\gamma(t) \varepsilon < a_i, a_i' >$, d'où on conclut que $f\gamma(t) = y_i$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

8. **Théorème 1.** *Soient f et g deux fonctions continues et non décroissantes transformant l'intervalle $< 0,1 >$ en soi. Il existe deux fonctions continues non décroissantes φ et ψ transformant l'intervalle $< 0,1 >$ en soi et satisfaisant à la condition*

$$f\varphi(t) = g\psi(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \varepsilon < 0,1 >.$$

Démonstration. D'après le lemme 2 il existe deux fonctions continues et non décroissantes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ transformant $< 0,1 >$ en soi et telles que les ensembles des c-valeurs pour les fonctions $f\alpha(t)$ et $g\beta(t)$ sont les mêmes. En appliquant à ces fonctions le lemme 3, on conclut qu'il existe une fonction continue croissante $\gamma(t)$ telle qu'on a $f\alpha\gamma(t) = g\beta(t)$ pour tout $t \varepsilon < 0,1 >$. Or il suffit de poser $\varphi(t) = \alpha\gamma(t)$ et $\psi(t) = \beta(t)$ afin d'obtenir les fonctions demandées.

9. Soit $x(t)$ un parcours dans l'espace E. Une fonction continue et non décroissante $\alpha(t)$ transformant $< 0,1 >$ en soi sera dite *compatible* avec le parcours $x(t)$, lorsque tout c-intervalle pour α est aussi un c-intervalle pour x.

Lemme 4. *Pour qu'une fonction non décroissante et continue $\alpha(t)$ transformant l'intervalle $< 0,1 >$ en soi soit compatible avec un parcours $x(t)$ il faut et il suffit que $x\alpha^{-1}(t)$ soit un parcours.*

Démonstration. Si α n'est pas compatible avec x, il existe un c-intervalle $< t_0, t_1 >$ pour $\alpha(t)$ qui n'est pas un c-intervalle pour $x(t)$. En posant $t_0' = \alpha(< t_0, t_1 >)$ on en conclut que $x\alpha^{-1}(t_0)$ contient plus qu'un point, donc $x\alpha^{-1}$ n'est pas un parcours.

Si α est compatible avec x, alors pour tout $t \varepsilon < 0, 1 >$ l'ensemble $\alpha^{-1}(t)$ est soit un c-intervalle pour x, soit un ensemble ne contenant qu'un seul point. Dans les deux cas l'ensemble $x\alpha^{-1}(t)$ se reduit à un seul point, c. à d. $x\alpha^{-1}(t)$ est une fonction univoque. Cette fonction est continue, car la continuité de $\alpha(t)$ entraîne [3]) pour $t_n \to t_0$

$$\text{Lim sup}\, \alpha^{-1}(t_n) \subset \alpha^{-1}(t_0)\, ^{4)},$$

d'où, en tenant compte de la continuité de x, on a

$$\text{Lim sup}\, x\alpha^{-1}(t_n) \subset x\alpha^{-1}(t_0). \tag{17}$$

Vu que chacun des ensembles $x\alpha^{-1}(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ne contient qu'un seul point, il résulte de (17) que la suite $\{x\alpha^{-1}(t_n)\}$ converge vers $x\alpha^{-1}(t_0)$. Or la fonction $x\alpha^{-1}(t)$ est continue. La démonstration du lemme 4 est ainsi terminée.

10. Une fonction non décroissante $\alpha(t)$ transformant l'intervalle $< 0, 1 >$ en soi d'une façon continue sera dite *régulateur* d'un parcours $x(t)$, lorsqu'elle est compatible avec ce parcours et le parcours $x\alpha^{-1}(t)$ n'a aucun c-intervalle.

Lemme 5. *Pour qu'une fonction continue non décroissante $\alpha(t)$ transformant l'intervalle $< 0, 1 >$ en soi soit un régulateur d'un parcours $x(t)$ il faut et il suffit que l'ensemble des c-intervalles de $\alpha(t)$ coïncide avec l'ensemble des c-intervalles de $x(t)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Admettons que les ensembles des c-intervalles soient pour $\alpha(t)$ et $x(t)$ les mêmes. On en conclut, selon le lemme 4, que $x\alpha^{-1}(t)$ est un parcours. Pour tout intervalle $J = < t_0, t_1 > \subset < 0, 1 >$ l'ensemble $\alpha^{-1}(J)$ n'est pas un c-intervalle pour $\alpha(t)$. Par conséquent l'ensemble $x\alpha^{-1}(J)$ contient plus qu'un point, donc α n'est pas un régulateur de $x(t)$.

---

[3]) voir C. K u r a t o w s k i, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts,* Fund. Math. 11 (1928), p. 173.

[4]) Etant donnée une suite $\{A_n\}$ des sous-ensembles d'un espace E, on entend par Lim inf A_n l'ensemble de tous les points $p \varepsilon E$ pour lesquels il existe une suite $\{p_n\}$ telle que $p_n \varepsilon A_n$ et $\lim p_n = p$. Un point p appartient à Lim sup A_n, lorsqu'il existe une suite croissante d'indices $\{n_\nu\}$ telle que $p \varepsilon$ Lim inf A_{n_ν}.

Admettons maintenant que $\alpha(t)$ est un régulateur de $x(t)$. Or la fonction α est compatible avec x. En tenant compte du lemme 4 on en conclut que tout c-intervalle pour $\alpha(t)$ est aussi un c-intervalle pour $x(t)$. Reciproquement, si $< t_0, t_1 >$ est un c-intervalle pour $x(t)$, alors $x(< t_0, t_1 >) = x(t_0)$. Supposons que $< t_0, t_1 >$ ne soit pas un c-intervalle pour x. L'ensemble $J' = \alpha(< t_0, t_1 >)$ ne serait pas un intervalle. Pour tout $z \varepsilon J'$ il existerait un $t \varepsilon < t_0, t_1 >$ tel que $z = \alpha(t)$. Or $x\alpha^{-1}(z) = x(t) = x(t_0)$, c.-à-d. pour tout $z \varepsilon J'$ on aurait $x\alpha^{-1}(z) = x(t_0)$. L'ensemble J' serait un c-intervalle pour $x\alpha^{-1}$, ce qui contredit l'hypothèse que $x\alpha^{-1}$ n'a pas des c-intervalles. Le lemme se trouve ainsi démontré.

11. Lemme 6. *Etant donnés deux régulateurs α_1 et α_2 d'un parcours x, les parcours $x\alpha_1^{-1}(t)$ et $x\alpha_2^{-1}(t)$ sont fortement équivalents.*

Démonstration. D'après le lemme 5, les ensembles des c-intervalles des fonctions α_1 et α_2 sont les mêmes. Or. d'après le lemme 4, la fonction α_1 est compatible avec α_2 c. à d. $\gamma(t) = \alpha_2\alpha_1^{-1}(t)$ est une fonction univoque fransformant $< 0, 1 >$ en soi d'une manière continue sans c-intervalles. La fonction $\gamma(t)$, comme non décroissante, et sans c-intervalles, est forté-ment croissante. On a en outre

$$\alpha_2^{-1}\gamma(t) = \alpha_2^{-1}\alpha_2\alpha_1^{-1}(t) \supset \alpha_1^{-1}(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >.$$

En tenant compte de la univocité de $x\alpha_2^{-1}(t)$, on en conclut que

$$x\alpha_2^{-1}\gamma(t) = x\alpha_1^{-1}(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >$$

et par conséquent les parcours $x\alpha_2^{-1}(t)$ et $x\alpha_1^{-1}(t)$ sont fortement équivalents.

12. Lemme 7. *Si f est une fonction continue non dé-croissante transformant l'intervalle $< 0, 1 >$ en soi, $x(t)$ un parcours et $\alpha(t)$ un régulateur du parcours $xf(t)$, il existe un régulateur $\beta(t)$ du parcours $x(t)$ tel que $xf\alpha^{-1}(t) = x\beta^{-1}(t)$ pour tout $t \varepsilon < 0, 1 >$.*

Démonstration. Tout c-intervalle pour f étant un c-intervalle pour xf, ainsi pour α aussi, on conclut d'après le lemme 4 que la formule

$$\beta(t) = \alpha f^{-1}(t)$$

définit une fonction β univoque et continue transformant $< 0, 1 >$ en soi. Il ne reste donc qu'à démontrer que l'ensemble des c-intervalles pour la fonction β coïncide avec l'ensemble des c-intervalles pour le parcours $x(t)$. Si $< t_1, t_2 >$ est un c-intervalle pour $x(t)$, $f^{-1}(< t_1, t_2 >)$ est un c-intervalle pour $xf(t)$, donc aussi pour α. Or $< t_1, t_2 >$ est un c-intervalle pour $\beta = \alpha f^{-1}$. Si, d'autre part, $< t_1, t_2 >$ n'est pas un c-intervalle pour x, il existe alors des nombres t_1', $t_2' \varepsilon < t_1, t_2 >$ tels que $x(t_1') \neq x(t_2')$. Il vient $xf[f^{-1}(t_1')] \neq$ $\neq xf[f^{-1}(t_2')]$. La fonction α étant un régulateur de la fonction xf, on en conclut que $\alpha f^{-1}(t_1') \neq \alpha f^{-1}(t_2')$, c. à d. $\beta(t_1') \neq \beta(t_2')$. Or $< t_1, t_2 >$ n'est pas un c-intervalle pour la fonction β, c. q. f. d.

13. Théorème 2. *Soit α_0 un régulateur d'un parcours $x(t)$ et β_0 un régulateur d'un autre parcours $y(t)$. Pour que les parcours $x(t)$ et $y(t)$ soient équivalents il faut et il suffit que les parcours $x\alpha_0^{-1}(t)$ et $y\beta_0^{-1}(t)$ soient fortement équivalents.*

Démonstration. Admettons que $x(t) \sim y(t)$, c. à d. qu'il existe deux fonctions continues non décroissantes $f(t)$ et $g(t)$ transformant l'intervalle $< 0, 1 >$ en soi de la manière qu'on a

$$xf(t) = yg(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \,\varepsilon < 0, 1 >.$$

Soit $\gamma(t)$ un régulateur pour le parcours $xf(t)$. On a donc

$$xf\gamma^{-1}(t) = yg\gamma^{-1}(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \,\varepsilon < 0, 1 >. \tag{18}$$

D'après le lemme 7, il existe des régulateurs α pour x et β pour y tels que pour tout $t \,\varepsilon < 0, 1 >$ on a

$$xf\gamma^{-1}(t) = x\alpha^{-1}(t),$$

$$yg\gamma^{-1}(t) = y\beta^{-1}(t).$$

En tenant compte de (18) on en conclut

$$x\alpha^{-1}(t) = y\beta^{-1}(t).$$

Mais, d'après le lemme 6 les parcours $x\alpha^{-1}(t)$ et $x\alpha_0^{-1}(t)$ sont fortement équivalents ainsi que les parcours $y\beta^{-1}(t)$ et $y\beta_0^{-1}(t)$. La relation de l'équivalence forte étant transitive (Nr **3**), il en résulte que les parcours $x\alpha_0^{-1}$ et $y\beta_0^{-1}$ sont fortement équivalents.

Admettons maintenant que les parcours $x\alpha_0^{-1}(t)$ et $y\beta_0^{-1}(t)$ soient fortement équivalents. Il existe alors deux fonctions continues croissantes transformant $<0,1>$ en soi telles que

$$x\alpha_0^{-1}\alpha_1(t)=y\beta_0^{-1}\beta_1(t) \qquad \text{pour tout} \quad t\varepsilon<0,1>.$$

La fonction α_0 étant un régulateur pour le parcours x et la fonctions β_0 — pour le parcours y on en conclut:

$$x\alpha_0^{-1}\alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_0(t)=x\alpha_0^{-1}\alpha_0(t)=x(t)$$

$$y\beta_0^{-1}\beta_1\beta_1^{-1}\beta_0(t)=y\beta_0^{-1}\beta_0(t)=y(t).$$

En appliquant le théorème 1 aux fonctions $\alpha_1^{-1}\alpha_0(t)$ et $\beta_1^{-1}\beta_0(t)$ on conclut qu'il existe deux fonctions continues non décroissantes φ et ψ transformant $<0,1>$ en soi telles que

$$\alpha_1^{-1}\alpha_0\varphi(t)=\beta_1^{-1}\beta_0\psi(t) \qquad \text{pour tout} \quad t\varepsilon<0,1>.$$

Il vient

$$x\varphi(t)=x\alpha_0^{-1}\alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_0\varphi(t)=y\beta_0^{-1}\beta_1\beta_1^{-1}\beta_0\psi(t)=y\psi(t),$$

c. à d. les parcours x et y sont équivalents.

La démonstration du théorème est ainsi terminée.

14. Corollaire 1. *Si α est un régulateur d'un parcours x, on a $x\alpha^{-1}\sim x$.*

Pour s'en convaincre il suffit de poser dans l'énoncé du théorème précédent $y(t)=x\alpha^{-1}(t)$; $\alpha_0(t)=\alpha(t)$ et $\beta(t)=t$ pour tout $t\varepsilon<0,1>$.

Corollaire 2. *La relation de l'équivalence est transitive.*

Etant donnés trois parcours x, y, z tels que $x\sim y\sim z$, désignons par α, β et γ leurs régulateurs respectifs. Selon le théorème 2 on a

$$x\alpha^{-1}\simeq y\beta^{-1}\simeq z\gamma^{-1}.$$

La relation de l'équivalence forte étant transitive, il en résulte $x\alpha^{-1}\simeq z\gamma^{-1}$. En vertu du théorème 2 on en conclut que $x\sim z$.

15. Nous allons à présent démontrer que les classes des parcours équivalents sont fermées dans l'espace de tous les parcours dans l'espace E. Nous commançons par la démonstration du suivant

Lemme 8. *Si f est une fonction continue non décroissante transformant l'intervalle $<0,1>$ en soit, il existe pour tout nombre $\varkappa > 1$ une fonction continue croissante φ transformant $<0,1>$ en soi et satisfaisant à la condition*

$$|f\varphi(x+h) - f\varphi(x)| \leqslant \varkappa |h| \qquad \textit{pour tout} \quad x, x+h \,\varepsilon <0,1>.$$

Démonstration. Posons $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} > 0$ et

$$\psi(t) = \lambda t + (1-\lambda)\cdot(1-\lambda+\lambda t)\cdot f(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \,\varepsilon <0,1>.$$

La fonction ψ ainsi définie est continue et croissante et elle transforme l'intervalle $<0,1>$ en soi. Posons

$$\varphi(x) = \psi^{-1}(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \,\varepsilon <0,1>.$$

Soient x et $x+h>x$ deux nombres appartenant à $<0,1>$. Il existe alors dans l'intervalle $<0,1>$ deux nombres t et $t+k$ tels que

$$x = \psi(t) \quad \text{et} \quad x+h = \psi(t+k).$$

Or on a

$$\frac{f\varphi(x+h) - f\varphi(x)}{h} = \frac{f\varphi\psi(t+k) - f\varphi\psi(t)}{\psi(t+k) - \psi(t)} =$$

$$= \frac{f(t+k) - f(t)}{\lambda k + (1-\lambda)\,[(1-\lambda+\lambda t+\lambda k)\, f(t+k) - (1-\lambda+\lambda t)\, f(t)]}.$$

Afin d'achever la démonstration on n'a qu'à prouver que le dernier quotient est $<\varkappa$. Il est ainsi dans le cas où $\mathrm{f}(t+k) = \mathrm{f}(t)$. Dans le cas où $\mathrm{f}(t+k) \neq \mathrm{f}(t)$ on a $\mathrm{f}(t+k) > \mathrm{f}(t)$ et le quotient en question est évidemment plus petit que

$$\frac{\mathrm{f}(t+k) - \mathrm{f}(t)}{(1-\lambda)(1-\lambda+\lambda t+\lambda k)\,[\mathrm{f}(t+k) - \mathrm{f}(t)]} < \frac{1}{1-\lambda^2} = \varkappa.$$

La démonstration du lemme 8 est ainsi terminée.

16. Théorème 3. *Si $\{x_n\}$ est une suite de parcours dans l'espace E uniformément convergente vers un parcours x_0 et telle que $x_n \sim x_1$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, on a $x_0 \sim x_1$.*

Démonstration. Nous pouvons admettre que le parcours x_1 n'a pas de c-intervalles, car en tenant compte du corollaire 1, Nr **14**, on peut remplacer x_1 par $x_1 \cdot \alpha^{-1}$, où α désigne un régulateur du parcours x_1. Pour tout $0 < h < 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1 - h$ le diamètre de l'ensemble $x_1(<t, t+h)$ dépend d'une manière continue du paramètre t en restant positif. Or la borne inférieure $\varepsilon(h)$ de ces diamètres est aussi positive.

Le parcours x_n étant équivalent à x_1, il existe des fonctions continues non décroissantes $\alpha_n(t)$ et $\beta_n(t)$ telles que

$$x_1 \alpha_n(t) = x_n \beta_n(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \varepsilon < 0, 1 >. \tag{19}$$

Evidemment les fonctions α_n et β_n peuvent être remplacées, sans detruire la dernière relation, par les fonctions de la forme $\alpha_n \varphi_n(t)$ et $\beta_n \varphi_n(t)$, où φ_n est une fonction continue croissante et transformant $< 0, 1 >$ en soi, d'ailleurs arbitraire. En tenant compte du lemme 8, la fonction φ_n peut être trouvée de façon que

$$|\beta_n \varphi_n(t+h) - \beta_n \varphi_n(t)| \leqslant 2|h| \qquad \text{pour tout} \quad t, t+h \,\varepsilon < 0, 1 >.$$

Or on peut supposer que les fonctions α_n et β_n satisfaisant à la condition (19) soient choisies de façon qu'on ait

$$|\beta_n(t+h) - \beta_n(t)| \leqslant 2|h| \qquad \text{pour tout} \quad t, t+h \,\varepsilon < 0, 1 >.$$

Les fonctions β_n sont uniformément continues. Il en résulte, d'après le théorème connu [5]), qu'on peut extraire de la suite $\{\beta_n\}$ une suite $\{\beta_{n_k}\}$ uniformément convergente vers une fonction $\beta_0(t)$.

Si les fonctions α_{n_k} n'étaient pas uniformément continues, il existerait un nombre $\lambda > 0$ tel que pour tout $\mu > 0$ il existerait des nombres k, t et h tels que $0 < h < \mu$ et que

$$\alpha_{n_k}(t+h) - \alpha_{n_k}(t) \geqslant \lambda.$$

---

[5]) voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin, Springer 1921, p. 304, V.

On en conclut que le diamètre de l'ensemble

$$x_1(<\alpha_{n_k}(t),\ \alpha_{n_k}(t+h)>)=x_1\alpha_{n_k}(<t,t+h>)=$$
$$=x_{n_k}\beta_{n_k}(<t,t+h>)$$

est $\geqslant\varepsilon(\lambda)$. En tenant compte de l'uniforme convergence de $x_{n_k}\beta_{n_k}$ vers $x_0\beta_0$, on conclut que le diamètre de l'ensemble $x_0\beta_0(<t,t+h>)$ est $\geqslant\varepsilon(\lambda)$.

D'autre part, le nombre $\mu>0$ jusqu'à présent arbitraire, peut être choisi de façon que l'inégalité $0<h<\mu$ entraîne que le diamètre de l'ensemble $x_0\beta_0(<t,t+h>)$ soit $\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon(\lambda)$. Cette contradiction signifie que la supposition que les fonctions α_{n_k} ne sont pas uniformément continues est impossible. Or l'application à la suite α_{n_k} du théorème precité [5]) nous permet d'extraire de cette suite une suite $\{\alpha_{n_{k_\nu}}\}$ uniformément convergente vers une fonction $\alpha_0(t)$. En tenant compte de l'égalité (19) on en conclut que

$$x_1\alpha_0(t)=x_0\beta_0(t)\qquad \text{pour tout}\quad t\,\varepsilon<0,1>.$$

Il s'ensuit que les parcours x_1 et x_0 sont équivalents, c. q. f. d.

Karol Borsuk

O kinematycznym pojęciu krzywej

Streszczenie

Przez *przebieg* w przestrzeni (topologicznej) E rozumieć będziemy funkcję ciągłą $x(t)$ o argumentach rzeczywistych $t\,\varepsilon<0,1>$ i wartościach należących do E. Dwa przebiegi $x(t)$ i $y(t)$ są *równoważne* (oznaczenie: $x\sim y$), jeżeli istnieją funkcje ciągłe $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ niemalejące, przekształcające przedział $<0,1>$ na siebie i takie, że

$$x[\alpha(t)]=y[\beta(t)]\qquad \text{dla każdego}\quad t\,\varepsilon<0,1>.$$

Powiemy natomiast że przebiegi $x(t)$ i $y(t)$ są *mocno równoważne*, jeżeli w powyższej definicji założenie że funkcje $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ są niemalejące zastąpimy przez mocniejsze założenie, że funkcje te są rosnące.

Zarówno stosunek równoważności, jak i stosunek mocnej równoważności są zwrotne, symetryczne i przechodnie. Każdy więc z tych stosunków stanowi podstawę do rozbicia ogółu przebiegów w danej przestrzeni E na rozłączne klasy przebiegów równoważnych resp. mocno równoważnych. Nazywając klasy te *krzywymi* — otrzymamy dwa różne pojęcia krzywej. Traktując klasy te jako podzbiory przestrzeni funkcyjnej $E^{\langle 0, 1 \rangle}$ stwierdzamy, że klasy przebiegów równoważnych są w tej przestrzeni zamknięte, natomiast klasy przebiegów mocno równoważnych naogół nie są zamknięte.

Posiedzenie

z dnia 30 kwietnia 1948 r.

L. Sosnowski.

Badania nad zjawiskami fotoelektrycznymi w półprzewodnikach

Ukazało się jako osobna publikacja.

P o s i e d z e n i e

z dnia 28 maja 1948 r.

S. B a n a c h †

O funkcjach niezależnych

Przedstawił czł. E. Marczewski.

Streszczenie

Jednym z najprostszym przykładów funkcyj niezależnych (w sensie stochastycznym) są funkcje różnych zmiennych:

$$\Phi^*(x, y) = \Phi(x), \qquad \Psi^*(x, y) = \Psi(y),$$

rozważane w kwadracie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Przedstawiona praca pośmiertna B a n a c h a [1]) zajmuje się zagadnieniem, jak obszerna jest klasa par funkcyj niezależnych, które dadzą się otrzymać z funkcyj różnych zmiennych przez podstawienia zachowujące miarę. Okazuje się, że jest to możliwe gdy dystrybuanty danych funkcyj niezależnych 1^0 są ciągłe lub 2^0 przyjmują najwyżej przeliczalny zbiór wartości.

S. B a n a c h †

Sur les fonctions indépendantes

Présenté par E. Marczewski le 28 mai 1948

R é s u m é

Un des exemples les plus simples des fonctions indépendantes au sens stochastique est celui des fonctions de variables différentes:

$$\Phi^*(x, y) = \Phi(x), \qquad \Psi^*(x, y) = \Psi(y),$$

considérées dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Le travail présenté de S. Banach [1]) est consacré au problème combien est vaste la classe des couples de fonctions indépendantes qui se laissent former des fonctions de variables différentes au moyen des substitutions satisfaisant à certaines conditions.

H. Helson i E. Marczewski

O różnicy symetrycznej zbiorów

Komunikat

Streszczenie

Różnica symetryczna zbiorów, którą oznacza się w tej pracy jako $A \dot{-} B$, określona jest wzorem

$$A \dot{-} B = (A - B) + (B - A) = A + B - AB.$$

Działanie to, nieuwzględniane naogół w klasycznych podręcznikach teorii mnogości, traktowane jest w wielu pracach z ostatnich lat kilkunastu.

Przy pomocy tego pojęcia zdefiniować można operacje quasi-analityczne w sensie Kantorowicza i Livensona; z łatwością udowadnia się mianowicie następujące

Twierdzenie 1. *Na to by operacja $E = \Phi(E_1, E_2, \ldots)$ była quasi-analityczną potrzeba i wystarcza by*

$$\Phi(A_1, A_2, \ldots) \dot{-} \Phi(B_1, B_2, \ldots) \subset \sum_n (A_n \dot{-} B_n)$$

dla każdych ciągów zbiorów $\{A_n\}$ i $\{B_n\}$.

---

1) S. Banach, *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes.* Rédigé d'après une notice posthume par S. Hartman et E. Marczewski. Colloquium Mathematicum I, 2 (1948), p. 109—121.

Różnica symetryczna jest działaniem grupowym. S. Ulam postawił w swoim czasie zagadnienie, czy istnieją inne działania na zbiorach (oczywiście wśród operacyj spełniających jakieś warunki regularności) o tej samej własności. Przy pomocy twierdzenia 1 udowadnia się

Twierdzenie 2. *Różnica symetryczna jest jedynym działaniem grupowym (dla którego zbiór pusty jest jednością) wśród operacyj quasi-analitycznych).*

Przekształcenie $\varphi(x)$ zbioru X w siebie nazywać będziemy *prostym*, jeśli polega ono na zamianie dwóch elementów:

$$\varphi(a)=b \qquad \varphi(b)=a \qquad \varphi(p)=p \quad \text{gdy } a\neq p\neq b.$$

Drugim przyczynkiem do zagadnienia Ulama jest

Twierdzenie 3. *Różnica symetryczna jest jedynym działaniem grupowym (dla którego zbiór pusty jest jednością) na zbiorach: $E=E_1 \circ E_2$, które jest niezmiennicze ze względu na przekształcenia proste i spełnia warunek*

$$(^*) \qquad E_1 \circ E_2 \subset E_1 + E_2 .$$

Można wykazać, że warunek $(^*)$ jest istotny.

Dowody powyższych twierdzeń ukażą się w innym czasopiśmie [1]).

H. Helson i E. Marczewski

On the symmetric difference of sets

Presented May 28, 1948.

Summary

The authors prove that, in some classes of operations, the symmetric difference is the only group operation [1]).

[1]) E. Marczewski, *Concerning the symmetric difference,* Colloquium Mathematicum I, 3 (1948); H. Helson, *On the symmetric difference of sets as a group operation,* ibidem.

Zygmunt Zahorski

Sur l'ensemble des racines de l'équation $W(x)=f(x)$.

Mémoire présenté par M. K. Kuratowski à la séance du 28 mai 1948.

Dans le volume **34** de Fundamenta Mathematicae, p. 244—245, j'ai posé plusieurs problèmes et j'ai présumé que la question 6 admet une réponse positive. J'en donne une démonstration dans la note présente. Je démontre même plus, à savoir:

I. *Si $a(x)$ est une fonction continue possédant en chaque point un nombre dérivé égal à $+\infty$ et un autre égal à $-\infty$, et si $f(x)$ est une fonction dont tous les nombres dérivés sont en chaque point finis et telle que*

$$[a(u)-f(u)]\,[a(v)-f(v)]<0,$$

alors l'ensemble de racines de l'équation $a(x)=f(x)$ dans l'intervalle (u,v) est de puissance du continu.

En particulier, $a(x)$ peut être la fonction continue et non-dérivable $W(x)$ de Weierstrass et $f(x)$ une fonction analytique quelconque dans l'intervalle (u,v).

Puisque la fonction $a(x)-f(x)$ possède en chaque point un nombre dérivé égal à $+\infty$ et un autre égal à $-\infty$, le théorème I résulte du théorème suivant:

II. *Si $b(x)$ est une fonction continue possédant en chaque point un nombre dérivé positif et un autre négatif et si $b(c)\,b(d)<0$, alors l'ensemble des racines de l'équation $b(x)=0$ dans l'intervalle (c,d) est de puissance du continu.*

Démonstration: Adoptons la définition suivante: le point x_0 sera appelé *point de croisement* de la fonction $b(x)$, si dans tout voisinage $(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$ il existe un point x_+ et un autre x_- tels que $b(x_+)>0$ et $b(x_-)<0$. Evidemment $b(x_0)=0$, lorsque $b(x)$ est continue. Il résulte de la définition que l'ensemble de tous les points de croisement est fermé.

(1) *Si $b(c)\,b(d)<0$, alors il existe un point de croisement dans l'intervalle (c,d).*

En effet, soit par exemple $b(c) < 0$ et $b(d) > 0$. Puisque, dans les hypothèses du théorème II, la courbe $y = b(x)$ ne peut pas contenir un segment de l'axe x, il est clair que la borne supérieure des points u tels que, pour tout $x \epsilon [a, u]$, on a $b(x) \leqslant 0$, est un point de croisement. Dans le cas où $b(c) > 0$ et $b(d) < 0$ la démonstration est analogue.

(2) *Dans les hypothèses du théorème II, les points x_+ et x_- se trouvent dans tout voisinage unilatéral du point de croisement x_0, c.-à-d. dans $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, ou bien dans $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.*

Supposons, en effet, qu'un voisinage gauche $(x_0 - v, x_0)$ ne contienne par exemple aucun point x_+, c.-à-d. $b(x) \leqslant 0$ dans $(x_0 - v, x_0)$. On aurait alors $\overline{b}^-(x_0) \geqslant \underline{b}^-(x_0) \geqslant 0$, car $b(x_0) = 0$. Mais puisque, par hypothèse, un des nombres dérivés est négatif, donc $\underline{b}^+(x_0) < 0$. Il existe par conséquent une suite décroissante $\xi_n \to x_0$, telle que $b(\xi_n) < 0$. Si un voisinage droit $(x_0, x_0 + u)$ ne contenait aucun point x_+, le voisinage $(x - v, x + u)$ ne contiendrait aucun point x_+, ce qui est impossible d'après la définition du point de croisement. Nous voyons donc que tout voisinage droit $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ contient des points $x_+ = \eta$ et $x_- = \xi$.

(3) *L'ensemble des points de croisement est dense en soi.*

En effet, x_0 étant un point de croisement, il résulte de (2) qu'il existe deux suites $\xi_n \to x_0$ et $\eta_n \to x_0$ telles que:

$$\xi_1 > \eta_1 > \xi_2 > \eta_2 > \cdots > x_0 \quad \text{ou bien} \quad x_0 > \cdots > \eta_2 > \xi_2 > \eta_1 > \xi_1$$

et $b(\xi_n)\, b(\eta_n) < 0$. Or, d'après (1), l'intervalle (ξ_n, η_n) contient un point de croisement x_n, donc $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, c. q. f. d.

Le théorème II est une conséquence immédiate de (1) et (3), car l'ensemble des points de croisement de la fonction $b(x)$ dans $[c, d]$ étant fermé, dense en soi, non-vide (d'après (1)) et contenu dans l'ensemble de racines de l'équation $b(x) = 0$, ce dernier ensemble contient un sous-ensemble parfait et non-vide et par conséquent est de puissance du continu.

Corollaire. *Pour tout $a \epsilon (\min W(x), \max W(x))$ l'ensemble des racines de l'équation $W(x) = a$ est de puissance du continu.*

M. S. Minakshisundaram a démontré ce résultat pour tout a de cet intervalle à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable (*On the roots of a continuous non-differentiable function*. Journal of the Indian Math. Society, N. S. **4**, p. 31—33 (1940)). L'ensemble $\{c x + b = a(x)\}$ étant de puissance du continu pour chaque fonction $a x + b$, où $a \neq 0$ et $a(x) \equiv W(x)$, la construction de la fonction $a(x)$ (MM. Erdös, Gillis) est superflue.

Zygmunt Zahorski

O zbiorze pierwiastków równania $W(x) = f(x)$.

Przedstawił czł. K. Kuratowski dn. 28 maja 1948 r.

Streszczenie

Udowadniam, że gdy funkcja ciągła $a(x)$ ma w każdym punkcie jedną pochodną Diniego równą $+\infty$, a inną równą $-\infty$, zaś $f(x)$ ma wszędzie pochodne Diniego skończone, oraz $a(x) - f(x)$ ma w punktach $x = u$, $x = v$ wartości o przeciwnych znakach, to równanie $a(x) = f(x)$ ma w przedziale (u, v) zbiór rozwiązań mocy continuum. Wystarczy wykazać, że dla funkcji $b(x) = a(x) - f(x)$ zbiór rozwiązań równania $b(x) = 0$ jest mocy continuum w (u, v) przy słabszych założeniach — że funkcja ciągła $b(x)$ ma w każdym punkcie jedną pochodną Diniego dodatnią i jedną ujemną. Wykazuję to w ten sposób, że niektóre pierwiastki równania $b(x) = 0$ nazywam punktami krzyżowania funkcji $b(x)$, mianowicie takie punkty x_0, że $b(x)$ w każdym ich otoczeniu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ przyjmuje wartości dodatnie i ujemne. Z rozważań zupełnie elementarnych, opartych wprost na definicji punktu krzyżowania, pochodnej Diniego i podstawowych, od dawna znanych własnościach funkcji ciągłej, wynika, że zbiór punktów krzyżowania jest doskonały i nie pusty. Ponieważ w szczególności można przyjąć zamiast $a(x)$ funkcję ciągłą bez pochodnej Weierstrassa, otrzymuję wynik o tej funkcji znacznie mocniejszy od opublikowanego w r. 1940 wyniku P. S. Minakshisundaram. Z twierdzenia I wynika że skomplikowane konstrukcje PP. Erdösa i Gillisa są zbyteczne.

P o s i e d z e n i e

z dnia 25 czerwca 1948 r.

W. S i e r p i ń s k i.

Równoważność przez skończony rozkład a miara zewnętrzna zbiorów.

(Ukaże się w *Fundamenta Mathematicae* t. 37).

Equivalence des ensembles par décomposition finie et la mesure extérieure des ensembles.

(Paraîtra dans le journal *Fundamenta Mathematicae* vol. 37).

Posiedzenie

z dnia 25 czerwca 1948 r.

W. Sierpiński

L'opération du crible et les fonctions analytiques d'une suite infinie d'ensembles

Mémoire présenté à la séance du 25 juin 1948

Il y a deux opérations importantes permettant d'obtenir différentes familles d'ensembles linéaires en partant d'ensembles fermés plans, respectivement linéaires: c'est celle du crible généralisé et celle au moyen de fonctions analytiques d'une suite infinie d'ensembles. Le but de cette Note est de démontrer que ces deux opérations sont équivalentes, c.-à-d. que toute famille d'ensembles linéaires qui peut être obtenue par l'opération du crible généralisé en partant des ensembles fermés plans peut être aussi obtenue au moyen d'une fonction analytique d'une suite infinie d'ensembles linéaires fermés, et inversement.

Je commencerai par préciser les notions de fonction analytique et du crible.

Une fonction $f(E_1, E_2, ...)$ faisant correspondre à toute suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, ...$ un ensemble linéaire $E = f(E_1, E_2, ...)$ (bien déterminé par cette suite) est dite, d'après M. M. Kantorovitch et Livenson [1]) *fonction analytique* si, $E_1, E_2, ...$ et $H_1, H_2, ...$ étant deux suites infinies d'ensembles linéaires et a et b deux nombres réels, tels que

(1) $$a \epsilon f(E_1, E_2, ...) \quad \text{et} \quad b \text{ non } \epsilon f(H_1, H_2, ...),$$

[1]) *Fund. Math.* 18, p. 224—225.

il existe toujours au moins un nombre naturel k, tel qu'on a ou bien

(2) $$a \epsilon E_k \quad \text{et} \quad b \text{ non } \epsilon H_k,$$

ou bien

(3) $$a \text{ non } \epsilon E_k \quad \text{et} \quad b \epsilon H_k.$$

F étant la famille de tous les ensembles linéaires fermés et f une fonction analytique donnée d'une suite infinie d'ensembles linéaires, désignons par F_f la famille de tous les ensembles $f(E_1, E_2, \ldots)$, où $E_n \epsilon F$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

Q étant un ensemble plan donné et π une propriété donnée dont les ensembles linéaires peuvent jouir ou ne pas jouir, nous désignerons par $\Gamma_\pi(Q)$ l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x = a$ rencontre l'ensemble plan Q en un ensemble linéaire jouissant de la propriété π, et nous dirons que l'ensemble $\Gamma_\pi(Q)$ est *criblé* au moyen de l'ensemble Q et de la propriété π [1]). Φ étant la famille de tous les ensembles fermés plans et π une propriété donnée d'ensembles linéaires, désignons par Φ_π la famille de tous les ensembles $\Gamma_\pi(Q)$, où $Q \epsilon \Phi$.

Je démontrerai les deux théorèmes suivants [2]):

Théorème 1. *Quelle que soit la fonction analytique f d'une suite infinie d'ensembles linéaires, il existe une propriété π d'ensembles linéaires, telle que*

(4) $$\Phi_\pi = F_f.$$

Théorème 2. *Quelle que soit la propriété π d'ensembles linéaires, il existe une fonction analytique f d'une suite infinie d'ensembles linéaires, telle qu'on a la formule* (4).

Démonstration du théorème 1.

Soit f une fonction analytique donnée d'une suite infinie d'ensembles linéaires. Nous définirons la propriété π d'ensembles linéaires comme il suit.

---

[1]) Cf. N. Lusin Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris 1930, p. 179; aussi *Fund. Math.* **10**, p. 20.

[2]) Cf. M. Kondô *Journ. of the Fac. Sc. Hokkaido Imp. Univ.* Ser. I vol. 7 (1938), p. 10, Théorème 4.

Convenons de dire que l'ensemble linéaire L jouit de la propriété π, si, $H_1, H_2, \dots$ étant une suite infinie quelconque d'ensembles linéaires, les formules

(5) $b \in H_n$ pour $n \in L$ et $b \operatorname{non} \in H_n$ pour $n \operatorname{non} \in L$

entraînent la formule

(6) $$b \in f(H_1, H_2, \dots).$$

Je dis qu'on a la formule (4).

1. Soit $E \in F_f$. Il existe donc une suite infinie $E_1, E_2, \dots$ d'ensembles linéaires fermés, telle que

(7) $$E = f(E_1, E_2, \dots).$$

Soit

(8) $$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x,y}{E} [x \in E_n, y = n]$$

— ce sera évidemment un ensemble plan fermé.

Je dis que

(9) $$\Gamma_\pi(Q) = E.$$

À ce but il suffit évidemment de démontrer que, a étant un nombre réel donné, l'intersection L de l'ensemble Q par la droite $x = a$ jouit de la propriété π ou non suivant que $a \in E$ ou $a \operatorname{non} \in E$.

D'après (8) on a, comme on voit sans peine:

$$L = \underset{y}{E} [(a, y) \in Q] = \underset{n}{E} [a \in E_n],$$

c.-à-d. on a

(10) $a \in E_n$ pour $n \in L$ et $a \operatorname{non} \in L$ pour $n \operatorname{non} \in L$.

Soit maintenant $a \in E$ et soit $H_1, H_2, \dots$ une suite infinie quelconque d'ensembles linéaires et b un nombre réel pour lequel on a les formules (5).

Je dis qu'on a la formule (6). Admettons, et effet le contraire, donc que $b \operatorname{non} \in f(H_1, H_1, \dots)$. Comme, d'après $a \in E$ et (7), on a $a \in f(E_1, E_2, \dots)$, on a les formules (1). La fonction f étant analytique, il existe un nombre naturel k, tel qu'on a ou bien les formules (2), ou bien les formules (3).

Si l'on a les formules (2), on trouve, d'après (10), $k \epsilon L$ et, d'après (5), k non ϵL, ce qui est impossible.

Si l'on a les formules (3), on trouve, d'après (10), k non ϵL et, d'après (5), $k \epsilon L$, ce qui est aussi impossible. La formule (6) est donc vraie.

Il est ainsi établi que les formules (5) entraînent la formule (6), ce qui prouve que l'ensemble L jouit de la propriété π.

Suppossons maintenant que a non ϵE. D'après (7) on a donc a non $\epsilon f(E_1, E_2, \ldots)$. Vu qu'on a en même temps les formules (10) et vu la définition de la propriété π, on conclut que l'ensemble L ne jouit pas de la propriété π.

La formule (9) est ainsi établie. L'ensemble plan Q étant fermé, la formule (9) prouve que $E \epsilon \Phi_\pi$.

Il est ainsi démontré que la formule $E \epsilon F_f$ entraîne $E \epsilon \Phi_\pi$, c.-à-d. que

(11) $$F_f \subset \Phi_\pi.$$

2. Soit $B \epsilon \Phi_\pi$. Il existe donc un ensemble plan fermé Q, tel qu'on a la formule (9). Posons

(12) $$E_n = \underset{x}{E}\,[(x, n) \epsilon Q], \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

— ce seront évidemment des ensembles linéaires fermés. Je dis qu'on a la formule (7).

Soit $a \epsilon E$. D'après (9) on a donc $a \epsilon \Gamma_\pi(Q)$, c.-à-d. l'intersection L de l'ensemble plan Q par la droite $x = a$ est un ensemble linéaire jouissant de la propriété π. Soit $H_1, H_2, \ldots$ une suite infinie quelconque d'ensembles linéaires. Vu la définition de la propriété π, les formules (5) entraînent donc la formule (6). Soit n un nombre naturel. Si $n \epsilon L$, on a (vu la définition de L) $(a, n) \epsilon Q$, donc, d'après (12), $a \epsilon E_n$, et, si n non ϵL, on a (a, n) non ϵQ, donc, d'après (12), a non ϵE_n. On a donc les formules (10). L'ensemble L jouissant de la propriété π, ces formules entraînent (vu la défintion de la propriété π) la formule $a \epsilon f(E_1, E_2, \ldots)$.

Il est ainsi établi que la formule $a \epsilon E$ entraîne $a \epsilon f(E_1, E_2, \ldots)$: on a donc

(13) $$E \subset f(E_1, E_2, \ldots).$$

Soit maintenant $a \in f(E_1, E_2, ...)$. Soit L l'intersection de Q par la droite $x = a$ et soit $H_1, H_2, ...$ une suite infinie quelconque d'ensembles linéaires et b un nombre réel, tel qu'on a les formules (5).

Si l'on avait b non $\in f(H_1, H_2, ...)$, alors, la fonction f étant analytique et vu que $a \in f(E_1, E_2, ...)$, il existerait un nombre naturel k pour lequel on a ou bien les formules (2) ou bien les formules (3).

Si l'on a les formules (2), on a, d'après (12), $(a, k) \in Q$, donc $k \in L$ et, d'après (5) k non $\in L$, ce qui est impossible. Si l'on a les formules (3), on a, d'après (12), (a, k) non $\in Q$, donc k non $\in L$, et, d'après (5), $k \in L$, ce qui est aussi impossible.

On a donc la formule (6). Il est ainsi établi que les formules (5) entraînent la formule (6), ce qui prouve que l'ensemble L jouit de la propriété π.

On a donc $a \in \Gamma_\pi(Q)$, donc, d'après (9), $a \in E$.

Nous avons ainsi démontré que la formule $a \in f(E_1, E_2, ...)$ entraîne la formule $a \in E$, c.-à-d. que

(14) $$f(E_1, E_2, ...) \subset E.$$

Les formules (13) et (14) donnent la formule (7) qui est ainsi démontrée. Les ensembles $E_1, E_2, ...$ étant fermés, la formule (7) prouve que $E \in F_f$. Nous avons ainsi démontré que

(15) $$\Phi_\pi \subset F_f.$$

Les formules (11) et (15) donnent la formule (4).

La théoréme 1 est ainsi démontré.

Démonstration du théorème 2. Soit

(16) $$\delta_1, \delta_2, \delta_3, ...$$

une suite infinie formée de tous les intervalles fermés aux extrémités rationnelles. y étant un nombre réel, soient

(17) $$\delta_{m_1(y)}, \delta_{m_2(y)}, ...$$

les intervalles consécutifs de la suite (16) qui contiennent à son intérieur y. On aura évidemment

$$(18) \qquad \{y\} = \prod_{i=1}^{\infty} \delta_{m_i(y)},$$

où $\{y\}$ désigne l'ensemble formé d'un seul nombre y.

a étant un nombre réel donné et $E_1, E_2, \ldots$ une suite infinie d'ensembles linéaires, désignons par $M(a; E_1, E_2, \ldots)$ l'ensemble de tous les nombres réels y, tels que

$$a \in E_{m_i(y)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Soit maintenant π une propriété donnée d'ensembles linéaires. Nous définirons la fonction $f(E_1, E_2, \ldots)$ d'une suite infinie d'ensembles linéaires comme il suit: $f(E_1, E_2, \ldots)$ sera, par définition, l'ensemble de tous les nombres réels a, pour lesquels l'ensemble (linéaire) $M(a; E_1, E_2, \ldots)$ jouit de la propriété π.

Je dis que f est une fonction analytique.

Soient, en effet, $E_1, E_2, \ldots$ et $H_1, H_2, \ldots$ deux suites infinies d'ensembles linéaires et soient a et b deux nombres réels pour lesquels on a les formules (1). S'il n'existe aucun nombre naturel k pour lequel on a soit la formule (2), soit la formule (3), les formules

$$a \in E_k \quad \text{et} \quad b \in H_k$$

seraient équivalentes pour tout k naturel. Donc, pour tout y réel et tout nombre naturel i, les formules

$$a \in E_{m_i(y)} \quad \text{et} \quad b \in H_{m_i(y)}$$

seraient équivalentes et on aurait, comme on voit sans peine,

$$M(a; E_1, E_2, \ldots) = M(b; H_1, H_2, \ldots),$$

ce qui est impossible, le premier de ces ensembles jouissant de la propriété π, puisque, d'après (1), $a \in f(E_1, E_2, \ldots)$ (et vu la définition de la fonction f) et le second ne jouissant pas de la propriété π, puisque, d'après (1), $b \operatorname{non} \in f(H_1, H_2, \ldots)$.

Il existe donc un nombre naturel k pour lequel au moins une des formules (2) et (3) est vraie. La fonction f est donc analytique.

Je dis qu'on a l'égalité (4).

1. Soit $E \epsilon \Phi_\pi$. Il existe donc un ensemble plan fermé Q, tel qu'on a la formule (9). n étant un nombre naturel donné, soit E_n l'ensemble de tous les nombres réels a pour lesquels il existe au moins un nombre réel y, tel que

$$y \epsilon \delta_n \quad \text{et} \quad (a, y) \epsilon Q.$$

L'ensemble Q étant fermé, on voit sans peine que les ensembles E_n sont fermés pour $n = 1, 2, \dots$.

Je dis qu'on a la formule (7).

Soit a un nombre réel donné et soit L l'intersection de l'ensemble plan Q par la droite $x = a$. Je dis que

$$L = M(a; E_1, E_2, \dots). \tag{19}$$

Soit, en effet, $y \epsilon L$. On a donc $(a, y) \epsilon Q$. Soit i un nombre naturel donné: on a $y \epsilon \delta_{m_i(y)}$ et, comme $(a, y) \epsilon Q$, on trouve, d'après la définition de E_n, $a \epsilon E_{m_i(y)}$. On a donc $a \epsilon E_{m_i(y)}$ pour $i = 1, 2, \dots$, d'où, vu la définition de l'ensemble $M(a; E_1, E_2, \dots)$, $y \epsilon M(a; E_1, E_2, \dots)$.

Soit, d'autre part, $y \epsilon M(a; E_1, E_2, \dots)$: on a donc $a \epsilon E_{m_i(y)}$ pour $i = 1, 2, \dots$. Vu la définition de l'ensemble $E_{m_i(y)}$, il existe donc pour tout i naturel un nombre réel y_i, tel que

$$y_i \epsilon \delta_{m_i(y)} \quad \text{et} \quad (a, y_i) \epsilon Q.$$

Or, vu la définition de la suite (17), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre naturel i, tel que la longueur de l'intervalle $\delta_{m_i(y)}$ est $< \varepsilon$: vu que $y_i \epsilon \delta_{m_i(y)}$ et $y \epsilon \delta_{m_i(y)}$, on trouve donc, pour un tel i, $|y_i - y| < \varepsilon$. Il existe ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ un indice i, tel que $|y_i - y| < \varepsilon$ et $(a, y_i) \epsilon Q$: l'ensemble Q étant fermé, il en résulte que $(a, y) \epsilon Q$, d'où $y \epsilon L$.

La formule (19) est ainsi établie.

Soit maintenant $a \epsilon E$. D'après (9) l'ensemble L jouit de la propriété π: il résulte donc de (19) et de la définition de la fonction f que $a \epsilon f(E_1, E_2, \dots)$. On a ainsi la formule (13).

Or, soit $a \epsilon f(E_1, E_2, \dots)$. D'après la définition de la fonction f, l'ensemble $M(a; E_1, E_2, \dots)$ jouit donc de la propriété π, et il résulte de (19) que $a \epsilon \Gamma_\pi(Q)$, donc, d'après (9), que $a \epsilon E$. On a ainsi la formule (14).

Les formules (13) et (14) donnent la formule (7) qui est ainsi démontrée. Les ensembles $E_1, E_2, \ldots$ étant fermés, la formule (7) prouve que $E \epsilon F_f$.

Nous avons ainsi démontré qu'on a la formule (15).

2. Soit $E \epsilon F_f$. Il existe donc une suite infinie d'ensembles linéaires fermés $E_1, E_2, \ldots$, telle qu'on a la formule (7).

n étant un nombre naturel donné, posons

$$Q_n = \underset{x,y}{E} [x = E_n, y \epsilon \delta_n] \tag{20}$$

et

$$Q = \sum_y Q_{m_1(y)} Q_{m_2(y)} \ldots, \tag{21}$$

la sommation s'étandant à tous les nombres réels y.

Je dis que Q est un ensemble (plan) fermé.

Soit, en effet, $(x_0, y_0) \epsilon Q'$: il existe donc une suite infinie de points (x_k, y_k) $(k = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$(x_k, y_k) \epsilon Q \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

et

$$x_0 = \lim_{k=\infty} x_k, \quad y_0 = \lim_{k=\infty} y_k. \tag{23}$$

Soit i un nombre naturel donné et ε un nombre positif quelconque. D'après la définition de la suite (17), le nombre y_0 est intérieur à l'intervalle $\delta_{m_i(y_0)}$: il existe donc, d'après (23), un nombre naturel k, tel que

$$|x_k - x_0| < \varepsilon \tag{24}$$

et que y_k est intérieur à l'intervalle $\delta_{m_i(y_0)}$.

Or, d'après (22) et (21), il existe un nombre réel y, tel que

$$(x_k, y_k) \epsilon Q_{m_j(y)} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

d'où, d'après (20):

$$x_k \epsilon E_{m_j(y)} \quad \text{et} \quad y_k \epsilon \delta_{m_j(y)} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

donc, d'après (18), $y_k \epsilon \{y\}$, ce qui donne $y_k = y$.

Or, y_k étant intérieur à l'intervalle $\delta_{m_i(y_0)}$, il existe (vu la définition de la suite (17)) un nombre naturel j, tel que $m_j(y_k) = m_i(y_0)$. D'après $y_k = y$ et d'après (25), on a donc

$$x_k \epsilon E_{m_i(y_0)}.$$

D'après (24) la distance de x_0 à l'ensemble $E_{m_i(y_0)}$ est donc $< \varepsilon$: le nombre positif ε pouvant être quelconque et l'ensemble $E_{m_i(y_0)}$ étant fermé, cela donne

$$x_0 \epsilon E_{m_i(y_0)}. \tag{26}$$

La formule (26) étant démontrée quel que soit le nombre naturel i, et vu que (d'après la définition de la suite (17)), $y_0 \epsilon \delta_{m_i(y_0)}$ pour $i = 1, 2, \ldots$, on trouve, d'après (20)

$$(x_0, y_0) \epsilon Q_{m_i(y_0)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ce qui donne, d'après (21)

$$(x_0, y_0) \epsilon Q.$$

Il est ainsi démontré que $Q' \subset Q$: l'ensemble Q est donc fermé, c. q. f. d.

Or, je dis qu'on a la formule (9).

Soit a un nombre réel donné et soit L l'intersection de l'ensemble Q par la droite $x = a$.

Je dis qu'on a la formule (19).

Soit, en effet, $y_0 \epsilon L$. On a donc $(a, y_0) \epsilon Q$: d'après (21) il existe donc un nombre réel y, tel que

$$(a, y_0) \epsilon Q_{m_i(y)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

donc, d'après (20)

$$a \epsilon E_{m_i(y)} \quad \text{et} \quad y_0 \epsilon \delta_{m_i(y)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

La seconde de ces formules donne, d'après (18), $y_0 \epsilon \{y\}$, donc $y = y_0$, et la première donne

$$a \epsilon E_{m_i(y_0)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

d'où, vu la définition de l'ensemble $M(a; E_1, E_2, \ldots)$, on trouve $y_0 \epsilon M(a; E_1, E_2, \ldots)$.

Soit, d'autre part, $y_0 \epsilon M(a; E_1, E_2, ...)$: on a donc, vu la définition de l'ensemble $M(a; E_1, E_2, ...)$, la formule (27). Vu que, d'après (18), $y_0 \epsilon \delta_{m_i(y_0)}$ pour $i = 1, 2, ...$, on trouve donc, d'après (20), $(a, y_0) \epsilon Q_{m_i(y_0)}$ pour $i = 1, 2, ...$, donc, d'après (21), $(a, y_0) \epsilon Q$, d'où $y_0 \epsilon L$.

La formule (19) est ainsi établie.

Soit maintenant $a \epsilon \Gamma_\pi(Q)$. Il résulte de (19) que l'ensemble $M(a; E_1, E_2, ...)$ jouit de la propriété π: vu la définition de la fonction f on a donc $a \epsilon f(E_1, E_2, ...)$, donc, d'après (7), $a \epsilon E$. Nous avons ainsi démontré que

(28) $$\Gamma_\pi(Q) \subset E.$$

Soit maintenant $a \epsilon E$. D'après (7) on a donc $a = f(E_1, E_2, ...)$ et on en conclut, d'après la définition de la fonction f, que l'ensemble $M(a; E_1, E_2, ...)$ jouit de la propriété π. Vu la formule (19) et vu la définition de l'ensemble L, on a donc $a \epsilon \Gamma_\pi(Q)$. Nous avons ainsi démontré que

(29) $$E \subset \Gamma_\pi(Q).$$

Les formules (28) et (29) donnent la formule (9).

Comme $Q \epsilon \Phi$, la formule (9) prouve que $E \epsilon \Phi_\pi$.

Nous avons ainsi démontré qu'on a la formule (11).

Les formules (11) et (15) donnent la formule (4).

Le théorème 2 est ainsi démontré.

La famille de tous les ensembles plans fermés Q étant de puissance $2^{\aleph_0}$, on voit sans peine que, quelle que soit la propriété π d'ensembles linéaires, la famille Φ_π est de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

Soit maintenant E l'ensemble de toutes les familles (différentes) Φ_π, où π est une propriété quelconque d'ensembles linéaires. Je dis que

(*) $$\overline{\overline{\mathsf{E}}} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

En effet, les éléments Φ_π de E étant des familles de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires et l'ensemble de toutes les familles de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires étant de puissance $(2^{2^{\aleph_0}})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$, on trouve sans peine $\overline{\overline{\mathsf{E}}} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, admettons que $\overline{\overline{\mathsf{E}}} < 2^{2^{\aleph_0}}$ et soit S la famille — somme de toutes les familles Φ_π appartenant à E.

Comme $\overline{\overline{\Phi}}_\pi \leqslant 2^{\aleph_0}$ pour $\Phi_\pi \epsilon \mathsf{E}$, on trouve $\overline{\overline{S}} \leqslant 2^{\aleph_0} . \overline{\overline{\mathsf{E}}}$, donc, d'après $\mathsf{E} < 2^{2^{\aleph_0}}$, $\overline{\overline{S}} < 2^{2^{\aleph_0}}$ et, la famille de tous les ensembles linéaires étant de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, il existe un ensemble linéaire E_0, tel que E_0 non ϵS. Soit maintenant π_0 la propriété d'un ensemble linéaire de contenir un point dont l'ordonnée appartient à E_0, et soit $Q = \underset{x,y}{\mathrm{E}}[x=y]$: ce sera évidemment un ensemble plan fermé.

Or, on voit sans peine que $\Gamma_{\pi_0}(Q) = E_0$, d'où $E_0 \epsilon \Phi_{\pi_0}$ et, comme $\Phi_{\pi_0} \epsilon \mathsf{E}$, on trouve $E_0 \epsilon S$, contrairement à la définition de l'ensemble E_0.

La formule $(*)$ est ainsi démontrée.

Or, quoique l'ensemble E est de même puissance que l'ensemble de toutes les familles de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires, il y a parmi ces dernières telles qui n'appartiennent pas à E (p. e. celle de tous les ensembles linéaires mesurables B) [1].

Une fonction non constante $f(E_1, E_2, ...)$ qui fait correspondre à toute suite infinie d'ensemble linéaires $E_1, E_2, ...$ un ensemble linéaire $f(E_1, E_2, ...)$ est appelée par MM. Kantorovitch et Livenson (l. c.) *fonction analytique positive*, si, $E_1, E_2, ...$ et $H_1, H_2, ...$ étant deux suites infinies d'ensembles linéaires et a et b deux nombres réels, la formule (1) entraîne toujours l'existence d'un nombre naturel k pour lequel on a les formules (2).

Toute fonction analytique positive est évidemment une fonction analytique. Or, je dis qu'il existe des fonctions analytiques non constantes f, telles qu'il n'existe aucune fonction analytique positive g pour laquelle on ait

$$F_f = F_g .$$

[1]) C'est une conséquence facile du théorème suivant que j'ai démontré (énoncé sous une forme différente) dans mon mémoire „Sur certaines opérations sur les ensembles fermés plans" (*C. R. Soc. Sc. Varsovie* 24 (1931), Cl. III, p. 59—60) consacré à l'étude de l'opération Γ_π:

Quelle que soit la propriété π d'ensemble linéaires, il existe un ensemble linéaire E, tel que $E \epsilon \Phi_\pi$ et CE non $\epsilon \Phi_\pi$.

Soit, en effet, f la fonction d'une suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, \ldots$, définie par la formule

$$f(E_1, E_2, \ldots) = CE_1,$$

où CE_1 désigne le complémentaire de l'ensemble E_1 (par rapport à la droite). On vérifie sans peine que f est une fonction analytique. Or, comme on voit sans peine, F_f est ici la famille de tous les ensembles linéaires ouverts.

Or, soit g une fonction analytique positive quelconque, et soit H un ensemble linéaire fermé qui n'est pas ouvert. Je dis que

$$H = g(H, H, \ldots). \tag{30}$$

Soit, en effet, $b \in H$. La fonction g, en tant que analytique positive, n'étant pas constante, on n'a pas identiquement $g(E_1, E_2, \ldots) = 0$: il existe donc une suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, \ldots$, telle que $g(E_1, E_2, \ldots) \neq 0$ et il existe un nombre réel a, tel que $a \in g(E_1, E_2, \ldots)$. Si l'on avait $b \text{ non} \in g(H, H, \ldots)$ il en résulterait (la fonction g étant analytique positive) l'existence d'un nombre naturel k, tel que $a \in E_k$ et $b \text{ non} \in H$, contrairement à l'hypothèse sur b. On a donc $b \in g(H, H, \ldots)$.

Il est ainsi démontré que

$$H \subset g(H, H, \ldots). \tag{31}$$

Or, soit $b \in g(H, H, \ldots)$. La fonction g n'étant pas constante, il ne peut pas être $a \in g(E_1, E_2, \ldots)$ pour tout a réel et toute suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles linéaires. Il existe donc une suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, \ldots$ et un nombre réel a, tels que $a \text{ non} \in g(E_1, E_2, \ldots)$. Comme $b \in g(H, H, \ldots)$, et comme g est une fonction analytique positive, il existe un nombre naturel k, tel que $a \text{ non} \in E_k$ et $b \in H$. La formule $b \in g(H, H, \ldots)$ entraîne donc $b \in H$, c.-à-d. on a

$$g(H, H, \ldots) \subset H. \tag{32}$$

Les formules (31) et (32) donnent la formule (30) qui est ainsi établie.

H étant un ensemble fermé, la formule (30) prouve que $H \in F_g$. Or, H n'étant pas ouvert, on a $H \text{ non} \in F_f$. On a ainsi $F_f \neq F_g$.

Les fonctions analytiques positives d'une suite infinie d'ensembles linéaires coïncident, comme l'ont démontré MM. Kantorovitch et Livenson[1]) avec les fonctions de F. Hausdorff (fonctions $\delta\sigma$) c.-à-d. avec les fonctions $f(E_1, E_2, ...)$ d'une suite infinie d'ensembles linéaires définies par la formule

$$f(E_1, E_2, ...) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} ..., \tag{33}$$

où N est un ensemble de suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, ...$ (ensemble caractérisant la fonction f) et où la sommation s'étend à toutes les suites $n_1, n_2, ...$ constituant l'ensemble N. (f étant une fonction analytique positive, on a l'identité (33), si l'on désigne par N l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, ...$, telles qu'on a pour toute suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, ...$ la formule $E_{n_1} E_{n_2} ... \subset f(E_1, E_2, ...)$).

Toute fonction f de Hausdorff donne évidemment lieu à une opération F_f sur la famille F. Vu les résultats obtenus plus haut, nous pouvons donc dire que *toute famille d'ensembles linéaires obtenue par une opération de Hausdorff en partant des ensembles fermés linéaires peut être obtenue par l'opération du crible généralisé en partant des ensembles fermés plans, mais pas inversement* (p. e. la famille de tous les ensembles linéaires ouverts). Donc: *l'opération du crible généralisé est plus générale que les opérations de Hausdorff.*

Je démontrerai maintenant ce

Théorème 3[2]). *La famille* F_0 *de toutes les fonctions analytiques d'une suite infinie d'ensembles linéaires est la plus petite famille* F *de fonctions d'une suite infinie d'ensembles linéaires jouissant de trois propriétés suivantes:*

1°. *Toute fonction*

$$f_k(E_1, E_2, ...) = E_k \quad \text{où} \quad k = 1, 2, ...$$

appartient à F.

---

[1]) l. c., p. 230.

[2]) Ce théorème est énoncé sans démonstration par M. E. Szpilrajn. *Ann. Soc. Polonaise de Math.* 17 (1938), p. 124, Th. III.

2°. *Si* $f \epsilon \mathsf{F}$, *on a aussi* $Cf \epsilon \mathsf{F}$ (Cf désigne ici la fonction $g(E_1, E_2, ...) = X - f(E_1, E_2, ...)$, où X est l'ensemble de tous les nombres réels).

3°. *La somme d'un ensemble quelconque de fonctions appartenant à* F *appartient à* F.

Les propriétés 2° et 3° entraînent, comme on voit sans peine, la propriété

4°. *Le produit d'un ensemble quelconque de fonctions appartenant à* F *appartient à* F.

On vérifie sans peine que la famille $\mathsf{F} = \mathsf{F}_0$ jouit des propriétés 1°—3°. Il reste donc à démontrer que toute famille F de fonctions d'une suite infinie d'ensembles linéaires jouissant des propriétés 1°, 2° et 3° contient la famille F_0.

MM. Kantorovitch et Livenson ont démontré [1]) qu'il existe pour toute fonction analytique donnée f une fonction analytique positive g, telle qu'on a

$$f(E_1, E_2, ...) = g(E_1, CE_1, E_2, CE_2, ...) \tag{34}$$

quelle que soit la suite infinie $E_1, E_2, ...$ d'ensembles linéaires. Or, g étant une fonction analytique positive, elle est une fonction de Hausdorff, et il existe un ensemble N de suites infinies de nombres naturels, tel qu'on a pour toute suite infinie $H_1, H_2, ...$ d'ensembles linéaires l'égalité

$$g(H_1, H_2, ...) = \sum_N \prod_{i=1}^{\infty} H_{n_i}. \tag{35}$$

$E_1, E_2, ...$ étant une suite infinie donnée d'ensembles linéaires, posons

$$H_n = C^{n+1} E_{\mathrm{E}\frac{n+1}{2}} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ..., \tag{36}$$

où $\mathrm{E}\,t$ désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t, et où on a $C^{n+1}E = E$ pour $n = 1, 3, 5, ...$ et $C^{n+1}E = CE$ pour $n = 2, 4, 6, ...$.

D'après (34), (35) et (36) on trouve

---

[1]) l. c., p. 231.

$$(37) \qquad f(E_1, E_2, \ldots) = \sum_N \prod_{i=1}^{\infty} C^{n_i+1} E_{\mathrm{E}\frac{n_i+1}{2}}.$$

Soit k un nombre naturel donné. D'après 1^0 la fonction $f_k(E_1, E_2, \ldots) = E_k$ appartient à F; d'après 2^0 la fonction $Cf_k(E_1, E_2, \ldots) = CE_k$ appartient donc aussi à F. Donc, m et k étant des nombres naturels quelconques, les fonctions $C^m f_k(E_1, E_2, \ldots) = C^m E_k$ appartiennent à F, donc aussi, $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ étant une suite quelconque de N, les fonctions

$$C^{n_i+1} f_{\mathrm{E}\frac{n_i+1}{2}}(E_1, E_2, \ldots) = C^{n_i+1} E_{\mathrm{E}\frac{n_i+1}{2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

appartiennent à F, donc, d'après 4^0, leur produit

$$(38) \qquad h_\nu(E_1, E_2, \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} C^{n_i+1} E_{\mathrm{E}\frac{n_i+1}{2}}$$

appartient à F.

Or, d'après (37) et (38) on a

$$(39) \qquad f(E_1, E_2, \ldots) = \sum_{\nu \in N} h_\nu(E_1, E_2, \ldots).$$

Comme $h_\nu \in \mathsf{F}$ pour $\nu \in N$, la formule (39) prouve, d'après 3^0, que $f \in \mathsf{F}$.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction analytique f appartient à F. On a donc $\mathsf{F}_0 \subset \mathsf{F}$.

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on a encore ce

Théorème 4. *La famille de toutes les fonctions analytiques positives d'une suite infinie d'ensembles linéaires est la plus petite famille* F *de fonctions d'une suite infinie d'ensembles linéaires jouissant des propriétés* 1^0, 3^0 *et* 4^0.

Cela résulte tout de suite du théorème analogue que j'ai démontré pour la famille de toutes les fonctions de Hausdorff [1]) et du fait que les fonctions analytiques positives coïncident avec les fonctions de Hausdorff.

[1]) C. R. Soc. Sc. Varsovie **19** (1927), Cl. III, p. 463—464.

W. Sierpiński

Operacja sita a funkcje analityczne ciągu nieskończonego zbiorów

Komunikat, wygłoszony dnia 25. VI. 1948 r.

Streszczenie

W pracy tej autor dowodzi równoważności dwuch operacyj na rodzinach zbiorów liniowych, mianowicie operacji przesiewania przez sita zamknięte płaskie, przy pomocy danej własności zbiorów liniowych, oraz operacji otrzymywania rodzin zbiorów liniowych przy pomocy funkcyj analitycznych ciągu nieskończonego zbiorów liniowych zamkniętych.

Posiedzenie

z dnia 22 października 1948 r.

H. Spencer — Jones.

Pomiary odległości słońca.

Dyrektor Obserwatorium Astronomicznego w Greenwich. gość Tow. Naukowego Warszawskiego, wygłosił ciekawy referat na powyższy temat.

Referat wywołał ożywioną dyskusję.

Tekst referatu nie został nadesłany.

W. Szmielew.

O pewnej klasyfikacji grup przemiennych.

(Rękopisu nie nadesłano).

Posiedzenie

z dnia 12 listopada 1948 r.

I. St. Thugutt.

Izotopy węglowe a pochodzenie diamentów.

(Rękopisu nie nadesłano).

Posiedzenie
z dnia 12 listopada 1948 r.

Czł. Tadeusz Banachiewicz

Sur la résolution des équations normales de la méthode des moindres carrés

Mémoire présenté dans la séance du 12 novembre 1948

Sommaire. L'auteur simplifie sa méthode de résolution par la racine carrée. Il montre que l'ainsi dit algorithme de Gauss est gravement défectueux.

§ 1. Considérons le système

$$\begin{array}{c} A_{11}\,x_1 + A_{21}\,x_2 + \cdots + A_{m1}\,x_m + L_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1m}\,x_1 + A_{2m}\,x_2 + \cdots + A_{mm}\,x_m + L_m = 0 \end{array} \tag{1}$$

où $A_{ij} = A_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots m)$, des m équations normales de la méthode des moindres carrés. En désignant par A le tableau des coefficients de ce système, par a la racine carrée triangulaire de A de sorte que

$$\mathsf{a} \cdot \mathsf{a} = \mathsf{A} \tag{2}$$

et en posant pour abréger

$$\{\mathsf{x} \quad \mathsf{L}\} = \tau \begin{Bmatrix} x_1\, x_2 \cdots x_m \\ L_1\, L_2 \cdots L_m \end{Bmatrix} \tag{3}$$

on peut écrire (1) en cracoviens

$$\mathsf{x} \cdot \tau \mathsf{A} + \mathsf{L} = 0\,. \tag{4}$$

En tenant compte de (2) on résout cette équation par

$$\mathsf{x} = (-\mathsf{L} : \tau\,\mathsf{a}) : \mathsf{a}. \tag{5}$$

Le système se résout ainsi en 3 étapes: extraction de la racine carrée a de A, division de L par $\tau\,\mathsf{a}$, et division du quotient obtenu par a. On pourrait éviter la seconde étape en décomposant en 2 facteurs le cracovien $\{\mathsf{A}\ \mathsf{L}\} = \mathsf{a}' \cdot \mathsf{a}$, au lieu du cracovien A, mais on n'aurait pas alors l'avantage d'avoir à faire avec l'opération si simple de l'extraction de la racine carrée, le cracovien $\{\mathsf{A}\ \mathsf{L}\}$, aux dimensions inégales, n'admettant pas cette racine. La voie que nous proposons ici est la suivante.

Adjoignons au système (1) l'équation

$$L_1 x_2 + L_2 x_2 + \cdots + L_m x_m + c = 0, \tag{6}$$

la constante c étant supposée telle que l'équation (6) soit satisfaite par les x_i résultant du système (1). Soit A' le tableau des coefficients et termes libres du système (1) augmenté de l'équation (6). C'est a dire soit

$$\mathsf{A}' = \begin{Bmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{L} \\ \tau\mathsf{L} & c \end{Bmatrix} \tag{7}$$

et posons encore

$$\mathsf{x}' = \tau\,\{x_1\, x_2 \cdots x_m\ 1\}. \tag{8}$$

Le système (1) ou (4) devient

$$\mathsf{x}' \cdot \tau\,\mathsf{A}' = \mathsf{0}. \tag{9}$$

Soit a' la racine carrée „triangulaire" (ce sera un triangle tronqué) de A', c'est à dire

$$\mathsf{a}'^2 = \mathsf{A}'. \tag{10}$$

Bien que c ne soit pas directement connu, le calcul de a' peut se faire immédiatement, grâce à ce que la condition imposée sur c entraîne pour $a'_{m+1,\,m+1}$, seul élément de a' dependant de c, l'égalité

$$a'_{m+1,\,m+1} = 0. \tag{11}$$

Elle découle de ce que le rang de A' est égal à m, vu qu'il y a une (et une seulement) relation (9) autre les $m+1$ lignes de A'. Autre manière d'arriver à la même conclusion c'est que le déterminant $|\mathsf{A}'|$ est zéro, comme déterminant d'un système d'équations linéaires homogènes aux inconnues non zéros, et (10) montre qu'alors aussi $|\mathsf{a}'|$ doit s'évanouir.

L'équation (9) donne d'abord $\mathsf{a}' = \underset{(1,\, m+1)}{0} :\tau\, \mathsf{a}' : \mathsf{a}'$, mais comme $\underset{(1,\, m+1)}{0} :\tau\, \mathsf{a}' = \underset{(1,\, m)}{0}$ on obtient

$$\mathsf{x}' = 0 : \mathsf{a}' \tag{12}$$

ce qui nous donne, avec (7) et (10), la solution nouvelle en deux étapes seulement.

C'est la solution à l'aide de la racine carrée. Or, si l'on pose

$$\mathsf{A}' = \mathsf{g}' \cdot \mathsf{h}' \tag{13}$$

g' et h' étant 2 cracoviens triangulaires proportionnels (obtenus par exemple par la multiplication de a' par un cracovien diagonal et son inverse), aux dimensions $(m+1, m)$, on a la solution alternative, à 2 étapes elle-même aussi:

$$\mathsf{x}' = 0 : \mathsf{h}'. \tag{14}$$

Nous admettons dans ce qui suit qu'on a pris h' de façon que tous ses éléments sur la diagonale principale soient unités:

$$\mathsf{h}'_{ii} = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots m).$$

Alors h' et g' seront les tableaux, identiques à ceux qu'on a dans l'algorithme de Gauss, dans les équations dites normales réduites et équations d'élimination (nomenclature de J. Bauschinger, Bahnbestimmung), comme tableaux des coefficients et des termes libres. L'équation (13) avec (7) nous décèle une propriété intéressante de ces 2 tableaux, si bien connus aux calculateurs.

§ 2. Pour simplifier l'écriture nous employerons maintenant les désignations A, g, h au lieu des A', g', h' du § précédent. Nous voici en mesure de comparer les 2 algorithmes du calcul de g et de h. L'algorithme nouveau, reposant sur l'équation (13), nous donne

$$\mathsf{g}_i \cdot \mathsf{h}_j = A_{ij}, \tag{14*}$$

g_i et h_j désignant comme toujours la i-me resp. la j-me colonne de g resp. h.

Il suffira de ne considérer que le calcul de g, parce que h s'obtient également dans les 2 algorithmes à l'aide de la proposition

$$g_{jj} : g_{j+1,j} : \cdots : g_{m+1,j} = 1 : h_{j+1,j} : \cdots : h_{m+1,j}$$

avec $h_{jj} = 1$.

Dans le nouveau algorithme on calcule les lignes consécutives de g de proche en proche par (14*), ou

$$g_{ij} = -(g_{i1} h_{j1} + g_{i2} h_{j2} + \cdots + g_{i,j-1} h_{j,j-1}) + A_{ij}; \qquad (15)$$

cette expression nous donne notamment tout élément g_{ij}, de la j-me ligne de g en fonction des éléments des lignes antérieures.

Dans l'algorithme de Gauss, comme il est présenté dans les traités classiques d'Encke, Helmert (I éd.), Oppolzer, Bauschinger, on procède autrement. Dans les symboles de Gauss (mais écrivant partout $[ijk]$ au lieu de $[jik]$ de Gauss) on a

$$g_{ij} = [ijj-1]$$

et on calcule g_{ij} par la formule de récurrence

$$[ijk] = [ijk-1] - [ikk-1] \frac{[jkk-1]}{[kkk-1]}. \qquad (16)$$

Notons ici une certaine complexité de (16) en comparaison avec la formule (14*) du nouveau algorithme.

Les $[ij0]$, qu'on écrit $[ij]$, sont donnés. En mettant dans (16) successivement $k = 1, 2, \ldots j-1$ on calcule de proche en proche

$$\begin{aligned} [ij1] &= [ij] - g_{i1} h_{j1} \\ [ij2] &= [ij1] - g_{i2} h_{j2} \qquad (17) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

et enfin $g_{ij} = [ijj-1] = [ijj-2] - g_{i,j-1} h_{j,j-1}$,
où nous avons profité déjà, pour la simplification, des notations nouvelles.

De cette manière, pour obtenir g_{ij}, on calcule et — ajoutons — on écrit et on vérifie les $j-2$ grandeurs entièrement superflues $[ijk]$, $k = 1, 2, \ldots j-2$.

La déraison de ce procédé était voilée, paraît-il, par la complexité d'ensemble des formules.

Ce qui précède peut être conçu brièvement comme il suit. Les éléments cherchés de la j-me ligne du tableau **g** s'expriment par les sommes de la forme

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_j$$
$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_j$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_j$$

Au lieu de calculer directement ces sommes suivant la formule (15), on calculait dans l'algorithme de Gauss

$$p_1 + p_2, \quad q_1 + q_2, \quad r_1 + r_2$$

de-même

$$p_1 + p_2 + p_3, \quad q_1 + q_2 + q_3, \quad r_1 + r_2 + r_3,$$

etc.; on écrivait et on vérifiait ces grandeurs. L'emploi d'une méthode si peu directe par plusieurs générations des savants (Encke — Helmert — Bauschinger) paraît être unique dans l'histoire du Calcul scientifique.

§ 3. Nous sommes d'avis que l'introduction (1810) des symboles $[ijk]$ à 3 paramètres, au lieu des symboles comme g_{ij} à 2 paramètres — ainsi que leur rétention en 1826 dans *Suppl. Theor. combinationis observationum* — a été un pas infortuné de Gauss. Ils ont joué leur rôle dans l'obscurcissement du problème. On lit d'ailleurs encore en 1935 dans le *Handb. d. Vermessungskunde* de Jordan, I Bd., p. 54: „haben sich diese klassische Bezeichnungen... in allen Schriften über M. d. kl. Q. eingebürgert und werden als sozusagen geheiligte Bezeichnungen festgehalten. Der Versuch, diese glücklicherweise nun feststehenden Zeichen durch andere zu ersetzen wäre als unglücklich und auf die Dauer nicht haltbar zu bezeichnen". Mais la formule (14^*) et ses conséquences les firent disparaître dans le nouveau algorithme de la Méthode en rendant superflues les grandeurs que ces symboles étaient destinés à désigner.

NOTE. M. S. Arend a considéré indépendamment (*Comm. de l'Observ. R. de Belgique*, No. 2, 1948) l'équation (6), employée déjà comme ci-dessus en 1947 dans un cours de l'auteur.

Czł. Tadeusz Banachiewicz

O rozwiązywaniu równań normalnych metody najmniejszych kwadratów

Komunikat wygłoszony dnia 12 listopada 1948 r.

Streszczenie

Dla rozwiązania układu m równań normalnych metody najmniejszych kwadratów, autor dopisuje do tego układu symetrycznie dobrane $(m+1)$-e równanie, wypływające z danych m równań, i z takiej dopiero tabeli współczynników i wyrazów wolnych wyciąga pierwiastek kwadratowy. Zmniejsza to o jeden ilość etapów w metodzie pierwiastka kwadratowego. Jeżeli zaś rozkładać otrzymaną tabelę na 2 odpowiednio dobrane krakowiany proporcjonalne, to otrzymuje się (pełne) tabele równań eliminacyjnych i normalnych zredukowanych tzw. *algorytmu Gaussa.* Dochodząc w ten sposób krótszą drogą do równań tych samych, co w algorytmie Gaussa, widać wyraźnie, jak wiele jest działań zupełnie zbędnych w tym klasycznym algorytmie, tak że stosowanie go przez kilka pokoleń uczonych (Encke — Helmert — Bauschinger) stanowi osobliwą kartę w dziejach rachunków naukowych. W *nowym algorytmie* zupełnie nie występują specjalne trzyparametrowe symbole Gaussa $[i, j \,.\, k]$, uchodzące do niedawna za nietykalne na zawsze, a prowadzące do nieprzejrzystych wzorów, i ustąpić muszą dwuparametrowym ogólnym oznaczeniom rachunku krakowianowego.

Roman Sikorski

On an ordered algebraic field

Mémoire présenté par M. A. Mostowski à la séance du 12 novembre 1948

In this paper I shall study ordered algebraic rings and fields from the point of view of the general theory of ordered sets. I shall associate with every ordered algebraic ring or field A an initial regular ordinal number ω_μ called the character of A. I shall show that in every ordered field A of character ω_μ one can define in a very natural way a limit of a transfinite sequence $\{a_\xi\}$ (where $0 \leqslant \xi < \omega_\mu$) of elements of A. This limit possesses all properties of the limit of an enumerable sequence of real numbers.

The question arises whether for every initial regular number ω_μ there exists ordered algebraic rings and fields of character ω_μ. The answer is positive. I shall define in this paper a ring C_μ and a field W_μ which possess the character ω_μ. C_μ and W_μ are respectively the least ring and field containing the set P_μ of all ordinal numbers less than ω_μ. The algebraic operations on elements of P_μ we assume to be Hessenberg's „natural sum" and „natural product" of ordinal numbers. Elements of C_μ and W_μ may be considered as a generalization of integers and rational numbers exactly in the same sense in which ordinal numbers may be considered as a generalization of positive integers.

I shall study properties of C_μ and W_μ from point of view of the general theory of ordered sets and I shall prove that for $\mu > 0$ the field W_μ fulfils a theorem which is analogous to the well known theorem of Bolzano-Weierstrass: Every bounded sequence $\{w_\xi\}$ $(0 \leqslant \xi < \omega_\mu)$ of elements of W_μ contains a convergent subsequence.

I shall prove also that C_μ and W_μ are respectively the least ordered ring and field of character ω_μ, i. e. that every ordered algebraic ring (field) of character ω_μ contains a subring (subfield) isomorphic to C_μ (W_μ).

I. Ordered algebraic rings and fields.

1. Ordered sets. Let A be an ordered set with the ordering relation $a_1 < a_2$ [1]) and let α be an ordinal number. A mapping which associates with every ordinal number $\xi < \alpha$ an element $a_\xi \in A$, is called an *α-sequence* (of elements of A) and denoted by $\{a_\xi\}$.

An α-sequence $\{a_\xi\}$ is called:

one-one if $a_\xi \neq a_\eta$ for $\xi < \eta < \alpha$;

non-decreasing (non-increasing) if $a_\xi \leqslant a_\eta$ $(a_\xi \geqslant a_\eta)$ for $\xi < \eta < \alpha$;

increasing (decreasing) if it is non-decreasing (non-increasing) and one-one;

monotone if it is either non-decreasing or non-increasing;

constant if $a_\xi = a_\eta$ for $\xi < \eta < \alpha$;

bounded in A if there exist two elements $a, b \in A$ such that $a \leqslant a_\xi \leqslant b$ for every $\xi < \alpha$.

If $\{\eta_\xi\}$ is an increasing α-sequence of ordinal numbers less than α, the α-sequence $\{a_{\eta_\xi}\}$ is called an *α-subsequence* of the α-sequence $\{a_\xi\}$.

An α-sequence $\{a_\xi\}$ is said to be *co-final (co-initial)* with an ordered set A [2]) if for every $a \in A$ there exists an ordinal number $\xi_0 < \alpha$ such that $a_\xi \geqslant a$ $(a_\xi \leqslant a)$ for every ξ: $\xi_0 \leqslant \xi < \alpha$.

The *co-final (co-initial) character* of an ordered set A is the least ordinal number α such that there exists an α-sequence $\{a_\xi\}$ which is co-final (co-initial) with A. By this definition the co-final (co-initial) character of A is:

the number 0 if A is empty;

the number 1 if A possesses the greatest (least) element;

an initial regular ordinal number [3]) ω_μ if $A (\neq 0)$ does not possess a greatest (least) element.

---

[1]) We read: „a_1 is less than a_2" or „a_2 is greater than a_1".

[2]) See Hausdorff [1], pp. 86, 129 and 132.

[3]) An *initial* number ω_μ is the least ordinal number such that the potency of the set of all ordinal numbers $\xi < \omega_\mu$ is $\aleph_\mu$. ω_μ is called *regular* if for every α-sequence $\{\mathfrak{m}_\xi\}$ (where $\alpha < \omega_\mu$) of cardinal numbers $\mathfrak{m}_\xi < \aleph_\mu$ is $\sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{m}_\xi < \aleph_\mu$. See Sierpiński [1], pp. 213—214 and 225, Sierpiński [2], p. 232 and p. 243. The number $\omega_0 = \omega$ is the ordinal type of the set of all positive integers.

The *character* [4]) *of an element* $a_0 \epsilon A$ is the ordered pair $[\alpha, \beta]$ of ordinal numbers where α is the co-final character of the set of all elements $a < a_0$ and β is the co-initial character of the sets of all elements $a > a_0$.

An ordered pair $[A', A'']$ of sets is said to be a *gap* [5]) of A provided that

a) $A = A' + A''$;

b) $a_1 < a_2$ for any $a_1 \epsilon A'$ and $a_2 \epsilon A''$;

c) A' contains no greatest element and A'' contains no least element.

The *character of a gap* $[A', A'']$ is the ordered pair $[\alpha, \beta]$ of ordinal numbers where α is the co-final character of A' and β is the co-initial character of A''.

The character $[\alpha, \beta]$ of an element or of a gap is called *symmetrical* if $\alpha = \beta$.

A subset X of an ordered set A is called *bounded in* A if there exist two elements $a, a' \epsilon A$ such that $a \leqslant x \leqslant a'$ for every $x \epsilon X$. By definition of the co-final and co-initial characters:

(i) *If the co-final and co-initial character of an ordered set* A *is* ω_μ, *every subset* X *of potency* $< \aleph_\mu$ *is bounded in* A.

2. Ordered rings. An *ordered ring* R is a non-empty ordered set with two operations: addition $a + b$ and multiplication ab which satisfy the following axioms:

I a. $(a + b) + c = a + (b + c)$;

I b. $a + b \leqslant c + a$ if and only if $b \leqslant c$;

II. for every pair of elements a, b there exists an element c such that $a = b + c$;

III a. $(ab)c = a(bc)$;

III b. $ab = ba$;

III c. $a(b + c) = ab + ac$;

III d. if $a + a > a$ and $b + b > b$, then $ab + ab > ab$ [6]).

---

[4]) See Hausdorff [1], p. 143 and Sierpiński [2], p. 262. Instead of $[\alpha, \beta]$ these writers use the symbol (α, β^*).

[5]) See Sierpiński [1] p. 143 and Sierpiński [2], p. 147.

[6]) I. e. if $a > 0$ and $b > 0$, then $ab > 0$.

If follows from I a—b that $a+b=b+a$ and that there exists exactly one element $0 \in R$ such that $a+0=a$ for every $a \in R$. The conditions III a—d imply that $ab=0$ if and only if either $a=0$ or $b=0$. Every ordered ring is thus a commutative algebraic ring without divisors of zero [7]).

We admit the usual definitions of the symbols $a-b$, $-a$, na, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ etc. [8]). We say that an element a is positive (negative) if $a>0$ ($a<0$). $|a|$ denotes the element a if $a \geqslant 0$ or the element $-a$ if $a<0$.

If A is an ordered set with two operations: addition and multiplication which satisfy only the axioms I a—b and III a—d, there exists always an ordered ring which contains A. The construction of this ring is the following [9]):

Consider the set of all ordered pairs (a, b) of elements of A. We identify two pairs (a,b) and (c,d), in symbols:

(i) $$(a,b)=(c,d)$$

if and only if

$$a+d=b+c.$$

and we assume the following definitions:

(ii) $$(a,b)+(c,d)=(a+c,\, b+d);$$

(iii) $$(a,b)\,(c,d)=(ac+bd,\, ad+bc);$$

(iv) $(a,b)<(c,d)$ if and only if $a+d<b+c$.

It is easy to prove that all the axioms I a—b, II, III a—d are satisfied. Since

$$(a+a,a)<(b+b,b) \quad \text{if and only if} \quad a<b,$$

$$(a+a,a)+(b+b,b)=(a+b+a+b,\, a+b),$$

$$(a+a,a)\,(b+b,b)=(ab+ab,\, ab)$$

---

7) See van der Waerden [1], p. 37 and 39.

8) See van der Waerden [1], pp. 37—41. n denotes always an integer.

9) This construction is an easy generalization of the well known construction of the ring of all integers. See van der Waerden [1], p. 10.

we may identify the pair $(a+a, a)$ with the element $a \epsilon A$, in symbols:

(v) $$a = (a+a, a).$$

The ordered ring which we obtain in this way will be denoted by A^+ [10]). One can prove that A^+ is the least ordered ring containing A [11]).

By definition of the substraction in A^+ we have by (v):

(vi) $$(a, b) = a - b.$$

3. Ordered fields. An *ordered field* is by definition an ordered ring satifying the following axiom [12]):

IV. for every pair of elements a, b $(b \neq 0)$ there exists an element c such that $a = bc$.

Every ordered field is a commutative algebraic field. We admit the usual definitions of the symbols 1, $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{n}$, etc.

Every ordered ring R can be embedded in an ordered field, namely in the field of all ordered pairs [13]) (a, b) (where $a, b \epsilon R$, $b \neq 0$) with the following definitions:

(i) $$(a, b) = (c, d) \quad \text{if and only if} \quad ad = bc;$$

(ii) $$(0, b) = 0;$$

(iii) $$(aa, a) = a \quad \text{for every} \quad a \neq 0;$$

(iv) $$(a, b) < (c, d) \quad \text{if and only if} \quad (ad - bc)\,bd < 0;$$

(v) $$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd);$$

(vi) $$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

---

[10]) Analogously, let A be an ordered set in which there is defined an operation of addition satisfying axioms I a—b. The set A^+ defined by (i), (ii), (iii) and (iv) satisfies axioms I a—b and II. A^+ is the least ordered group containing A.

[11]) I. e. if an ordered ring R contains a subset isomorphic to A, it contains also a subring isomorphic to A^+.

[12]) See also van der Waerden [1], p. 209.

[13]) More exactly: elements of this field are classes of equal pair — see the definition of A^+.

This field will be denoted by $R^{\times}$. The field $R^{\times}$ is the least ordered field containing the ring R.

By definition of division in $R^{\times}$ we have on account of (ii) and (iii):

(vii) $$(a, b) = \frac{a}{b}.$$

4. Ordered rings and fields as ordered sets. There exists only one finite ordered ring, namely the trivial ring containing only one element 0. In the rest of this paper we shall admit that all considered rings and fields are infinite. Every infinite ordered ring possesses neither least nor greatest element.

(i) [14]) *Each ordered ring R is similar to the ordered set which is obtained from R by reversing of the order of its elements.*

Namely, the one-one mapping $f(x) = -x$ establishes this similarity.

By (i):

(ii) *The co-final and co-initial characters of an ordered field are equal and infinite.*

The initial regural ordinal number ω_μ which is both the co-final and co-initial character of a ring R is called the *character* of R.

(iii) *Characters of all elements of an ordered ring R are symmetrical and equal.*

In fact, let $a, b \in R$. If $\{a_\xi\}$ is an α-sequence co-initial with the set of all elements $x > a$, then $\{2a - a_\xi\}$ $(\{b - a + a_\xi\})$ is an α-sequence co-final (co-initial) with the set of all elements $x < a$ $(x > b)$.

(iv) *Every open interval $a < x < b$ of an ordered field F is similar to F.*

Namely, the mapping

$$f(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|} + \frac{b+a}{2} \qquad (\text{for } x \in F)$$

establishes the similarity between F and this interval.

---

[14]) Theorems (i)—(iii) are true also for arbitrary ordered groups, i. e. for ordered sets with addition satisfying axioms I a—b and II.

It follows immediately from (ii) and (iv) that

(v) *Every element of an ordered field F of character ω_μ has the character* $[\omega_\mu, \omega_\mu]$.

From a general theorem of the theory of ordered sets it follows, on account of (v), that for every regular initial number $\omega_\nu < \omega_\mu$ there exist gaps of F with the character $[\omega_\nu, \alpha]$ and $[\beta, \omega_\nu]$ [15]). Therefore:

(vi) *Every ordered field of character* $\omega_\mu > \omega$ *is non-continuous* (in the sense of the general theory of ordered sets [16])).

Let a be a positive element of an ordered field F of character greater than ω. By 1 (i) the ω-sequence $\{n a\}$ is bounded. Thus there exists an element $b \epsilon F$ such that $n a < b$ for every positive integer n. Hence:

(vii) *Every ordered field of the character greater than* ω *is non-archimedean* [17]).

5. The convergence of ω_μ-sequences. Let F be an ordered field of character ω_μ. We say that an ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ of elements of F *converges* to an element $a \epsilon F$, in symbols:

$$a = \lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$$

if for every positive element $\eta \epsilon F$ there exists an ordinal number $\xi_0 < \omega_\mu$ such that

$$|a - a_\xi| < \eta \quad \text{for every} \quad \xi > \xi_0.$$

The element a is called the *limit* of the ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$.

An ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ is called *convergent* if it converges to an element of F.

The so defined limit of an ω_μ-sequence possesses many properties of the limit of an enumerable sequence of real numbers. For instance:

(i) $a = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$ *if and only if for every* $b, c \epsilon F$ *such that* $b < a < c$ *there exists an ordinal number* $\xi_0 < \omega_\mu$ *such that*

---

15) See Hausdorff [1], p. 145.

16) An ordered set A is said to be continuous provided there exists no gap of A.

17) See van der Waerden [1], p. 211.

$$b < a_\xi < c \quad \textit{for every} \quad \xi > \xi_0.$$

(ii) *If* $a = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$ *and* $b = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} b_\xi$, *then*

$$a \pm b = \lim_{\xi < \omega_\mu} (a_\xi \pm b_\xi)$$

and

$$ab = \lim_{\xi < \omega_\mu} (a_\xi \, b_\xi).$$

If $b \neq 0$, *then*

$$\frac{a}{b} = \lim_{\xi < \omega_\mu} \frac{a_\xi}{b_\xi}.$$

(iii) *Every constant* ω_μ*-sequence* $a_\xi = a$ *is convergent and* $a = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$.

(iv) *If* $a = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$, *then* a *is the limit of every* ω_μ*-subsequence of* $\{a_\xi\}$.

(v) *If every* ω_μ*-subsequence of an* ω_μ*-sequence* $\{a_\xi\}$ *contains an* ω_μ*-subsequence which converges to* a, *then* $a = \lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi$.

If an ω_μ-sequence $\{a_\xi\}$ is co-final (co-initial) with F, we shall write

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = +\infty \qquad \Big(\lim_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = -\infty\Big).$$

Theorem (ii) is true also for infinite limits after admitting the usual definitions of algebraic operations on $+\infty$ and $-\infty$.

In particular, if $\lim\limits_{\xi < \omega_\mu} a_\xi = \pm\infty$ and $a_\xi \neq 0$, then

$$\lim_{\xi < \omega_\mu} \left(a + \frac{1}{a_\xi} \right) = a.$$

Thus there exist non-trivial convergent ω_μ-sequences.

II. The ring C_μ.

6. Hessenberg's natural sum and product of ordinal numbers. If α and β are two ordinal numbers, $\alpha \dotplus \beta$, $\alpha \times \beta$ and α^β will denote respectively the well known sum, product and power of these numbers defined in the general theory of ordered sets [18]). The sum $\alpha \dotplus \beta$ and the product $\alpha \times \beta$ are, in general, non-commutative. Hessenberg [19]) has defined two other operations on ordinal numbers: *„natural sum"* $\alpha + \beta$ and *„natural product"* $\alpha\beta$ which are more regular than $\alpha \dotplus \beta$ and $\alpha \times \beta$. Hessenberg's definition is following:

Every ordinal number α can be represented in the so-called *normal form of Cantor* [20]):

(i) $$\alpha = \omega^{\alpha_1} \times n_1 \dotplus \omega^{\alpha_2} \times n_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_k} \times n_k$$

where $n_1, \ldots n_k$ are positive integers and

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$$

is a decreasing sequence of ordinal numbers. Let

(ii) $$\beta = \omega^{\beta_1} \times m_1 \dotplus \omega^{\beta_2} \times m_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\beta_l} \times m_l$$

be Cantor's normal form of β and let

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_i$$

be a decreasing sequence formed of all ordinal numbers $\alpha_1, \ldots \alpha_k, \beta_1, \ldots \beta_l$.

Then

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \times p_1 \dotplus \omega^{\gamma_2} \times p_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\gamma_i} \times p_i,$$

$$\beta = \omega^{\gamma_1} \times q_1 \dotplus \omega^{\gamma_2} \times q_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\gamma_i} \times q_i,$$

where $p_1, \ldots p_i$, $q_1, \ldots q_i$ are non-negative integers. $\alpha + \beta$ is by definition the number

(iii) $$\alpha + \beta = \omega^{\gamma_1} \times (p_1 + q_1) \dotplus \omega^{\gamma_2} \times (p_2 + q_2) \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\gamma_i} \times (p_i + q_i).$$

---

[18]) The usual notations $\alpha + \beta$ and $\alpha \cdot \beta$ are reserved for two other operations on ordinal numbers — see the definitions (iii) and (iv).

[19]) See Hausdorff [2], p. 68 and following.

[20]) See Sierpiński [2], p. 202 and Sierpiński [2], p. 213.

The sum $\alpha \dotplus \beta$ satisfies the axioms I a—b, in particular it is commutative and associative.

The definition of Hessenberg's product of the numbers α and β which possess Cantor's normal form (i) and (ii) is given by the formula:

$$\begin{aligned}
\alpha \beta &= \omega^{\alpha_1 \dotplus \beta_1} \times n_1 m_1 \dotplus \omega^{\alpha_1 \dotplus \beta_2} \times n_1 m_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_1 \dotplus \beta_l} \times n_1 m_l \dotplus \\
\text{(iv)} \quad & \dotplus \omega^{\alpha_2 \dotplus \beta_1} \times n_2 m_1 \dotplus \omega^{\alpha_2 \dotplus \beta_2} \times n_1 m_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_2 \dotplus \beta_l} \times n_2 m_l \dotplus \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \dotplus \omega^{\alpha_k \dotplus \beta_1} \times n_k m_1 \dotplus \omega^{\alpha_k \dotplus \beta_2} \times n_k m_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_k \dotplus \beta_l} \times n_k m_l .
\end{aligned}$$

The product $\alpha \beta$ satisfied the axioms III a—d, in particular it is commutative, associative and distributive.

It follows immediately from definitions (iii) and (iv) that the equality (i) implies

$$\text{(v)} \qquad \alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 \dotplus \omega^{\alpha_2} n_2 \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_k} n_k =$$

$$= n_1 \omega^{\alpha_1} \dotplus n_2 \omega^{\alpha_2} \dotplus \ldots \dotplus n_k \omega^{\alpha_k} = \omega^{\alpha_k} n_k \dotplus \ldots \dotplus \omega^{\alpha_2} n_2 \dotplus \omega^{\alpha_1} n_1 = \ldots .$$

The order of addends and factors in the formula (v) is of no consequence.

It is to be remarked that for every ordinal number α

$$\text{(vi)} \qquad \alpha \dotplus 1 = \alpha + 1 .$$

7. The definition of C_μ. For every μ let P_μ denote the set of all ordinal numbers ξ less than the initial number ω_μ.

Let α be an ordinal number whose Cantor's normal form is given by the formula 6 (i). It is well known that $\alpha \in P_\mu$ if and only if $\alpha_1 \in P_\mu$. Consequently, if $\alpha, \beta \in P_\mu$, then $\alpha \dotplus \beta \in P_\mu$ and $\alpha \beta \in P_\mu$. The set P_μ with the algebraic operations $\alpha \dotplus \beta$ and $\alpha \beta$ satisfies the axioms I a—b and III a—d. By § 2 there exists the least ordered ring $(P_\mu)^+$ which contains P_μ. The ordered ring $(P_\mu)^+$ will be denoted by C_μ. Elements of C_μ will be called *C_μ-numbers*.

By 2 (vi) every C_μ-number c is a difference of two ordinal numbers $\alpha, \beta \in P_\mu$:

$$\text{(i')} \qquad c = \alpha - \beta .$$

Therefore every $c \in C_\mu$ can be represented in the form [21])

(i) $$c = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

where $n_1, \ldots n_k$ is a sequence of positive or negative integers and

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$$

is a decreasing sequence of ordinal numbers. The form (i) will be called the *normal form* of c. Since every ordinal number α possesses only one normal form 6 (i), every C_μ-number possesses also only one normal form (i). C_μ-number (i) is an ordinal number if and only if all integers $n_1, \ldots n_i$ are positive. In this case c is equal to the number α defined by 6 (i).

Let γ_1 be the natural sum of all terms $\omega^{\alpha_j} n_j$ of the normal form (i) such that $n_j > 0$. Analogously let γ_2 be the natural sum of all terms $-\omega^{\alpha_j} n_j$ where $n_j < 0$. γ_1 and γ_2 are two ordinal numbers and $c = \gamma_1 - \gamma_2$. Obviously $c > 0$ if and only if $\gamma_1 > \gamma_2$. Therefore

(ii) *The C_μ-number* (i) *is positive if and only if $n_1 > 0$.*

If a C_μ-number $c \neq 0$ possesses the normal form (i), the ordinal number $\alpha_1 \in P_\mu$ will be called the *degree* of c and denoted by $\Delta(c)$ [22]). In particular, $\Delta(\omega^\alpha) = \alpha$ and $\Delta(n) = \Delta(\omega^0 n) = 0$ for every integer $n \neq 0$.

By the definition of $\Delta(c)$ and by (ii) we obtain easily that for any $c, c' \in C_\mu (c \neq 0 \neq c')$:

(iii) $\Delta(c) = \Delta(-c) = \Delta(|c|)$;

(iv) *if* $|c| < |c'|$, *then* $\Delta(c) \leqslant \Delta(c')$;

(v) *if* $\Delta(c) < \Delta(c')$, *then* $|c| < |c'|$;

(vi) $\Delta(cc') = \Delta(c) + \Delta(c')$.

It follows immediately from (iv) and (v) that

(vii) *A set $X \subset C_\mu$ is bounded in C_μ if and only if the set of all ordinal numbers $\Delta(c)$, where $c \in X$ $(c \neq 0)$, is bounded in P_μ.*

---

[21]) The number 0 possesses a degenerate normal form with $k = 0$.

[22]) The degree of $0 \in C_\mu$ is not defined.

On account of (vii) and 1 (i) we infer that

(viii) *Let ω_μ be regular. A set $X \subset C_\mu$ is bounded in C_μ if and only if the potency of X is less than $\aleph_\mu$.*

Obviously:

(ix) *The set C_μ is of potency $\aleph_\mu$.*

C_0 is the set of all integers.

8. The ring C_μ as an ordered set. We suppose in this paragraph that the number ω_μ is *regular.*

Theorem I. The character of the ring C_μ is ω_μ. The character of every element of C_μ is $[1,1]$.

In fact, it follows from 7 (v) that the ω_μ-sequence $\{\omega^\xi\}$ is co-final with C_μ [23]). Since ω_μ is regular, it is the character of C_μ. In order to prove the second part of Theorem I it is sufficient to remark that the element $0 \in C_\mu$ has the character $[1,1]$ (see 4 (iii)) [24]).

Theorem II. Every ω_ν-sequence $\{c_\xi\}$ of C_μ-numbers (where ω_ν is a regular initial number, $\nu \leqslant \mu$) contains a monotone ω_ν-subsequence.

This is evident in the case $\nu = 0$ since every ω-sequence of elements of an ordered set is similar to an ω-sequence of rational numbers. Let $\nu > 0$. Since ω_ν is regular, $\{c_\xi\}$ contains either a constant ω_ν-subsequence or a one-one ω_ν-subsequence. On account of 7 (v) it is sufficient to prove the following lemma:

(i) *Let ω_ν be regular, $0 < \nu \leqslant \mu$. Every one-one ω_ν-sequence $\{c_\xi\}$ of C_μ-numbers contains an ω_ν-subsequence $\{c_{\eta_\xi}\}$ such that*

$$c_{\eta_\xi} = c + c'_\xi$$

where c does not depend on ξ, all term c'_ξ are of the same sign [25]), and $\Delta(c'_\xi)$ is an increasing ω_ν-sequence of ordinal numbers.

---

[23]) The ω_μ-sequence $\{\xi\}$ is also cofinal with C_μ.

[24]) More exactly: *for every $c \in C_\mu$ there exists no element $x \in C_\mu$ such that* $c < x < c + 1$.

[25]) I. e. $c'_\xi \cdot c'_\eta > 0$ for $\xi, \eta \in P_\nu$.

Let

$$c_\xi = \omega^{\alpha_{1,\xi}} n_{1,\xi} + \ldots + \omega^{\alpha_{l_\xi,\xi}} n_{l_\xi,\xi}$$

be the normal form of c_ξ. Since the set of all finite sequences of integers is enumerable and since ω_ν is regular and $\nu > 0$, $\{c_\xi\}$ contains an ω_ν-subsequence $\{c_{\sigma_\xi}\}$ such that

$$c_{\sigma_\xi} = \omega^{\beta_{1,\xi}} n_1 + \ldots + \omega^{\beta_{l,\xi}} n_l$$

where $l, n_1, \ldots n_l$ do not depend on ξ. By definition of the normal form

$$\beta_{1,\xi} > \beta_{2,\xi} > \ldots > \beta_{l,\xi}$$

and $n_j \neq 0$ for $1 \leqslant j \leqslant l$.

Let k denote the least positive integer such that the ω_ν-sequence $\{\beta_{k,\xi}\}$ of ordinal numbers contains an increasing ω_ν-subsequence $\{\beta_{k,\rho_\xi}\}$. The existence of the number $k \, (\leqslant l)$ follows from the fact that $\{c_{\sigma_\xi}\}$ is one-one and ω_ν is regular. If $k=1$, let $c=0$, $\eta_\xi = \sigma_{\rho_\xi}$ and $c'_\xi = c_{\sigma_{\rho_\xi}}$. Since $\Delta(c'_\xi) = \beta_{k,\rho_\xi}$, (i) is fulfilled.

If $k > 1$, the set of values of sequences $\{\beta_{1,\rho_\xi}\}, \ldots \{\beta_{k-1,\rho_\xi}\}$ has potency less than $\aleph_\nu$. Therefore there exists an increasing ω_ν-sequence $\{\tau_\xi\}$ of ordinal numbers $< \omega_\nu$ such that

$$\beta_{1,\rho_{\tau_\xi}} = \beta_1, \ldots, \beta_{k-1,\rho_{\tau_\xi}} = \beta_{k-1},$$

where $\beta_1, \ldots \beta_{k-1}$ do not depend on ξ. Let

$$c = \omega^{\beta_1} n_1 + \ldots + \omega^{\beta_{k-1}} n_{k-1},$$

$$\eta_\xi = \sigma_{\rho_{\tau_\xi}},$$

$$c'_\xi = \omega^{\beta_{k,\rho_{\tau_\xi}}} n_k + \ldots + \omega^{\beta_{l,\rho_{\tau_\xi}}} n_l.$$

Obviously $c_{\eta_\xi} = c + c'_\xi$. If $n_k > 0$, then $c'_\xi > 0$ and if $n_k < 0$, then $c'_\xi < 0$ by 7 (ii). Since $\Delta(c'_\xi) = \beta_{k,\rho_{\tau_\xi}}$, the sequence $\{\Delta(c'_\xi)\}$ is increasing, q. e. d.

Theorem III. Every gap of C_μ *possesses a symmetrical character* $[\omega_\nu, \omega_\nu]$, *where* $\nu < \mu$.

By 7 (viii) there exists no gap with the character $[\omega_\nu, \omega_\sigma]$ where either $\nu \geqslant \mu$ or $\sigma \geqslant \mu$. By 4 (i), in order to prove Theorem III it is sufficient to prove the following lemma:

(ii) *Let* $[C', C'']$ *be a gap of* C_μ *and let an* ω_ν*-sequence* $\{c_\xi\}$ *be co-final with* C' ($\nu > 0$ *and* ω_ν *regular). Then there exists an* ω_ν*-sequence co-initial with* C''.

By (i) the sequence $\{c_\xi\}$ contains an ω_ν-subsequence $\{c_{\eta_\xi}\}$ such that

$$c_{\eta_\xi} = c + c'_\xi$$

where $\Delta(c'_\xi)$ is an increasing ω_ν-sequence and $c'_\xi > 0$ [26]). The sequence $\{c_{\eta_\xi}\}$ is also co-final with C'. Let β be the least ordinal number such that $\beta > \Delta(c'_\xi)$ for every $\xi < \omega_\nu$.

Let A' (resp. A'') denote the set of all C_μ-numbers $x - c$ where $x \in C'$ (resp. $x \in C''$). $[A', A'']$ is a gap of C_μ and the ω_ν-sequence $\{c'_\xi\}$ is cofinal with A'. A' is thus the set of all non-positive C_μ-numbers and of all positive C_μ-numbers x such that $\Delta(x) < \beta$ [27]). Hence A'' is the set of all positive C_μ-numbers x such that $\Delta(x) \geqslant \beta$ and the ω_ν-sequence $\{\omega^\beta - c'_\xi\}$ is co-initial with A''. Consequently the ω_ν-sequence $\{c + \omega^\beta - c'_\xi\}$ is co-initial with C'', q. e. d.

III. The field W_μ.

9. The definition of the field W_μ. The ordered field $(C_\mu)^\times$ (see § 3) will be denoted by W_μ. Elements of W_μ will be called W_μ*-numbers*. W_μ is by definition the least algebraic field containing the set P_μ of all ordinal numbers less than ω_μ.

By 3 (vii) W_μ-numbers are the fractions

(i) $$w = \frac{c_1}{c_2}$$

[26]) For $\{c_\xi'\}$ is increasing. See 7 (v).

[27]) On account of 7 (iv) — (v).

where $c_1, c_2 \in C_\mu$, $c_2 \neq 0$. By 7 (i') W_μ-numbers are the fractions

(i')
$$w = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ $(\beta_1 \neq \beta_2)$ are ordinal numbers belonging to P_μ. Each $w \in W_\mu$ $(w \neq 0)$ can be (by (i) and 7 (i)) represented in the form

(ii'')
$$w = \frac{\omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k}{\omega^{\beta_1} m_1 + \omega^{\beta_2} m_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} m_k}$$

where $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_k$ and $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_l$ are two decreasing sequences of ordinal numbers belonging to P_μ and $n_1, \ldots n_k$, $m_1, \ldots m_l$ are positive or negative integers.

The *degree* of a W_μ-numbers $w \neq 0$ given by formula (i) is by definition the C_μ-number $\Delta(c_1) - \Delta(c_2)$. The number w can be represented in the form (i) in many different ways but the difference $\Delta(c_1) - \Delta(c_2)$ does not depend on the representation in the form (i) on account of 3 (i) and 7 (vi). This definition of the degree is a generalization of the definition given in § 7, therefore we may denote the degree of w with the same symbol $\Delta(w)$.

By 3 (iv) and 7 (ii):

(ii) *The W_μ-number* (i'') *is positive if and only if* $n_1 m_1 > 0$.

On account of 3 (iv) and 7 (iii) — (vi) we obtain for any $w, w' \in W$ $(w \neq 0 \neq w')$:

(iii) $\Delta(w) = \Delta(-w) = \Delta(|w|)$;

(iv) *if* $|w| < |w'|$, *then* $\Delta(w) \leqslant \Delta(w')$;

(v) *if* $\Delta(w) < \Delta(w')$, *then* $|w| < |w'|$;

(vi) $\Delta(ww') = \Delta(w) + \Delta(w')$ *and* $\Delta\left(\frac{1}{w}\right) = -\Delta(w)$.

(vii) *A set $X \subset W_\mu$ is bounded in W_μ if and only if the set of all C_μ-numbers $\Delta(w)$ where $w \in X$ $(w \neq 0)$ is bounded from above, i. e. if there exists a C_μ-number c such that $\Delta(w) \leqslant c$ for every $w \in X$.*

The theorems (iii) — (vii) are a generalization of the theorems 7 (iii) — (vii).

(viii) *If* $\Delta(w) \neq \Delta(w')$, *then* $\Delta(w \pm w') = max(\Delta(w), \Delta(w'))$.

(ix) *The potency of the set* W_μ *is* $\aleph_\mu$.

W_0 is the set of all rational numbers.

Instead of $\frac{\omega^\alpha}{\omega^\beta}$ $(\alpha, \beta \in P_\mu)$ we shall write $\omega^{\alpha-\beta}$. Hence each symbol ω^c where $c \in C_\mu$ will denote a W_μ-number, namely the number $\frac{\omega^\alpha}{\omega^\beta}$ where $\alpha, \beta \in P_\mu$ and $c = \alpha - \beta$ (see 7 (i'); it is easy to prove that ω^c does not depend on the manner of representation of c in the form 7 (i')). Obviously

(x) $\omega^{c'}\omega^{c'} = \omega^{c+c'}$ *and* $\omega^{-c} = \frac{1}{\omega^c}$ *for every* $c, c' \in C_\mu$.

(xi) $\Delta(\omega^c) = c$.

10. The field W_μ as an ordered set. We suppose in this paragraph that the initial number ω_μ is *regular*.

Theorem IV. The character of W_μ *is* ω_μ [28]. *The character of any element of* W_μ *is* $[\omega_\mu, \omega_\mu]$.

The second part of Theorem IV follows from the first on account of 4 (v). In order to prove the first part let $\{c_\mu\}$ be an ω_μ-sequence which is co-final with C_μ (see Theorem I). By 9 (iv)—(v) the ω_μ-sequence $\{\omega^{c_\xi}\}$ is co-final with W_μ [29], q. e. d. More generally:

(i) *In order that* $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} |w_\xi| = +\infty$ *it is necessary and sufficient that* $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} \Delta(w_\xi) = +\infty$.

(ii) *In order that* $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} w_\xi = 0$ $(w_\xi \neq 0)$ *it is necessary and sufficient that* $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} \Delta(w_\xi) = -\infty$.

The lemma (ii) follows from (i) and 9 (vi).

---

[28]) If ω_μ is not regular, the character of W_μ and C_μ is equal the co-final character of P_μ.

[29]) The ω_μ-sequence $\{\xi\}$ is also co-final with W_μ.

(iii) *Let* ω_ν $(0 < \nu \leqslant \mu)$ *be a regular initial number. Every* ω_ν*-sequence* $\{w_\xi\}$ *of* W_μ*-numbers contains an* ω_ν*-subsequence* $\{w_{\eta_\xi}\}$ *such that*

a) $$w_{\eta_\xi} = \frac{u + u'_\xi + u''_\xi}{v + v'_\xi + v''_\xi}$$

where [30]):

b) $$\begin{cases} u = \omega^{c_1} n_1 + \ldots + \omega^{c_k} n_k; \\ u'_\xi = \omega^{c'_{1,\xi}} n'_1 + \ldots + \omega^{c'_{k',\xi}} n_{k'}; \\ u''_\xi = \omega^{c''_{1,\xi}} n''_1 + \ldots + \omega^{c''_{k'',\xi}} n_k; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} v = m_0 + \omega^{d_1} m_1 + \ldots + \omega^{d_l} m_l; \\ v'_\xi = \omega^{d'_{1,\xi}} m'_1 + \ldots + \omega^{d'_{l',\xi}} m'_{l'}; \\ v''_\xi = \omega^{d''_{1,\xi}} m''_1 + \ldots + \omega^{d''_{l'',\xi}} m''_{l''}; \end{cases}$$

d) $n_1, \ldots n_k, n'_1, \ldots n'_{k'}, n''_1, \ldots n''_{k''}, \; m_0, m_1, \ldots m_l, m'_1, \ldots m'_{l'}, m''_1, \ldots m''_{l''}$ *are positive or negative integers which do not depend on* ξ;

e) $c_1, \ldots c_k, c'_{1,\xi}, \ldots c'_{k',\xi}, c''_{1,\xi}, \ldots c''_{k'',\xi}, \; d_1, \ldots d_l, d'_{1,\xi}, \ldots d'_{l',\xi}, d''_{1,\xi}, \ldots d''_{l'',\xi}$ *are* C_μ*-numbers* $(c_1, \ldots c_k, \; d_1, \ldots d_l$ *do not depend on* $\xi)$;

f) $$\begin{cases} c_1 > c_2 > \ldots > c_k \\ c'_{1,\xi} > c'_{2,\xi} > \ldots > c'_{k',\xi} \\ c''_{1,\xi} > c''_{2,\xi} > \ldots > c''_{k'',\xi} \end{cases}$$

g) $$\begin{cases} 0 > d_1 > d_2 > \ldots > d_l \\ 0 > d'_{1,\xi} > d'_{2,\xi} > \ldots > d'_{l',\xi} \\ 0 > d''_{1,\xi} > d''_{2,\xi} > \ldots > d''_{l'',\xi} \end{cases}$$

---

[30]) Some integers among k, k', k'', l, l', l'' may be equal to zero, then the corresponding W_μ-numbers u, u_ξ', u_ξ'', v, v_ξ', v_ξ'' are by definition equal to zero too. See the definition of these numbers on p. 87.

h) *the* ω_ν*-sequences* $\{c'_{i,\xi}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k')$ *and* $\{d'_{j,\xi}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant l')$ *are increasing;*

j) *the* ω_ν*-sequences* $\{c''_{i,\xi}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k'')$ *and* $\{d''_{j,\xi}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant l'')$ *are decreasing.*

Let

$$w_\xi = \frac{\omega^{\alpha_{1,\xi}} p_{1,\xi} + \ldots + \omega^{\alpha_{r_\xi,\xi}} p_{r_\xi,\xi}}{\omega^{\beta_{0,\xi}} q_{0,\xi} + \ldots + \omega^{\beta_{s_\xi,\xi}} q_{s_\xi,\xi}}$$

where $p_{i,\xi}$ and $q_{j,\xi}$ are positive or negative integers; $\alpha_{1,\xi} > \ldots$ $\ldots > \alpha_{r_\xi,\xi}$ and $\beta_{0,\xi} > \ldots > \beta_{s_\xi,\xi}$ are ordinal numbers $< \omega_\mu$.

Since the set of all finite sequences of integers is enumerable and since $\nu > 0$ and ω_ν is regular, $\{w_\xi\}$ contains an ω_ν-subsequence $\{w_{\sigma_\xi}\}$ such that

$$w_{\sigma_\xi} = \frac{\omega^{\alpha_{1,\sigma_\xi}} p_1 + \ldots + \omega^{\alpha_{r,\sigma_\xi}} p_r}{\omega^{\beta_{0,\sigma_\xi}} q_0 + \ldots + \omega^{\beta_{s,\sigma_\xi}} q_s}$$

where the integers $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $p_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ and $q_j \neq 0$ $(0 \leqslant j \leqslant s)$ do not depend on ξ. We multiply now the numerator and the denominator of w_{σ_ξ} by $\omega^{-\beta_{0,\sigma_\xi}}$ and we obtain

$$w_{\sigma_\xi} = \frac{\omega^{a_{1,\xi}} p_1 + \ldots + \omega^{a_{r,\xi}} p_r}{q_0 + \omega^{b_{1,\xi}} q_1 + \ldots + \omega^{b_{s,\xi}} q_s}$$

where $a_{1,\xi} > a_{2,\xi} > \ldots > a_{r,\xi}$ and $0 > b_{1,\xi} > b_{2,\xi} > \ldots > b_{s,\xi}$ are C_μ-numbers.

By Theorem II every ω_ν-sequence of C_μ-numbers contains an ω_ν-subsequence which is either constant or increasing or decreasing. Therefore the ω_ν-sequence $\{w_{\sigma_\xi}\}$ contains an ω_ν-subsequence $\{w_{\eta_\xi}\} = \{w_{\sigma_{\rho_\xi}}\}$ such that every ω_ν-sequence $\{c_{i,\xi}\} = \{a_{i,\rho_\xi}\}$ and $\{d_{j,\xi}\} = \{b_{j,\rho_\xi}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$ is either constant or increasing or decreasing. Let K, K', K'' (L, L', L'')

denote respectively the set of all integers $i \leqslant r$ ($j \leqslant s$) such that the sequence $\{c_{i,\xi}\}$ ($\{d_{j,\xi}\}$) is respectively constant, increasing or decreasing and let

$$u = \sum_{i \in K} \omega^{c_{i,\xi}} p_i$$

$$u'_\xi = \sum_{i \in K'} \omega^{c_{i,\xi}} p_i$$

$$u''_\xi = \sum_{i \in K''} \omega^{c_{i,\xi}} p_i$$

$$v = q_0 + \sum_{j \in L} \omega^{d_{j,\xi}} q_j$$

$$v'_\xi = \sum_{j \in L'} \omega^{d_{j,\xi}} q_j$$

$$v''_\xi = \sum_{j \in L''} \omega^{d_{j,\xi}} q_j$$

The sequences $\{w_{\eta_\xi}\}, \{u'_\xi\}, \{u''_\xi\}, \{v'_\xi\}, \{v''_\xi\}$, and the W_μ-numbers u and v satisfy the conditions a—j), q. e. d.

Theorem V (the generalized theorem of Bolzano-Weierstrass). Let $\mu > 0$. *Every bounded* ω_μ*-sequence* $\{w_\xi\}$ *of* W_μ*-numbers contains a convergent* ω_μ*-subsequence.*

Namely the ω_μ-subsequence $\{w_{\eta_\xi}\}$ which satisfies the conditions a—j), of lemma (iii) is convergent. This is evident in the case where $k = k' = k'' = 0$ since then $w_{\eta_\xi} = 0$ for every $\xi \in P_\mu$. Suppose $k + k' + k'' > 0$, i. e. $w_{\eta_\xi} \neq 0$. Since $\{w_{\eta_\xi}\}$ is bounded, by 9 (vii) there exists a C_μ-number c such that $\Delta\left(w_{\eta_\xi}\right) < c$. By (ii) g) and c):

$$\Delta\left(v + v'_\xi + v''_\xi\right) = 0.$$

Therefore by 9 (vi)

$$\Delta\left(u + u'_\xi + u''_\xi\right) = \Delta\left(w_{\eta_\xi}\right) < c.$$

This inequality implies $k'=0$. In fact, if $k'>0$, the ω_μ-sequence $\{c'_{1,\xi}\}$ of C_μ-numbers would be increasing and bounded (since $c'_{1,\xi}<c$) which is impossible on account of 7 (viii).

Since $\Delta(v+v'_\xi+v''_\xi)=0$, one can analogously prove that $l'=0$. Consequently

$$w_{\eta_\xi}=\frac{u+u''_\xi}{v+v''_\xi}$$

If $k''=0$, then $u''_\xi=0$, hence $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} u''_\xi=0$. If $k''>0$, $\Delta(u''_\xi)=c''_{1,\xi}$ by (iii) f) and 9 (viii). By (iii) j) and 7 (viii) we obtain that $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu}\Delta(u''_\xi)=-\infty$. Hence, on account of (ii) $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} u''_\xi=0$ also.

Analogously one can prove that $\lim\limits_{\xi<\omega_\mu} v''_\xi=0$. Consequently

$$\lim_{\xi<\omega_\mu} w_{\eta_\xi}=\frac{u}{v}$$

q. e. d.

For $\mu=0$ Theorem V is not true (W_0 is the field of rational numbers).

I shall say that an ordered field F possesses the property (BW_μ) if its character is ω_μ and if every bounded ω_μ-sequence of elements of F contains a convergent ω_μ-subsequence.

There exists only one ordered field with the property (BW_0), namely the field of all real numbers. In contrast to the case $\mu=0$, for every $\mu>0$ (ω_μ regular) there exist many non-isomorphic ordered fields with the property (BW_μ) [31]). The field of all real numbers is of potency $2^{\aleph_0}>\aleph_0$; all fields with the property (BW_μ) which I know are of potency $\aleph_\mu$. The problem whether there exists an ordered field with the property (BW_μ) and of potency greater than $\aleph_\mu$ is unsolved.

It is to be remarked that if an ordered field F possesses the property (BW_μ), the real-closed [32]) algebraic extension of F possesses this poperty also [33]).

---

[31]) Such fields can be easily constructed with the help of Hausdorff's definition of power $(A,a)^B_\nu$ of ordered sets A and B. See Hausdorff [1], p. 147.

[32]) *„Reel-abgeschlossen"* — see van der Waerden [1], p. 227 and p. 232 (Satz 8).

[33]) See my paper *On algebraic extension of ordered fields*, to appear in Annales de la Société Polonaise de Mathématique 22 (1949), pp. 173—184.

Now we shall prove two theorems which are analogous to Theorems II and III. To this purpose we shall prove first the following lemma:

(iv)[34]) *Let* ω_ν *be regular*, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$. *Every one-one* ω_ν*-sequence* $\{w_\xi\}$ *of* W_μ*-numbers contains an* ω_ν*-subsequence* $\left\{w_{\sigma_\xi}\right\}$ *such that*

$$w_{\sigma_\xi} = w + w'_\xi$$

where w *does not depend on* ξ, *all terms* w'_ξ *are of the same sign, and the* ω_ν*-sequence* $\{\Delta(w'_\xi)\}$ *is either increasing or decreasing.*

Let $\left\{w_{\eta_\xi}\right\}$ be the ω_ν-subsequence of $\{w_\xi\}$ defined in lemma (iii). Since $\left\{w_{\eta_\xi}\right\}$ is one-one, at least one of the numbers k', k'', l', l'' is positive. Let

$$x_\xi = w_{\eta_\xi} - \frac{u}{v} = \frac{v u'_\xi + v u''_\xi - u v'_\xi - u v''_\xi}{v(v + v'_\xi + v''_\xi)}$$

Since $\{x_\xi\}$ is one-one, the numerator of $\{x_\xi\}$ is equal to zero only for at most one ordinal number ξ. We may thus suppose that it is always different from zero. Since

$$\Delta(v) = \Delta(v + v'_\xi + v''_\xi) = 0$$

by (ii) c) and g) and by 9 (viii), we infer that

$$\Delta(x_\xi) = \Delta(v u'_\xi + v u''_\xi - u v'_\xi - u v''_\xi)$$

i. e. $\Delta(x_\xi)$ is equal to one of the numbers

$$\begin{array}{ll} d_i + c'_{j,\xi} & (0 \leqslant i \leqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant k'), \\ d_i + c''_{j,\xi} & (0 \leqslant i \leqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant k''), \\ c_i + d'_{j,\xi} & (1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant l'), \\ c_i + d''_{j,\xi} & (1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant l''), \end{array}$$

where $d_0 = 0$. In fact, the numerator of $\{x_\xi\}$ is the sum of W_μ-numbers $\omega^c \cdot n$ where n is an integer and c is one of the above written C_μ-numbers (see also 9 (viii)).

[34]) This lemma gives (in the case $\nu = \mu$) another proof of Theorem V.

Consequently, there exist two integers i_0 and j_0 and an ω_ν-subsequence $\{x_{\rho_\xi}\}$ of the sequence $\{x_\xi\}$ such that either

$$\Delta\left(x_{\rho_\xi}\right) = d_{i_0} + c'_{j_0, \rho_\xi} \quad \text{for every} \quad \xi < \omega_\nu ,$$

or

$$\Delta\left(x_{\rho_\xi}\right) = d_{i_0} + c''_{j_0, \rho_\xi} \quad \text{for every} \quad \xi < \omega_\nu ,$$

or

$$\Delta\left(x_{\rho_\xi}\right) = c_{i_0} + d'_{j_0, \rho_\xi} \quad \text{for every} \quad \xi < \omega_\nu ,$$

or

$$\Delta\left(x_{\rho_\xi}\right) = c_{i_0} + d''_{j_0, \rho_\xi} \quad \text{for every} \quad \xi < \omega_\nu .$$

The sequence $\{\Delta\left(x_{\rho_\xi}\right)\}$ is thus either increasing (in the first or third case) or decreasing (in the second or fourth case). Let now $\{\tau_\xi\}$ be an increasing ω_ν-sequence of ordinal numbers $< \omega_\nu$ such that all the terms $x_{\rho_{\tau_\xi}}$ are of the same sign and let

$$\sigma_\xi = \eta_{\rho_{\tau_\xi}} \quad \text{and} \quad w'_\xi = x_{\rho_{\tau_\xi}} .$$

The ω_ν-subsequence $w_{\sigma_\xi} = w + w'_\xi$ fulfils the conditions of lemma (iv), q. e. d.

By (iv) and 9 (iv) — (v) we obtain immediately (see the proof of the Theorem II) the following

Theorem VI. Every ω_ν-sequence of W_μ-numbers (ω_ν regular, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$) contains a monotone ω_ν-subsequence.

Theorem VI is a generalization of Theorem II.

Theorem VII. Every gap of W_μ ($\mu > 0$) has a symmetrical character $[\omega_\nu, \omega_\nu]$ where $0 \leqslant \nu < \mu$.

Let $[\omega_\nu, \omega_\sigma]$ be the character of a gap $[W', W'']$ of W_μ. By 9 (ix) $\nu \leqslant \mu$ and $\sigma \leqslant \mu$. Since every bounded monotone ω_μ-sequence of W_μ-numbers is convergent by Theorem V, we infer that $\nu < \mu$ and $\sigma < \mu$.

Analogously as in the proof of the Theorem III, in order to prove Theorem VII it is sufficient to prove the following lemma:

(v) *Let $[W', W'']$ be a gap of W_μ and let an ω_ν-sequence $\{w_\xi\}$ be co-final with W' (ω_ν regular, $\nu > 0$). Then there exists an ω_ν-sequence co-initial with W''.*

Let $w_{\sigma_\xi} = w + w'_\xi$ be the ω_ν-subsequence of $\{w_\xi\}$ defined in lemma (iv). Since $\{w_{\sigma_\xi}\}$ is increasing, then by 9 (iv) — (v)

a) either $w'_\xi > 0$ and $\{\Delta(w'_\xi)\}$ is increasing ω_ν-sequence of C_μ-numbers,

b) or $w'_\xi < 0$ and $\{\Delta(w'_\xi)\}$ is decreasing.

We shall consider only the case a). The proof in the case b) is analogous.

Let V' (V'') be the set of all W_μ-numbers x such that $x + w \in W'$ ($x + w \in W''$). $[V', V'']$ is a gap of W_μ and the ω_ν-sequence $\{w'_\xi\}$ is co-final with V'.

Let C' denote the class of all C_μ-numbers c such that $c < \Delta(w_\xi)$ for an ordinal number $\xi < \omega_\nu$, and let $C'' = C_\mu - C'$. $[C', C'']$ is a gap of C_μ and the ω_ν-sequence $\Delta(w_\xi)$ is co-final with C'. By lemma 8 (ii) there exists a decreasing ω_ν-sequence $\{c_\xi\}$ of C_μ-numbers which is co-initial with C''.

V' is the class of all non-positive W_μ-numbers and of all positive W_μ-numbers v such that $\Delta(v) \in C'$. V'' is thus the class of all positive W_μ-numbers v such that $\Delta(v) \in C''$. By 9 (iv) — (v) the ω_ν-sequence $\{\omega^{c_\xi}\}$ is co-initial with V''. Consequently the ω_ν-sequence $\{w + \omega^{c_\xi}\}$ is co-initial with W'', q. e. d.

IV. An algebraic property of C_μ and W_μ.

11. Lemmas and definitions. We say that two ordered rings (or fields) A and B are *isomorphic* if there exists a mapping f of A onto B such that for every $a, a' \in A$

a) $f(a + a') = f(a) + f(a')$;

b) $f(aa') = f(a) \cdot f(a')$;

c) $f(a) > 0$ if $a > 0$.

The mapping f is called an *isomorphism* of A onto B. It follows easily from a) and c) that every isomorphism is a one-one mapping and that the converse mapping f^{-1} is an isomorphism of B onto A.

A subset A_1 of an ordered ring (field) A is called a *subring (subfield)* of A if $a - a' \epsilon A_1$ and $aa' \epsilon A_1$ (if $a - a' \epsilon A_1$ and $\frac{a}{a'} \epsilon A_1$, $a' \neq 0$) for every $a, a' \epsilon A_1$. Each subring (subfield) of an ordered ring (field) is also an ordered ring (field).

Let A_1 and B_1 be subrings of two ordered rings A_2 and B_2 respectively and let f_1 be an isomorphism of A_1 onto B_1. An isomorphism f_2 of A_2 onto B_2 is called the *extension* of f_1 if $f_1(a) = f_2(a)$ for every $a \epsilon A_1$.

Two following lemmas are obvious:

(i) *Let A and B be two isomorphic ordered rings. For every isomorphism f of A onto B there exists an isomorphism g of $A^\times$ onto $B^\times$ which is an extension of f.*

(ii) *Let $\{A_\xi\}$ and $\{B_\xi\}$ be ascending α-sequences of subrings of ordered rings A and B respectively and let $\{f_\xi\}$ be an α-sequence of isomorphisms of A_ξ onto B_ξ such that f_η is an extension of f_ξ for every $\xi < \eta < \alpha$. Then $A_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} A_\xi$ and $B_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} B_\xi$ are also subrings of A and B respectively and there exists exactly one isomorphism f_α of A_α onto B_α which is the common extension of all isomorphisms f_ξ $(\xi < \alpha)$.*

If A is a subring of an ordered ring A_0 and $a \epsilon A_0$, $A(a)$ will denote the least ordered subring of A_0 containing the element a and the subring A. If $x < a$ for every $x \epsilon A^\times$ (in the field $A_0^\times$), we shall write: $A < a$.

(iii) *Let A be a subring of an ordered ring A_0 and $a \epsilon A_0$. $A(a)$ is the set of all elements*

$$x = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i$$

where $a_i \epsilon A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

If $A < a$ and $a_n \neq 0$, then *$x > 0$ if and only if $a_n > 0$.*

The first remark is obvious. The second is obvious in the case $n = 0$. Suppose $n > 0$ and consider $a, a_0, \ldots a_n$ as elements of $A_0^\times$. We have

$$x = n \cdot \frac{a_n a^n}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_n a^n}{n} + a_i a^i \right) =$$

$$= a_n \cdot \sum_{i=0}^{1} \frac{a^i}{n} \left(a^{n-i} + \frac{n a_i}{a_n} \right).$$

Since $A < a$, thus $a > 1$ where 1 is the unit [35]) of $A_0^\times$. Hence

$$a^{n-i} \geqslant a > -\frac{n a_i}{a_n} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

since $-\frac{n a_i}{a_n} \in A^\times$ and $A < a$. Consequently

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{n} \left(a^{n-i} + \frac{n a_i}{a_n} \right) > 0$$

which proves the lemma.

(iv) *Let A and B be isomorphic subrings of two ordered rings A_0 and B_0 respectively, $a \in A_0$, $b \in B_0$, $A < a$ and $B < b$. Every isomorphism f of A onto B can be extended to an isomorphism g of $A(a)$ onto $B(b)$.*

Namely, the mapping g defined by the formula

$$g\left(\sum_{i=0}^{n} a_i a^i \right) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \cdot b^i$$

is an isomorphism of $A(a)$ onto $B(b)$ on account of (iii). Obviously g is an extension of f.

12. Theorems on embedding. It is well known that every ordered ring (possessing the unit) contains a subring isomorphic to the ring C_0 of all integers, and that every ordered field contains a subfield isomorphic to the field W_0 of all rational numbers. In case of rings and fields of a transfinite character these theorems can be expressed in the following more exact form:

---

[35]) An element a is called the unit of a ring R if $a x = x$ for every $x \in R$.

Theorem VIII. If an ordered ring R of character ω_μ contains the unit, then it contains a subring isomorphic to the ring C_μ.

Theorem IX. Every ordered field F of character ω_μ contains a subfield isomorphic to W_μ.

Theorem IX follows immediately from Theorem VIII. In fact, by Theorem VIII F contains a subring F_0 isomorphic to C_μ. By lemma 11 (i) the subfield $F_0^\times \subset F$ is isomorphic to $C_\mu^\times = W_\mu$.

For every $\alpha \epsilon P_\mu$ let C^α denote the set containing the number 0 and all C_μ-numbers c such that $\Delta(c) < \omega^\alpha$.

We begin the proof of Theorem VIII with the following lemmas:

(i) $C^0 = C_0$.

(ii) *C^α is an subring of C_μ of potency less than $\aleph_\mu$.*

(iii) *If α is a limit number, then* $C^\alpha = \sum_{\xi<\alpha} C^\xi$.

(iv) $C_\mu = \sum_{\alpha<\omega_\mu} C^\alpha$.

(v) $C^\alpha < \omega^{\omega^\alpha}$.

(vi) *For each W_μ-number $w \epsilon (C^\alpha)^\times$ there exists a C_ξ-number $c \epsilon C^\alpha$ such that $w \leqslant c$.*

(vii) $C^{\alpha+1} = C^\alpha\left(\omega^{\omega^\alpha}\right)$.

The lemmas (i) — (iv) are obvious. If $w \epsilon (C^\alpha)^\times$ $(w \neq 0)$, then $w = \frac{c}{c'}$ where $\Delta(c) < \omega^\alpha$ and $\Delta(c') < \omega^\alpha$. Since $|c'| \geqslant 1$, by 9 (v):

$$w \leqslant |c| < \omega^{\omega^\alpha}$$

which proves (v) and (vi). By 11 (iii), $C^\alpha\left(\omega^{\omega^\alpha}\right)$ is the set of all C_μ-numbers which can be represented in the form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \left(\omega^{\omega^\alpha}\right)^i$$

where $c_i \epsilon C^\alpha$. Since $\left(\omega^{\omega^\alpha}\right)^i = \omega^{\omega^\alpha \cdot i}$, $C^\alpha\left(\omega^{\omega^\alpha}\right)$ is the set of all C_μ-numbers whose degree is $\omega^\alpha \cdot n + \beta$ where n is a non-negative integer and β is an ordinal number less than ω^α. Thus $C^\alpha\left(\omega^{\omega^\alpha}\right)$ is the set of all $c \epsilon C_\mu$ such that $\Delta(c) < \omega^{\alpha+1}$. Lemma (vii) is proved.

Suppose now that an ordered ring contains the unit of multiplication, i. e. that R contains a subring isomorphic to C_0. We define by transfinite induction an ascending ω_μ-sequence $\left\{R^\xi\right\}$ of subrings of R and an ω_μ-sequence $\left\{f_\xi\right\}$ of isomorphisms mapping respectively C^ξ onto R^ξ such that, for $\xi < \eta < \omega_\mu$, f_η is an extension of f_ξ. Namely:

R^0 is the subring isomorphic to C^0 (see (i)) and f_0 is an isomorphism of C^0 on R^0.

If $\alpha = \beta + 1$ where β is an ordinal number, then $R^\beta = f^\beta(C^\beta)$ is of potency less than $\aleph_\mu$ by (ii). On account of 1 (i) there exists an element $a_\beta \epsilon R$ such that $a < a_\beta$ for every $a \epsilon R^\beta$. Since $(C^\beta)^\times$ possesses the property (vi) and $(R^\beta)^\times$ is isomorphic to $(C^\beta)^\times$ by 11 (i) and by the inductive assumption, the field $(R^\beta)^\times$ possesses also this property, i. e. for every $x \epsilon (R^\beta)^\times$ there exists $a \epsilon R^\beta$ such that $x \leqslant a$. Consequently $R^\beta < a_\beta$. Let $R^\alpha = R^\beta(a_\beta)$ and let f_α be an extension of f_β over C^α (the existence of f_α follows from (vii) and 11 (iv)).

If α is a limit number, then $R^\alpha = \sum\limits_{\xi<\alpha} R^\xi$ and f_α is the common extension of all isomorphisms f_ξ, $\xi < \alpha$ (see lemma 11 (ii)).

The so-defined ω_μ-sequences $\left\{C^\xi\right\}$, $\left\{R^\xi\right\}$ and $\left\{f_\xi\right\}$ fulfilling the assumptions of lemma 11 (ii), the subring $\sum\limits_{\xi<\omega_\mu} R^\xi$ of the ring R is isomorphic to C_μ (see (iv)). Theorem VIII is proved.

REFERENCES

F. Hausdorff — [1] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914. [2] *Mengenlehre*, Berlin 1927.

W. Sierpiński — [1] *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928. [2] *Zarys teorii mnogości* Cz. I. *Liczby pozaskończone*. Warszawa 1928.

B. L. van der Waerden — [1] *Moderne Algebra I*, Berlin 1930.

Roman Sikorski

O pewnym uporządkowanym ciele algebraicznym

Przedstawił czł. A. Mostowski dn. 12 listopada 1948 r.

Streszczenie

Część pierwsza tej pracy zawiera kilka elementarnych uwag o własnościach uporządkowanego ciała algebraicznego A oraz definicję zbieżności ciągu typu ω_μ elementów ciała A, gdzie ω_μ jest pewną regularną liczbą porządkową początkową, jednoznacznie określoną przez ciało A i zwaną charakterem ciała A.

Druga i trzecia część poświęcona jest badaniu własności (z punktu widzenia teorii mnogości uporządkowanych) pewnego uporządkowanego pierścienia algebraicznego C_μ i pewnego uporządkowanego ciała algebraicznego W_μ. C_μ i W_μ są to najmniejszy pierścień i najmniejsze ciało zawierające zbiór P_μ liczb porządkowych $\alpha < \omega_\mu$ (jako działania algebraiczne w P_μ przyjęte są t. zw. suma naturalna i iloczyn naturalny Hessenberga). W_μ ma charakter ω_μ i spełnia (dla $\mu > 0$) twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

Część czwarta zawiera dowód twierdzenia, że każde ciało algebraiczne o charakterze ω_μ zawiera podciało izomorficzne z W_μ.

A n d r z e j   A l e x i e w i c z

On Denjoy integrals of abstract functions

Mémoire présenté par M. S. Mazur à la séance du 16 janvier 1948.

This paper [1]) deals with the Denjoy integrals of abstract functions i. e. functions from a real interval to a Banach space. Recently years several authors have developped the theory of the Lebesgue-integration of those functions; I introduce two kinds of the Denjoy integrals each of which generalizes the concept of the Denjoy integrals (in the wide sense) of real functions: one which may be called the strong and which corresponds to the Lebesgue-Bochner integral, — the other related with the weak limiting process in Banach spaces and generalizing the Pettis integral. We define the integrals in both descriptive and constructive way, discuss some of their properties, and establish relations between the differentiation and the Denjoy integration of abstract functions.

N o t a t i o n s.

$\underset{x}{E}\{w(x)\}$ denotes the set of the elements x which fulfil the condition $w(x)$.

X will denote a Banach space, $\| x \|$ the norm of the element $x \in X$. The Banach space of the linear functionals $\xi(x)$ defined on X, called the *conjugate* to X, will be denoted by Ξ; $\operatorname{conv} E$ denotes the convex hull of the set E.

All functions considered are supposed to be defined in a finite, fixed but arbitrary interval I. The abstract functions i. e. functions from I to X will be denoted by $x(t)$, $y(x)$, $z(t)$,

[1]) the results of which have been presented to the Polish Mathematical Sciety, Section in Warsaw at the meeting, June 17, 1946.

for the real-valued functions we reserve the sign $\gamma(t)$; $c_E(t)$ denotes the characteristic function of the set E, $x[E]$ the range of $x(t)$ for t belonging to the set E. The function $x(t)$ considered as element of a functional space will be denoted by $x(:)$.

$I, I_n, \ldots$ denote finite intervals in R_1, the space of real numbers.

$\bar{E}$ and $\operatorname{Int} E$ denote respecively the closure and the set of the interior points of E.

E being any measurable set in R_1, $|E|$ denotes its Lebesgue measure; in more general cases $|E|$ denotes the outer measure of E.

1. We will first recall definitions and some properties of Bochner and Pettis integrals.

A function $x(t)$ assuming only a finite number of values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively in sets $E_1, E_2, \ldots, E_n$ each of which is measurable is called *simple* and denoted by $\{x_i, E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. A function $x(t)$ is said to be *strongly measurable* (Bochner [1] [2]), p. 263) if there is a sequence of simple functions $x_n(t)$ converging almost everywhere to $x(t)$; a function $x(t)$ is said to be *weakly measurable* (Pettis [1], p. 277) if, given any linear functional $\xi(x)$, the real-valued function $\xi(x(t))$ is measurable. Any strongly measurable function is weakly measurable but the converse is not true. However, as shown by Pettis ([1], p. 278), if $x(t)$ is weakly measurable and if there is a set E_0 of measure 0 such that the set $x[I-E_0]$ is separable, the function $x(t)$ is strongly measurable.

A function $x(t)$ is said to be integrable *Lebesgue-Bochner* or simply integrable (LB) on the interval $\langle a, b\rangle$ if $x(t)$ is strongly measurable and $\int_a^b \|x(t)\|\,dt < +\infty$. This being so, the *Lebesgue-Bochner integral* is defined as follows: for any simple function $x(t) = \{x_i, E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ in $\langle a, b\rangle$ which is obviously integrable (LB) we put $(LB)\int_a^b x(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} x_i |E_i|$; now,

[2]) The numbers in square brackets refer to the Bibliography at the end of this paper.

$x(t)$ being any (LB) integrable function in $\langle a, b \rangle$, it can be shown that, $x_n(t)$ being any sequence of simple functions, convergent almost everywhere to $x(t)$ and such that $\int_a^b \sup_{n=1,2,\dots} \|x_n(t)\| dt < +\infty$, the limit

$$\lim_{n\to\infty} (LB) \int_a^b x_n(t)\, dt$$

exists, and is independent of the choice of the particular sequence $x_n(t)$. This limit will be denoted by $(LB) \int_a^b x(t)\, dt$. A function $x(t)$ defined in a measurable set E is said to be integrable (LB) *on this set* if the function $\bar{x}(t)$ equal to $x(t)$ for $t \in E$ and equal to 0 elsewhere is integrable (LB) on an interval $[a, b] = I \supset E$; then it is obvious that $(LB) \int_a^b \bar{x}(t)\, dt$ does not depend of the particular choice of the interval I, and we put $(LB) \int_E x(t)\, dt = (LB) \int_a^b \bar{x}(t)\, dt$.

A function $x(t)$ is said to be integrable *Lebesgue-Pettis* or simply integrable (LP) on the interval I if (i) for any element $\xi(:) \in \Xi$ $\int_a^b |\xi(x(t))|\, dt < +\infty$ (ii) for any measurable set $E \subset I$ there is an element x_E such that

$$\xi(x_E) = \int_E \xi(x(t))\, dt$$

for any functional $\xi(:) \in \Xi$. The element x_E is termed the *Lebesgue-Pettis integral* of the function $x(t)$ on the set E, and denoted by $(LP) \int_E x(t)\, dt$. If $x(t)$ is a function defined in a measurable set, its Lebesgue-Pettis integral on this set may be defined analogously as in the case of the (LB) integral.

Any (LB) integrable function is integrable (LP) and both integrals are equal; the converse does not hold even for strongly measurable functions.

Both integrals (LB) and (LP) have the following descriptive definitions which are equivalent to the preceding ones.

The function $y(t)$ is said to be *strongly differentiable* at the point t_0 if there exists an element x_0 such that

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}-x_0\right\|=0;$$

the element x_0 will be called the *strong derivative* of $y(t)$ at the point t_0, and will be denoted by $y_s'(t_0)$.

A function $y(t)$ is termed *strongly absolutely continuous* or simply sAC if

$$\sum_{i=1}^{n}\|y(b_i)-y(a_i)\|\to 0 \tag{1.1}$$

whatever may be the finite system $(a_i, b_i)_{i=1,2,\dots,n}$ of non overlapping intervals such that $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\to 0$. A sAC function may be deprived of strong derivative everywhere (Bochner [2]).

The descriptive definition of the (LB) integrable function is the following: a function $x(t)$ is called integrable (LB) on the interval $I=\langle a,b\rangle$ if there is a sAC function $y(t)$ on I such that (i) $y_s'(t)$ exists almost everywhere, (ii) $y_s'(t)=x(t)$ almost everywhere. Starting from this definition the (LB) integral may be defined in the usual manner.

A function $y(E)$ of measurable set E is said to be *absolutely continuous* if $|E|\to 0$ implies $y(E)\to 0$; the function $y(E)$ is called *additive* if $y(E_1+E_2)=y(E_1)+y(E_2)$ for any pair E_1, E_2 of measurable disjoint sets.

A function $x(t)$ is termed to be the *pseudoderivative* (Pettis [1], p. 299) of the set-function $y(E)$ if for any functional $\xi(\cdot)\in\Xi$ the real-valued function $\varphi_\xi(t)=\xi(y([a,t]))$ is derivable almost everywhere to the value $\xi(x(t))$.

The descriptive definition of the (LP) integral is the following: a function $x(t)$ is said to be integrable (LP) on the interval I if there is an additive and absolutely continuous function $y(E)$ defined for any measurable set $E\subset I$ such that (i) a pseudoderivative $x(t)$ of the function $y(E)$ exists, (ii)

$\overline{x}(t) = x(t)$ almost everywhere. This being so, we write $y(E) = (LP) \int\limits_E x(t)\, dt$.

2. A function $x(t)$ is called *strongly continuous* on the set E if $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, $x_0 \in E$ implies $\|x(t_n) - x(t_0)\| \to 0$. A function $y(t)$ is said to be *sAC on the set E* if, (a_i, b_i) being any finite systen of non-overlapping intervals whose end-points belong to the set E, the relation $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \to 0$ implies $\sum\limits_{i=1}^{n} \|y(b_i) - y(a_i)\| \to 0$. A function $y(t)$ will be said to be *strongly absolutely continuous in the generalized sense* or simply to be *sACG* on the set E if $y(t)$ is strongly continuous on this set and if the set E is the sum of a sequence of sets on each of which $y(t)$ is *sAC*.

We will use in the sequel the following lemma which can be easily proved.

(2.1) *Let $y(t)$ be any function sAC on a closed set $E \subset I$. Denote by $I_n = (a_n, b_n)$ the sequence of the intervals contiguous to the set E. Define the function $\overline{y}(t)$ to be equal to $y(t)$ for $t \in E$ and to be linear on the closure of any interval I_n i. e.*

$$\overline{y}(t) = y(a_n) + \frac{y(b_n) - y(a_n)}{b_n - a_n}(t - a_n) \text{ for } t \in I_n .$$

Then $y(t)$ is sAC on I.

An element x_0 will be said to be the *strong approximate derivative* of the function $y(t)$ at the point t_0 if

$$\operatorname*{lim\,ap}_{t \to t_0} \left\| \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} - x_0 \right\| = 0 .$$

The element x_0 will be denoted by $y'_{\mathrm{sap}}(t)$.

A simple modification of Bochner's example [2] shows that a *sACG* function may be deprived everywhere of the strong approximate derivative.

A function $y(t)$ satisfying the inequality $\|y(t_1) - y(t_2)\| \leqslant M(t_1 - t_2)$ where M is independent of t_1 and t_2 is said to satisfy the *Lipschitz condition*. The space X will be said to have the *property* (D) if any function $y(t)$ from I to X, satisfying the Lipschitz condition, is strongly differentiable a. e. in I.

Theorem 1. *Let the space X have the property (D), then any function which is $sACG$ on an interval is strongly differentiable almost everywhere.*

Proof. Suppose the function $y(t)$ is $sACG$ on $I=[a,b]$ then $I=\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ and $y(t)$ is sAC on $E_n\,(n=1,2,...)$; the function $y(t)$ being strongly continuous, we may suppose that the sets E_n are closed. Define the function $\overline{y}_n(t)$ as equal to $y(t)$ for $t \in E_n$ and linear on any interval contiguous to the set E_n. Since by (2.1) the function $\overline{y}_n(t)$ is sAC on I, by a theorem of Dunford-Morse ([1], p. 419) the strong derivative $\overline{y}'_{n\,s}(t)$ exists almost everywhere, it follows that almost everywhere in E_n (in fact at almost any point of density of the set E_n) $y'_{\text{sap}}(t)=y'_{n\,s}(t)$.

By a theorem of Pettis ([2], p. 427) any reflexive space has the property (D) hence

(2.2) *If the space X is reflexive, then any function which is $sACG$ on an interval is strongly approximately differentiable almost everywhere in this interval.*

We can state now the descriptive definition of the *Denjoy-Bochner* integral.

A function $x(t)$ is said to be *integrable Denjoy-Bochner* or simply *integrable* (DB) on the interval I_0 if there is a function $y(t)$ which is $sACG$ on this interval and such that (i) $y'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere in I_0, (ii) $y'_{\text{sap}}(t)=x(t)$ almost everywhere in I_0. This being so, we define for any interval $I=[a,b]\subset I_0$ the *Denjoy-Bochner integral* by formula

$$(DB)\int_I x(t)\,dt=(DB)\int_a^b x(t)\,dt=y(b)-y(a).$$

The function $y(t)$ is called the *indefinite* (DB) integral of $x(t)$.

We must show first that the integral (DB) is uniquely determined, this follows from the

Theorem 2. *Let $y(t)$ be a sACG function having the strong approximate derivative equal to* 0 *almost everywhere, then $y(t) = const.$*

Proof. Let $\xi(:)$ be an arbitrary element of Ξ, we see easily that the real-valued function $\varphi(t) = \xi(y(t))$ is ACG and $\varphi'_{ap}(t) = 0$ almost everywhere, then $\varphi(t) = \text{const}$, it follows by a theorem of Banach ([1], p. 57) that $y(t) = \text{const}$.

The (DB) integral has the following properties: (1) if two functions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are integrable (DB) on the interval I, the same is true for the function $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, α and β being arbitrary constants, and

$$(DB)\int_I [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]\, dt = \alpha (DB)\int_I x_1(t)\, dt + \beta (DB)\int_I x_2(t)\, dt ;$$

(2) $x(t)$ being fixed, $\int_J x(t)\, dt$ is an additive, strongly continuous function of the interval J.

Theorem 3. *Suppose Z is a Banach space and $U(x)$ is a linear operation from X to Z. Let $x(t)$ be a function integrable (DB) on I, then the function $U(x(t)) = z(t)$ (from I to Z) is integrable (DB) and*

$$(DB)\int_I U(x(t))\, dt = U\left((DB)\int_I x(t)\, dt\right).$$

Proof. Denote by $y(t)$ the indefinite (DB) integral of the function $x(t)$. By the inequality $\|U(x)\| \leqslant \|U\|\,\|x\|$, the function $U(y(t)) = v(t)$ is $sACG$ and $v'_{sap}(t) = U(x(t))$ in any point where $y'_{sap}(t) = x(t)$ i. e. almost everywhere.

Theorem 4. *Any (DB) integrable function $x(t)$ is strongly measurable.*

Proof. By Theorem 3, given any functional $\xi(:) \in \Xi$, the real-valued function $\xi(x(t))$ is integrable, Denjoy hence measurable. Thus, $x(t)$ is weakly measurable.

To prove that $x(t)$ is strongly measurable it is sufficient to show (Pettis [1], p. 278) that there is a set E_0 of measure 0 such that the set $x[I - E_0]$ is separable. Denote by $y(t)$

the indefinite (DB) integral of $x(t)$, put $E = \underset{t}{E}\{y'_{\mathrm{sap}}(t) = x(t)\}$ $E_0 = I_0 - E$, we have $|I_0 - E| = 0$, $|E_0| = 0$. Let $t_1, t_2, \ldots$ be a sequence of points dense in I, let X_0 be the set of all elements of the form $[y(t_p) - y(t_q)]/(t_p - t_q)$ where $p, q = 1, 2, \ldots$, $t_p \neq t_q$. W shall show that $x[E] \subset \overline{X_0}$. Choose $\varepsilon > 0$ freely, and let $t_0 \epsilon E$, there is a t such that $\|[y(t) - y(t_0)]/(t - t_0) - x(t_0)\| < \varepsilon$; by the strong continuity of $y(t)$ there are numbers p and q such that $\|[y(t_p) - y(t_q)]/(t_p - t_q) - [y(t) - y(t_0)]/(t - t_0)\| < \varepsilon$, hence $\|[y(t_p) - y(t_q)]/(t_p - t_q) - x(t_0)\| < 2\varepsilon$.

A function $x(t)$ is said to be integrable (DB) *on the set* E if the function $c_E(t)x(t)$ is integrable (DB) on an interval $I \supset E$; this being so, we write

$$(DB)\int_E x(t)\,dt = (DB)\int_I c_E(t)\,x(t)\,dt.$$

This element does not depend on the choice of the interval I.

Theorem 5. *Let the function $x(t)$ be integrable (DB) on any measurable set $E \subset I$, then $x(t)$ is integrable (LP) and*

$$(DB)\int_E x(t)\,dt = (LP)\int_E x(t)\,dt.$$

Proof. Let $\xi(:)$ be an arbitrary element of Ξ. By Theorem 3

$$(DB)\int_E \xi(x(t))\,dt = \xi\left((DB)\int_E x(t)\,dt\right);$$

the integral on the left-hand side exists for each measurable set E, hence the function $\xi(x(t))$ is integrable in the sense of Lebesgue. Theorem 5 is thus a consequence of the definition of the (LP) integral.

The hypothesis of Theorem 5 does not imply necessarily the (LB) integrability of $x(t)$. In fact, let X be a Banach space in which there is a unconditionally convergent [3]) series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ such that $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| = +\infty$,

---

[3]) A series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ is said to be *unconditionally convergent* (Orlicz [1], p. 33) if this series converges independently of the arrangement of its elements.

we may choose e. g. $X=(L^2)$. Let I_n be a sequence of disjoint intervals such that $[0,1)=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ e. g. $I_n=\left[1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n+1}\right)$. Put $x(t)=x_n/|I_n|$ for $t\in I_n$, $n=1,2,\dots$ This function is (LP) integrable, and we see easily that this function is (DB) integrable on any measurable set $E\subset[0,1)$. This function is, however, not integrable (LB) since $\int_0^1 \|x(t)\|\,dt=+\infty$.

3. In this paragraph we will establish some further properties of $sACG$ functions.

Theorem 6. *A strongly continuous function is $sACG$ if and only if any perfect set contains a portion on which this function is sAC.*

The proof does not differ from this for real-valued functions (see, for instance, Saks [1], p. 233).

Theorem 7. *Let $x(t)$ be a function defined in a set E, and suppose that in all points of the set E, except those of an enumerable set, the inequality*

$$\overline{\lim\,\mathrm{ap}}_{h\to+0}\left\|\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right\|<+\infty$$

holds. Then the set E is the sum of a sequence of sets on each of which the function $y(t)$ is sAC.

The proof does not differ essentially from this for real-valued functions (Saks [1], p. 239).

Theorem 7 implies that any strongly continuous function which has the strong approximate derivative in an interval, except at most in an enumerable set, is $sACG$. Hence

Theorem 8. *Let $y(t)$ be a strongly continuous function in an interval I and suppose that the strong approximate derivative $y'_{\mathrm{sap}}(t)=x(t)$ exists in I, except in an enumerable set. Then the function $x(t)$ is integrable (DB) and*

$$(DB)\int_a^b x(t)\,dt=y(b)-y(a)\quad \textit{for}\quad (a,b)\subset I.$$

We shall say that a function $y(t)$ *fulfils the condition* (l) at the point t_0 if there is a constant $M = M(t_0)$ such that

$$\|y(t) - y(t_0)\| \leqslant M|t - t_0|$$

for any t.

(3.3) *If a function* $y(t)$ *fulfils the condition* (l) *almost everywhere in an interval* I *and if* $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ *exists almost everywhere in* I, *then* $y'_{\mathrm{s}}(t)$ *exists almost everywhere in* I.

Proof. Denote by N_0 the set of points t such that $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ does not exist, put $T_n = \underset{t}{E}\{M(t) \leqslant n\}$. Denote by T_n^* the set of all points belonging to the set $T_n - N_0$ we have obviously $I = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^* + E_0$ where $|E_0| = 0$. We will prove that at any point of outer density of the set T_n^* the strong derivative $y'_{\mathrm{s}}(t)$ exists.

Let $t_0 \epsilon T_n^*$ be a point of outer density of the set T_n^*; there is a set $T_0 \subset T_n^*$ for which the point t_0 is a point of outer density and such that

$$\lim_{t \to t_0} {}_{T_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = x_0 = y'_{\mathrm{sap}}(t_0).$$

Let $t_i \to t_0$ and suppose, to fix the ideas, that $t_i < t_0$, then

$$\frac{|(t_i, t_0)\, T_0|}{t_0 - t_i} = \delta_i \to 1. \tag{3.4}$$

In the interval (t_i, t_0) there is a point $t_i^* \epsilon T_0$ such that $\dfrac{|t_i^* - t_i|}{t_0 - t_i} \leqslant \varepsilon_i = 1 - \delta_i \left(1 - \dfrac{1}{i}\right)$, for, in the contrary case, the interval $(t_i, t_i + \varepsilon_i(t_0 - t_i))$ would be contained in the set $(t_i, t_0) - T_0$, hence

$$|(t_i, t_0)\, T_0| \leqslant (t_0 - t_i) - \varepsilon_i(t_0 - t_i) = (t_0 - t_i)(1 - \varepsilon_i) =$$
$$= (t_0 - t_i)\,\delta_i\left(1 - \frac{1}{i}\right)$$

and this contradicts the relation (3.4). We have

$$\frac{y(t_i) - y(t_0)}{t_i - t_0} = \frac{y(t_i) - y(t_i^*)}{t_i - t_0} + \frac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i - t_0}$$

and since $t_i \in T_n^*$

$$\left\| \frac{y(t_i) - y(t_i^*)}{t_i - t_0} \right\| \leqslant \left\| \frac{y(t_i) - y(t_i^*)}{t_i - t_i^*} \right\| \frac{t_i - t_i^*}{t_i - t_0} \leqslant n\,\varepsilon_i;$$

we find also

$$\frac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i - t_0} = \frac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i^* - t_0}\,\frac{t_i^* - t_0}{t_i - t_0} =$$

$$= \left(1 - \frac{t_i - t_i^*}{t_i - t_0}\right) \frac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i^* - t_0} = \left(1 + \frac{t_i^* - t_i}{t_0 - t_i}\right) \frac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i^* - t_0}.$$

Since $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ and $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{y(t_i^*) - y(t_0)}{t_i^* - t_0} = x_0$, it follows

$$\lim_{i\to\infty} \frac{y(t_i) - y(t_0)}{t_i - t_0} = x_0 = y'_{\mathrm{sap}}(t_0).$$

The statement (3.3) may be generalized as follows

(3.5) *Let $y(t)$ be a function which fulfils the condition (l) in a set E and such that $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists almost everywhere in this set, then the strong derivative $y'_{\mathrm{s}}(t)$ exists almost everywhere in E.*

Theorem 9. *Let $y(t)$ be a function which is sAC in an interval I, and suppose that the strong approximate derivative $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists almost everywhere in I, then the strong derivative $y'_{\mathrm{s}}(t)$ exists almost everywhere in I.*

Proof. By a theorem of Gelfand ([1], p. 262) the function $y(t)$ fulfils almost everywhere the condition (l), it is sufficient to apply (3.3).

(3.6) **Corollary.** *Let the function $x(t)$ be integrable (DB) and suppose that the indefinite integral (DB) of the function $x(t)$ is sAC. Then the function $x(t)$ is integrable (LB).*

Theorem 10. *Let the function $y(t)$ be sAC in a closed set F and suppose that the strong approximate derivative $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists almost everywhere in F. Then the function $y(t)$*

is strongly differentiable relatively to the set F almost everywhere in F, i. e. the limit

$$\lim_{t\to t_0} {}_F \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$

exists almost everywhere in F.

P r o o f. Denote by I_n the sequence of all intervals contiguous to the set F, let $\overline{y}(t)$ be a function equal to $y(t)$ for $t \in F$ and linear on any interval $\overline{I}_n$. This function is sAC and the derivative $\overline{y}'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists almost everywhere. Hence, by Theorem 9, the derivative $\overline{y}'_s(t)$ exists almost everywhere in F, and we observe easily that $\overline{y}'_s(t_0) = \lim_{t\to t_0} {}_F \dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$, almost everywhere in F.

4. Given any function of interval $z(I)$, write $\omega(z;I) = \sup_{J\subset L} \|z(J)\|$.

A series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ of elements of X is said tobe *absolutely convergent* if $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Theorem 11. *Let F be a bounded closed set with bounds a, b, and let I_n be the sequence of intervals contiguous to the set F. Suppose that the function $x(t)$ is integrable (DB) on the set F as well as on each interval I_n, suppose further that*

$$(4.1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left\| (DB)\int_{I_n} x(t)\,dt \right\| < +\infty \quad \text{and} \quad \omega\left((DB)\int_I x(t)\,dt; I_n\right) \to 0.$$

Then the function $x(t)$ is integrable (DB) on $[a,b]$ and

$$(4.2)\qquad (DB)\int_a^b x(t)\,dt = (DB)\int_F x(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} (DB)\int_{I_n} x(t)\,dt.$$

The proof is identical with this for real-valued functions (see, for instance, S a k s [1], p. 257).

Theorem 12. *Let $x(t)$ be a function integrable (DB), then any perfect set F contains a portion FI on which $x(t)$ is integrable (DB), moreover denoting by a, b the bounds od the set I, and by I_n the sequence of the intervals contiguous to the set FI, we have* (4.1) *and* (4.2).

Proof. Denote by $y(t)$ the indefinite integral (DB) of the function $x(t)$. By Theorem 6 there is an interval I such that $FI \neq 0$ and such that $y(t)$ is sAC on FI. Denote by I_n the sequence of intervals contiguous to the set FI and define the function $\overline{y}(t)$ to be equal to $y(t)$ on FI and to be linear on any interval $\overline{I}_n$; $\overline{y}(t)$ is sAC on I, and the derivative $\overline{y}'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere. Especially almost everywhere in F we have $\overline{y}'_{\text{sap}}(t) = y'_{\text{sap}}(t) = x(t)$. By Theorem 9 the derivative $\overline{y}'_{\text{s}}(t)$ exists almost everywhere in I, hence the function $\overline{x}(t) = \overline{y}'_{\text{s}}(t)$ is integrable (LB) in I. Since $\overline{x}(t) = x(t)$ almost everywhere in FI, the function is integrable (LB) on FI. The relations (4.1) and (4.2) follow easily by Theorem 11.

5. Let $\gamma(t)$ be a real-valued function of bounded variation in an interval $I = [a, b]$; let $\pi: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ be a partition of this interval, write $\delta(\pi) = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} |t_i - t_{i-1}|$, and let $\vartheta_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$. If the sums

$$S(\pi) = \sum_{\nu=1}^{n} x(\vartheta_\nu)\,[\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})] \tag{5.1}$$

tend to a limit as $\delta(\pi) \to 0$, the function $x(t)$ is said to be *integrable Stieltjes* or simply (S) relatively to the function $\gamma(t)$, and the limit of the sums (5.1) will be denoted by

$$(S)\int_a^b x(t)\,d\gamma(t).$$

Any strongly continuous function is integrable (S) relatively to each function of bounded variation.

(5.2) *Let $x(t)$ be a strongly continuous function, and let $\gamma(t)$ be non-decreasing, then*

$$(S)\int_a^b x(t)\,d\gamma(t) = x_0\,[\gamma(b)-\gamma(a)] \quad \textit{where} \quad x_0 \in \overline{\operatorname{conv} x\,[I]} \text{ [4]}.$$

Proof. Since

$$S(\pi) = \sum_{\nu=1}^{n} x(\vartheta_\nu)\,[\gamma(t_\nu)-\gamma(t_{\nu-1})] =$$

$$= [\gamma(b)-\gamma(a)]\sum_{\nu=1}^{n} x(\vartheta_\nu)\,\frac{\gamma(t_\nu)-\gamma(t_{\nu-1})}{\gamma(b)-\gamma(a)} = [\gamma(b)-\gamma(a)]\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu x(\vartheta_\nu)$$

and since $\beta_\nu \geqslant 0$, $\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu = 1$, we see that $[\gamma(b)-\gamma(a)]^{-1}\,S(\pi) \in \operatorname{conv} x\,[I]$. Hence $[\gamma(b)-\gamma(a)]^{-1}\,(S)\int_a^b x(t)\,d\gamma(t) \in \overline{\operatorname{conv} x\,[I]}$.

(5.3) *Let $x(t)$ be a strongly continuous function, let $\gamma(t)$ be non-decreasing, and put $z(t) = (S)\int_a^t x(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta)$, then $z'_s(t) = x(t)\,\gamma'(t)$ almost everywhere and in fact in any point where $\gamma'(t)$ exists.*

Proof. Suppose that $\gamma'(t)$ exists and write

$$\bar{x}(t) = x(t) - x(t_0), \qquad \bar{z}(t) = (S)\int_a^t \bar{x}(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta)$$

we have $z(t) = \bar{z}(t) + x(t_0)\,[\gamma(t)-\gamma(a)]$,

$$\frac{\bar{z}(t_0+h)-\bar{z}(t_0)}{h} = \frac{1}{h}(S)\int_{t_0}^{t_0+h}\bar{x}(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta).$$

Put $\varepsilon(h) = \sup_{|\vartheta|<h}\|\bar{x}(t_0+\vartheta)\|$, we have $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, hence

$$\left\|\frac{\bar{z}(t_0+h)-\bar{z}(t_0)}{h}\right\| \leqslant \frac{1}{|h|}\,\varepsilon(h)\,|\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)| =$$

$$= \varepsilon(h)\left|\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h}\right| \to 0,$$

[4] In this section we follow the method of Zygmund, see Saks [1], p. 244.

it follows that

$$\left\| \frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h} - x(t_0)\frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} \right\| \to 0$$

as $h \to 0$.

(5.4) *Let $x(t)$ be a sACG function on an interval J, and let $\gamma(t)$ be of bounded variation, them the function*

$$y(t) = x(t)\gamma(t) - (S)\int_a^t x(\vartheta)\, d\gamma(\vartheta)$$

is sACG on I.

Proof. We may suppose without loss of generality that $\gamma(t)$ is non-decreasing, hence

$$y(t_2) - y(t_1) = x(t_2)\gamma(t_2) - x(t_1)\gamma(t_1) - (S)\int_{t_1}^{t_2} x(\vartheta)\, d\gamma(\vartheta) =$$

$$[x(t_2) - x(t_1)]\,\gamma(t_2) + x(t_1)\,[\gamma(t_2) - \gamma(t_1)] - (S)\int_{t_2}^{t_1} x(\vartheta)\, d\gamma(\vartheta) =$$

$$[x(t_2) - x(t_1)]\,\gamma(t_2) + [x(t_1) - x_0]\,[\gamma(t_2) - \gamma(t_1)]$$

where $x_0 \in \overline{\operatorname{conv} x[I]}$, it follows for $J = [t_1, t_2]$, $M = \sup_{t \in I} |\gamma(t)|$

$$\|y(t_2) - y(t_1)\| \leqslant M\,\|x(t_2) - x(t_1)\| +$$
$$+ |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \sup_{\vartheta_1, \vartheta_2 \in J} \|x(\vartheta_1) - x(\vartheta_2)\|,$$

since $\sup_{x_1, x_2 \in E} \|x_1 - x_2\| = \sup_{x_1, x_2 \in \operatorname{conv} E} \|x_1 - x_2\| = \sup_{x_1, x_2 \in \overline{\operatorname{conv} E}} \|x_1 - x_2\|$.

Hence

$$\sum_{n=1}^{m} \|y(t_n') - y(t_n'')\| \leqslant M \sum_{n=1}^{m} \|x(t_n') - x(t_n'')\| + |\gamma(b) - \gamma(a)|\,\delta(\rho)$$

where $\delta(\rho) = \sup_{|t_1 - t_2| < \rho} \|x(t_1) - x(t_2)\|$, $\rho = \max_{n=1,2,\ldots,n} |t_n' - t_n''|$. It follows that $y(t)$ is *sACG*, since $y(t)$ is strongly continuous.

Theorem 13. *Suppose $x(t)$ is a function integrable (DB) on $I = [a, b]$, let $\gamma(t)$ be of bounded variation, and write $z(t) = (DB)\int_a^t x(\vartheta)\, d\vartheta$, then the function $x(t)\gamma(t)$ is integrable (DB) and*

$$(DB)\int_a^b x(t)\gamma(t)\,dt = z(b)\gamma(b) - z(a)\gamma(a) - (S)\int_a^b z(t)\,d\gamma(t).$$

Proof. By (5.4) the function $y(t) = z(t)\gamma(t) - (S)\int_a^t z(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta)$ is $sACG$, moreover $y'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere, since $z'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere. Thus, by (5.3) we have at almost any point $y'_{\text{sap}}(t) = z'_{\text{sap}}(t)\gamma(t) + z(t)\gamma'(t) - z(t)\gamma'(t) = z'_{\text{sap}}(t)\gamma(t)$. Hence the conclusion.

6. The element x_0 will be said to be the *weak derivative* of the function $y(t)$ at the point t_0 if

$$\lim_{t\to t_0} \xi\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right) = \xi(x_0)$$

for any linear functional $\xi(\cdot)\in\Xi$. The element x_0 will be denoted by $y'_{\text{w}}(t_0)$.

Similarly, we will say that x_0 is the *weak approximate derivative* of the function $y(t)$ at the point t_0 if there is a set H for which t_0 is a point of density, and such that

$$\lim_{t\to t_0} {}_H\, \xi\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right) = \xi(t_0)$$

for any linear functional $\xi(\cdot)\in\Xi$. This being so, the element x_0 will be denoted by $y'_{\text{wap}}(t_0)$.

We need the following elementary lemma.

(6.1) *Let $\varphi(t)$ be a real-valued function defined in a closed set F, let t_0 be a point of accumulation of both sides of the set F, and let the function $\overline{\varphi}(t)$ be equal to $\varphi(t)$ in F and be linear on each interval contiguous to the set F. If the function $\varphi(t)$ has the derivative $\varphi_F'(t_0)$ relative to the set F, then the function $\overline{\varphi}(t)$ is differentiable at the point t_0.*

(6.2) *Let the function $y(t)$ be defined in I and suppose that $y(t)$ is $sACG$ on a closed set F. If $y'_{\text{w}}(t)$ exists almost everywhere in F, the derivative $y'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere in F.*

Proof. Denote by $z(t)$ the function which is equal to $y(t)$ in F and is linear on any interval contiguous to the set F; this function is sAC on I. Denote by E_1 the set of these points of F at which the weak derivative $y'_w(t)$ exists, we have $|F-E_1|=0$. Let E_2 be the set of all points of accumulation of both sides of the set E_1 which belong to E_1, we have obviously $|F-E_2|=0$.

Put $y'_w(t)=x(t)$, we will prove that

$$\lim_{t\to t_0} {}_F \left\| \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} - x(t_0) \right\| = 0 \tag{6.3}$$

for any point $t_0 \in E_2$. Let $\xi(\cdot)$ be an arbitrary element of Ξ, write $\varphi(t)=\xi(z(t))$. The function $\varphi(t)$ is differentiable relatively to the set F at the point t_0 to the value $a_0=\xi(x(t_0))$. Since t_0 is a point of accumulation of both sides of the set F, the derivative $\varphi'(t_0)=a_0$ exists by (6.1), hence for any $\xi(\cdot)\in\Xi$ we have $\frac{d}{dt}\xi(z(t))=\xi(x(t_0))$ for each $t_0\in E_2$. Thus $z'_w(t)=x(t)$ in E_2. It is clear that the function $z(t)$ has the strong derivative almost everywhere in $I-F$, hence $z'_w(t)$ exists almost everywhere in I.

By a theorem of Pettis ([2], p. 426), the function $z(t)$ has a strong derivative almost everywhere in I. Thus, the derivative $z'_s(t)=z'_w(t)=x(t)$ exists almost everywhere in E_2, hence the limit (6.3) exists. Since $z(t)=y(t)$ for $t\in F$, (6.3) implies that the strong derivative relative to the set F, $y'_{sF}(t)$, exists almost everywhere in F, hence $y'_{\mathrm{sap}}(t)=x(t)$ for almost any point $t\in F$.

(6.4) *Let $y(t)$ be a strongly continuous function, and suppose that the weak approximate derivative $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists at any point of an interval I, except at those of an enumerable set. Then the function $y(t)$ is $sACG$ in I.*

Proof. Since the ratio $[y(t)-y(t_0)]/(t-t_0)$ is weakly convergent, we have by a theorem of Banach

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\,\mathrm{ap} \left\| \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \right\| < +\infty$$

everywhere, except at an enumerable set. It is sufficient to apply Theorem 7.

Theorem 13 enables us to state the following

Theorem 14. *Let $y(t)$ be a strongly continuous function, and suppose that the weak derivative $y'_w(t) = x(t)$ exists at any point of an interval I, except at those of an enumerable set. Then the strong approximate derivative $y'_{sap}(t)$ exists almost everywhere in I, the function $x(t)$ is integrable (DB), and*

$$(6.5) \qquad (DB)\int_a^b x(t)\,dt = y(b) - y(a).$$

(6.6) *Let $y(t)$ be a bounded function, and suppose that the weak derivative $y'_w(t_0)$ exists, then there is a constant such that*

$$\|y(t) - y(t_0)\| \leqslant M|t - t_0|$$

for each t.

Proof. By hypothesis: $\|y(t)\| \leqslant B$; the existence of the weak derivative implies $\overline{\lim\limits_{t \to t_0}} \left\| \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right\| < +\infty$, hence there is a constant A such that $\|y(t) - y(t_0)\| < A|t - t_0|$ for $|t - t_0| < \delta$; it is sufficient to put $M = A + \frac{2B}{\delta}$.

(6.7) *Let $y(t)$ be a bounded function, and suppose that $y'_w(t)$ exists in a measurable set E, then the strong derivative $y'_s(t)$ exists almost everywhere in E.*

Proof. By Theorem 7 and (6.6) there are measurable sets E_n on each of which the function $y(t)$ is sAC, and such that $E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Let $\varepsilon > 0$ be fixed, and choose a closed set $F_n \subset E_n$ such that $|E_n - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Since $y(t)$ is sAC on F_n and since $y'_w(t)$ exists in F_n, the derivative $y'_{sap}(t)$ exists almost everywhere in E_n by (6.2).

From (6.6), it follows that the function $y(t)$ fulfils the condition (l) in F_n, hence by (3.3) the derivative $y'_s(t)$ exists almost everywhere in F_n. Thus the set N of these points at which the derivative $y'_s(t)$ does not exist is contained in the set $(E_1 - F_1) + (E_2 - F_2) + \ldots$, hence $|N| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n$.

Theorem 15. *Suppose that the weak derivative $y'_w(t) = x(t)$ of the function $y(t)$ exists everywhere in an interval I, then the strong derivative $y'_s(t)$ exists almost everywhere I, the function $y(t)$ is integrable (DB) and formula* (6.5) *holds.*

Proof. This theorem is a consequence of (6.6), (6.5), and Theorem 7.

Theorem 16. *Suppose that the function $y(t)$ is weakly differentiable in a measurable set E, then the strong derivative $y'_s(t)$ exists almost everywhere in E* [5]).

Proof. Given any $t_0 \epsilon E$, we have $\overline{\lim\limits_{t \to t_0}} \left\| \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right\| < +\infty$, hence there is an interval $I_{t_0} = (t_0 - h_{t_0}, t_0 + h_{t_0})$ such that $\|y(t) - y(t_0)\| \leqslant M(t_0)|t - t_0|$ for $t \epsilon I_{t_0}$. The function $y(t)$ is then bounded in any interval I_t, hence by (6.7) the strong derivative $y'_s(t)$ exists in a set $N_t \subset I_t$ and $E \subset \sum_{n=1}^{\infty} I_{t_n}$; thus the derivative $y'_s(t)$ exists in a set which contains the set $E - \sum_{n=1}^{\infty} N_{t_n}$.

Similarly one can prove the following theorem

Theorem 17. *Suppose that the weak approximate derivative $y'_{\mathrm{wap}}(t)$ of the function $y(t)$ exists in a measurable set E, then the strong approximate derivative $y'_{\mathrm{sap}}(t)$ exists almost everywhere in E.*

It follows that we may replace in Theorem 14 the hypothesis that $y'_w(t)$ exists by this that $y'_{\mathrm{wap}}(t)$ exists.

---

[5]) This theorem does not contradict one of the results of Gelfand ([1], p. 265) since the function constructed by Gelfand has in reality a derivative which is weak in the sense of the weak convergence of functionals and not in this of elements (as in our theorem), and the last is in general a "stronger" one.

7. We shall deal in this paragraph with constructive definition of the (DB) integral. Let us recall first some definitions due in principle to Saks ([1], p. 254—256).

Suppose that with any interval I there is related a class of functions $T^*[I]$ (defined on I) satisfying the following conditions

(7.1) *If* $x(:) \in T^*[I]$ *and* $J \subset I$, *then* $c_J(:) x(:) \in T^*[J]$;

(7.2) *If* $x(t) = x_0 = const$ *for* $t \in I$, *then* $x(:) \in T^*[I]$;

(7.3) *Let* $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [b, c]$; *if for a function* $x(t)$ *we have* $c_{I_1}(:) x(:) \in T^*[I_1]$, $c_{I_2}(:) x(:) \in T^*[I_2]$ *then* $x(:) c_{I_1+I_2}(:) \in \in T^*[I_1 + I_2]$.

Suppose further that a functional operation T is defined for any element $x(:) \in T^*[I]$, which makes correspond to the function $x(t)$ an element $T(x; I)$ of the space X. This operation will be called an *integral* if the following conditions are satisfied:

(7.4) *Given any element* $x(:) \in T^*[I]$, *the function* $y(J) = T(x; J)$ *is an additive strongly or weakly continuous* [6]) *function of interval* $J \subset I$;

(7.5) *If* $x(t) = x_0 = const$ *in* I, *then* $T(x; I) = x_0 |I|$.

The set $T^*[I]$ will be called the *domain* of the integral T.

Two integrals T' and T'' are said to be *compatible* it $T'(x; I) = T''(x; I)$ for any function $x(:) \in T'^*[I]\, T''^*[I]$. We will say that the integral T'' *includes* the integral T', in symbols $T' \prec T''$, if these integrals are compatible and $T'^*[I] \subset T''^*[I]$. Given an integral T and a set $E \subset I$, the function $x(t)$ will be said to be T integrable *on the set* E if the function $x(:) c_E(:) \in T^*[I]$. The element $T(c_E x; I)$ will be denoted by $T(x; E)$.

Given an integral T and a function $x(t)$, the point t_0 is called *T-singular point of* $x(t)$ if for any open interval I including the point t_0, $x(:) c_I(:) \,\mathrm{non} \in T^*[I]$. The set of the T-singular points of any function $x(t)$ is closed.

Given an integral T we introduce following generalized integrals: T_s^C, T_σ^C, $T_{s\alpha}^H$, $T_{\sigma\alpha}^H$, $T_{\sigma\beta}^H$.

[6]) A function of interval $y(I)$ is *weakly continuous* if, given any functional $\xi(:) \in \Xi$, the real function of interval $\xi(y(I))$ is continuous.

The domain $T_s^{C^*}[I]$ $\{T_\sigma^{C^*}[I]\}$ of the integral T_s^C $\{T_\sigma^C\}$ consists of all functions $x(t)$ defined in I for which (i) the set of all T-singular points is empty or finite (ii) there is a strongly {weakly} continuous function of interval $y(J)$ such that $y(J) = T(x; J)$ for any interval J non including the T-singular points of the function $x(t)$. This being so, the function $y(I)$ will be denoted by $T_s^C(x; I)$ $\{T_\sigma^C(x; I)\}$.

To define the remaining integrals consider the class of the functions $x(t)$ defined in I which have the following property (1) E being the set of all T-singular points of $x(t)$, the function $x(t)$ is T integrable on the set E as well as on each interval I_n contiguous to the set consisting of the points of E and of the bounds of I. Moreover, consider the following conditions

(7.6) $\sum_{n=1}^{\infty} \| T(x; I_n) \| < +\infty$

(7.7) *the series* $\sum_{n=1}^{\infty} T(x; I)$ *is unconditionally convergent*

(7.8) $\omega(T(x; I); I_n) \to 0$

(7.9) $\omega(\xi(T(x; I)); I_n) \to 0$ *for any functional* $\xi(\cdot) \in \Xi$.

The set of all functions fulfilling the conditions (1), (7.6), and (7.8) is the domain $T_{s\alpha}^{H^*}[I]$ of the integral $T_{s\alpha}^H$, the integral $T_{s\alpha}^H(x; I)$ is then by definition

$$T(x; E) + \sum_{n=1}^{\infty} T(x; I_n). \tag{7.10}$$

The domain $T_{\sigma\alpha}^{H^*}[I]$ of the integral $T_{\sigma\alpha}^{H^*}$ consists of all functions which satisfy the conditions (1), (7.6), and (7.9), the integral $T_{\sigma\alpha}^H(x; I)$ is then defined to be the element (7.10).

The domain $T_{\sigma\beta}^{H^*}[I]$ of the integral $T_{\sigma\beta}^H$ is the set of all functions which fulfil the conditions (1), (7.7), and (7.9), the integral $T_{\sigma\beta}^H(x; I)$ is the element (7.10).

It is clear that $T \prec T_\sigma^C$, $T \prec T_{s\alpha}^H \prec T_{\sigma\alpha}^H \prec T_{\sigma\beta}^H$, and in the case when the T integrals are strongly continuous functions of interval, we have also $T \prec T_s^C$.

We will write $T_{s\alpha}^{CH}$, $T_{\sigma\alpha}^{CH}$, $T_{\sigma\beta}^{CH}$ in place of $(T_s^C)_{s\alpha}^H$, $(T_\sigma^C)_{\sigma\alpha}^H$, $(T_\sigma^C)_{\sigma\beta}^H$ respectively.

Given a transfinite sequence T^φ $(\varphi < \psi)$ of integrals such that $\varphi_1 < \varphi_2$ implies $T^{\varphi_1} \prec T^{\varphi_2}$, we define the integral $T^\psi = \sum_{\varphi<\psi} T^\varphi$ as follows: the domain $T^{\psi *}[I]$ is the set $\sum_{\varphi<\psi} T^{\varphi *}[I]$; if $x(\cdot) \epsilon T^{\psi *}[I]$ there is a smallest ordinal φ_0 such that $x(\cdot) \epsilon T^{\varphi_0 *}[I]$, we put $T^\psi(x; I) = T^{\varphi_0}(x; I)$.

Let T be an integral, form the sequences $T_{s\alpha}^\varphi$, $T_{\sigma\alpha}^\varphi$, $T_{\sigma\beta}^\varphi$ of integrals by the following rule: $T_{s\alpha}^0 = T_{\sigma\alpha}^0 = T_{\sigma\beta}^0 = T$ and

$$\text{(a)}\quad T_{s\alpha}^\varphi = \Big(\sum_{\xi<\varphi} T_{s\alpha}^\xi\Big)_{s\alpha}^{CH}, \qquad \text{(b)}\quad T_{\sigma\alpha}^\varphi = \Big(\sum_{\xi<\varphi} T_{\sigma\alpha}^\xi\Big)_{\sigma\alpha}^{CH},$$

$$\text{(c)}\quad T_{\sigma\beta}^\varphi = \Big(\sum_{\xi<\varphi} T_{\sigma\beta}^\xi\Big)_{\sigma\beta}^{CH}$$

for $\varphi < \Omega$ (in the case (a) we suppose necessarily that the T integrals are strongly continuous functions of interval). Then we define the integrals $D_{s\alpha}T$, $D_{\sigma\alpha}T$, $D_{\sigma\beta}T$ respectively by the formulas

$$D_{s\alpha}T = \sum_{\varphi<\Omega} T_{s\alpha}^\varphi, \quad D_{\sigma\alpha}T = \sum_{\varphi<\Omega} T_{\sigma\alpha}^\varphi, \quad D_{\sigma\beta}T = \sum_{\varphi<\Omega} T_{\sigma\beta}^\varphi.$$

The integrals $D_{s\alpha}T$, $D_{\sigma\alpha}T$, and $D_{\sigma\beta}T$ will be called the *totals*.

8. Denote now by $LB[I]$ the class of all (LB) integrable functions on the interval I, and by LB the integral (LB) considered as an integral-operation in the sense of the preceding paragraph.

Theorem 18. *The integral (DB) is identical with the total $D_{s\alpha}LB$.*

This theorem may be proved quite identically as for real-valued functions (see Saks [1], p. 258).

Starting from the constructive definition of the (DB) integral we shall prove the first mean-value theorem for this integral. We need two lemmas.

(8.1) *Given any set* $X_0 \subset X$, *we have* $\overline{\operatorname{conv}(\overline{\operatorname{conv} X_0})} = \overline{\operatorname{conv} X_0}$.

Proof. The formula $\overline{\operatorname{conv} X_0} \subset \operatorname{conv}(\overline{\operatorname{conv} X_0})$ implies $\overline{\operatorname{conv} X_0} \subset \overline{\operatorname{conv}(\overline{\operatorname{conv} X_0})}$. In order to establish the opposite inclusion it is sufficient to prove that, given any element $x \in \operatorname{conv}(\overline{\operatorname{conv} X_0})$ and any number $\varepsilon > 0$, there is an element $\bar{x} \in \overline{\operatorname{conv} X_0}$ such that $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$. Since $x = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \cdots + \vartheta_n x_n$ where $\vartheta_i \geqslant 0$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = 1$, $x_i \in \overline{\operatorname{conv} X_0}$, there are elements $\bar{x}_i \in \operatorname{conv} X_0$ such that $\|x_i - \bar{x}_i\| < \varepsilon$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Put $\bar{x} = \vartheta_1 \bar{x}_1 + \vartheta_2 \bar{x}_2 + \cdots + \vartheta_n \bar{x}_n$, we see at once that $\bar{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{conv} X_0) = \operatorname{conv} X_0$ and $\|x - \bar{x}\| \geqslant \vartheta_1 \|x_1 - \bar{x}_1\| + \vartheta_2 \|x_2 - \bar{x}_2\| + \cdots + \vartheta_n \|x_n - \bar{x}_n\| \leqslant (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n)\varepsilon = \varepsilon$.

(8.2) *Suppose that* $x_n \in X_0$, $\vartheta_n \geqslant 0$ *for* $n = 1, 2, \ldots$, *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = 1$. *If the series* $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n x_n$ *converges, then* $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n x_n \in \overline{\operatorname{conv} X_0}$.

Proof. Let x_0 be an arbitrary element of X_0, let us write $y_n = x_0\left(1 - \sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu\right) + \sum_{\nu=1}^{n} \vartheta_\nu x_\nu$; it is obvious that $y_n \in \operatorname{conv} X_0$. Since $y_n \to \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n x_n$, we have $\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n x_n \in \overline{\operatorname{conv} X_0}$.

Theorem 19. *Let* $x(t)$ *be a function integrable* (DB) *on a set* E, *then*

$$(8.3) \qquad (DB)\int_E x(t)\,dt = x_0 |E| \quad \textit{where} \quad x_0 \in \overline{\operatorname{conv} x[E]}.$$

Proof. We shall prove that all the integrals $LB^{\xi}_{s\alpha}$ $(\xi < \Omega)$ have the property of Theorem 19. Since the integral LB has this property, it is sufficient to prove that if an integral T has property of Theorem 19, then (i) the integral T^C_s, and (ii) the integral $T^H_{s\alpha}$ have also this property. The proof of (i) is trivial, we will prove only (ii). It is sufficient to consider the case when E is an interval I. Let $x(:)\epsilon\, T_{s\alpha}^{H^*}[I]$; there is a closed set F such that the integral $T(x;F)$ exists, and if I_n denotes the sequence of the intervals contiguous to the set composed of the elements of F and of the end-points of I, the function $x(t)$ is T integrable on any interval I_n and

$$T_{s\alpha}^{H}(x;I)=T(x;F)+\sum_{n=1}^{\infty}T(x;I_n).$$

By hypothesis, $T(x;F)=x_0|F|$ and $T(x;I_n)=x_n\,|I_n|$ where $x_0\,\epsilon\,\overline{\operatorname{conv} x\,[F]}$, $x_n\,\epsilon\,\overline{\operatorname{conv} x\,[I_n]}$ for $n=1,2,\ldots$, hence $x_0, x_n\,\epsilon\,\overline{\operatorname{conv} x\,[I]}$. Since

$$\frac{1}{|I|}\,T_{s\alpha}^{H}(x;I)=\frac{1}{|I|}\left[x_0\,|F|+\sum_{n=1}^{\infty}x_n\,|I_n|\right]=x_0\,\frac{|F|}{|I|}+\sum_{n=1}^{\infty}x_n\,\frac{|I_n|}{|I|},$$

since the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\frac{|I_n|}{|I|}$ is convergent, and since $1=\frac{|F|}{|I|}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|I_n|}{|I|}$, we have by (8.1) and (8.2) $\frac{1}{|I|}\,T_{s\alpha}^{H}(x;I)\,\epsilon$ $\overline{\operatorname{conv}\overline{\operatorname{conv} x\,[I]}}=\overline{\operatorname{conv} x\,[I]}$.

Theorem 20. *Let T be an integral such that for any T integrable function $x(t)$ the relation* (8.3) *is true; then this relation holds for any function which is integrable $D_{\sigma\beta}\,T$.*

P r o o f. Examining the proof of Theorem 19 we see that it is only to prove that if an integral T' has property of theorem 19, then the integral $T_{\sigma}^{'C}$ has this property too. Let $x(:)\,\epsilon\, T_{\sigma}^{'C^*}[I]$, then there are non-overlapping intervals $I_1, I_2, \ldots, I_p$ such that $I=\sum\limits_{k=1}^{p}I_k$, $x(t)$ is T' integrable on any closed interval $I\subset \operatorname{Int} I_k$, and such that denoting by I_{kn} a closed interval contained in $\operatorname{Int} I_k$ which tends to I_k, the sequence

$$\sum_{k=1}^{p}T'(x;I_{kn})=y_n$$

is weakly convergent to $T_{\sigma}^{C}(x;I)$. We have by hypothesis $y_n = \sum_{k=1}^{p} x_{kn} |I_{kn}|$ where $x_{kn} \epsilon \overline{\operatorname{conv} x[I]}$, hence $y_n / \sum_{k=1}^{p} |I_{kn}| \epsilon$ $\epsilon \overline{\operatorname{conv} x[I]}$ and this sequence converges weakly to $T_{\sigma}^{C}(x;I)/|I|$. Since any closed convex set is weakly closed (Mazur [1], p. 80), the element $T_{\sigma}^{C}(x;I)/|I| \epsilon \overline{\operatorname{conv} x[I]}$.

From Theorem 20 we obtain

(8.4) *The relation* (8.3) *is true for any $D_{\sigma\beta}LB$ integrable function.*

9. We shall add now some remarks concerning the $D_{\sigma\alpha}LB$ and $D_{\sigma\beta}LB$ totals.

(9.1) *Let T be an integral having the property that any T integrable function is strongly measurable, then any T_{σ}^{C}- and $T_{\sigma\beta}^{H}$- integrable function is strongly measurable.*

Proof. This is obvious for the T_{σ}^{C} integral. Let $x(\cdot) \epsilon T_{\sigma\beta}^{H*}[I]$, there is a closed set F such that the function $x(t)$ is T integrable on F as well as on any interval contained in $I - F$, hence the conclusion.

From (9.1) it follows easily the

Theorem 21. *Any $D_{s\alpha}LB$, $D_{\sigma\alpha}LB$, and $D_{\sigma\beta}LB$ integrable function is strongly measurable.*

A function $y(t)$ will be said to be $s'ACG$ on a set E, if $y(t)$ is weakly continuous on this set and if the set E may be decomposed to a sequence of sets on each of which the function $y(t)$ is sAC.

A function $x(t)$ will be termed *integrable* (DB') on an interval I if there is a $s'ACG$ function on I, $y(t)$, such that (i) $y'_{\text{sap}}(t)$ exists almost everywhere, (ii) $y'_{\text{sap}}(t) = x(t)$ almost everywhere. This being so, we put

$$(DB') \int_I x(t)\,dt = y(b) - y(a).$$

(9.2) *Let the function $y(t)$ be weakly continuous on an interval I and suppose that $y(t)$ is sAC on a set $E \subset I$, then $y(t)$ is sAC on $\bar{E}$.*

Proof. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary. There is a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that for any finite system (a_ν, b_ν) of non-overlapping intervals whose end-points belong to E, the inequality $\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu) < \delta$ implies $\sum_{\nu=1}^{n} \| y(b_\nu) - y(a_\nu) \| < \varepsilon$. Let (a_ν, b_ν) be a finite system of non-ovelapping intervals such that $\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu) < \frac{\delta}{2}$ and $a_\nu, b_\nu \epsilon \bar{E}$. There are points $a_{\nu i}$, $b_{\nu i}$ such that $a_{\nu i} < b_{\nu i}$, $a_{\nu i}, b_{\nu i} \epsilon E$, $a_{\nu i} \to a_\nu$, $b_{\nu i} \to b_\nu$, the intervals $(a_{\nu i}, b_{\nu i})$ do not overlap, and $\sum_{\nu=1}^{n}(b_{\nu i} - a_{\nu i}) < \delta$. Since the elements $y(a_{\nu i})$ and $y(b_{\nu i})$ are weakly convergent respectively to $y(a_\nu)$ and $y(b_\nu)$, we have $\| y(b_\nu) - y(a_\nu) \| \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \| y(b_{\nu i}) - y(a_{\nu i}) \|$. Since $\varepsilon \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \| y(b_{\nu i}) - y(a_{\nu i}) \|$, we have

$$\varepsilon \geqslant \varliminf_{i\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \| y(b_{\nu i}) - y(a_{\nu i}) \|\right) \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \varliminf_{i\to\infty} \| y(b_{\nu i}) - y(a_{\nu i}) \| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \| y(b_\nu) - y(a_\nu) \|,$$ hence $y(t)$ is sAC on $\bar{E}$.

(9.3) *Let the function $x(t)$ be integrable (DB') on an interval $I = [a, b]$, put $y(t) = (DB')\int_a^t x(\vartheta)\, d\vartheta$, then, given any perfect set F, there is a portion of this set on which the function $y(t)$ is sAC.*

Proof. There is a sequence E_n of sets such that $I = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ and $y(t)$ is sAC on each E_n. The conclusion follows from (9.2) and from Baire's Theorem.

Theorem 22. *The integral (DB') is identical with the $D_{\sigma\alpha}LB$ total.*

Proof. Using the method of Saks [1] we may prove first that Theorems 11 and 12 remain true if we replace the integral (DB) by the integral (DB'), and the hypothesis (4.1) by (7.6) and (7.9). Then we may repeat the proof of Saks ([1], p. 258).

Theorem 16 shows that if a function $x(t)$ is the weak derivative of a function $y(t)$, then $x(t)$ is integrable (DB') and

$$(DB')\int_a^b x(t)\,dt = y(b) - y(a).$$

10. We pass now to the definition of a weak process of integration.

A function $y(t)$ will be said to be *pseudo ACG* or simply *pACG* on an interval I if, given any functional $\xi(:) \in \Xi$, the real-valued function $\xi(y(t))$ is ACG on I. A function $x(t)$ will be said to be the *approximate pseudoderivative* of the function $y(t)$ in I if for any functional $\xi(:) \in \Xi$ we have

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{ap} \xi\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) = \xi(x(t))$$

almost everywhere in I. The function $x(t)$ will be denoted by $y'_{\mathrm{pap}}(t)$.

A function $x(t)$ will be termed to be *Denjoy-Pettis* integrable or simply (DP) *integrable* on an interval $I=[a,b]$ if, given any functional $\xi(:) \in \Xi$, the function $\xi(x(t))$ is integrable Denjoy on the interval I, and if there is a $pACG$ function $y(t)$ such that $y'_{\mathrm{pap}}(t) = x(t)$ in I. This being so, we define the (DP) *integral* by formula

$$(DP)\int_I x(t)\,dt = y(b) - y(a). \tag{10.1}$$

An equivalent definition of the (DP) integral is the following: a function $x(t)$ is integrable (DP) on an interval I if (i) given any element $\xi(:) \in \Xi$, the function $\xi(x(t))$ is Denjoy integrable on I, (ii) there is a function $y(t)$ such that

$$\xi(y(\beta) - y(\alpha)) = (D)\int_\alpha^\beta \xi(x(t))\,dt$$

for any functional $\xi(:) \in \Xi$ and any interval $(\alpha, \beta) \subset I$.

Similarly as in the proof of Theorem 2 one can show that the (DP) integral is uniquely determined. The (DP) integral is an additive and homogeneous function of the integrand, and an additive weakly continuous function of interval (the integrand being fixed). The following statements are obvious:

(10.2) *Any (DP) integrable function is weakly measurable.*

(10.3) *Any function $x(t)$ which is (DP) integrable over any measurable set E* (i. e. such that, the function $x(t)c_E(t)$ is integrable (DP)) *is integrable (LP).*

Let $\gamma(t)$ be a real function of bounded variation in $[a,b]$. The function $x(t)$ is said to be *weakly integrable* in Stieltjes sense or simply integrable (wS) relatively to the function $\gamma(t)$ on the interval $[a,b]$ if there is an element y_0 such that, given any element $\xi(\cdot)\in\Xi$, the real function $\xi(x(t))$ is Stieltjes integrable relatively to the function $\gamma(t)$ and $\xi(y_0)=(S)\int\limits_a^b \xi(x(t))\,d\gamma(t)$. The element y_0 will be denoted by $(wS)\int\limits_a^b x(t)\,d\gamma(t)$. If the function $x(t)$ is integrable (wS) relatively to the function $\gamma(t)$ on each interval in which $x(t)$ and $\gamma(t)$ are both defined, the function will be said to be integrable (wS) relatively to $\gamma(t)$.

(10.4) *Any weakly continuous function $x(t)$ is integrable (wS) relatively to any function $\gamma(t)$ of bounded variation* (Krein).

Proof. We may suppose without loss of generality that $\gamma(t)$ is non-decreasing. Put $\beta(s)=\sup\limits_t E\{\gamma(t)<s\}$; by a formula of Lebesgue

$$(10.5)\qquad (S)\int\limits_a^b \xi(x(t))\,d\gamma t=\int\limits_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \xi(x(\beta(s)))\,ds.$$

The set of values of the function $x(\beta(s))$ is separable, as may be easily shown. Hence by a theorem of Pettis ([1], p. 278) the function $x(\beta(s))$ is strongly measurable; since this function is bounded, this function is integrable (LB).

Writing $y_0 = (LB)\int\limits_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} x(\beta(s))\,ds$, we have $\int\limits_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \xi(x(\beta(s)))\,ds = \xi(y_0)$, hence

$$y_0 = (wS)\int\limits_a^b x(t)\,d\gamma(t) = (LB)\int\limits_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} x(\beta(s))\,ds. \tag{10.6}$$

(10.7) *Let the function $x(t)$ be weakly continuous in $I=[a,b]$, let $\gamma(t)$ be non-decreasing in I, then*

$$(wS)\int\limits_a^b x(t)\,d\gamma(t) = [\gamma(b)-\gamma(a)]\,x_0 \quad \textit{where} \quad x_0 \in \overline{\operatorname{conv} x[I]}.$$

Proof. By formula (10.6) and by Theorem 19 we hawe denoting $J=[\gamma(a),\gamma(b)]$, $(wS)\int\limits_a^b x(t)\,d\gamma(t) = (LB)\int\limits_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} x(\beta(s))\,ds =$

$= [\gamma(b)-\gamma(a)]\,x_0$ where $x_0 \in \overline{\operatorname{conv} x(\beta[J])} = \overline{\operatorname{conv} x[I]}$.

(10.8) *Let $x(t)$ be a weakly continuous function in $[a,b]$, let $\gamma(t)$ be non-decreasing in $[a,b]$, put $z(t)=(wS)\int\limits_a^t x(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta)$, then*

$$z'_s(t) = x(t)\,\gamma'(t) \tag{10.9}$$

almost everywhere in $[a,b]$.

Proof. Let $\xi(:)$ be an arbitrary functional of Ξ; denote by E the set of these t at which $\gamma'(t)$ exists. By (5.3) we have in E $\frac{d}{dt}\,\xi(z(t)) = \xi(x(t))\,\gamma'(t) = \xi(x(t)\,\gamma'(t))$ hence $z'_w(t) = x(t)\,\gamma'(t)$ almost everywhere in I. By Theorem 16, (10.9) holds almost everywhere in I.

Arguing similarly as in proof of Theorem 13 we can show the

Theorem 23. *Let $x(t)$ be integrable (DP) in $[a,b]$, let $\gamma(t)$ be a real-valued function of bounded variation in $[a,b]$, and put $z(t)=(DP)\int\limits_a^t x(\vartheta)\,d\vartheta$, then the function $x(t)\,\gamma(t)$ is integrable (DP) in $[a,b]$ and*

$$(DP)\int\limits_a^b x(t)\,\gamma(t)\,dt = z(b)\,\gamma(b) - z(a)\,\gamma(a) - (wS)\int\limits_a^b z(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta).$$

From the definition of the (DP) integral and from the well-known properties of the Denjoy integral of real functions it follows that if for a function $x(t)$ there is a weakly continuous function $y(t)$ such that, given any function $\xi(:)\in\Xi$, the relation $\frac{d}{dt}\xi(y(t))=\xi(x(t))$ holds at any point of an interval I, except at those of an enumerable set, the function $x(t)$ is (DP) integrable and $(DP)\int\limits_a^b x(t)\,dt=y(b)-y(a)$.

Now, we shall consider the relations between the (DP) integral and the constructive processes of integration.

(10.10) *Let $x(t)$ be a function integrable (DP) on a closed set F as well as on any interval I_n contiguous to the set F, and denote by a, b the bounds of the set F. Suppose that the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(DP)\int\limits_{I_n}x(t)\,dt \tag{10.11}$$

is unconditionally convergent and that, given any functional $\xi(:)\in\Xi$, $\omega\left(\xi\left((DP)\int\limits_I x(t)\,dt\right);I_n\right)\to 0$. Then the function $x(t)$ is (DP) integrable on $I=[a,b]$ and

$$(DP)\int\limits_I x(t)\,dt=(DP)\int\limits_F x(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}(DP)\int\limits_{I_n}x(t)\,dt.$$

Proof. Let $\xi(x)$ be an arbitrary functional of Ξ. Since the series (10.11) is unconditionally convergent, we have $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\xi\left((DP)\int\limits_{I_n}x(t)\,dt\right)\right|<+\infty$. Since

$$(D)\int\limits_{I_n}\xi(x(t))dt=\xi\left((DP)\int\limits_{I_n}x(t)\,dt\right),\quad (D)\int\limits_F\xi(x(t))\,dt=\xi\left((DP)\int\limits_F x(t)dt\right),$$

we see by a well known theorem (Saks [1], p. 257) that the function $x(t)$ is integrable Denjoy on $I_0=[a,b]$, and

$$(D)\int\limits_{I_0}\xi(x(t))\,dt=(D)\int\limits_F\xi(x(t))\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}(D)\int\limits_{I_n}\xi(x(t))\,dt.$$

The theorem results from formula

$$\xi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(DP)\int_{I_n} x(t)\,dt\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi\Big((DP)\int_{I_n} x(t)\,dt\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}(D)\int_{I_n}\xi(x(t))\,dt.$$

Denote by LP and by DP respectively the (LP) and the (DP) integrals considered as integral operations. From (10.10) there results by an easy argument

$$(10.12)\qquad D_{\sigma\beta}LP \prec DP$$

i. e. *any function integrable* $(D_{\sigma\beta}LP)$ *is integrable* (DP), and simple examples show that the converse relation is not true. In order to characterize the $(D_{\sigma\beta}LP)$ integration let us introduce the following definitions.

A function $y(t)$ will be said so be *weakly absolutely continuous* or simply wAC on a set E if, given any element $\xi(\cdot)\in\Xi$, the real-valued function $\xi(x(t))$ is AC on E. A function $y(t)$ will be said to be $wACG$ on a set E if $y(t)$ is weakly continuous on this set and if E is the sum of a sequence of sets on each of which the function $y(t)$ is wAC.

A function $x(t)$ will be said to be *integrable* (DP_0) on an interval $I=[a,b]$ if there is a function $y(t)$ $wACG$ on I such that $y'_{\mathrm{pap}}(t)=x(t)$. This being so, we define the (DP_0) integral by formula

$$(DP_0)\int_a^b x(t)\,dt=y(b)-y(a).$$

(10.13) *The proposition* (10.10) *is true if we replace the integral* (DP) *by the integral* (DP_0).

P r o o f. Let us write $I_t=[a,t]$, $u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(DP_0)\int_{I_nI_t}x(t)\,dt$; this series is unconditionally convergent and the function $u(t)$ is weakly continuous. In order to prove that the function $u(t)$ is $wACG$ it is sufficient to show that $u(t)$ is wAC on the set F. Put

$$v(t)=\begin{cases}0 & \text{for}\quad t\in F\\ \dfrac{1}{|I_n|}(DP_0)\displaystyle\int_{I_n}x(\vartheta)\,d\vartheta & \text{for}\quad t\in \operatorname{Int} I_n,\ n=1,2,\ldots\end{cases}$$

This function is (LP) integrable and $u(t)=(LP)\int\limits_a^t v(\vartheta)\,d\vartheta$ for $t\in F$. Since $\xi(u(t))=\int\limits_a^t \xi(v(\vartheta))\,d\vartheta$ for $t\in F$, the function $u(t)$ is wAC on F.

Write $z(t)=\int\limits_{PI_t} x(\vartheta)\,d\vartheta$, and let $\xi(\cdot)$ be an arbitrary element of Ξ; by the well known properties of real Denjoy integrals the approximate derivative of the function $\xi(u(t)+z(t))$ is equal $\xi(x(t))$ almost everywhere, hence $x(t)$ is the approximate pseudoderivative of the function $u(t)+z(t)$.

Theorem 24. *The (DP_0) integral is identical with the $D_{\sigma\beta}LP$ total.*

Proof. The relation $D_{\sigma\beta}LP \prec DP_0$ may be easily proved by (10.13). To prove that $DP_0 \prec D_{\sigma\beta}LP$, we remark first that given any (DP_0) integrable function, any perfect set contains a portion on which the indefinite (DP_0) integral of this function is wAC, then we may argue as for real-valued functions (see Saks, [1], p. 258).

BIBLIOGRAPHY

S. Banach — [1] Théorie des opérations linéaires, Monografie Matematyczne, Warszawa, (1932).

S. Bochner — [1] Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Wektorraumes sind, Fund. Math. 20 (1933) p. 262—276. [2] Absolut additive abstrakte Mengenfunktionen, Fund. Math. 21 (1933) p. 211—213.

N. Dunford — A. Morse — [1] Remarks on the preceding paper of James A. Clarkson, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) p. 415—420.

I. Gelfand — [1] Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Rec. Math. Moscou 4 (49) (1938) p. 235—286.

S. Mazur — [1] Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Stud. Math. 4 (1933) p. 70—84.

W. Orlicz — [1] Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I), Stud. Math. 4 (1933) p. 33—37.

B. J. Pettis — [1] On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) p. 277—304. — [2] A note on regular Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 44. (1938) p. 420—428.

S. Saks — [1] Theory of the integral, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwów, (1937).

Andrzej Alexiewicz

O całkach Denjoy funkcyj abstrakcyjnych.

Komunikat przedstawiony przez czł. S. Mazura dnia 16 stycznia 1948 r.

Streszczenie

W ostatnich latach okazało się wiele prac poświęconych całkom Lebesgue'a tzw. funkcyj abstrakcyjnych, tj. funkcyj zmiennej rzeczywistej, przyjmujących wartości z przestrzeni Banacha. Autor podaje analogiczną teorię całek Denjoy dla tej klasy funkcyj. W pracy tej są omówione zasadniczo dwa typy całek: całka mocna, uogólniająca całkę Bochnera-Lebesgue'a oraz całka słaba, uogólniająca całkę Pettisa-Lebesgue'a. Autor podaje definicje opisowe i konstruktywne tych całek, bada ich związek z różniczkowalnością słabą i mocną i przenosi pewne twierdzenia klasyczne dotyczące całek Denjoy funkcyj rzeczywistych na funkcje abstrakcyjne.

Jan Kalicki

On Tarski's matrix method

Communication présentée par M. A. Mostowski à la séance du 12 mars 1948

In the sequel I attempt to obtain an instrument by means of which some properties of the systems of propositional functions may be investigated. The ideography of Łukasiewicz will be used [1]).

Small letters of the Latin alphabet are used to denote the sentential variables. Capital Roman letters (with integer suffix or index) denote functors (operators) of the calculus. A_n will stand for a functor with n arguments. Finite sequences of functors and variables (read from left to right) will be called expressions.

Among all possible expressions we distinguish the class of well-formed expressions.

We say that (i) a single variable is considered a well-formed expression, (ii) a functor with n arguments followed by n well-formed expressions (n finite) form a well-formed expression, (iii) no other expression is well-formed.

$\overline{\Omega}$ will stand for the set of all well-formed expressions, $\alpha, \beta, \ldots$ for the elements of $\overline{\Omega}$. $\overline{\Omega}$ will be called the language.

To know whether $\alpha \epsilon \overline{\Omega}$ or not we substitute number -1 for every small letter in α, number $k-1$ for every capital A_k; then we form the sequence $s_1, s_2, \ldots, s_n$ where s_1 is the first number, s_2 is the sum of the first two numbers, etc., s_n is

---

[1]) cf. J. Łukasiewicz, Elementy Logiki Matematycznej, Warszawa, 1929, page 40.

the sum of all the numbers. It is possible to show that α is well-formed if and only if $s_l \geqslant 0$ for $l = 1, 2, \dots, n-1$ and $s_n = -1$ [2]).

We denote by Ω any set such that $\Omega \subset \overline{\Omega}$; $\alpha \epsilon \Omega$ if and only if α consists of variables and of functors taken from the set of the following functors:

$$A_1^1, A_1^2, A_1^3, \dots, A_1^{k_1}, A_2^1, \dots, A_2^{k_2}, \dots, A_i^j, \dots, A_m^1, A_m^2, \dots, A_m^{k_m}$$

$$\text{where} \quad \sum_{l=1}^{m} k_l < \aleph_0 .$$

Ω will be called a limited language.

The subsequent definitions 1—7 and corollaries 1—5 are a generalization of Tarski's ideas [3]).

Definition 1. An ordered set $\mathfrak{m}$

$$\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{a_1 1}, f_{a_1 2}, \dots, f_{a_1 k_{a_1}}, f_{a_2 1}, f_{a_2 2}, \dots, f_{a_2 k_{a_2}}, \dots, f_{ij}, \dots, f_{a_t 1}, \dots, f_{a_t k_{a_t}})$$

is called a (logical) matrix if

ξ and ω are two disjoint sets of any objects,

$a_1, a_2, \dots, a_t$ is any set of t integers where $0 < t < \aleph_0$,

$k_{a_1}, k_{a_2}, \dots, k_{a_t}$ are non-negative integers,

$f_{a_1 j}$ are k_{a_1} functions of a_1 arguments,

$f_{a_2 j}$ are k_{a_2} functions of a_2 arguments, etc.,

$f_{a_t j}$ are k_{a_t} functions of a_t arguments, all these functions f_{ij} being defined for all the elements of the set $\xi + \omega$ with values in $\xi + \omega$.

We shall write for short $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$. Throughout the paper i and j have the meaning described in the above definition, i. e.:

$$i = a_1, a_2, a_3, \dots, a_t;$$
$$j = 1, 2, \dots, k_{a_i}.$$

[2]) cf. K. Menger, Eine elementare Bemerkung über die Struktur der logischen Formeln, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3, 1932, page 22.

[3]) cf. J. Łukasiewicz and A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Spr. Tow. Naukowego Warsz., vol. 23, 1930, § 1, page 33, def. 3, 4, and A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fund. Math., 31, 1938.

Definition 2. A function h is called a valuation-function of the matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$ when the following conditions are satisfied:

(i) $h(\alpha)$ is defined for every $\alpha \epsilon \Omega$,

(ii) if α is a variable, $h(\alpha) \epsilon (\xi + \omega)$,

(iii) if $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ are elements of Ω,

$$h(A_i^j(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)) = f_{ij}(h(\alpha_1), h(\alpha_2), \ldots, h(\alpha_i)).$$

We shall say that the functor A_i^j in condition (iii) is described by the function f_{ij}.

Definition 3. A well-formed expression α satisfies the matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$ if for every valuation-function h of the matrix $h(\alpha) \epsilon \omega$.

It is easy to see by the definition of Ω and by condition (iii) of def. 2 that for every α, $h(\alpha)$ is a given function of the functions f_{ij} and of $h(x)$, where x is a single variable.

Since for a given matrix $\mathfrak{m}$ all f_{ij} are given, a single $h(\alpha)$ denotes all the valuation-functions of $\mathfrak{m}$, if we only assume that $h(x)$ denotes all the functions for which $h(x) \epsilon (\xi + \omega)$. A particular $h_0(x)$ is obtained when we assume that $h(x)$ assumes as its values all the elements of a particular subset of $(\xi + \omega)$ or all the elements of the set $(\xi + \omega)$ itself. Therefore to find all the valuation-functions of a given matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$ it is sufficient to exhibit a single valuation-function $h_{\mathfrak{m}}(\alpha)$, and to suppose that for x being a variable the $h(x)$ assume as their values all the elements of all the respective subsets of $(\xi + \omega)$. Then $h_{\mathfrak{m}}(\alpha)$ will stand for every valuation-function h of $\mathfrak{m}$.

Definition 4. The set of all well-formed expressions which satisfy the matrix $\mathfrak{m}$ is called a system constituted by $\mathfrak{m}$. This system is denoted by $E(\mathfrak{m})$.

Definition 5. $\mathfrak{m}$ is called finite if $\overline{\overline{\xi + \omega}} < \aleph_0$, otherwise infinite.

The matrix method of forming the systems $E(\mathfrak{m})$ permits us to consider languages based on an arbitrary number of arbitrary functors. Since $\{a_1, a_2, ..., a_t\}$ is an arbitrary set of positive integers, functors with some number of arguments may not occur.

Since j can be greater than 1, many different functors with the same number of arguments can be admitted.

If a function F maps a set φ_1 on the set φ_2 by one-one-correspondence, so that to every element $a_1 \epsilon \varphi_1$, an element $a_2 \epsilon \varphi_2$ is assigned and vice versa, we shall write $a_2 = F(a_1)$ and also $\varphi_2 = F(\varphi_1)$.

To denote that by the same correspondence to the subset ψ_1 of φ_1 is assigned the subset ψ_2 of φ_2 we shall write $\psi_2 = F(\psi_1)$.

Definition 6. Two matrices $\mathfrak{m}_1 = (\xi_1, \omega_1, f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}_2 = (\xi_2, \omega_2, f''_{ij})$ are called isomorphic, $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$, if there exists a function F which satisfies the following condition:

(i) $F(\xi_1 + \omega_1) = (\xi_2 + \omega_2)$, $F(\xi_1) = \xi_2$, $F(\omega_1) = \omega_2$,

(ii) $F(f'_{ij}(x_1, x_2, ..., x_i)) = f''_{ij}(F(x_1), F(x_2), ..., F(x_i))$, where $x_1, x_2, x_3, ..., x_i \epsilon (\xi_1 + \omega_1)$.

Definition 7. $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f_{ij})$ is called a submatrix of $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f_{ij})$ if the following conditions are satisfied:

(i) $(\xi' + \omega') \subset (\xi'' + \omega'')$,

(ii) $\omega'' \subset \omega'$.

In this case we write $\mathfrak{m}''$ est $X(\mathfrak{m}')$.

Corollary 1. For every matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$, $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}$.

Proof. In this case the function F maps every element of $(\xi + \omega)$ on itself.

Corollary 2. If $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$ and $\mathfrak{m}_2 \equiv \mathfrak{m}_3$, then $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_3$.

Proof. Let $\mathfrak{m}_1 = (\xi_1, \omega_1, f'_{ij})$, $\mathfrak{m}_2 = (\xi_2, \omega_2, f''_{ij})$, $\mathfrak{m}_3 = (\xi_3, \omega_3, f'''_{ij})$.

Since $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$, there exists a function F' which to every $a_1 \epsilon (\xi_1 + \omega_1)$ assigns one and only one $a_2 \epsilon (\xi_2 + \omega_2)$ so that $a_2 = F'(a_1)$ and since $\mathfrak{m}_2 \equiv \mathfrak{m}_3$, there exists a function F'' which to every $a_2 \epsilon (\xi_2 + \omega_2)$ assigns one and only one $a_3 \epsilon (\xi_3 + \omega_3)$ so that $a_3 = F''(a_2)$ and the conditions (i) and (ii) of def. 6 are satisfied.

Let F be a function which to every $a_1 \epsilon (\xi_1 + \omega_1)$ assigns $a_3 \epsilon (\xi_3 + \omega_3)$, so that $a_3 = F(a_1)$, $F(a_1) = F''(F'(a_1))$.

Since $F'(\xi_1) = \xi_2$ and $F''(\xi_2) = \xi_3$, $F(\xi_1) = F''(F'(\xi_1)) = F''(\xi_2) = \xi_3$; similarly

$$F(\omega_1) = \omega_3, \quad \text{and} \quad F(\xi_1 + \omega_1) = (\xi_3 + \omega_3). \tag{i}$$

Since $F'(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i)) = f''_{ij}(F'(x_1), \ F'(x_2), \ldots, F'(x_i))$ where $x_1, x_2, \ldots, x_i \epsilon (\xi_1 + \omega_1)$ and $F''(f''_{ij}(y_1, y_2, \ldots, y_i)) = f'''_{ij}(F''(y_1), F''(y_2), \ldots, F''(y_i))$ where $y_1, y_2, \ldots, y_i \epsilon (\xi_2 + \omega_2)$, $F(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i)) = F''(F'(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i))) = F''(f''_{ij}(F'(x_1), \ F'(x_2), \ldots, F'(x_i)))$.

Since $F'(x) = y$,

$$\begin{aligned} F(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i)) &= F''(f''_{ij}(y_1, y_2 \ldots, y_i)) = \\ &= f'''_{ij}(F''(y_1), F''(y_2), \ldots, F''(y_i)) = \\ &= f'''_{ij}(F''(F'(x_1)), \ F''(F'(x_2)), \ldots, F''(F'(x_i))) = \\ &= f'''_{ij}(F(x_1), \ F(x_2), \ldots, F(x_i)). \end{aligned} \tag{ii}$$

Hence both conditions of def. 6 for the function F are satisfied and $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_3$.

Corollary 3. If $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_2 \equiv \mathfrak{m}_1$.

Proof. If $\mathfrak{m}_1 = (\xi_1, \omega_1, f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}_2 = (\xi_2, \omega_2, f''_{ij})$, there exists a function F_0 which to every $a_1 \epsilon (\xi_1 + \omega_1)$ assigns one and only one $a_2 \epsilon (\xi_2 + \omega_2)$.

Let F be a function such that $a_1 = F(a_2)$ if and only if $a_2 = F_0(a_1)$.

Hence $a_1 = F(F_0(a_1))$.

Since $F_0(\xi_1) = \xi_2$, $F(\xi_2) = \xi_1$; similarly

$$F(\omega_2) = \omega_1, \quad \text{and} \quad F(\xi_2 + \omega_2) = (\xi_1 + \omega_1). \tag{i}$$

Since $F_0(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i)) = f''_{ij}(F_0(x_1), F_0(x_2), \ldots, F_0(x_i))$,

$F(F_0(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i))) = F(f''_{ij}(F_0(x_1), F_0(x_2), \ldots, F_0(x_i)))$.

But $F(F_0(a)) = a$.

Hence $f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i) = F(f''_{ij}(F_0(x_1), \ F_0(x_2), \ldots, F_0(x_i)))$.

Let $F_0(x_l) = y_l$ for $l = 1, 2, \ldots, i$.

Hence $x_l = F(y_l)$, and

$$f'_{ij}(F(y_1), F(y_2), \ldots, F(y_i)) = F(f''_{ij}(y_1, y_2, \ldots, y_i)). \tag{ii}$$

Corollary 4. If $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$, $E(\mathfrak{m}_1) = E(\mathfrak{m}_2)$.

Proof. Denote by $h_{\mathfrak{m}}(\alpha)$ valuation-functions of $\mathfrak{m}$.

Lemma. If $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$ by the mapping F, $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)$ are equal to $F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha))$.

For the proof of the lemma we shall show that $h_{\mathfrak{m}_2}$ satisfy the conditions characteristic of valuation-functions of $\mathfrak{m}_2$.

(i) If $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)$ are defined for every well-formed expression α, then $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)$ are also defined for every $\alpha \in \Omega$.

(ii) If α is a variable, $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha) \in (\xi_1 + \omega_1)$.

Since $F(\xi_1 + \omega_1) = (\xi_2 + \omega_2)$, $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha) \in (\xi_2 + \omega_2)$.

(iii) For $\alpha = A_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$, $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha) = f'_{ij}(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_i))$.

Hence $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha) = F(f'_{ij}(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_i)))$.

Since $\mathfrak{m}_1 \equiv \mathfrak{m}_2$ by the mapping F,

$$F(f'_{ij}(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_i)) =$$
$$= f''_{ij}(F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_1)), F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_2)), \ldots, F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_i))).$$

Hence $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha) = f''_{ij}(F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_1)), F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_2)), \ldots, F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha_i))) = f''_{ij}(h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha_i))$.

Let now $\alpha \in E(\mathfrak{m}_1)$.

This means that $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha) \in \omega_1$.

It follows from the lemma that:

$$h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha) = F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)).$$

Since $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha) \in \omega_1$, and $F(\omega_1) = \omega_2$, $F(h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)) \in F(\omega_1) = \omega_2$.

Therefore $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha) \in \omega_2$ which shows that $\alpha \in E(\mathfrak{m}_2)$.

Similarly we show that if $\alpha \in E(\mathfrak{m}_2)$, $\alpha \in E(\mathfrak{m}_1)$.

Hence $E(\mathfrak{m}_1) = E(\mathfrak{m}_2)$.

Corollary 5. If $\mathfrak{m}_2$ est $X(\mathfrak{m}_1)$, $E(\mathfrak{m}_2) \subset E(\mathfrak{m}_1)$.

Lemma. If $\mathfrak{m}_2$ est $X(\mathfrak{m}_1)$, the set of all valuation-functions of $\mathfrak{m}_1$ is a subset of all the valuation-functions of $\mathfrak{m}_2$, $\{h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)\} \subset \{h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)\}$.

To prove this lemma we only have to notice that $(\xi_1+\omega_1)\subset(\xi_2+\omega_2)$.

Hence for $\alpha=x$ (a variable), for every $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)\in(\xi_1+\omega_1)$, a particular $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)=h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)\in(\xi_2+\omega_2)$.

Proof of cor. 5. If $\alpha\in E(\mathfrak{m}_2)$, $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)\in\omega_2$.

Since by def. 7 (ii) $\omega_2\subset\omega_1$, $h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)\in\omega_1$;

Since $\{h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)\}\subset\{h_{\mathfrak{m}_2}(\alpha)\}$, $h_{\mathfrak{m}_1}(\alpha)\in\omega_1$ or $\alpha\in E(\mathfrak{m}_1)$.

Therefore $E(\mathfrak{m}_2)\subset E(\mathfrak{m}_1)$.

Definition 8 [4]). A matrix $\mathfrak{m}=(\xi,\omega,f_{ij})$ is called the product of $\mathfrak{m}'=(\xi',\omega',f'_{i'j'})$ and $\mathfrak{m}''=(\xi'',\omega'',f''_{i''j''})$ if the following conditions are satisfied:

(i) $(\xi+\omega)$ is a set of all ordered pairs (a,b) where $a\in(\xi'+\omega')$, $b\in(\xi''+\omega'')$,

(ii) $(a,b)\in\omega$ if and only if $a\in\omega'$ and $b\in\omega''$,

(iii) f_{ij} occurs among the functions f of $\mathfrak{m}$ for these and only these ij for which f'_{ij} and f''_{ij} occur in $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{m}''$ respectively,

(iv) if f_{ij} occurs in $\mathfrak{m}$, $f_{ij}((a_{k_1},b_{l_1});(a_{k_2},b_{l_2});\dots;(a_{k_i},b_{l_i}))=$ $=(f'_{ij}(a_{k_1},a_{k_2},\dots,a_{k_i}),f''_{ij}(b_{l_1},b_{l_2},\dots,b_{l_i}))$ where $a_{k_1},a_{k_2},\dots,a_{k_i}\in(\xi'+\omega')$ and $b_{l_1},b_{l_2},\dots,b_{l_i}\in(\xi''+\omega'')$.

In this case we write $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}''$.

Corollary 7. $\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}''=\mathfrak{m}''\cdot\mathfrak{m}'$.

Corollary 8. $\mathfrak{m}'\cdot(\mathfrak{m}''\cdot\mathfrak{m}''')=(\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}'')\cdot\mathfrak{m}'''$.

Corollary 9. If $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{m}''$ are finite, their product is finite, otherwise infinite.

---

[4]) Def. 8, cor. 9 and th. 1 are a generalization of a remark of M. Wajsberg, Cf. M. Wajsberg, Beiträge zum Metaaussagenkalkül, Monatshefte für Math. und Physik, vol. 42, 1935, § 4, p. 241. Cf. also Z. Zawirski, Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej, Kwart. Fil., XVI, 1946, p. 218, and St. Jaśkowski, Recherches sur le systeme de la logique intuitioniste, Actualités scientifiques et industrielles No 393, Hermann et Cie Paris, 1936 pp. 58—61.

Let $\mathfrak{m}_1=(\xi_1,\omega_1,f'_{i'j'})$, $\mathfrak{m}_2=(\xi_2,\omega_2,f''_{i''j''})$. Let the functions $f'_{i'j'}$ describe respectively the functors $A'^{j'}_{i'}$ of the (limited) language Ω', let the functions $f''_{i''j''}$ respectively describe the functors $A''^{j''}_{i''}$ of the (limited) language Ω''. Let $\Phi'\subset\Omega'$ and $\Phi''\subset\Omega''$. We shall say that Φ' and Φ'' are equivalent, $\Phi'=\Phi''$, if and only if we pass from Φ' to Φ'' by exchanging in all the expressions $\alpha\epsilon\Phi'$ their functors $A'^{j'}_{i'}$ by the functors $A''^{j''}_{i''}$ when $i''=i'$ and $j''=j'$. Let $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_t\subset\Omega$ for some (limited) language Ω and let $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_t$ be in some functional relationship R (for instance $\Phi_1\subset\Phi_2$ or Φ_1 equals $(\Phi_2+\Phi_3)\cdot\Phi_4$, all in the sense of the theory of sets).

If there are (limited) languages $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_t$ such that $\Phi'\subset\Omega_1,\Phi''\subset\Omega_2,\ldots,\Phi^{(t)}\subset\Omega_t$ and if $\Phi^{(l)}=\Phi_l$ for $l=1,2,\ldots,t$ we say that $\Phi',\Phi'',\ldots,\Phi^{(t)}$ are in the functional relationship R.

Theorem 1. If $\mathfrak{m}\equiv\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}''$, $E(\mathfrak{m})=E(\mathfrak{m}')\cdot E(\mathfrak{m}'')$.

Lemma. If $h_{\mathfrak{m}'}$ and $h_{\mathfrak{m}''}$ are the valuation-functions of $\mathfrak{m}'=(\xi',\omega',f'_{i'j'})$ and of $\mathfrak{m}''=(\xi'',\omega'',f''_{i''j''})$, and $\mathfrak{m}\equiv\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}''$, the valuation-functions $h_{\mathfrak{m}}$ of $\mathfrak{m}=(\xi,\omega,f_{ij})$ are ordered pairs of functions $h_{\mathfrak{m}'}$ and $h_{\mathfrak{m}''}$, $h_{\mathfrak{m}}=(h_{\mathfrak{m}'},h_{\mathfrak{m}''})$.

Proof of the lemma.

(i) If the $h_{\mathfrak{m}'}$ are defined for every $\alpha\epsilon\Omega_1$ where Ω_1 is the (limited) language constituted by the functors described by $f'_{i'j'}$, if the $h_{\mathfrak{m}''}$ are defined for every $\beta\epsilon\Omega_2$ where Ω_2 is the (limited) language constituted by the functors described by $f''_{i''j''}$, then $h_{\mathfrak{m}}(\gamma)=(h_{\mathfrak{m}'}(\gamma),h_{\mathfrak{m}''}(\gamma))$ are defined for every $\gamma\epsilon\Omega$, where Ω is the (limited) language constituted by the functors corresponding to f_{ij}.

This follows from the fact that a functor appears in Ω if and only if the corresponding functors respectively appear in Ω_1 and Ω_2.

Hence if $\gamma\epsilon\Omega$, then $\gamma\epsilon\Omega_1$ and $\gamma\epsilon\Omega_2$.

(ii) Since for α being a variable we have $h_{\mathfrak{m}'}(\alpha)\epsilon(\xi'+\omega')$, $h_{\mathfrak{m}''}(\alpha)\epsilon(\xi''+\omega'')$ and since $(\xi+\omega)$ is the set of all ordered pairs a, b where $a\epsilon(\xi'+\omega')$ and $b\epsilon(\xi''+\omega'')$, we see that $(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha),\ h_{\mathfrak{m}''}(\alpha))\epsilon(\xi+\omega)$ or $h_{\mathfrak{m}}(\alpha)\epsilon(\xi+\omega)$.

(iii) Since $h_{\mathfrak{m}'}$ and $h_{\mathfrak{m}''}$ are the valuation-functions of $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{m}''$, $\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_{i'}\epsilon\Omega_1$ entails

$$h_{\mathfrak{m}'}(A_{i'}^{j'}(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_{i'}')) = f_{i'j'}'(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1'), h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_2'), \ldots, h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_{i'}'))$$

and $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{i''}'' \epsilon \Omega_2$ entails

$$h_{\mathfrak{m}''}(A_{i''}^{j''}(\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_{i''}'')) = f_{i''j''}''(h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1''), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_2''), \ldots, h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_{i''}'')).$$

In particular, for $i' = i'' = i$ and $j' = j'' = j$, $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \ldots, \ldots, \alpha_i' \epsilon \Omega_1$ entails

$$h_{\mathfrak{m}'}(A_i^j(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_i')) = f_{ij}'(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1'), h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_2'), \ldots, h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_i'))$$

and $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_i'' \epsilon \Omega_2$ entails

$$h_{\mathfrak{m}''}(A_i^j(\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_i'')) = f_{ij}''(h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1''), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_2''), \ldots, h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_i'')).$$

For $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \epsilon \Omega$ we have

$$h_{\mathfrak{m}}(A_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)) = (h_{\mathfrak{m}'}(A_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)), h_{\mathfrak{m}''}(A_i^j(\alpha_1, \ldots, \alpha_i))) =$$
$$= (f_{ij}'(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1), \ldots, h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_i)), f_{ij}''(h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1), \ldots, h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_i))).$$

In view of def. 8 (iv)

$$(f_{ij}'(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_i)), f_{ij}''(h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1), \ldots, h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_i))) =$$
$$= f_{ij}((h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1)); (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_2), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_2)); \ldots; (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_i), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_i))).$$

Hence for $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) = (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha))$ we have

$h_{\mathfrak{m}}(A_i^j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)) = f_{ij}(((h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_1)), \ldots, ((h_{\mathfrak{m}'}(\alpha_i), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha_i))) =$
$= f_{ij}(h_{\mathfrak{m}}(\alpha_1), h_{\mathfrak{m}}(\alpha_2), \ldots, h_{\mathfrak{m}}(\alpha_i))$ and $h_{\mathfrak{m}}$ satisfies the conditions for the valuation-function of $\mathfrak{m}$.

Having proved the lemma, we can easily prove theorem 1.

Proof of theorem 1. If $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}')$ and $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}'')$, $h_{\mathfrak{m}'}(\alpha) \epsilon \omega'$ and $h_{\mathfrak{m}''}(\alpha) \epsilon \omega''$.

By definition 8 (ii), $(h_{\mathfrak{m}'}(\alpha), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha)) \epsilon \omega$.

Since $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) = (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha))$, $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) \epsilon \omega$ which shows that $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m})$.

Assume $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m})$.

Then $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) \epsilon \omega$.

By def. 8 (ii): $h_{\mathfrak{m}'}(\alpha) \epsilon \omega'$ and $h_{\mathfrak{m}''}(\alpha) \epsilon \omega''$ which shows that $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}')$ and $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}'')$.

Therefore $E(\mathfrak{m}) = E(\mathfrak{m}') \cdot E(\mathfrak{m}'')$.

The problem whether there is a matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$ such that for two given matrices $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{i'j'})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{i''j''})$, $E(\mathfrak{m}) = E(\mathfrak{m}') + E(\mathfrak{m}'')$ has not yet been solved to the anthors knowledyc.

We now assume that $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{ij})$, and we prove the following theorem:

Theorem 2. If $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{ij})$, there is a matrix $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$ such that $E(\mathfrak{m}) = E(\mathfrak{m}') + E(\mathfrak{m}'')$.

If $a \epsilon (\xi' + \omega')$ and $b \epsilon (\xi'' + \omega'')$, then:

(i) $(\xi + \omega)$ is the set of all ordered pairs (a, b),

(ii) $(a, b) \epsilon \omega$ if and only if either $a \epsilon \omega'$ or $b \epsilon \omega''$,

(iii) $f_{ij}((a_{k_1}, b_{l_1}), (a_{k_2}, b_{l_2}), \ldots, (a_{k_i}, b_{l_i}) =$

$$= (f'_{ij}(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_i}), f''_{ij}(b_{l_1}, b_{l_2}, \ldots, b_{l_i})).$$

Lemma. $h_{\mathfrak{m}} = (h_{\mathfrak{m}'}, h_{\mathfrak{m}''})$.

The proof of the lemma is similar to the proof of the lemma preceding theorem 1.

Proof of theorem 2. Let us assume that $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}')$ or $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}'')$. $h_{\mathfrak{m}'}(\alpha) \epsilon \omega'$ or $h_{\mathfrak{m}''}(\alpha) \epsilon \omega''$ by def. 1, 2, 3, 4.

Hence $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) = (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha)) \epsilon \omega$ and $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m})$.

Conversely, let us suppose that $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m})$. This means that $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) \epsilon \omega$.

Since $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) = (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha))$, there are two possibilities:

(i) $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}')$ or $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m}'')$,

(ii) $\alpha \overline{\epsilon} E(\mathfrak{m}')$ and $\alpha \overline{\epsilon} E(\mathfrak{m}'')$.

To prove the theorem we shall show that case (ii) never occurs.

If (ii) occured, there would be a substitution $a_1, a_2, \ldots, a_n$ for the variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ of α respectively, such that:

$$h_{\mathfrak{m}'}(\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \overline{\epsilon} \omega' \text{ where } a_1, a_2, \ldots, a_n \epsilon (\xi' + \omega'),$$

and a substitution $b_1, b_2, \ldots, b_n$ for the variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ of α such that:

$$h_{\mathfrak{m}''}(\alpha(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \overline{\epsilon} \omega'' \text{ where } b_1, b_2, \ldots, b_n \epsilon (\xi'' + \omega'').$$

Consider $h = h_{\mathfrak{m}}(\alpha((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)))$.

Hence $h = (h_{\mathfrak{m}'}(\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n)), h_{\mathfrak{m}''}(\alpha(b_1, b_2, \ldots, b_n)))$, $h \overline{\epsilon} \omega$ and $\alpha \overline{\epsilon} E(\mathfrak{m})$, which contradicts our assumption that $\alpha \epsilon E(\mathfrak{m})$.

Definition 9. We call the matrix $\mathfrak{m}$ constructed in th. 2 the sum of $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}''$.

Corollary 10. If $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{ij})$, $\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}'' \equiv \mathfrak{m}'' + \mathfrak{m}'$.

Corollary 11. $\mathfrak{m}' + (\mathfrak{m}'' + \mathfrak{m}''') \equiv (\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}'') + \mathfrak{m}'''$.

Corollary 12. If $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{m}''$ are finite, $\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}''$ is finite, otherwise infinite.

Definition 10. Two matrices $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{i'j'})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{i''j''})$ are called equal, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$, if and only if $E(\mathfrak{m}') = E(\mathfrak{m}'')$.

Corollary 13. If $\mathfrak{m}' \equiv \mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$.

Consider two matrices $\mathfrak{m}' = (\xi', \omega', f'_{ij})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi'', \omega'', f''_{ij})$.

Let $\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}''$, $\overline{\mathfrak{m}} \equiv \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}''$.

For arbitrary sets S' and S'', it is known that $S' = S''$ if and only if $(S' \cdot S'') = (S' + S'')$.

Hence $E(\mathfrak{m}') = E(\mathfrak{m}'')$ if and only if

$$E(\mathfrak{m}') \cdot E(\mathfrak{m}'') = E(\mathfrak{m}') + E(\mathfrak{m}'')$$

and $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$ if and only if $(\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}'') = (\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}'')$.

In other words $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$ if and only if $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$.

It is easy to see that if $\mathfrak{m} = (\xi, \omega, f_{ij})$, $\overline{\mathfrak{m}} = (\varphi, \psi, f_{ij})$ where $(\xi + \omega)$ is identical with $(\varphi + \psi)$ and ω is a proper part of ψ.

Let ψ be identical with $(\omega + \delta)$. Then $(\varphi + \delta)$ is identical with ξ.

Hence $\overline{\mathfrak{m}} = (\varphi, \omega + \delta, f_{ij})$, $\mathfrak{m} = (\varphi + \delta, \omega, f_{ij})$.

Since $(\xi + \omega)$ and $(\varphi + \psi)$ are identical, the valuation-functions $h_{\mathfrak{m}}$ and $h_{\overline{\mathfrak{m}}}$ are respectively identical, $h_{\mathfrak{m}}(\alpha) = h_{\overline{\mathfrak{m}}}(\alpha) = h(\alpha)$.

If $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$, there is no expression α such that $h(\alpha) \epsilon \delta$ for every h without $h(\alpha) \epsilon \varphi$ for some h. If there were such an α, the following conditions would be satisfied: $\alpha \epsilon E(\overline{\mathfrak{m}})$, $\alpha \overline{\epsilon} E(\mathfrak{m})$ which contradicts $E(\mathfrak{m}) = E(\overline{\mathfrak{m}})$. Hence we have the following

Theorem 3. $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}''$ if and only if there is an expression α_0 such that $h_0(\alpha_0) \epsilon \delta$ and $h_{\overline{\mathfrak{m}}}(\alpha_0) \overline{\epsilon} \varphi$, where h_0 is an arbitrary valuation-function of the matrix $\overline{\mathfrak{m}} \equiv \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}''$.

Definition 11. The matrix $\mathrm{O} = (\{a\}, 0, f_{ij})$ is called the O-matrix, where 0 stands for an empty set.

Definition 12. The matrix $\mathrm{U} = (0, \{a\}, f_{ij})$ is called the U-matrix.

Corollary 14. $E(\mathrm{O}) = 0$.

Corollary 15. $E(\mathrm{U}) = \Omega$ where Ω is the (limited) language constituted by the functors A_i^j described by the functions f_{ij}.

Corollary 16. $\mathfrak{m} + \mathrm{O} \equiv \mathfrak{m}$.

Corollary 17. $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{U} \equiv \mathfrak{m}$.

Corollary 18. $(\xi, 0, f_{ij}) = \mathrm{O}$, $(0, \omega, f_{ij}) = \mathrm{U}$.

Corollary 19. For a given matrix $\mathfrak{m}$, $E(\mathfrak{m}) = 0$ if and only if $\mathfrak{m} = \mathrm{O}$.

Corollary 20. $E(\mathfrak{m}') \subset E(\mathfrak{m}'')$ if and only if $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}'$.

It is easy to see that two logical matrices $\mathfrak{m}' = (\xi, \omega, f_{ij})$ and $\mathfrak{m}'' = (\xi', \omega', f'_{ij})$ are equal if there is a function $F(x)$ such that:

(i) $F(x)$ is defined for every $x \epsilon (\xi' + \omega')$,

(ii) for every $x \epsilon (\xi' + \omega')$, $F(x) \epsilon (\xi + \omega)$,

(iii) $F(x) \epsilon \xi$ if and only if $x \epsilon \xi'$,

(iv) for every $x \epsilon (\xi' + \omega')$ there is one and only one y such that $F(x) = y$,

(v) for every $y \epsilon (\xi + \omega)$ there is at least one $x \epsilon (\xi' + \omega')$ such that $F(x) = y$,

(vi) for every $x_1, x_2, \ldots, x_i \epsilon (\xi' + \omega')$,

$$F(f'_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_i)) = f_{ij}(F(x_1), F(x_2), \ldots, F(x_i)).$$

Corollary 21. The ordinary two-valued $C-N$ system can be considered as formed by a matrix with arbitrary number of values.

The author acknowledges with grateful thanks his deep indebtedness to Professor A. Mostowski for much valuable advice and assistance.

UNIVERSITY OF LEEDS

Jan Kalicki

O metodzie matrycowej Tarskiego

Przedstawił czł. A. Mostowski dn. 12 marca 1948 r.

Streszczenie

Autor uogólnia podaną przez Tarskiego definicję matrycy logicznej na przypadek dowolnej liczby funktorów o dowolnej liczbie argumentów i wprowadza dla określonych przez siebie matryc pojęcia sumy, iloczynu, matrycy zerowej i matrycy jednostkowej, uzyskując w ten sposób algebrę matryc.

TREŚĆ

TABLE DES MATIÈRES

41
1948

SPRAWOZDANIA WYDZIAŁU III T.N.W.