

Krzysztof Wiśniewski

ANALIZA NUMERYCZNA
STATYCZNEJ STATECZNOŚCI
POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ
OBCIĄŻONEJ WIATREM

- 50/1985

P. 269



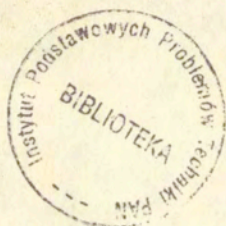
WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 listopada 1985 r.

56899



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 6,4 Ark.druk. 9

Oddano do drukarni w styczniu 1986 r.

Nr zamówienia 71/86.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Krzysztof WIŚNIEWSKI
Zakład Teorii Konstrukcji
IPPT PAN

ANALIZA NUMERYCZNA STATYCZNEJ STATECZNOŚCI
POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ OBCIĄŻONEJ WIATREM

Streszczenie

Praca dotyczy numerycznego wyznaczenia obciążenia przekroju dla cienkich, sprężystych powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem. Założono, że obciążenie ma charakter quasi-statyczny i niezależny od deformacji powłoki. Wykorzystano warianty równań teorii powłok wg Sandersa-Koitera, Sandersa i Donnella.

Podstawę analiz stanowi definicja stateczności wg Lapunowa. Równania stateczności otrzymano z warunku stacjonarności drugiej różniczki energii potencjalnej układu. Przeprowadzono analizy stateczności początkowej oraz nieliniową analizę dokrytyczną. Opracowano metody obliczeniowe, do przeprowadzania powyższych analiz, bazujące na reprezentacjach Fouriera w kierunku obwodowym oraz metodzie różnic skończonych w kierunku tworzącej powłoki. Obliczone przykłady wykazały znaczną efektywność i dobrą dokładność opracowanych metod.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

W projektowaniu współczesnych konstrukcji powłokowych istnieje tendencja do nadawania im ekstremalnych parametrów geometrycznych tzn. dużych rozmiarów /rozpiętości, średnic/i małych grubości ścianek. W związku z tym duże znaczenie posiada problematyka związana ze statecznością tych konstrukcji, a w szczególności z przeprowadzeniem analiz stateczności ich modeli.

Analiza stateczności wiąże się z wieloma problemami teoretycznymi dotyczącymi definicji i kryteriów stateczności oraz zagadnieniami związanymi z obliczeniową stroną analizy. Obszerny przegląd definicji i kryteriów stateczności, z uwzględnieniem historii ich rozwoju zawiera np. praca Knopsa i Wilkesa [38]; w rozdziale 3 pracy omówimy tylko niektóre z nich. Obecnie powszechnie akceptowana jest koncepcja stateczności jako zjawiska kinetycznego. Także w niniejszej pracy punkt wyjściowy analizy stanowi definicja, która stateczność konfiguracji równowagi wiąże z własnościami wymuszonego ruchu ciała w otoczeniu tej konfiguracji. Jest to definicja stateczności wg Lapunowa.

Należy podkreślić, że kryteria i sposób przeprowadzania analizy stateczności zależą nie tylko od zastosowanej definicji stateczności lecz w dużej mierze są zdeterminowane przez dobór charakterystyk modelu konstrukcji i obciążeń zewnętrznych. Problem zachowania się powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem jest problemem aerosprężystości lecz przeprowadzenie pełnej, aerodynamicznej analizy, podobnej do tej jaką przeprowadza się dla konstrukcji lotniczych /por. np. Dzygadlo [24] /, nie jest w tym przypadku konieczne. Bowiem, mimo przyjęcia założeń upraszczających, dotyczących charakterystyki obciążeń wiatrem i deformacji powłoki, otrzymuje się rezultaty zbliżone do wyników doświadczalnych z dokładnością wystarczającą do celów inżynierskich.

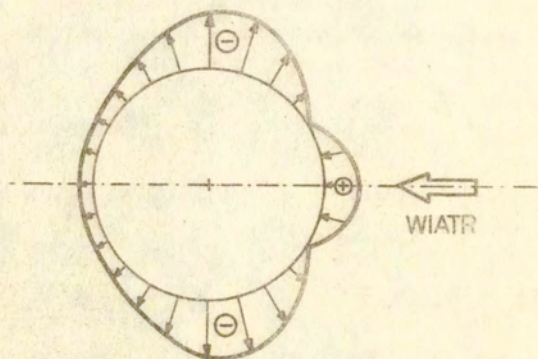
Zasadnicze uproszczenie analizy jest wynikiem nie uwzględnienia dynamicznego przepływu powietrza oraz wzajemnego oddziaływania masy powietrza i powłoki. W pracy przyjmuje się, że obciążenia wzrastają w sposób statyczny, nie wywołując dynamicznych reakcji

powłoki a ponadto rozkład i wielkość obciążeń nie zależą od deformacji powłoki. W konsekwencji po przyjęciu rozkładu ciśnień na powierzchni powłoki /przykładowy rozkład pokazano na rys. 1.1/ układ sił obciążających jest charakteryzowany za pomocą jednego parametru obciążenia niezależnego od czasu. Oprócz założeń dotyczących obciążeń w pracy przyjęto pewne ograniczenia na deformację powłoki. Ograniczenia te prowadzą do różnych wariantów równań w ramach teorii sprężystych powłok cienkich typu Kirchhoffa-Love'a.

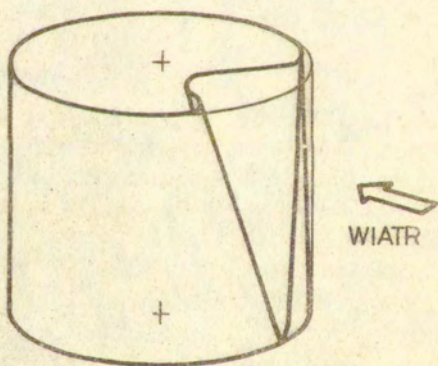
Powłoka sprężysta i obciążenie martwe stanowią układ konserwatywny, dla którego analiza małego ruchu w otoczeniu konfiguracji równowagi prowadzi do kryteriów statycznych /energii potencjalnej oraz jej drugiej różniczki/ jako zapewniających stateczność w sensie Lapunowa. Kryterium drugiej różniczki energii potencjalnej stanowi podstawę analiz stateczności przeprowadzonych w niniejszej pracy.

Mimo, że w wyniku przyjętych założeń zagadnienie znacznie się upraszcza to jednak nadal analiza stateczności bazuje na nieliniowych, cząstkowych równaniach różniczkowych, rozwiązywanie których jest trudne i złożone. Z tego też względu rozwijane są metody obliczeniowe, które wykorzystując specyficzne cechy pewnej klasy zadań prowadzą do efektywnych algorytmów. Zamierzeniem niniejszej pracy jest opracowanie takich właśnie metod dla sprężystych powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem. Analiza tych powłok stanowi zagadnienie o dużym znaczeniu praktycznym w związku z projektowaniem takich konstrukcji jak: wieże chłodnicze, silosy, zbiorniki na ciecze i wiele innych. Dla konstrukcji tych utrata stateczności /wykazała to np. katastrofa zbiornika na ropę w Haydock w Lancashire w 1967r. oraz badania modelowe w tunelach aerodynamicznych/ wiąże się z silną deformacją strefy czołowej powłoki, patrz rys. 1.2. Najczęściej uniemożliwia to dalszą eksploatację obiektu i dlatego należy tak dobrać parametry konstrukcji by zjawisko to nie wystąpiło w przewidywanym zakresie obciążeń.

Z tego też względu analiza stateczności stanowi niezwykle ważny element projektowania inżynierskiego tych konstrukcji i stąd wynika potrzeba opracowywania odpowiednich metod i programów numerycznych umożliwiających jej efektywne przeprowadzenie.



Rys.1.1. Przykładowy rozkład ciśnienia wiatru w kierunku obwodowym powłoki. Oznaczenia: + parcie, - ssanie.



Rys.1.2. Schemat zdeformowanej powłoki cylindrycznej po utracie statyczności pod działaniem wiatru.

1.2. Przegląd Literatury

Poniższy przegląd literatury ograniczono do prac niezbędnych do omówienia metod obliczeniowych stosowanych w analizie stateczności powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem oraz scharakteryzowania badań eksperymentalnych pod kątem ich związku z analizami numerycznymi.

Badania eksperymentalne, przeprowadzane na modelach powłok cylindrycznych umieszczonych w tunelu aerodynamicznym, miały dwójaki cel:

- 1/ określenie rozkładu ciśnienia na powierzchni cylindrycznej np. Ziółko [87]. Powyższy cel można także zrealizować za pomocą pomiarów na obiektach rzeczywistych, patrz np. Żurański [88],
- 2/ wyznaczanie wartości obciążenia krytycznego dla powłoki cylindrycznej np. Kundurpi i in. [46].

Do przeprowadzenia tego badania potrzebny jest tunel aerodynamiczny o specjalnej konstrukcji, w którym można wymusić przepływ powietrza z odpowiednio dużą prędkością.

Określony doświadczalnie rozkład ciśnienia stanowi podstawę analiz numerycznych stateczności. Natomiast eksperymentalną wartość krytyczną wykorzystuje się do oceny, otrzymanych na drodze numerycznej, rezultatów.

Prace numeryczne bazują w większości na klasycznej, zaproponowanej przez Koitera [42], koncepcji stateczności początkowej. Rezultaty tych analiz, dla powłok obciążonych wiatrem są wyższe lub niższe od wyników doświadczalnych, w zależności od rozkładu obciążeń przyjętego do analizy. Stosowane są dwa rodzaje rozkładów obciążeń:

- a/ niesymetryczny odpowiadający rezultatom badań doświadczalnych;
- b/ osiowosymetryczny rozkład zastępczy, wykorzystywany ze względu na związane z nim uproszczenia obliczeń.

Przyjęcie do analizy osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego prowadzi do wartości obciążenia krytycznego niższych od otrzymanych doświadczalnie /patrz Kundurpi i in. [46]/. Prace bazujące na tym założeniu zazwyczaj wykorzystują rozwinięcie wektora postaci wybożenia w skończony szereg Fouriera w kierunku obwodowym. Otrzymuje się wtedy ciąg zadań jednowymiarowych, które następnie są rozwiązywane analitycznie /Kundurpi i in. [46] / lub przy pomocy metody różnic skończonych /Bushnell [18] /.

Wyjątek stanowi praca Wildego i Sawickiego [77], w której do analizy wpływu imperfekcji początkowych na wartość obciążenia krytycznego, zastosowano dwuwymiarową metodę różnic skończonych.

Ze względu na niesymetrię rzeczywistego rozkładu prądu/wiatru na obwodzie powłoki właściwsze jest przyjęcie osiowo-niesymetrycznego obciążenia obliczeniowego. Dla takiego obciążenia z analizy stateczności początkowej otrzymuje się wartości krytyczne wyższe od doświadczalnych.

Uwzględnienie niesymetrii stanu porównawczego sił błonowych znacznie komplikuje obliczeniową stronę analizy. Z tego powodu rozwiązanie analityczne otrzymał Almoth [2] tylko dla uproszczonego obciążenia w postaci

$$(1.1) \quad p(\theta) = p_0 + p_1 \cdot \cos \theta$$

Formę wybożenia przyjęto jako podwójne szeregi trygonometryczne i w oparciu o metodę Bayleigha - Ritza określono obciążenie krytyczne.

W pracy Maderspacha i in. [50] przy użyciu tej samej metody ale już na drodze numerycznej, otrzymano rozwiązanie dla większej liczby wyrazów rozwinięcia funkcji obciążenia co pozwoliło lepiej uwzględnić charakter obciążenia wiatrem.

Rozwinięcia w szereg Fouriera w kierunku obwodowym stosowano łącznie z innymi metodami w kierunku tworzącej: z rozkładem w szereg potęgowy /Kundurpi i in. [46] /, oraz z metodą różnic skończonych /Sheinman i in. [68] /. Metoda zastosowana w pracy [68] stanowi uogólnienie sposobu rozwiązywania wykorzystanego przez Bushnella [18] do problemu osiowosymetrycznego.

Bardzo interesującą metodę rozwiązania problemu zaprezentował Bushnell w pracy [19], w której powłokę cylindryczną aproksymowano wycinkiem torusa o bardzo dużym promieniu. W pracy tej wykorzystano z pewnymi modyfikacjami metodę zastosowaną przez Kalinsa [34], który zagadnienie statyczne dla powłok osiowo-symetrycznych poddanych niesymetrycznym obciążeniom rozwiązał stosując rozwinięcia w szereg Fouriera wzdłuż obwodu i wielosegmentową metodę całkowania numerycznego wzdłuż tworzącej powłoki. W analizie stateczności postać wyboczenia rozwija się w szereg Fouriera wzdłuż dużego obwodu torusa, a całkowanie numeryczne odbywa się wzdłuż małego obwodu torusa, który odpowiada kierunkowi obwodowemu cylindra.

Najbardziej istotne, ze względu na metodę opracowaną w niniejszej pracy, są prace Wang, Billingtona [74] oraz Langhaara i Millera [47]. W pracach tych koncepcję rozwinięcia w szereg Fouriera w kierunku obwodowym połączone z metodą zakładania formy utraty stateczności wzdłuż tworzącej. Wykorzystano formy otrzymane z analizy powłoki obciążonej równomiernym ciśnieniem, które po znormalizowaniu posłużyły do określenia odpowiednich całek wzdłuż tworzącej. Przybliżone równanie problemu otrzymano przez całkowanie równania stateczności wzdłuż tworzącej i przyrównanie całki do zera. W ten sposób "rozmyte" człony residualne będące wynikiem przyjęcia rozkładów z analizy symetrycznej. Analiza powyższa bazowała na wariancie równań teorii powłok Timoshenki uproszczonych przez Wang, Lee i Billingtona [75]. /przyjęcie założenia o niewydłużalności w kierunku obwodowym/. W konsekwencji wyeliminowano składową wektora przemieszczeń w kierunku obwodowym co pozwoliło zredukować liczbę równań i warunków brzegowych oraz obniżyć rząd równań różniczkowych problemu. Jest to istotne ze względu na przyjęty w tych pracach sposób tworzenia ostatecznego układu równań. Należy zauważyć, że założenie o niewydłużalności zostało także wykorzystane w zaproponowanej przez Frackiewicza [25] analizie geometrycznej zmienności powłok siatkowych, co potwierdza trafność powyższego założenia.

Rozwinięcia w szeregi Fouriera nie są stosowane wyłącznie w pracach Brendela, Rama i in. [11,10]. Jednakże w pracach tych, bazujących na metodzie elementów skończonych /element trójwymia-

rowy zdegenerowany do powłokowego/ analiza stateczności początkowej ma charakter uzupełniającej analizę nieliniową.

Różnice pomiędzy rezultatami doświadczalnymi a otrzymanymi z analizy stateczności początkowej uzasadniają przeprowadzenie dokładniejszych analiz stateczności, uwzględniających geometryczną nieliniowość zagadnienia w obszarze dokrytycznym. Do analizy nieliniowej nie można wykorzystywać osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego ponieważ prowadzi to do rezultatów bardziej odległych od wyników doświadczalnych dla obciążenia wiatrem niż te z osiowosymetrycznej analizy stateczności początkowej. Obciążenie symetryczne byłoby bardzo dogodne ze względu na to, że wtedy problem jest jednowymiarowy, co daje znaczną efektywność i względną prostotę odpowiadających algorytmów, patrz Bushnell [17] , Kalnins i in. [35] .

Analiza geometrycznie nieliniowa, powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem, ma sens tylko wtedy gdy uwzględnia się niesymetryczność obciążenia i rozwiązuje zadanie dwuwymiarowe. Jak dotychczas analizę powyższego problemu w taki właśnie sposób przeprowadzili tylko Brendel, Ramma i in. autorzy prac [10,11]. W pracach tych posłużono się elementem skończonym, otrzymanym przez degenerację elementu przestrzennego, który jest opisany w pracy Ramma [65] . Charakterystykę tego elementu przytoczono w rozdziale 5 niniejszej pracy. Obliczenia Brendela, Ramma i in. wykazują, że tego typu analiza jest zadaniem szczególnie trudnym z następujących przyczyn:

- a/ wyznaczenie kolejnych zdeformowanych konfiguracji powinno być uzupełnione rozwiązywaniem zagadnienia na wartości własne odpowiadającego warunkowi stanu krytycznego i pozwalającego ocenić odległość od obciążenia krytycznego. Prowadzi to do bardzo pracochłonnych, o dużej liczbie operacji maszynowych, zadań,
- b/ niesymetryczności obciążenia odpowiada bardzo złożona postać deformacji, także w kierunku tworzącej powłoki. Złożoność ta zwiększa się dla powłok o dużej wiotkości /dla rzeczywistych konstrukcji $h/\tau \approx 1/2000$ /. Z tego względu zadania te wymagają użycia wielu tysięcy niewiadomych,

c/ w zagarnieniach stateczności powłok dużą rolę odgrywają człony zgięciowe, które są wiele rzędów mniejsze od członów odpowiadających odkształceniom błonowym. Stwarza to konieczność wykonywania obliczeń z dużą dokładnością.

Powyższe przyczyny sprawiają, że zadania odpowiadające temu rodzajowi analizy stateczności można rozwiązywać tylko na dużych i szybkich komputerach dysponujących słowem maszynowym o znacznej długości.

Omówione dotychczas metody wykazują wiele niedogodności jeżeli zastosować je do powłok charakteryzujących się skokowo-zmianą grubością po tworzącej oraz wtedy gdy obliczenia trzeba przeprowadzać na niewielkich komputerach. Dlatego należy wykluczyć stosowanie dwuwymiarowych dyskretyzacji, np. metodą elementów skończonych, jako prowadzących do zbyt dużych programów oraz odrzucić metody, które zacierają skokową zmienność grubości tzn. takie jak: rozwinięcia w szeregi trygonometryczne lub potęgowe po tworzącej powłoki. Z tego względu żadna z wymienionych metod, oprócz stosowanej w [18] dla przypadku osiowosymetrycznego, nie może być stosowana bez zmian. Propozycje modyfikacji tych metod, dostosowujących je do wymienionych potrzeb, omówione zostaną w następnym punkcie pracy.

1.3. Cel i zakres pracy

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest kompleksowe opracowanie problemu analizy numerycznej powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem poprzez:

- a/ omówienie podstaw teoretycznych analizy stateczności powłok i odniesienie ich do podjętego problemu;
- b/ zestawienie prac dotyczących problemu w celu oceny stosowanych koncepcji analizy stateczności i metod rozwiązania problemu /punkt 1.2/;
- c/ opracowanie metod obliczeniowych odpowiadających wymienionym w punkcie 1.2 koncepcjom analizy stateczności. Z metodami obliczeniowymi wiąże się, zdaniem autora, elementy oryginalne niniejszej pracy. Metody te umożliwiają analizę powłok cylindrycznych o dowolnych, klasycznych warunkach brzegowych i różnych rozkładach grubości po tworzącej powłoki.

Opracowując je kierowano się tym by prowadziły do zadań o niewielkich rozmiarach dających się efektywnie rozwiązać na niewielkich maszynach cyfrowych. Wszystkie metody wykorzystują rozwinięcia podstawowych wielkości w szeregi Fouriera w kierunku obwodowym powłoki. Metody te dokładniej określono nieco dalej omawiając zawartość rozdziału 4 i 5;

- d/ napisanie i uruchomienie programów numerycznych do przeprowadzania poszczególnych rodzajów analiz oraz wykonanie obliczeń przykładowych.

Poniżej omówimy zawartość poszczególnych rozdziałów pracy /rozpoczynając od rozdziału 2/.

W rozdziale 2 podano podstawowe równania wariantów teorii powłok, które zostaną wykorzystane w analizach numerycznych. Prezentując poszczególne grupy równań zwrócono uwagę na założenia przyjęte przy redukcji problemu prezentowanego do dwuwymiarowego oraz na ograniczenia deformacji przy tworzeniu uproszczonych wariantów teorii. Klasyfikację ograniczeń dotyczących deformacji powłoki oparto na definicji wektora obrotu skończonego wykorzystując notację i sposób prezentacji stosowany w pracach Pietraskiewicza [61,62,64].

W pracy wykorzystano następujące warianty teorii powłok:

- a/ liniową teorię Sandersa-Koitera [16,39,66]
 b/ nieliniową teorię Sandersa [67]
 c/ nieliniową teorię powłok małowyniosłych Dennella [22].

Są to teorie cienkich powłok sprężystych dla materiału izotropowego i jednorodnego. Równania tych teorii wyprowadzono przy założeniu, że odkształcenia w powłoce są małe a ponadto deformacja jest zgodna z więzami Kirchhoffa-Love'a. Związki konstytutywne określono w oparciu o tzw. pierwsze przybliżenie energii odkształcenia i mają one postać niesprężoną.

Podstawowe relacje dla tych teorii sformułowano stosując opis Lagrange'a oraz konwekcyjny układ współrzędnych. Dla teorii Kirchhoffa-Love'a opis Lagrange'a, tzn. w geometrii związanej ze znaną konfiguracją odniesienia, jest fizycznie równoważny opisowi Eulera. Zmiana opisu odbywa się przy pomocy związków transformacyjnych dla układów współrzędnych związanych z geometrią odniesienia i aktualną, patrz np. prace Koitera [41], Koitera i

Simmondsa [45] , Sandersa [67] , Pietraszkiewicza [61,62,64]. Dla ogólniejszej teorii, z hipotezą kinematyczną typu Reissnera, związki transformacyjne podaje Woźniak [82].

Konsekwencją stosowania opisu Lagrange'a jest pewna komplikacja równań równowagi i naturalnych warunków brzegowych związana z pojawieniem się w nich składowych gradientu deformacji. Zaletą tego opisu jest to, że odpowiednie relacje mogą być bezpośrednio /tzn. bez transformacji/ wykorzystane w analizach numerycznych.

Rozdział zakończono omówieniem koncepcji przyrostowego opisu deformacji powłoki. Podano przyrostową postać zasady prac wirtualnych oraz zdefiniowano odpowiadający funkcjonal energii potencjalnej. Druga różniczka funkcjonału energii potencjalnej stanowi podstawę sformułowania warunku stanu krytycznego a tym samym tworzenia różnych wariantów równań stateczności /wykorzystanych w rozdziałach 4 i 5/.

Rozdział 3 rozpoczęto od omówienia ogólnych zagadnień stateczności dla układów sprężystych pod działaniem obciążeń konserwatywnych. Stateczność układu jest utożsamiana ze statecznością poszczególnych konfiguracji równowagi, z których każda odpowiada pewnej stałej wartości obciążenia. Analizowana jest stateczność układu "w małym" tzn. badany jest ruch układu, wywołany przez zaburzenie typu kinematycznego, w bliskim otoczeniu konfiguracji równowagi. Wykorzystanie definicji stabilności wg Lapunowa, w przypadku układów konserwatywnych, prowadzi do warunków wystarczających stateczności w postaci kryteriów: minimum energii potencjalnej oraz drugiej różniczki. Przytoczono powyższą definicję i kryteria a następnie podano warunek stanu krytycznego równowagi obojętnej, w oparciu o który otrzymuje się równania stateczności. Powyższe kwestie omówiono w terminach układów dyskretnych, zamieszczono jednak także uwagi dotyczące zagadnień stateczności powłok ciągłych.

W dalszej części rozdziału scharakteryzowano przeprowadzone w pracy rodzaje analiz stateczności powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem. Analizy te mają na celu wyznaczenie punktu granicznego /obciążenia przeskoku/ i bazują na różnych postaciach równań stateczności.

W rozdziale 4 podjęto problem analizy stateczności początkowej dla powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem. Z racji założeń linearyzujących, jakie przyjmuje się do tej analizy, jest ona najbardziej rozpowszechniona dla powyższej konstrukcji i obciążenia.

W rozdziale tym omówiono metody obliczeniowe odpowiadające dwóm sposobom określania obciążeń krytycznych, tzn. analizie dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego oraz analizie uwzględniającej niesymetrię obciążenia. Obydwa sposoby bazują na rozwinięciach w szeregi Fouriera, które w przypadku analizy stateczności początkowej prowadzą do bardzo efektywnych algorytmów.

W celu otrzymania zadań o niewielkich rozmiarach opracowano wersję metody, w której do rozwiązywania zadania niesymetrycznego wykorzystuje się formy utraty stateczności wzdłuż tworzącej otrzymane w zadaniu symetrycznym /Wang, Billington [74] oraz Langhaar, Miller [47] /. Aby zwiększyć możliwości tej metody sformułowano ją nieco inaczej. Zrezygnowano w zadaniu osiowosymetrycznym z zakładania postaci rozwiązania jako kombinacji liniowej funkcji wykładniczych i trygonometrycznych

$$(1.2) \quad w^{(k)} = A_{k1} \cdot e^{-\xi_k(l-y)} + A_{k2} \cdot e^{-\xi_k y} + A_{k3} \cdot e^{\eta_k y} + \\ A_{k4} \cdot e^{-\eta_k y} + A_{k5} \cdot \cos \xi_k y + A_{k6} \cdot \sin \xi_k y$$

gdzie:

$y = x/r$ - bezwymiarowa współrzędna wzdłuż tworzącej,

$+\xi_k, +\eta_k, +\xi_k$ - pierwiastki równania charakterystycznego.

Zamiast tego, rozwinięcia w szereg Fouriera wykorzystano łącznie z metodą różnic skończonych, która umożliwia uwzględnienie zmiennego, ograniczonego tylko gęstością siatki, rozkładu grubości po tworzącej oraz dowolnych, klasycznych warunków brzegowych. Opracowanie tej wersji metody stanowi jedno z istotnych zamierzeń podjętych w niniejszej pracy.

W oparciu o wymienione sposoby zbudowano programy na EMC i rozwiązano dwa przykłady. Pierwszy przykład posłużył do oceny jakości rezultatów, przez porównanie z wynikami otrzymanymi za pomocą innych metod. Ponadto w ramach tego przykładu zestawiono rezultaty otrzymane dla wariantów Donnella i Sandersa równań teorii powłok. Jako drugi przykład analizowano powłokę o tej samej geometrii co w przykładzie pierwszym lecz skokowo zmiennej grubości.

Wnioski dotyczą wpływu rozkładu grubości na wartość obciążenia krytycznego i postać utraty stateczności oraz zasadności posługiwania się w analizie stateczności początkowej powłoką zastępczą o stałej grubości.

W rozdziale 5 omówiono kwestie związane z geometrycznie nieliniową analizą dokrytycznego zachowania się powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem. Analiza ta ma na celu wyznaczenie pierwszego maksimum na krzywej stanowiącej rozwiązanie równań równowagi /tzw. punktu granicznego na ścieżce równowagi/. Konfiguracja odpowiadająca obciążeniu granicznemu jest zawsze niestateczna w sensie Lapunowa: osiągnięciu jej towarzyszy przeskok do innej, statecznej konfiguracji równowagi.

Z powyższą analizą stateczności wiążą się dwa zagadnienia natury numerycznej:

- 1/ wyznaczenie rozwiązania nieliniowych równań równowagi. Jest to dość trudne ponieważ, ze względu na osiową niesymetryczność obciążenia wiatrem, rozwiązuje się zadanie dwuwymiarowe. Nieliniowe równania równowagi rozwiązano stosując sformułowanie przyrostowe i metodę Newtona-Raphsona w wersji zmodyfikowanej;
- 2/ identyfikacja punktu krytycznego odpowiadającego równaniom stateczności. Wiąże się to z rozwiązywaniem uogólnionego zagadnienia na wartości własne oraz sprawdzaniem warunku osobliwości macierzy stycznej.

Obydwa zagadnienia są złożone obliczeniowo i dlatego bezpośrednio zastosowanie dwuwymiarowej dyskretyzacji metodą różnic skończonych lub metodą elementów skończonych, jako prowadzących do bardzo dużych zadań, nie było możliwe ze względu na parametry dostępnego autorowi komputera. Próg ten próbowano pokonać stosując do przekształcenia funkcjonału przyrostu energii potencjalnej

metodę rozwinąć w szeregi Fouriera w kierunku obwodowym uzupełnioną dyskretyzacją różnicową w kierunku tworzącej. Metoda ta, nie była do tej pory zbyt często stosowana do nieliniowej analizy powłok obrotowosymetrycznych obciążonych niesymetrycznie. Dlatego zamierzeniem pracy jest zbadać implikacje jej zastosowania a w szczególności interesująca jest odpowiedź na pytanie czy rozwinięcia Fouriera prowadzą do efektywniejszych numerycznie algorytmów porównując z metodami bazującymi na dwuwymiarowej dyskretyzacji. Oprócz tego opisano sposób tworzenia podstawowych macierzy zagadnienia i określono możliwości wykorzystania ich własności do poprawy szybkości metody. W rozdziale 5 zamieszczono także punkt dotyczący metody różnic skończonych, stosowanej w osiowosymetrycznej analizie stateczności początkowej i analizie nieliniowej, w którym poruszono kwestie jakości operatorów różnicowych oraz komplikacji przy tworzeniu równań i operatorów w strefie brzegowej.

Bazując na wspomnianych metodach zbudowano programy numeryczne do przeprowadzania liniowej i nieliniowej analizy oraz obliczone przykłady dotyczące obciążenia wiatrem. Program do analizy liniowej wykorzystuje równania teorii Sandersa-Koitera. Obliczony przykład posłużył do oceny wpływu warunków brzegowych oraz rozkładu grubości po tworzącej na stan przemieszczeń powłoki. Program do analizy nieliniowej bazował na równaniach teorii Donnella i wykorzystano go do obliczeń mających na celu sprawdzenie jakości otrzymywanych rezultatów oraz ocenę stosowanego modelu.

W rozdziale 6 zostały zwięźle scharakteryzowane programy numeryczne wykorzystane do przeprowadzenia omówionych w pracy analiz.

Pracę zamykają uwagi końcowe stanowiące rozdział 7.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII POWŁOK

2.1. Oznaczenia

Wektory i tensory są wyróżniane "wężykiem" pod literą. Wielkości dla konfiguracji aktualnej są oznaczane tymi samymi literami co wielkości dla konfiguracji odniesienia lecz z dodatkową poziomą kreską nad literą. Znaczenie podstawowych symboli jest następujące:

- $\{v^i\}$ - konwekcyjny układ współrzędnych, patrz rys. 2.1.
 α - konfiguracja odniesienia /naturalna/
 $\bar{\alpha}$ - konfiguracja aktualna /zdeformowana/
 \mathcal{M} - powierzchnia środkowa powłoki
 C - krzywa brzegowa
 M, P - punkty leżące na jednej prostej normalnej do \mathcal{M}
 $\{g_j\}$ - baza w punkcie P
 $\{\tilde{a}_\alpha, \tilde{n}\}$ - baza w punkcie M

$$\tilde{n} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha \times \tilde{a}_\beta$$

Indeksy łacińskie $i, j, k = 1, 2, 3$

Indeksy greckie $\lambda, \alpha, \beta, \mu = 1, 2$

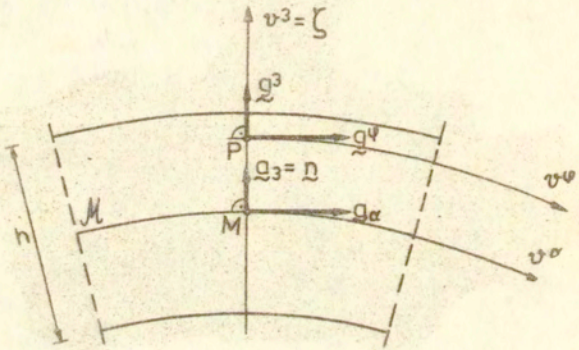
Pozostałe wielkości zostały wyjaśnione w tekście.

2.2. Deformacja typu Kirchhoffa-Love'a

A. Odształcenie

Rozważmy deformację powłoki χ od konfiguracji naturalnej α do konfiguracji odształconej $\bar{\alpha}$ tzn. $\chi = \bar{\alpha} \circ \alpha^{-1}$. Rozwińmy funkcję deformacji χ w otoczeniu punktu M powierzchni środkowej w szereg potęgowy względem ζ /patrz rys. 2.1/ zachowując wyłącznie liniową część rozwinięcia

$$(2.1) \quad \chi(P) = \chi(M) + \zeta G \cdot n$$



Rys.2.1. Układy współrzędnych i bazy wektorowe.

gdzie $\underline{\underline{G}}$ to gradient deformacji w punkcie M . Przyjmijmy dodatkowo, dla wektorów związanych z powierzchnią środkową, że spełniona jest równość

$$(2.2) \quad \bar{\underline{\underline{a}}}_3 = \bar{\underline{\underline{n}}}$$

gdzie $\bar{\underline{\underline{a}}}_3$ to wektor bazowy $\underline{\underline{a}}_3$ po deformacji a $\bar{\underline{\underline{n}}}$ to jednostkowy wektor, normalny do zdeformowanej powierzchni środkowej.

Powyższe dwa warunki definiują więzy kinematyczne typu Kirchhoffa-Love'a. Więzy te wymuszają taką deformację, że włókna materialne proste i prostopadłe do niezdeformowanej powierzchni środkowej pozostają proste i prostopadłe do tej powierzchni po deformacji a także nie zmieniają swojej długości.

Konsekwencją relacji (2.1) jest, że wielkości dla dowolnego punktu powłoki P można wyrazić przez wielkości dla punktu M powierzchni środkowej. Na przykład: tensor odkształcenia Greena można zapisać w postaci:

$$(2.3) \quad \underline{\underline{E}}(P) = \underline{\underline{g}}^{-1} (\underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{\xi}} \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{\zeta}}^2 \underline{\underline{y}}) \underline{\underline{g}}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\gamma}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} (\bar{\underline{\underline{a}}}_{\alpha\beta} - \underline{\underline{a}}_{\alpha\beta}) \underline{\underline{a}}^\alpha \otimes \underline{\underline{a}}^\beta \\ \underline{\underline{\xi}} &= -(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{b}} \underline{\underline{G}} - \underline{\underline{b}}) = -(\bar{\underline{\underline{b}}}_{\alpha\beta} - \underline{\underline{b}}_{\alpha\beta}) \underline{\underline{a}}^\alpha \otimes \underline{\underline{a}}^\beta \\ \underline{\underline{\zeta}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{b}}^2 \underline{\underline{G}} - \underline{\underline{b}}^2) = \frac{1}{2} (\bar{\underline{\underline{b}}}_\alpha^\lambda \bar{\underline{\underline{b}}}_{\lambda\beta} - \underline{\underline{b}}_\alpha^\lambda \underline{\underline{b}}_{\lambda\beta}) \underline{\underline{a}}^\alpha \otimes \underline{\underline{a}}^\beta \end{aligned}$$

Przy czym $\underline{\underline{\gamma}}$ to tensor odkształcenia, $\underline{\underline{\xi}}$ to tensor zmian krzywizny, $\underline{\underline{\zeta}}$ to tensor, który można wyrazić w terminach $\underline{\underline{\gamma}}$ i $\underline{\underline{\xi}}$, $\bar{\underline{\underline{b}}}$ i $\underline{\underline{b}}$ to tensory krzywizny a $\underline{\underline{g}} = \delta_a^i \underline{\underline{g}}_i \otimes \underline{\underline{a}}^a$ to tensor przeniesienia.

Rezultatem więzu (2.2) jest, że niektóre składowe $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\alpha}$ są zerowe, a mianowicie

$$(2.5) \quad \tilde{\gamma}_{3\alpha} = \tilde{\gamma}_{\lambda 3} = \tilde{\alpha}_{3\alpha} = 0$$

Pozostałe składowe wyrażone są następująco:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (l_{\alpha}^{\lambda} l_{\lambda\beta} + \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} - a_{\alpha\beta}) \\ \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} &= - [n (\varphi_{\alpha|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} l_{\lambda\alpha}) + \\ &\quad n_{\lambda} (l_{\alpha|\beta}^{\lambda} - b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}) - b_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

gdzie

$$l_{\alpha}^{\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda} + u^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} w$$

$$\varphi_{\alpha} = w_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda} u^{\lambda}$$

$$n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} l_{\lambda\alpha} l_{\mu\beta}$$

$$n^{\mu} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} \varphi_{\alpha} l_{\lambda\beta}$$

przy czym $\{u^{\lambda}, w\}$ to składowe wektora przemieszczenia $u, (\cdot)_{|\alpha}$ oznacza pochodną kowariantną, $a = \det(a_{\alpha\beta})$, $\bar{a} = \det(\bar{a}_{\alpha\beta})$, $\epsilon^{\alpha\beta}$ to symbol Ricci zdefiniowany następująco

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B. Obroty

Gradient \tilde{G} dla punktu M powierzchni środkowej zawiera pełną informację o deformacji powłoki zgodnej z więzami Kirchhoffa-Love'a. Ponieważ \tilde{G} jest nieosobliwy to możliwy jest jed-

noznaczny rozkład biegunowy

$$(2.7) \quad \underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U}$$

przy czym

$\underset{\sim}{U} = \sqrt{\underset{\sim}{G}^T \cdot \underset{\sim}{G}}$ to prawy tensor rozciągnięcia, symetryczny i dodatnio określony, który można wyrazić następująco:

$$\underset{\sim}{U} = \sqrt{1 + 2\underset{\sim}{\gamma}}$$

$\underset{\sim}{R}$ to tensor obrotu skończonego właściwy i ortogonalny tzn.

$$\det \underset{\sim}{R} = +1, \quad \underset{\sim}{R}^{-1} = \underset{\sim}{R}^T$$

Powyższy rozkład oznacza, dla kierunków głównych $\underset{\sim}{G}$, wyodrębnienie czystego rozciągania wzdłuż tych kierunków oraz sztywnego obrotu tych kierunków.

Tensor $\underset{\sim}{R}$ posiada jedną rzeczywistą wartość własną równą +1 oraz dwie zespolone wartości własne $\cos \omega \pm i \sin \omega$. Niech $\underset{\sim}{e}_1$ oznacza wersor pokrywający się z kierunkiem głównym odpowiadającym wartości własnej +1. Tensor $\underset{\sim}{R}$ działając na dowolny wektor obraca ten wektor o kąt ω , $|\omega| < \pi$ wokół osi obrotu wyznaczonej przez $\underset{\sim}{e}_1$.

Do opisu części obrotowej deformacji wykorzystuje się także tzw. wektor obrotu skończonego $\underset{\sim}{\Omega}$, jednoznacznie wyznaczony przez tensor obrotu skończonego $\underset{\sim}{R}$.

$$(2.8) \quad \underset{\sim}{\Omega} = \sin \omega \cdot \underset{\sim}{e}_1$$

Warto zauważyć, że wiele relacji geometrycznych wyrażonych w przemieszczeniach można alternatywnie wyrazić w terminach $\underset{\sim}{\Omega}$ oraz tensora $\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{U} - 1$. Pozwala to wprowadzić ograniczenia na składowe wektora $\underset{\sim}{\Omega}$ oraz uprościć równania teorii powłok.

C. Przemieszczeniowe warunki brzegowe

Ponieważ do rozwiązania problemu brzegowego wykorzystywać będziemy sformułowanie przemieszczeniowe więc właściwe w tym przypadku są, z klasy geometrycznych warunków brzegowych, warunki przemieszczeniowe. Nie będziemy tutaj omawiać warunków kinematycznych i deformacyjnych, patrz np. [56,61,62,64].

Niech C oznacza krzywą brzegową ograniczającą powierzchnię środkową powłoki w konfiguracji odniesienia. Z każdym punktem M niezdeformowanej krzywej brzegowej C związany ortonormalną bazę $\{\underline{v}, \underline{t}, \underline{n}\}$ przy czym \underline{n} to wektor normalny do powierzchni środkowej, \underline{t} to wektor styczny do krzywej brzegowej a \underline{v} to wektor normalny do \underline{t} i \underline{n} .

Po deformacji typu Kirchhoffa-Love'a ortonormalna baza $\{\underline{v}, \underline{t}, \underline{n}\}$ przechodzi w ortogonalną bazę $\{\bar{\underline{a}}_v, \bar{\underline{a}}_t, \bar{\underline{n}}\}$. Bazę tę można określić wykorzystując dwie funkcje wektorowe: przemieszczenia \underline{u} oraz $\underline{\beta} = \bar{\underline{n}} - \underline{n}$ zdefiniowane na C . Jeżeli dokonać rozkładu $\underline{\beta}$ w bazie $\{\bar{\underline{a}}_v, \bar{\underline{a}}_t, \bar{\underline{n}}\}$ to ze składowych β_v, β_t i β_n składowe β_v i β_n mogą zostać wyrażone za pomocą \underline{u} oraz β_v . Tak więc \underline{u} i β_v są parametrami, które można niezależnie przyjmować

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \underline{u}(s) &= \underline{u}^*(s) \\ \beta_v(s) &= \beta_v^*(s) \end{aligned}$$

gdzie wielkości z gwiazdką są zadane a s to parametr krzywej brzegowej.

Relacje (2.9) stanowią przemieszczeniowe warunki brzegowe dla teorii typu Kirchhoffa-Love'a.

2.3. Równania równowagi i statyczne warunki brzegowe

W teorii typu Kirchhoffa-Love'a deformacja powłoki opisana jest za pomocą wielkości dla powierzchni środkowej i w związku z tym można postulować dwuwymiarową postać zasady prac wirtualnych, np. [41,45,61,62,64].

Załóżmy, że jednorodna powierzchnia środkowa $\bar{\mathcal{M}}$ jest w stanie równowagi pod działaniem obciążeń powierzchniowych \bar{p}

oraz, że przemieszczeniowe warunki brzegowe zadane są na części \bar{C}_n krzywej brzegowej \bar{C} .

Oznaczmy przez $\delta \bar{u}$ kinematycznie dopuszczalną wariację pola przemieszczeń a przez $\delta \bar{\gamma}$ i $\delta \bar{\alpha}$ odpowiadające wariacje tensora odkształceń i zmian krzywizny. Zasada prac wirtualnych przyjmuje w opisie Eulera postać:

$$(2.10) \quad \int_{\bar{H}} (\bar{N} \cdot \delta \bar{\gamma} + \bar{M} \cdot \delta \bar{\alpha}) d\bar{A} = \int_{\bar{H}} \bar{p} \cdot \delta \bar{u} d\bar{A}.$$

gdzie: \bar{N} i \bar{M} to tensory sił i momentów zdefiniowane jako współczynniki w postulowanej zasadzie.

Wykorzystując wzory transformacyjne pomiędzy wielkościami dla geometrii zdeformowanej i odniesienia można powyższą zasadę zapisać w geometrii powierzchni nieodkształconej

$$(2.11) \quad \int_{\mathcal{H}} (N \cdot \delta \gamma + M \cdot \delta \alpha) dA = \int_{\mathcal{H}} p \cdot \delta u dA$$

gdzie: $\delta \gamma$ i $\delta \alpha$ to wariacje odpowiadające wariacji pola przemieszczeń δu a N i M to Lagrangeowskie tensory sił i momentów odpowiadające drugiemu tensorowi Pioli-Kirchhoffa. Powyższa zasada implikuje, po wykorzystaniu tw. Stokesa, następujące równania w opisie Lagrange'a:

$$(2.12) \quad (G N^{\beta})_{|\beta} + p = 0 \quad \text{na } \mathcal{M}$$

$$(2.13) \quad P_{\nu} = 0, \quad M^{d\beta} \nu_d \nu_{\beta} = 0 \quad \text{na } C_{\varepsilon}$$

przy czym C_{ε} oznacza tę część krzywej brzegowej C , na której zadane są statyczne warunki brzegowe, a P_{ν} to efektywne siły wewnętrzne. Ponadto

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^\beta &= Q^{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha + Q^\beta \tilde{n} \\
 (2.14) \quad Q^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\beta} - \bar{b}_\lambda^\alpha M^{\lambda\beta} \\
 Q^\beta &= M^{\alpha\beta} l_\alpha + a^{\beta\alpha} (2\gamma^{\nu\pi\lambda\mu} - \gamma^{\lambda\mu\alpha\nu}) M^{\lambda\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad \tilde{P}_\nu &= G \cdot \tilde{N}^\beta \nu_\beta + \frac{d}{ds} (\bar{M}_{t\nu} \tilde{n}) \\
 \tilde{M}_{t\nu} &= \frac{1}{\tilde{a}_t^2} M^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + 2\gamma_\alpha^\lambda) t_\lambda \nu_\beta
 \end{aligned}$$

Równanie (2.12) to równanie równowagi w obszarze wewnętrznym powierzchni środkowej a równanie (2.13) to naturalne warunki brzegowe.

2.4. Związki fizyczne

W niniejszym punkcie zaprezentowano równania konstytutywne dla powłok otrzymane przy następujących założeniach:

- a/ materiał jest linowo sprężysty, jednorodny i izotropowy
- b/ odkształcenia są małe
- c/ stan naprężeń jest w przybliżeniu płaski i równoległy do powierzchni środkowej.

Wykorzystując powyższe założenia definiuje się tzw. mały parametr θ /patrz John [32,33] oraz Koiter [41] /, za pomocą którego można szacować poszczególne człony w dwuwymiarowej energii odkształcenia powłoki.

$$(2.16) \quad \theta = \max \left(\frac{h}{L}, \frac{h}{d}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\eta} \right)$$

gdzie h to grubość powłoki, L to długość fali deformacji, d to odległość od brzegu powłoki, R to promień krzywizny, $\eta = \max |E_r|$ przy czym E_r to wartości własne tensora odkształcenia Greena \underline{E} . Pozostawiając w wyrażeniu na energię odkształcenia wyłącznie człony $E h \eta^2$ otrzymujemy tzw. pierwsze przybliżenie energii sprężystej

$$(2.17) \quad \Sigma = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} (\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \alpha_{\alpha\beta} \alpha_{\lambda\mu}) + O(Eh\eta^2\theta^2)$$

gdzie

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu})$$

przy czym

Σ to energia odkształcenia na jednostkę powierzchni środkowej, $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ to tensor sprężystości, E to moduł Younga, ν współczynnik Poissona.

Związki fizyczne odpowiadające podanej postaci energii odkształcenia Σ otrzymujemy z relacji wynikających z postulowanej zasady prac wirtualnych:

$$(2.18) \quad N^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}, \quad M^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_{\alpha\beta}}$$

w następującej postaci

$$(2.19) \quad \begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= B [(1-\nu) \gamma^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda}_{\lambda}] + O(Eh\eta\theta^2) \\ M^{\alpha\beta} &= D [(1-\nu) \alpha^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \alpha^{\lambda}_{\lambda}] + O(Eh^2\eta\theta^2) \end{aligned}$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Powyższe Lagrangeowskie tensory sił $N^{\alpha\beta}$ i momentów $M^{\alpha\beta}$ wewnętrznych odpowiadają drugiemu tensorowi naprężeń Pioli-Kirchhoffa. Otrzymane związki konstytutywne mają postać związków niesprężonych Love'a.

2.5. Wybrane warianty teorii powłok

W niniejszym rozdziale przytoczono równania tych teorii powłok, które zastosowano w przeprowadzonych analizach numerycznych. Klasyfikacji tych teorii dokonano w oparciu o kąt obrotu ω związany z wektorem obrotu skończonego $\underline{\Omega}$, patrz Pietraszkiewicz [61,62,64]. Zastosowana klasyfikacja różni się od klasyfikacji Musztari i Galimova [53] oraz Koitera [41]. Musztari i Galimov wyróżnili 3 warianty teorii: małego, średniego i dużego zginania nakładając ograniczenia na zlinearyzowany wektor obrotu $\underline{\phi}$. Koiter w oparciu o warunki na $\underline{\phi}$ i gradienty przemieszczeń wyszczególnia 4 warianty teorii: infinitesimalnych, małych skończonych, umiarkowanych i dużych ugięć.

Przeprowadzenie biegunowej dekompozycji gradientu deformacji \underline{G} na część odkształceniową i obrotową, wg wzoru (2.7), umożliwia nałożenie ograniczeń na wielkość tensora obrotu skończonego \underline{R} lub odpowiadającego wektora obrotu skończonego $\underline{\Omega}$. Wektor $\underline{\Omega}$ jest jednoznacznie wyznaczany, wsół (2.8) przez kąt obrotu ω i oś obrotu \underline{e} , więc możemy obydwie te wielkości niezależnie ograniczać. Wykorzystując mały parametr θ , zdefiniowany w (2.16), Pietraszkiewicz [61,62,64] zaproponował następującą klasyfikację obrotów:

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad & \omega \leq O(\theta^2) && - \text{małe obroty} \\
 & \omega = O(\theta) && - \text{umiarkowane obroty} \\
 & \omega = O(\sqrt{\theta}) && - \text{duże obroty} \\
 & \omega \gg O(1) && - \text{skończone obroty}
 \end{aligned}$$

Ponieważ deformacja powłoki może być różna w kierunku normalnym i stycznym do powierzchni /jako konsekwencja typu konstrukcji i obciążenia/ ograniczenia (2.20) przyjmuje się oddzielnie

dla składowych stycznych $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{a}}_\alpha$ i normalnych $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{n}}$.
W ten sposób ogranicza się położenie osi obrotu $\underline{\underline{e}}_1$.

Założenie a priori wielkości obrotów umożliwia uproszczenie podstawowych równań bez pogorszenia ich dokładności, co jest szczególnie cenne w przypadku teorii nieliniowych. Poniżej podane zostaną podstawowe równania zastosowanych teorii powłok oraz wielkości dopuszczalne składowych wektora obrotu przyjęte przy wyprowadzaniu tych równań.

A. Liniowa teoria powłok Sandersa-Koitera

Liniowe teorie powłok otrzymuje się przez nałożenie warunku małych obrotów na wszystkie składowe wektora obrotu skończonego $\underline{\underline{\Omega}}$, tzn:

$$(2.21) \quad \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{a}}_\alpha = O(\theta^2), \quad \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{n}} = O(\theta^2)$$

stad, wektor $\underline{\underline{\Omega}}$ jest aproksymowany przez zlinearyzowany wektor obrotu $\underline{\underline{\Phi}}$

$$(2.22) \quad \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Phi}} + O(\eta \theta^2), \quad |\underline{\underline{\Omega}}| = O(\theta^2)$$

gdzie

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\Phi}} &= \epsilon^{\beta\alpha} \varphi_\alpha \underline{\underline{a}}_\beta + \varphi \underline{\underline{n}} \\ \varphi_\alpha &= w_{1,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda = O(\theta^2) \\ \varphi &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha} = O(\theta^2) \end{aligned}$$

a miary odkształcenia i zmian krzywizny przyjmują postaci liniowe względem przemieszczeń:

$$(2.24) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + O(\eta \theta^2)$$

$$(2.25) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} (\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta}) + b_{\beta}^{\lambda} (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})] + O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda}\right)$$

przy czym

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w \\ \varphi_{\alpha} &= w_{|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) \\ \lambda &= \frac{h}{\theta} \end{aligned}$$

W wariancie Sandersa-Koitera liniowej teorii powłok [39,66] wykorzystuje się zmodyfikowaną miarę zmian krzywizny $\xi_{\alpha\beta}$:

$$(2.26) \quad \xi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\beta\lambda} + b_{\beta}^{\lambda} \omega_{\alpha\lambda}) + O\left(\frac{\eta\theta^2}{\lambda}\right)$$

Wykorzystując postaci (2.24) i (2.26) w zasadzie prac wirtualnych dla opisu Lagrange'a (2.11) otrzymujemy równania równowagi:

$$(2.27) \quad [n^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\beta} m^{\alpha\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} m^{\alpha\beta})]_{|t} + b_{\alpha}^{\alpha} m^{\alpha\beta} + p^{\alpha} = 0$$

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + p = 0$$

i naturalne warunki brzegowe

$$(2.28) \quad P_{\nu\nu} = [n^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\beta} m^{\alpha\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} m^{\alpha\beta})] \nu_{\alpha} \nu_{\beta} + \tau_t m_{t\nu}$$

$$P_{t\nu} = [n^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\beta} m^{\alpha\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} m^{\alpha\beta})] t_{\alpha} \nu_{\beta} - \theta_t m_{t\nu}$$

$$P_{ny} = m^{\alpha\beta}|_{,\alpha} \gamma_{\beta} - \frac{u}{ds} m_{ty}$$

$$M_{yy} = 0$$

gdzie

$n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ to tensory sił i momentów wewnętrznych odpowiadające miarom $\gamma_{\alpha\beta}$ i $S_{\alpha\beta}$.

P_{yy} , P_{ty} , P_{ny} to efektywne siły wewnętrzne (2.15)

τ_t to skręcenie geodezyjne, σ_t to krzywizna normalna C .

Składowa β_y w przemieszczeniowych warunkach brzegowych (2.0^a) jest następująca:

$$(2.29) \quad \beta_y = -\varphi_{\alpha} \gamma^{\alpha} \quad , \quad \varphi_{\alpha} = w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}$$

Wariant Sandersa-Koitera liniowej teorii powłok charakteryzuje się następującymi cechami:

- 1/ tensory sił i momentów wewnętrznych oraz odkształcenia i zmian krzywizny są symetryczne
- 2/ twierdzenia wariacyjne są analogiczne do tych z liniowej sprężystości
- 3/ zachodzi analogia statyczno-geometryczna
- 4/ równania konstytutywne mają postać niesprzężoną.

Wariant ten uznawany jest za standardowy w klasie liniowych teorii powłok pierwszego przybliżenia.

B. Nieliniowa teoria powłok Sandersa

Równania teorii, która zostanie zaprezentowana zostały podane przez Sandersa w pracy [67]. Według klasyfikacji Koitera [41] jest to teoria małych skończonych ugięć a według klasyfikacji Pietraszkiewicza [61,62,64] można ją określić jako teorię umiarkowanie małych obrotów. Równania tej teorii odpowiadają założeniu, że obroty wokół stycznych do powierzchni są umiarkowane a obroty wokół normalni są małe tzn.

$$(2.30) \quad \tilde{\Omega} \cdot \tilde{a}_\alpha = O(\theta) \quad , \quad \tilde{\Omega} \cdot \tilde{\eta} = O(\theta^2)$$

W rezultacie wektor obrotu skończonego $\tilde{\Omega}$ redukuje się do zlinearyzowanego wektora obrotu $\tilde{\Phi}$ /patrz wzór (2.22) /

$$(2.31) \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Phi} + O(\eta\theta)$$

a miary odkształcenia i zmian krzywizny są postaci:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + O(\eta\theta^2) \\ \alpha_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + O\left(\frac{\eta\theta}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Dla powyższych miar otrzymuje się z zasady prac wirtualnych następujące relacje:

- równania równowagi

$$(2.33) \quad \begin{aligned} N^{\alpha\beta}|_\beta - b_\beta^\alpha (M^{\lambda\beta}|_\lambda + \varphi_\lambda N^{\lambda\beta}) + p^\alpha &= 0 \\ (M^{\alpha\beta}|_\alpha + \varphi_\alpha N^{\alpha\beta})|_\beta + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p &= 0 \end{aligned}$$

- naturalne warunki brzegowe na krzywej brzegowej C

$$(2.34) \quad \begin{aligned} G \tilde{N}^\beta \tilde{v}_\beta + \frac{d}{ds} (M_{tv} \tilde{\eta}) &= 0 \\ M_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$G \tilde{N}^\beta = N^{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha + (M^{\alpha\beta}|_\alpha + \varphi_\alpha N^{\alpha\beta})$$

Składowa β_γ w przemieszczeniowych warunkach brzegowych (2.9) przyjmuje postać

$$(2.35) \quad \beta_\gamma = -\varphi_\alpha \nu^\alpha; \quad \varphi_\alpha = w_{,\alpha} + b_\alpha u_\lambda$$

Zaprezentowana teoria Sandersa ma istotne znaczenie inżynierskie; równania jej stanowią podstawę wielu programów numerycznych do analizy konstrukcji.

C. Nieliniowa teoria powłok małowyniosłych

Powyższy wariant teorii nosi nazwę teorii Donnella-Muschietariego-Własowa, z tym, że równania dla powłok cylindrycznych zostały podane przez Donnella [22]. Teoria powłok małowyniosłych stanowi najprostszy wariant teorii z umiarkowanymi obrotami. Oprócz warunków (2.30) przyjmuje się dodatkowo następujące ograniczenia:

$$(2.36) \quad |K| \cdot L^2 = O(\theta^2)$$

$$(2.37) \quad \frac{u_\alpha}{W} = O(\theta)$$

gdzie K to krzywizna Gaussa, L to długość fali deformacji. Warunek (2.36) oznacza, że krzywizna Gaussa K niezdeformowanej powierzchni środkowej jest mała w porównaniu z kwadratem długości fali L . Warunek (2.37) ogranicza składowe styczne u_α wektora przemieszczenia. W efekcie związki geometryczne

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} \cdot w_{,\beta} + O(\eta \theta^2) \\ \alpha_{\alpha\beta} &= -w|_{\alpha\beta} + O\left(\frac{\eta \theta}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

i równania równowagi

$$(2.39) \quad \begin{aligned} N_{\alpha|\beta}^\beta + p_\alpha &= 0 \\ M_{\alpha|\beta}^\beta + (b_\beta^\alpha + w|_{\beta}^\alpha) N_\alpha^\beta + p - w_{,\alpha} \cdot p^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

dotatkowo upraszczają się, w porównaniu z wariantem Sandersa.

Powyższy wariant, ze względu na swoją prostotę, jest najczęściej wykorzystywany w obliczeniach oraz najlepiej opracowany od strony matematycznej. Wystarczy wspomnieć, że rozstrzygnięte są takie kwestie jak istnienie i jednoznaczność rozwiązań [9] oraz problem warunków wystarczających stabilności rozwiązania [43,21]. Zagadnienia te dla bardziej skomplikowanych teorii, np. dla teorii Sandersa, nie zostały do tej pory opracowane.

2.6. Równania teorii powłok dla geometrii powłoki cylindrycznej

W tej części rozdziału równania odpowiadające poszczególnym wariantom teorii powłok /omówione w punkcie poprzednim/ zostaną podane w postaci wyspecyfikowanej dla geometrii powłoki cylindrycznej. Przytoczone zostaną wyłącznie te równania, które są niezbędne gdy wykorzystywane jest podejście energetyczne oparte na sformułowaniu przemieszczeniowym. Z tego względu pominięto równania równowagi i statyczne warunki brzegowe.

Wykorzystane w pracy równania podane zostaną we współrzędnych powierzchniowych $\{v^1, v^2\}$ za pomocą zmiennych $\{\tau, \varphi, x\}$, wg rys. 2.2, po uwzględnianiu relacji $dv^1 = r d\varphi$ oraz $dv^2 = dx$.

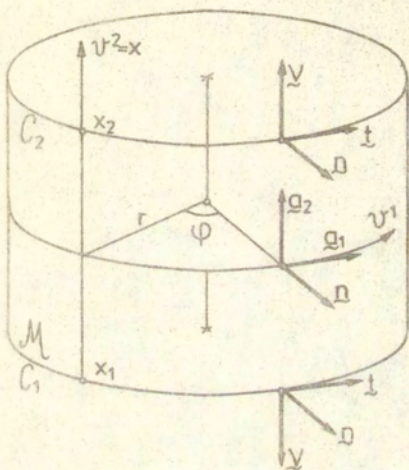
Deformacja powierzchni środkowej charakteryzowana jest przez:

- składowe tensora odkształceń

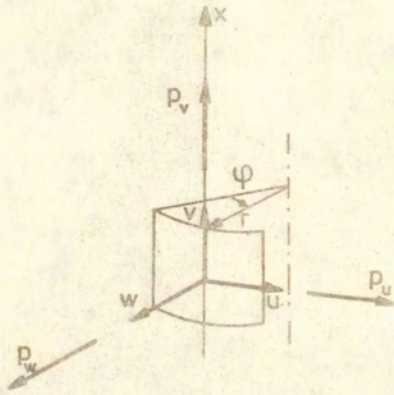
$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= E_{\varphi} = \frac{1}{r} (u, \varphi + w) + \frac{1}{2} \varphi_{\varphi}^2 \\
 \gamma_{22} &= E_x = v, x + \frac{1}{2} \varphi_x^2 \\
 \gamma_{12} &= E_{\varphi x} = \frac{1}{2} (u, x + \frac{1}{r} v, \varphi) + \frac{1}{2} \varphi_{\varphi} \cdot \varphi_x
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

- składowe tensora zmian krzywizny

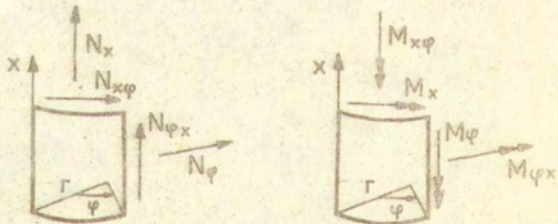
$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \alpha_{\varphi} = -\frac{1}{r^2} (w, \varphi_{\varphi} - u, \varphi) \\
 \alpha_{22} &= \alpha_x = -w, x x \\
 \alpha_{12} &= \alpha_{\varphi x} = -\frac{1}{r} (w, \varphi_x - \frac{1}{2} v, x)
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$



Rys.2.2. Układy współrzędnych oraz bazy : powierzchniowa i brzegowe.



Rys.2.3. Dodatnie zwroty składowych wektora przemieszczeń i obciążeń powierzchniowych.



Rys.2.4. Dodatnie zwroty sił i momentów wewnętrznych.

gdzie w, u, v to składowe wektora przemieszczeń wg. rys. 2.3.

Dla poszczególnych wariantów teorii powłok we wzorach (2.40) i (2.41) należy uwzględnić dodatkowo:

- teoria Sandersa-Koitera /punkt 2.5.A/

$$\varphi_{,\varphi} = \frac{1}{r} (w_{,\varphi} - u) = 0 \quad \varphi_x = w_{,x} = 0$$

$$\varkappa_{\varphi x} = -\frac{1}{r} \left(w_{,\varphi x} - \frac{3}{4} u_{,x} + \frac{1}{4r} v_{,\varphi} \right)$$

- teoria Sandersa /punkt 2.5.B/

$$\varphi_{,\varphi} = \frac{1}{r} (w_{,\varphi} - u) \quad \varphi_x = w_{,x}$$

- teoria powłok małowyniosłych /punkt 2.5.C/

$$\varphi_{,\varphi} = \frac{1}{r} w_{,\varphi} \quad \varphi_x = w_{,x}$$

$$\varkappa_{\varphi} = -\frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \quad \varkappa_x = -w_{,xx} \quad \varkappa_{\varphi x} = -\frac{1}{r} w_{,\varphi x}$$

W oparciu o powyższe miary zapiszemy energię odkształcenia sprężystego (2.17) w postaci:

$$(2.42) \quad U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{2\pi} (N_{\varphi} \cdot \varepsilon_{\varphi} + N_x \varepsilon_x + 2 N_{\varphi x} \cdot \varepsilon_{\varphi x} + M_{\varphi} \varkappa_{\varphi} + M_x \varkappa_x + 2 M_{\varphi x} \cdot \varkappa_{\varphi x}) r d\varphi dx$$

$N_{\varphi}, N_x, N_{\varphi x}$ oraz $M_{\varphi}, M_x, M_{\varphi x}$ to składowe wektorów sił momentów przekrojowych. Składowe te wyrażają się przez miary odkształcenia i zmian krzywizny w następujący sposób:

$$(2.43) \quad \begin{aligned} N_\varphi &= B (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) \\ N_x &= B (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) \\ N_{\varphi x} &= B (1 - \nu) \varepsilon_{\varphi x} \end{aligned}$$

$$(2.44) \quad \begin{aligned} M_\varphi &= D (\alpha_\varphi + \nu \alpha_x) \\ M_x &= D (\alpha_x + \nu \alpha_\varphi) \\ M_{\varphi x} &= D (1 - \nu) \alpha_{\varphi x} \end{aligned}$$

gdzie $B = Eh / (1 - \nu^2)$, $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$,
 h to grubość powłoki, E moduł Younga a ν współ-
 czynnik Poissona.

Dodatknie zwroty sił i momentów przedstawia rys. 2.4.

Praca powierzchniowych sił zewnętrznych wyraża się nastę-
 pująco:

$$(2.45) \quad W = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{2\pi} (p_w w + p_u u + p_v v) r d\varphi dx$$

Dodatknie zwroty składowych wektora obciążeń powierzchniowych
 p_w , p_u i p_v pokazano na rys. 2.3.

Zasada prac wirtualnych (2.11) przyjmuje postać:

$$(2.46) \quad \delta(U - W) = 0$$

gdzie U odpowiada relacji (2.42)

a W jest zgodne ze wzorem (2.45).

Przemieszczeniowemu sformułowaniu problemu odpowiadają
 warunki brzegowe typu przemieszczeniowego /patrz punkt 2.2.C/.
 Na krzywych brzegowych C_1 i C_2 /rys.2.2/, wyznaczanych przez
 współrzędne $x = x_1$ oraz $x = x_2$; $x_2 > x_1$, mogą
 być zadane wartości w , u , v oraz β_ν , wg (2.9). Rela-

cje pomiędzy bazą lokalną $\{Q_\alpha, n\}$ i bazą brzegową $\{\nu, \tilde{t}, \tilde{n}\}$ dla obydwu krzywych brzegowych można zapisać w postaci

$$(2.47) \quad \tilde{a}_1 = \tilde{t}, \quad \tilde{a}_2 = \pm 1 \cdot \tilde{\nu}$$

gdzie wartość $+1$ odpowiada krawędzi C_2

a wartość -1 odpowiada krawędzi C_1 .

Stąd, wyrażenia (2.29), (2.35) przyjmują postać $\beta_\nu = -\varphi_\alpha \cdot \nu^\alpha = -\varphi_x (\pm 1)$ ponieważ $\nu^\alpha = [\pm 1, 0]$; φ_x podano przy omawianiu miar deformacji. Naturalne, statyczne warunki brzegowe są spełnione jako konsekwencja zasady prac wirtualnych, patrz (2.13).

2.7. Przyrostowy opis deformacji powłoki

W niniejszym punkcie sformułowane zasadę prac wirtualnych w postaci przyrostowej a następnie zdefiniowano odpowiadające jej funkcjonały: energii potencjalnej i jej drugiej różniczki. Wykorzystanie tych funkcjonałów do tworzenia równań równowagi i równań stateczności jest bardzo dogodne ponieważ pozwala na generowanie uproszczonych wariantów tych równań bez pogarszania dokładności rozwiązań, patrz Pietraszkiewicz [63] i Makowski [51]. W niniejszej pracy nie wykorzystano tej możliwości co oznacza, że dopuszcza się tę samą wielkość parametrów charakteryzujących przyrost deformacji i deformację całkowitą /wielkości te określono w rozdziale 2.5/.

Zapiszmy jeszcze raz zasadę prac wirtualnych (2.11) dla powłoki będącej w równowadze pod działaniem sił powierzchniowych P

$$(2.48) \quad \int_M (N \cdot \delta \tilde{\nu} + M \cdot \delta \tilde{x}) dA = \int_M p \delta u dA$$

Postać tej zasady odpowiada opisowi stacjonarnemu Lagrange'a a znaczenie poszczególnych symboli jest następujące:

\tilde{N}, \tilde{M} to miary sił i momentów wewnętrznych odpowiadające drugiemu tensorowi naprężeń Pioli-Kirchhoffa

$\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}$ to miary odkształceń i zmian krzywizny odpowiadające tensorowi odkształceń Greena

\tilde{u} to pole przemieszczeń powierzchni środkowej powłoki \mathcal{M} . Wektor przemieszczenia \tilde{u} wyznaczający analizowaną konfigurację równowagi /tę dla której zapisaliśmy zasadę prac wirtualnych/ można wyrazić za pomocą wektora \tilde{u}^* odpowiadającego znanej konfiguracji /wyznaczonej uprzednio/ oraz przyrostu przemieszczenia $\Delta \tilde{u}$ pomiędzy tymi dwoma konfiguracjami:

$$(2.49) \quad \tilde{u} = \tilde{u}^* + \Delta \tilde{u}$$

Analogiczną relację można zapisać dla obciążeń powierzchniowych:

$$(2.50) \quad \tilde{p} = \tilde{p}^* + \Delta \tilde{p}$$

Związek (2.49) pozwala zdefiniować przyrosty miar odkształceń i zmian krzywizny oraz przyrosty sił i momentów wewnętrznych.

$$(2.51) \quad \begin{aligned} \Delta \tilde{\gamma} &= \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^* & , & \quad \Delta \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^* \\ \Delta \tilde{N} &= \tilde{N} - \tilde{N}^* & , & \quad \Delta \tilde{M} = \tilde{M} - \tilde{M}^* \end{aligned}$$

Ponieważ \tilde{u}^* jest wielkością znaną więc kinematycznie dopuszczalną wariację pola przemieszczeń \tilde{u} zastępuje się wariacją pola przyrostu przemieszczeń $\Delta \tilde{u}$ tzn. $\delta \tilde{u} = \delta(\Delta \tilde{u})$. Podobne relacje zapisuje się dla wariacji miar odkształcenia i zmian krzywizny: $\delta \tilde{\gamma} = \delta(\Delta \tilde{\gamma})$ oraz $\delta \tilde{\alpha} = \delta(\Delta \tilde{\alpha})$. Po uwzględnieniu powyższego zasada prac wirtualnych przyjmuje postać:

$$(2.52) \quad \int_{\mathcal{M}} (\overset{*}{\mathbf{N}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\gamma}) + \overset{*}{\mathbf{M}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\alpha}) + \Delta \overset{\sim}{\mathbf{N}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\gamma}) + \Delta \overset{\sim}{\mathbf{M}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\alpha})) dA = \int_{\mathcal{M}} (\overset{*}{\mathbf{p}} \cdot \delta(\Delta \tilde{u}) + \Delta \overset{\sim}{\mathbf{p}} \cdot \delta(\Delta \tilde{u})) dA$$

Przedstawienie tensora przyrostu odkształcenia w postaci sumy części liniowej i nieliniowej względem przyrostu przemieszczeń $\Delta \tilde{u}$, tzn.:

$$(2.53) \quad \Delta \overset{\sim}{\gamma} = \Delta \overset{\sim}{\gamma}^{LN} + \Delta \overset{\sim}{\gamma}^{NL}$$

prowadzi do następującej przyrostowej postaci zasady prac wirtualnych

$$(2.54) \quad \int_{\mathcal{M}} (\overset{*}{\mathbf{N}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\gamma}^{NL}) + \Delta \overset{\sim}{\mathbf{N}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\gamma}) + \Delta \overset{\sim}{\mathbf{M}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\alpha})) dA = \int_{\mathcal{M}} \Delta \overset{\sim}{\mathbf{p}} \cdot \delta(\Delta \tilde{u}) dA - \delta R$$

gdzie

$$\delta R = \int_{\mathcal{M}} (\overset{*}{\mathbf{N}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\gamma}^{LN}) + \overset{*}{\mathbf{M}} \cdot \delta(\Delta \overset{\sim}{\alpha}) - \overset{*}{\mathbf{p}} \cdot \delta(\Delta \tilde{u})) dA$$

Jeżeli konfiguracja odpowiadająca $\overset{*}{\mathbf{u}}$ jest wyznaczona dokładnie wtedy δR jest równe zero i wyrażenie $\delta R = 0$ stanowi zasadę prac wirtualnych dla tej konfiguracji. Natomiast jeżeli konfiguracja ta nie jest wyznaczona dokładnie /np. gdy wykorzystywane są zlinearyzowane równania przyrostowe/ to wtedy $\delta R \neq 0$ i wartość δR jest interpretowana jako praca wirtualna niezrównoważonych sił wewnętrznych.

Zasadzie prac wirtualnych (2.54) odpowiada warunek stacjonarności funkcjonału energii potencjalnej $\overset{*}{P}$ /w postaci przyrostowej/:

$$(2.55) \quad \delta P = 0$$

przy czym P jest zdefiniowany następująco:

$$(2.56) \quad P[\underline{u}, \underline{p}] = P[\underline{u}^*, \underline{p}^*] + \int_{\mathcal{M}} (\underline{N}^* \cdot \Delta \underline{\gamma}^{NL} + \frac{1}{2} \Delta \underline{N} \cdot \Delta \underline{\gamma} + \frac{1}{2} \Delta \underline{M} \cdot \Delta \underline{x} - \Delta \underline{p} \cdot \Delta \underline{u}) dA + R$$

gdzie

$$R = \int_{\mathcal{M}} (\underline{N}^* \cdot \Delta \underline{\gamma}^{LN} + \underline{M}^* \cdot \Delta \underline{x} - \underline{p}^* \cdot \Delta \underline{u}) dA$$

Jeśli uwzględnić dodatkowo, że przyrost sił błonowych można przedstawić /analogicznie do (2.53) /w postaci:

$$(2.57) \quad \Delta \underline{N} = \Delta \underline{N}^{LN} + \Delta \underline{N}^{NL}$$

to można zdefiniować drugą różniczkę P_2 funkcjonału energii potencjalnej P

$$(2.58) \quad P_2[\underline{u}, \Delta \underline{u}] = 2 \int_{\mathcal{M}} (\underline{N}^* \cdot \Delta \underline{\gamma}^{NL} + \frac{1}{2} \Delta \underline{N}^{LN} \cdot \Delta \underline{\gamma}^{LN} + \frac{1}{2} \Delta \underline{M} \cdot \Delta \underline{x}) dA$$

W związku z tym, że w pracy stosowana będzie metoda energetyczna funkcjonały P i P_2 stanowią podstawę tworzenia przyrostowych równań równowagi i równań stateczności.

1. ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI SPRĘŻYSYPRZ

3.1. Definicja stateczności

Do analizy zagadnień stateczności powłok stosowane są dwa, nierównoważne w sensie matematycznym, podejścia: kontynualne np. [13,14,23,27,73] i dyskretne np. [72,84]. W przypadku gdy do rozwiązania równań zagadnienia wykorzystuje się metody oparte na dyskretyzacji /takie jak np. stosowane w tej pracy metoda różnic skończonych i rozwinięć w skończone szeregi Fouriera/ wtedy sformułowanie w terminach skończonej liczby współrzędnych uogólnionych, jest bardziej odpowiednie. Ze sformułowaniem tym wiąże się konieczność właściwego przeprowadzenia dyskretyzacji, tak by otrzymany układ dyskretny adekwatnie modelował zachowanie się całej konstrukcji, Agryris i in. [3]. Powyższy wymóg może być interpretowany jako zmierzający do skompensowania nierównoważności norm w przestrzeni zmiennych uogólnionych dla podejścia ciągłego i dyskretnego.

Rozważmy pewną konfigurację równowagi układu poddanego działaniu obciążeń stałych względem czasu. Założmy, że położenie układu jest charakteryzowane przez współrzędne uogólnione $q_i(t)$ ($i=1, \dots, n$ a t oznacza parametr czasu) odmierzane od tej właśnie konfiguracji równowagi. Tak więc, konfiguracji równowagi odpowiadają współrzędne $q_i(t) = 0$.

Nazwijmy ruchem układu ciąg par $\{q_i(t), \dot{q}_i(t)\}$ dla dowolnego t , gdzie $\dot{q}_i(t)$ to pole prędkości układu. Analizować będziemy swobodny ruch układu $\{q_i(t), \dot{q}_i(t)\}$, $t > 0$ wywołany przez zaburzenia początkowe $\{q_i(0), \dot{q}_i(0)\}$ $t = 0$.

Wykorzystując definicję stabilności wg Lapunowa można sformułować następującą definicję stateczności.

DEFINICJA STATECZNOŚCI

Konfiguracja równowagi jest stateczna gdy

$$\forall (\alpha^i > 0 \wedge \beta^i > 0) \exists (\alpha_0^i > 0 \wedge \beta_0^i > 0)$$

$$(|\dot{q}^i(0)| < \alpha_0^i \wedge |\dot{q}^i(0)| < \beta_0^i) \Rightarrow$$

(3.1)

$$(|\dot{q}^i(t)| < \alpha^i \wedge |\dot{q}^i(t)| < \beta^i) ; \forall t > 0$$

gdzie α_0^i , β_0^i , α^i oraz β^i to stałe.

Konfiguracje, które nie spełniają powyższego warunku są niestateczne. Definicja stateczności może być również sformułowana w ten sposób, że nakłada się ograniczenie tylko na wymuszone przemieszczenie, pomijając warunek na prędkość $\dot{q}_i(t)$, np. Koiter [40].

3.2. Kryteria stateczności oraz warunek stanu krytycznego

Badanie swobodnego /tzn. wymuszonego tylko warunkami początk. wymi/ ruchu układu w otoczeniu konfiguracji równowagi często odbywa się w ten sposób, że zamiast równań nieliniowych wykorzystuje się ich postać zlinearyzowaną. Tego typu uproszczenie stanowi podstawę np. teorii małych drgań, w której formuluje się warunki konieczne i dostateczne stateczności w terminach pierwiastków równania charakterystycznego, Koiter [40], Ziegler [84]. Szczególnie interesujący jest przypadek zerowego pierwiastka równania charakterystycznego, któremu odpowiada rozwiązanie niezależne od czasu. Rozwiązanie to należy do rodziny sąsiednich konfiguracji równowagi, otrzymanych z konfiguracji pierwotnej przez infinitesimalne przemieszczenie. W tym przypadku układ znajduje się w równowadze obojętnej. Jeżeli wszystkim pozostałym pierwiastkom odpowiadają rozwiązania stabilne to wtedy stan układu określa się jako krytyczny. Należy podkreślić, że teoria małych drgań nie może być stosowana w punkcie krytycznym, ponieważ wtedy niezbędne jest

uwzględnienie członów nieliniowych w równaniach ruchu. Zaletą tej teorii jest, że może być używana także do analizy układów niekonserwatywnych.

Jeżeli ograniczyć się do układów konserwatywnych to, zamiast analizować równania ruchu, można sformułować kryterium energii potencjalnej mające zastosowanie również w punktach krytycznych równowagi obojętnej. Zaznaczmy, że układ uważa się za konserwatywny jeżeli struktura wewnętrzna i obciążenie zewnętrzne są konserwatywne np. Koiter [40], Nemat-Nasser [55]. Ma to miejsce wtedy gdy praca pochłonięta przez układ /różnica między pracą sił zewnętrznych i przyrostem energii kinetycznej/ oraz praca quasi-statycznych sił zewnętrznych są całkowicie określone przez początkową i końcową konfigurację układu. Oznacza to niezależność pracy od drogi oraz brak dysypacji energii. Dla układów konserwatywnych kwestię stateczności rozstrzygnąć można w oparciu o poniższe kryterium /twierdzenie Lagrange'a - Dirichleta, np. [21,38,84] / :

KRYTERIUM ENERGII POTENCJALNEJ

Konfiguracja równowagi układu konserwatywnego jest stateczna w sensie Lapunowa jeżeli energia potencjalna $P(q_i)$ jest ciągła i osiąga minimum właściwe dla tej konfiguracji, tzn.:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|q_i| \rightarrow 0} \Delta P(q_i) = 0 \\ (ii) \quad & \exists \bar{\xi} > 0 : 0 < |q_i| < \bar{\xi} \Rightarrow \Delta P(q_i) > r \end{aligned}$$

Cechą charakterystyczną tego kryterium, stanowiącego warunek wystarczający stateczności, jest jego statyczny charakter abstrahujący od cech kinetycznych układu takich jak np. rozłożenie masy.

Załóżmy, że energia potencjalna jest dwukrotnie różniczkowalna i rozwinijmy ją w szereg Taylora w otoczeniu konfiguracji równowagi. Wtedy przyrost energii potencjalnej $\Delta P(q_i)$ można przedstawić w następujący sposób :

$$(3.3) \quad \Delta P = P_1 + \frac{1}{2!} P_2 + \dots$$

gdzie P_i oznacza i -tą różniczkę.

Różniczka P_1 może być utożsamiana z wariacją energii potencjalnej; jej wartość stacjonarna $P_1 = 0$ wyznacza konfigurację równowagi $q_i = 0$. Dla tej konfiguracji kryterium energii potencjalnej można zastąpić kryterium drugiej różniczki P_2 .

KRYTERIUM DRUGIEJ RÓŻNICZKI

Konfiguracja równowagi układu konserwatywnego jest statyczna w sensie Lapunowa jeżeli druga różniczka energii potencjalnej $P_2(q_i)$ jest dodatnio określona tzn.

$$(3.4) \quad P_2(q_i) > 0 \quad ; \quad |q_i| \neq 0$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny właściwego minimum energii potencjalnej w konsekwencji warunek wystarczający stateczności konfiguracji równowagi.

Interesujące są także przypadki innych wartości drugiej różniczki.

Jeżeli $P_2(q_i)$ jest ujemnie określona lub nieokreślona /tzn. przyjmuje wartości ujemne i dodatnie w zależności od wektora przemieszczenia od położenia równowagi/ to analizowana konfiguracja jest niestateczna.

Gdy $P_2(q_i)$ jest półokreślona /tzn. przyjmuje wartości dodatnie lub zerowe w zależności od wektora przemieszczenia od konfiguracji równowagi/ to mamy do czynienia ze stanem krytycznym równowagi obojętnej. W teorii małych drgań przypadkowi temu odpowiadają przynajmniej 2 zerowe pierwiastki /podczas gdy inne są urojone/ równania charakterystycznego.

Wektor q_i taki, że $P_2(q_i) = 0$ nazywa się postacią utraty stateczności i będziemy go oznaczać q_i^{kr} . Ponieważ dla $q_i = q_i^{kr}$ funkcja $P_2(q_i)$ osiąga minimum /dla jednokrotnych punktów krytycznych/ dlatego postać utraty stateczności

ści q_i^{kr} można wyznaczyć z problemu wariacyjnego

$$(3.5) \quad \delta P_2(q_i) = 0$$

Z powyższego warunku stanu krytycznego równowagi obojętnej otrzymuje się równania stateczności.

Należy zauważyć, że obciążenie przyrostu energii potencjalnej ΔP zgodnie ze wzorem (3.3) sprawia, że z warunku stanu krytycznego (3.5) otrzymujemy liniowe /względem formy utraty stateczności/ równania stateczności. W efekcie równania te mogą być używane tylko do oceny zachowania się konstrukcji w bliskim otoczeniu konfiguracji równowagi czyli do analizy tzw. stateczności "w małym". Z tego też względu, w oparciu o drugą różniczkę nie można rozstrzygać o stateczności w punkcie krytycznym; niezbędne są do tego człony wyższych rzędów.

Problemy stateczności powłok traktowanych jako ośrodki ciągłe są bardziej skomplikowane niż powłok zdyskretyzowanych. Zadawające rezultaty ogólne otrzymano dotychczas tylko dla powłok małowyniosłych, Koiter [42,43], Como i Grimaldi [21].

Zasadniczym problemem w analizie stateczności ośrodków ciągłych jest wybór normy w przestrzeni przemieszczeń np. Movczan [52], Como i Grimaldi [21]. Norma ta musi spełniać wymagania fizyczne /takie jak np. stateczność konfiguracji naturalnej/ oraz zapewniać gładkość funkcjonau energii potencjalnej dla konfiguracji równowagi. Warunkom tym odpowiada tzw. norma energetyczna zdefiniowana następująco, [21]:

$$(3.6) \quad ||| \underline{u} |||^2 = \int_{\mathcal{M}} \underline{K} \underline{u} \cdot \underline{u} \, dA$$

gdzie \underline{K} to symetryczny i dodatnio określony operator występujący w liniowych równaniach równowagi $\underline{K} \underline{u} = \underline{P}$ przy czym \underline{u} to wektor przemieszczeń a \underline{P} to wektor obciążeń. Wykorzystując normę energetyczną sformułowano kryterium energii potencjalnej oraz kryterium drugiej różniczki, które podamy poniżej.

Układ ciągły jest stateczny w sensie Lapunowa gdy energia potencjalna jest przynajmniej dwukrotnie różniczkowalna w sensie Fréchet'a w położeniu równowagi i gdy druga różniczka Fréchet'a jest dodatnio określona względem normy energetycznej, tzn.:

$$(3.7) \quad D^2 P[\underline{u}] > \alpha \cdot \|\underline{u}\|^2, \quad \alpha > 0$$

Warunek dwukrotnej różniczkowości w sensie Fréchet'a jest trudny do spełnienia np. dotychczas nie wykazano jej dla ciała trójwymiarowego. Do tej pory udowodniono tę różniczkowość dla belek, powłok małowyniosłych oraz rozwiązań błonowych płyt i powłok /przy założeniu, że siły błonowe są ściskające/. Z tego powodu większość analiz bazuje na warunku dodatniej określoności drugiej różniczki Gâteaux pomimo, że stanowi on tylko warunek konieczny stateczności, Koiter [44], Knops, Wilkes [36].

Dla powłok małowyniosłych i obciążenia martwego wykazano [21,43], że energia potencjalna jest n-krotnie różniczkowalna w sensie Fréchet'a dla konfiguracji równowagi pokrywającej się z konfiguracją naturalną. Dla tej konfiguracji drugą różniczkę można zapisać w postaci:

$$(3.8) \quad D^2 P[\underline{u}] = \frac{1}{2} \|\underline{u}\|^2 - L_2[\underline{u}]$$

gdzie λ to parametr obciążenia a L_2 to kwadratowy funkcjonał, który opisuje destabilizujący efekt obciążenia. Dla tego funkcjonału sformułowane zadanie wariacyjne (3.5) odpowiadające kryterium stanu krytycznego i wykazano, że zadanie to ma rozwiązanie. Ponadto określono warunki konieczne i dostateczne stateczności w punkcie krytycznym.

Problem warunków wystarczających dla stateczności w punkcie krytycznym został podjęty przez Koitera w pracy [43]. Podane przez Koitera warunki zapewniały tzw. słabą stateczność zdefiniowaną następująco:

$$(3.9) \quad \exists \bar{\xi} > 0 : 0 < \| \underline{u} \| < \bar{\xi} \implies P[\underline{u}] > 0$$

gdzie $\| \underline{u} \|$ oznacza normę w przestrzeni przemieszczeń. Dopiero w pracy Como i Grimaldigo [21] udowodniono, że podane przez Koitera warunki są wystarczające dla właściwego minimum $P[\underline{u}]$ i stateczności w sensie Lapunowa analizowanej konfiguracji. Rozstrzygnięcia dotyczące punktu krytycznego dlatego są tak istotne, bo w oparciu o nie można wnioskować o zachowaniu pokrytycznym a także określać wpływ imperfekcji początkowych na zachowanie się układu np. Hutchinson, Koiter [31]

3.3. Charakterystyka przeprowadzonych analiz stateczności

Poniżej powiążemy, zdefiniowany uprzednio, stan krytyczny konfiguracji równowagi z punktami osobliwymi rozwiązania równań równowagi a następnie w tym kontekście scharakteryzujemy przeprowadzone w pracy analizy stateczności dla powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem.

Rozważmy konstrukcję podpartą w sposób wykluczający sztywny ruch i obciążoną jednoparametrowym układem sił. Przyjmijmy, że układ sił jest charakteryzowany pewnym monotonicznie rosnącym parametrem obciążenia λ .

Jeżeli obciążenie jest odpowiednio małe to zachowanie konstrukcji może być opisane przez równania liniowe, których rozwiązanie jest jednoznaczne /t w. Kirchhoffa/. Zapewnia to także stateczność konfiguracji równowagi. W przypadku równań nieliniowych rozwiązanie jest jednoznaczne do pewnej wartości obciążenia, kiedy to mogą pojawić się dwa typy zachowania osobliwego.

Pierwszy wiąże się z osiągnięciem maksimum /punktu granicznego/ i odpowiada mu nieciągła zmiana konfiguracji tzw. przeskok. Punkt maksimum rozdziela stabilną /wznoszącą się/ i niestabilną /opadającą/ część rozwiązania. Jest to punkt krytyczny równowagi obojętnej, który zawsze jest niestabilny w sensie Lapunowa.

Drugi typ osobliwości wiąże się z punktami bifurkacji /niejednoznaczności/ rozwiązania. Dla pewnej wartości obciążenia istnieją konfiguracje sąsiednie do konfiguracji równowagi, które mogą być osiągnięte w sposób ciągły, za pomocą zwiększenia lub zmniejszenia obciążenia. Punkty bifurkacji są punktami krytycznymi równowagi obojętnej, o których nie można z góry powiedzieć czy są stabilne czy nie. Aby to sprawdzić należy wykorzystać twierdzenie Koitera [21,43] o warunkach wystarczających.

Analizy stateczności, które zostaną przeprowadzone w niniejszej pracy, dla powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem, mają na celu wyznaczenie pierwszego punktu krytycznego. W pracy ograniczono się do numerycznego wyznaczenia obciążenia krytycznego nie analizując czy odpowiadająca mu konfiguracja jest konfiguracją stateczną. Przyjęta, że problem ten jest rozstrzygnięty /w sposób pośredni/ przez rezultaty badań eksperymentalnych. Doświadczenia na powłokach cylindrycznych umieszczonych w tunelu aerodynamicznym wykazują, że pewnej wartości obciążenia odpowiada skokowa zmiana konfiguracji powłoki. Tak więc analizy przeprowadzone w pracy mają na celu wyznaczenie obciążenia przeskoku czyli punktu osobliwego pierwszego typu.

W pracy przyjęto, że obciążenia wiatrowe mają charakter obciążeń martwych, quasi-statycznych i jednoparametrowych. Ponadto nie uwzględnia się zmian w rozkładzie obciążenia /opływie powietrza/ na skutek deformacji /zmiany kształtu/ powłoki. Analizę przeprowadza się dla powłok cylindrycznych, których deformacja jest ograniczona przez przyjęcie hipotezy Kirchhoffa-Love'a oraz innych założeń opisanych w rozdziale 2.5.

Dla powyższego układu /obciążenia i powłoki/ w oparciu o równania stateczności, otrzymane z warunku stanu krytycznego (3.5), przeprowadza się analizy tzw. stateczności "w małym", w celu określenia obciążenia granicznego. Są to dwa rodzaje analiz:

- 1/ analiza wykorzystująca uproszczone /poprzez założenia linearyzujące deformację dokrytyczną/ równania stateczności, tzn. analiza stateczności początkowej. W analizie tej stan do-

krytyczny jest charakteryzowany przez siły bionowe określone w liniowej analizie statycznej a problem sprowadza się do uogólnionego, algebraicznego zagadnienia na wartości własne. Szczegóły dotyczące tej analizy podane zostaną w rozdziale 4;

- 2/ analiza, w której bada się stateczność konfiguracji wyznaczonych na drodze rozwiązania geometrycznie nieliniowych równań statyki. Równania stateczności wykorzystywane są w postaci dwóch warunków: interpolacyjnego /osobliwość macierzy stycznej/ oraz ekstrapolacyjnego /zagadnienie na wartości własne/. W ogólnym przypadku jest to zagadnienie kwadratowe i dlatego często zamiast niego rozwiązuje się problem małych drgań, np. Waszoryszyn [76] , Makowski [51] . W niniejszej pracy wykorzystano jedną ze slinearyzowanych wersji zagadnienia na wartości własne. Kwestie dotyczące nieliniowej analizy dokrytycznej zostaną omówione w rozdziale 5.

Omawiając zastosowane w niniejszej pracy metody szacowania obciążenia przeskoaku należy także wspomnieć o klasie metod związanych z założeniem, że deformacja ma charakter izometryczny. Powyższe uproszczenie zaproponował Ashwell [4] analizując osaszę kulistą obciążoną siłą skupioną. Założenie to stanowi także podstawę tzw. metody geometrycznej opracowanej przez Pogorielowa [59] do analizy dużych ugięć osiowosymetrycznych powłok obciążonych symetrycznie. W metodzie tej problem sprowadza się do szacowania energii zgłębciowej w obszarach żeber tworzących się przy deformacji powłoki.

Założenie, że deformacja ma charakter odpowiadający izometrycznemu przekształceniu konfiguracji wyjściowej zostało także wykorzystane w zaproponowanej przez Frąckiewicza /np. [25]/ analizie geometrycznej zmienności powłok siatkowych. Przykłady zastosowania tej metody zamieszczono w pracy [25] , w której między innymi wykazano zbieżność otrzymanych za pomocą tej metody rezultatów do rezultatów otrzymanych dla powłok ciągłych.

Także analizę stateczności początkowej powłoki cylindrycznej obciążonej wiatrem można przeprowadzać przy wykorzystaniu założenia o izometryczności deformacji. W pracy [75] zbudowano uproszczony wariant równań powłoki bazujący na założeniu, że odkształcenia w kierunku obwodowym są zerowe. W pracy [74] wykazano, że obciążenia krytyczne otrzymane w oparciu o ten wariant /dla obciążenia wiatrem/ są bardzo bliskie rezultatom dla równań Flüggego.

4. ANALIZA STATECZNOŚCI POCZĄTKOWEJ

4.1. Równania stateczności początkowej dla powłok cylindrycznych

W niniejszym rozdziale omówiono sposób przeprowadzania analizy stateczności powłok pod działaniem obciążeń zachowawczych, który został zaproponowany przez Koitera [42]. W analizie tej przyjmuje się, że część obrotowa deformacji przedkrytycznej może być pominięta. Ten sam efekt uzyskuje się przyjmując następujące założenia:

- (i) konfiguracja krytyczna pokrywa się z konfiguracją początkową,
- (ii) siły błonowe charakteryzujące stan krytyczny są funkcjami liniowych miar odkształcenia.

Uwzględnienie założenia (i) linearyzuje równania problemu natomiast założenie (ii) pozwala sprowadzić problem do postaci uogólnionego zagadnienia na wartości własne.

Równania stateczności początkowej dla powłoki cylindrycznej otrzymuje się w oparciu o warunek stanu krytycznego.

$$(4.1) \quad \delta(P_2) = 0$$

gdzie P_2 to druga różniczka energii potencjalnej P . Zmiana energii potencjalnej jest skutkiem kinematycznie dopuszczalnej deformacji od położenia równowagi do położenia sąsiedniego. Wielkości dla położenia równowagi oznaczane będą "gwiazdką".

Na skutek założenia (i) w wyrażeniu na P_2 zaniedbuje się składowe styczne $\overset{*}{\Phi}_\alpha$ wektora obrotu, charakteryzujące deformację przedkrytyczną. W niniejszej pracy analizę stateczności przeprowadzono dla dwóch wariantów teorii powłok: teorii powłok małowyniosłych Donnell'a [22] oraz teorii Sandersa [67]. Wyrażenia na drugą różniczkę energii potencjalnej podane zostały dla powłok małowyniosłych w pracy [42] a dla teorii Sandersa w materiałach konferencyjnych [70]. W równaniach Sandersa przyjęto dodatkowo, że składowa $\overset{*}{\Phi}_3$ wektora obrotu /prostopa-
dła do powierzchni środkowej/ dla deformacji związanej z wybo-

zeniem jest małą tego samego rzędu co odkształcenie $\gamma_{\alpha\beta}^*$ oraz co kwadrat składowych φ_α^* stycznych do powierzchni środkowej. Pozwala to pominąć człony zawierające $(\varphi_\alpha^*)^2$ tak, że wyrażenia dla drugiej różniczki energii potencjalnej, w obydwu wspomnianych wariantach teorii, różnią się wyłącznie składowymi φ_α^* wektora obrotu.

Postać drugiej różniczki energii potencjalnej, po uwzględnieniu (i), jest następująca:

$$(4.2) \quad P_2 = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} (\gamma_{\alpha\beta}^* \gamma_{\lambda\mu}^* + \frac{h^2}{12} \alpha_{\alpha\beta} \alpha_{\lambda\mu}) \right] dA + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} N^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta dA$$

gdzie:

$$\gamma_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} w$$

$$\alpha_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha})$$

$$N^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}^*$$

$\gamma_{\alpha\beta}^*, \alpha_{\alpha\beta}$ - liniowe miary odkształceń i zmian krzywizny powłoki

$N^{\alpha\beta}$ - siły błonowe

w, u_α - składowe wektora przemieszczeń

$H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ - tensor sprężystości materiału powłoki

h - grubość powłoki.

Natomiast φ_α oznacza składowe wektora obrotu, styczne do powierzchni środkowej.

W teorii powłok małowyniosłych Donnella

$$(4.3) \quad \varphi_\alpha = -w_{,\alpha}$$

a w teorii Sandersa

$$(4.4) \quad \varphi_{\alpha} = -w_{, \alpha} + b_{\alpha\beta} u^{\beta}$$

Założenie (ii) pozwala wyrazić stan sił błonowych w następującej postaci:

$$(4.5) \quad \overset{*}{N}^{\alpha\beta} = \lambda \cdot \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta}$$

$\overset{\circ}{N}^{\alpha\beta}$ jest stanem porównawczym sił błonowych wyznaczonym na podstawie liniowej analizy statycznej dla obciążenia jednostkowego. Analiza stateczności początkowej sprowadza się do wyznaczenia z warunku (4.1) wartości mnożnika λ charakteryzującej stan krytyczny tzn. λ_{kr} .

Po dyskretyzacji drugiej różniczki energii potencjalnej powłokę traktuje się jak układ sprężysty o n -stopniach swobody. W efekcie deformacja powłoki charakteryzowana jest przez współrzędne uogólnione q_k , $k = 1, \dots, n$ mierzone od konfiguracji równowagi. Należy zaznaczyć, że interpretacja współrzędnych uogólnionych jest różna w zagadnieniach omawianych w punktach 4.2 i 4.3.

Z warunku stacjonarności drugiej różniczki energii potencjalnej (4.1) otrzymujemy jednorodny układ n liniowych równań zagadnienia

$$(4.6) \quad ([K_0] + \lambda \cdot [K_5]) \cdot \{q\} = \{0\}$$

gdzie: $[K_0]$ - symetryczna i dodatnio określona macierz sztywności sprężystej

$[K_5]$ - symetryczna macierz naprężeń początkowych

$\{q\} = \{q_1, \dots, q_n\}$ - wektor współrzędnych uogólnionych.

Rozwiązanie powyższego uogólnionego zadania na wartości własne stanowi n par $[\lambda_i, \{q_i\}]$ gdzie λ_i to wartości własne, a $\{q_i\}$ odpowiadające im wektory własne. Najmniejsza dodatnia wartość λ_i to obciążenie krytyczne $\min \lambda_i = \lambda_{kr}$; $\lambda_i > 0$,

a odpowiadający jej wektor własny to postać utraty stateczności.

Powyższą analizę stateczności początkowej można interpretować [21,38] jako analizę jednoznaczności rozwiązania zlinearyzowanego zagadnienia statycznego lub jako analizę stabilności tego rozwiązania /dla układów dyskretnych i powłok mało-wyniosłych/. Poszukiwane obciążenie krytyczne stanowi odpowiednio: punkt bifurkacji rozwiązania lub, jeżeli zastosować kryterium dynamiczne wg Lapunowa oraz normę energetyczną w przestrzeni przemieszczeń, punkt rozdzielający stabilne i niestabilne odcinki rozwiązania.

Przeprowadzenie powyższej analizy nie rozstrzyga kwestii czy wyznaczony punkt krytyczny jest stabilny w sensie Lapunowa. Jednak ponieważ dla analizowanych przykładów istnieją rezultaty doświadczalne więc można wnioskować o stabilności bez odwoływania się do odpowiedniego twierdzenia Koitera [43].

4.2. Analiza stateczności dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego

Pomimo, że obciążenie wiatrem jest osiowoniesymetryczne, pewna wartość użyteczną ma analiza oparta na założeniu osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego. Przyjęcie takiego obciążenia, któremu odpowiada osiowosymetryczny stan porównawczy prowadzi do wartości i obciążenia krytycznego niższych od otrzymanych eksperymentalnie. Zalety powyższego uproszczenia uwidaczniają się w analizach numerycznych opartych na rozwinięciu formy utraty stateczności w szereg Fouriera w kierunku obwodowym powłoki. Przyjmijmy, że forma utraty stateczności jest następująca:

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad w(\varphi, x) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^L w_n(x) \cdot \cos n\varphi \\
 u(\varphi, x) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^L u_n(x) \cdot \sin n\varphi \\
 v(\varphi, x) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^L v_n(x) \cdot \cos n\varphi
 \end{aligned}$$

gdzie x, φ - współrzędne cylindryczne: południkowa i
 kątowna
 l - liczba fal w kierunku obwodowym.

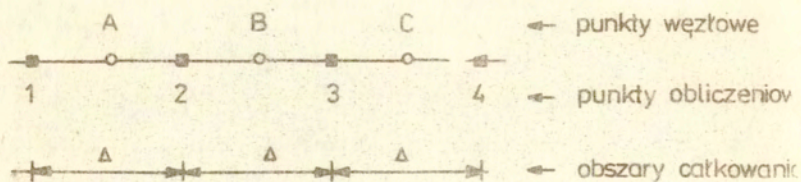
Dla powyższych reprezentacji i stałej wartości sił błonowych w kierunku obwodowym druga różniczka przyrostu energii potencjalnej (4.1) jest wielomianem trygonometrycznym 2-go stopnia. Wykonanie całkowania względem φ prowadzi do dekompozycji funkcjonału P_2 na funkcjonały składowe $(P_2)_j$ związane z deformacją, przy utracie stateczności, w postaci pojedynczej harmoniki j .

$$(4.8) \quad P_2 = \sum_{j=0}^l (P_2)_j$$

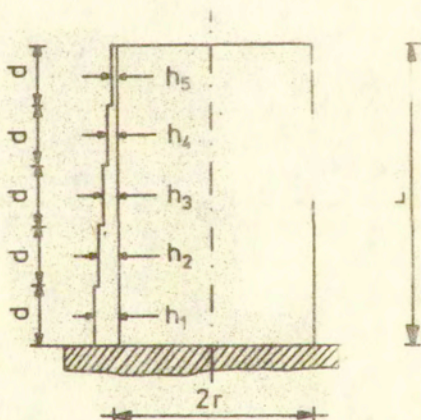
Otrzymane funkcjonały składowe, zależne wyłącznie od współrzędnej x , przekształcono do postaci algebraicznej za pomocą metody różnic skończonych. Metoda różnic skończonych była stosowana do podobnych zagadnień np. przez Bushnella [18], który wykorzystał ją w programie BOSOR. W pierwszym etapie wybrano punkty węzłowe i przydzielono im wzajemnie rozłączne lecz pokrywające cały obszar, przedziały całkowania. Następnie w otoczeniu każdego punktu węzłowego rozwinięto funkcje $w_j(x)$, $u_j(x)$, $v_j(x)$ w szeregi Taylora i wykonano całkowanie wzdłuż x , w przedziałach przypisanych tym punktom.

W ostatnim etapie pochodne w punktach węzłowych zastąpiono operatorami różnicowymi, które tworzą w oparciu o warunek minimum błędu, jednak inaczej niż w pracy Liszki i Orkisz [48]. Nie przytaczając tutaj tego warunku, który podano w punkcie 5.5, zwięźle opiszemy model różnicowy i sposób tworzenia operatorów.

W modelu różnicowym, /patrz rys.4.1/, rozróżniono dwa rodzaje punktów: węzłowe $\{A, B, C\}$ oraz obliczeniowe $\{1, 2, 3, 4\}$. Punktom węzłowym przypisano obszary całkowania i w punktach tych zdefiniowano operatory różnicowe, które były wyrażone za pomocą wielkości w punktach obliczeniowych. Przyjęto, że punkty węzłowe są rozmieszczone równomiernie, a punkty obliczeniowe znajdują się na granicach przedziałów całkowania. Warunki brzegowe uwzględniono operując wielkościami w punktach obliczeniowych.



Rys.4.1. Schemat obliczeniowy: numeracja punktów i przydział obszarów całkowania.



Rys.4.2. Geometria powłoki.

Operatory różnicowe tworzą w dwóch etapach. Na początku pierwszą pochodną, np. w punkcie B , wyrażono za pomocą wielkości w sąsiednich punktach obliczeniowych 2 i 3 :

$$(4.9) \quad f_{,x}(B) = \frac{1}{2\Delta} (f(3) - f(2))$$

gdzie : f - dowolna składowa wektora przemieszczenia,
 Δ - odległość punktów obliczeniowych.

Jest to klasyczny operator różnicowy dla pierwszej pochodnej. W kolejnym etapie, drugą pochodną otrzymano z warunku minimum błędu, przy czym pierwsza pochodna wykorzystywana była w postaci różnicowej. W efekcie druga pochodna w punkcie B wyrażona jest za pomocą wielkości w punktach 1, 2, 3, 4.

Jeżeli punkt B jest odpowiednio odległy od brzegu obszaru wtedy postać operatora dla drugiej pochodnej jest następująca:

$$(4.10) \quad f_{,xx}(B) = \frac{1}{90\Delta^2} (f(1) - f(2) - f(3) + f(4))$$

Zastosowanie powyższych operatorów zapewnia gładkie rozwiązania zagadnienia na wartości własne dla powłok o stałej grubości, podobnie jak operatory klasyczne dla siatek naprzemiennych zaproponowane przez Bushnella i in. w [20].

Ostatecznie otrzymaliśmy zdyskretyzowany funkcjonał drugiej różniczki energii potencjalnej $(P_2)_j$, który związany jest z formą utraty stateczności, odpowiadającą j -tej harmonice. Obliczenie wariacji tego funkcjonału względem składowych wektora, opisującego formę utraty stateczności, prowadzi do warunków:

$$(4.11) \quad \frac{\partial (P_2)_j}{\partial q_{jz}} = 0 \quad j = 0, \dots, l \quad z = 1, \dots, 3r$$

gdzie: $q_{jz} \in \{w_{j1}, u_{j1}, v_{j1}, \dots, w_{jr}, u_{jr}, v_{jr}\}$
 q_{jz} - składowa wektora formy utraty stateczności
 odpowiadającego j -tej harmonice, w punkcie
 obliczeniowym
 l - liczba wyrazów rozwinięcia w szereg Fouriera
 r - liczba punktów obliczeniowych.

W rezultacie z warunku (4.11) otrzymujemy uogólnione zagadnienie na wartości własne (4.6). Rozwiązując $(l+1)$ takich zagadnień, znajdujemy dla każdego minimalną wartość własną λ_j^{kr} i odpowiadający wektor własny. Obciążenie krytyczne określamy następująco:

$$(4.12) \quad \lambda_{kr} = \min \lambda_j^{kr} \quad ; \quad j = 0, \dots$$

a postać utraty stateczności jest charakteryzowana, w kierunku obwodowym, przez odpowiadającą obciążeniu krytycznemu harmonikę. Obie macierze zagadnienia (4.6): infinitezymalna $[K_0]$ i naprężeń początkowych $[K_0]$ są dla tego problemu macierzami pasmowymi, co wpływa bardzo korzystnie na efektywność metody.

4.3. Analiza stateczności dla obciążenia niesymetrycznego.

W przypadku niesymetrycznego obciążenia powłoki właściwsza, od zaprezentowanej w poprzednim punkcie, jest metoda uwzględniająca niesymetrię stanu porównawczego sił błonowych. Obciążenie krytyczne, wyznaczone na podstawie analizy z niesymetrycznym stanem $\bar{N}^{\alpha\beta}$ jest wyższe od rezultatów eksperymentalnych.

Założmy, że składowe wektora postaci utraty stateczności są aproksymowane skończonymi szeregami Fouriera:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} w(\varphi, x) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^l w_n(x) \cdot \cos n\varphi \\ u(\varphi, x) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^l u_n(x) \cdot \sin n\varphi \\ v(\varphi, x) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^l v_n(x) \cdot \cos n\varphi \end{aligned}$$

gdzie x, φ - współrzędne cylindryczne: południkowa i kątowa

l - liczba fal w kierunku obwodowym.

Również stan porównawczy sił błonowych przyjęto w postaci szeregu Fouriera

$$\begin{aligned}
 \dot{N}^{44}(\varphi, x) &= [\dot{N}^{44}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [\dot{N}^{44}(x)]_n \cos n\varphi \\
 \dot{N}^{22}(\varphi, x) &= [\dot{N}^{22}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [\dot{N}^{22}(x)]_n \cos n\varphi \\
 \dot{N}^{42}(\varphi, x) &= [\dot{N}^{42}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [\dot{N}^{42}(x)]_n \sin n\varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Dla powyższych aproksymacji we wzorze (2.2) wyrażenie podcałkowe drugiego członu

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \dot{N}^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta dA
 \tag{4.15}$$

jest wielomianem trygonometrycznym 3-go stopnia. W konsekwencji macierz naprężeń początkowych $[K_0]$, utworzona z tego członu nie jest macierzą jednopasmową. Nie można, jak uprzednio, rozłożyć całego zagadnienia na podzagadnienia i analizować problemu przez rozwiązywanie ciągu zadań składowych o dużo mniejszych rozmiarach. Konieczność rozwiązywania od razu całego zagadnienia powoduje znaczny wzrost rozmiarów rozwiązywanego zadania, w porównaniu z zagadnieniem osiowosymetrycznym. Z tego względu zrezygnowano z łącznego zastosowania rozwinięć w szeregi Fouriera (4.13), (4.14) i aproksymacji metodą różnic skończonych w kierunku tworzącej.

W celu zmniejszenia rozmiarów zadania wykorzystano koncepcję przyjęcia wektora formy utraty stateczności w kierunku tworzącej powłoki [47,74]. Oznacza to, że w rozwinięciu (4.1) przyjęto następujące relacje:

$$\begin{aligned}
 w_j(x) &= W_j \cdot \bar{w}_j(x) \\
 u_j(x) &= U_j \cdot \bar{u}_j(x) \\
 v_j(x) &= V_j \cdot \bar{v}_j(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_j(x) &= \frac{W_j^s(x)}{\max W_j^s(x)} \\
 \bar{u}_j(x) &= \frac{U_j^s(x)}{\max U_j^s(x)} \\
 \bar{v}_j(x) &= \frac{V_j^s(x)}{\max V_j^s(x)}
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

przy czym indeks j odpowiada indeksowi o lub n .
 Funkcje $\bar{w}_j(x)$, $\bar{u}_j(x)$, $\bar{v}_j(x)$ są znormalizowanymi wektorami własnymi $W_j^s(x)$, $U_j^s(x)$, $V_j^s(x)$ zadania dla symetrycznego stanu porównawczego a W_j, U_j, V_j to współczynniki, które tworzyć będą niewiadomy wektor własny zadania.

Przyjęcie wektora formy utraty stateczności z zadania osiowosymetrycznego, rozwiązane przy użyciu metody różnic skończonych w kierunku tworzącej, pozwala uwzględnić między innymi skokowo zmienną grubość powłoki w tym kierunku.

Założenie wektora formy utraty stateczności, poprzedzone rozdzieleniem zmiennych, umożliwia znaczne uproszczenie funkcyjności drugiej różniczki energii potencjalnej. Obliczając całki w kierunku obwodowym wykorzystuje się najpierw tożsamość trygonometrycznego typu

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]
 \tag{4.18}$$

w celu zredukowania wielomianów trygonometrycznych 3-go stopnia do wielomianów 2-go stopnia, a następnie korzysta się z ortogonalności funkcji trygonometrycznych w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Etap powyższy poprzedzony jest określeniem całek w kierunku tworzącej; ponieważ zarówno stan prętownawczy sił jak i formy utraty stateczności określono w oparciu o model różnicowy, potrzebne całki obliczono numerycznie wykorzystując wartości w węzłach siatki.

Następnie dokonano wariacji drugiej różniczki energii potencjalnej względem współczynników w_j, u_j, v_j co prowadziło do warunków

$$(4.19) \quad \frac{\partial (P_2)}{\partial q_j} = 0 \quad j = 0, \dots, n$$

przy czym

$$q_j \in \{w_0, u_0, v_0, \dots, w_1, u_1, v_1\}$$

Ostatecznie musimy rozwiązać jedno zadanie (2.6) na wartości własne o rozmiarze $3(1+n)$. Ponieważ w niektórych zagadnieniach z góry można określić charakter deformacji przy utracie stateczności, istnieje możliwość pominięcia pewnych wyrazów szeregu (4.13). Pozostawienie wyłącznie istotnych harmonik umożliwia dalsze zmniejszenie rozmiarów zadania.

4.4. Przykłady numeryczne

W oparciu o metody opisane w punktach 4.3 i 4.4 zbudowano programy numeryczne do rozwiązania postawionych zagadnień. Programy napisano w języku FORTRAN i uruchomiono na maszynie cyfrowej ODRA 1305.

Przykład 4.1

W celu dokonania oceny jakości rezultatów otrzymanych za pomocą przygotowanych programów obliczono powłokę, która była już analizowana w pracach [46] i [10]. Jest to powłoka cylindryczna otwarta od góry, o stałej grubości, ze swobodną górną a utwierdzoną dolną krawędzią, rys.4.2. Dane geometryczne i materiałowe dla tej powłoki są następujące:

$$R = 40 \text{ [in]} \quad (101.6 \text{ [cm]})$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h = 0.1064 \text{ [in]} \quad (0.27 \text{ [cm]})$$

$$L = 120 \text{ [in]} \quad (304.8 \text{ [cm]})$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ [psi]} \quad (0.21 \cdot 10^7 \text{ [kg/cm}^2\text{]})$$

$$\nu = 0.3$$

Przyjęto, że obciążenie wiatrem jest stałe wzdłuż wysokości cylindra natomiast w kierunku obwodowym ma postać:

$$(4.20) \quad \gamma(\varphi) = \sum_{n=0}^6 C_n \cos n\varphi$$

przy czym kąt φ jest odmierzany od płaszczyzny symetrii obciążenia. Współczynniki C_n ustalono na podstawie badań modelowych w tunelu aerodynamicznym [46]:

$$C_0 = -0.220, \quad C_1 = -0.338, \quad C_2 = -0.533,$$

$$C_3 = -0.471, \quad C_4 = -0.166, \quad C_5 = +0.066,$$

$$C_6 = +0.055$$

Rozkład parcia wiatru $C(\varphi)$ pokazano na rys.4.3. Wartość maksymalna $C(\varphi)$ jest równa -1.607 dla $\varphi = 0^\circ$.

Dla zadanej powłoki i obciążenia przeprowadzono liniową analizę statyczną w celu określenia stanu porównawczego sił błonowych. Do analizy tej wykorzystano program bazujący na rozwinięciu funkcji przemieszczeń w szereg Fouriera i metodzie różnic skończonych /patrz punkt 5.3/.

W analizie stateczności pod działaniem zastępczego, osiowo-symetrycznego obciążenia wykorzystano metody opisane w rozdziale 4.2.

Błonowy stan sił porównawczych generowano w oparciu o wektor przemieszczeń otrzymany w analizie liniowej dla zerowej harmoniki obciążenia. Zastosowano model różnicowy składający się z 11 węzłów obliczeniowych, co daje około 30 niewiadomych w zadaniu. Założono wektor formy utraty stateczności w postaci szeregu

cosinusowego /patrz wzór (4.7) /, dla $n = 1, \dots, 9$.

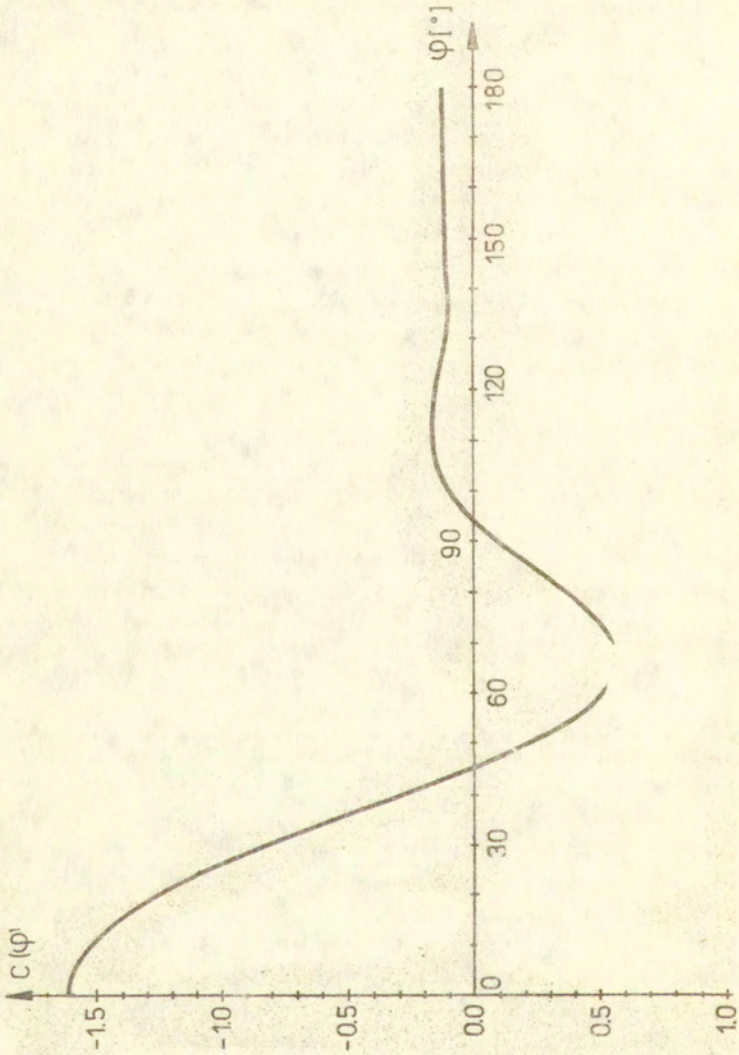
Poszukując obciążenia krytycznego przeprowadzono 9 analiz dla wektora formy utraty stateczności w postaci poszczególnych harmonik. Otrzymano obciążenie krytyczne równe $\lambda_{kr} = 2.108$, które odpowiada harmonice dla $n = 6$, jako formie utraty stateczności w kierunku obwodowym. Znormalizowany rozkład postaci utraty stateczności wzdłuż tworzącej przedstawiono na rys.4.4. Na rysunku tym zamieszczono również znormalizowane przemieszczenie odpowiadające harmonice dla $n = 0$, na podstawie którego generowano stan porównawczy sił błonowych.

W analizie uwzględniającej niesymetrię obciążenia, do utworzenia stanu porównawczego sił błonowych, wykorzystano rezultaty liniowej analizy statycznej otrzymane dla wszystkich harmonik rozwinięcia (4.20). Podstawę analizy z niesymetrycznym stanem porównawczym stanowi założenie, że w kierunku tworzącej formy wektora utraty stateczności są takie jak otrzymano w analizie osiowoosymetrycznej.

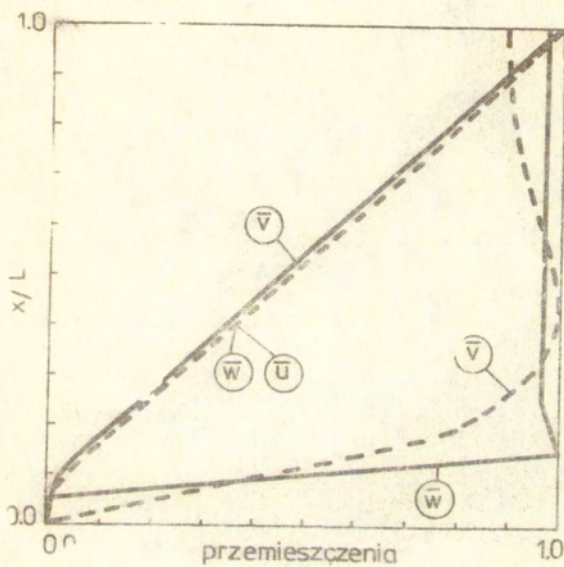
Wykorzystując rezultaty zawarte w pracy [46] ograniczono się wyłącznie do istotnych, dla zadanej geometrii harmonik tj. dla $n = 3, \dots, 9$; co prowadzi do zadania z 21 niewiadomymi.

Przeprowadzono analizy dla wariantów równań Donnella i Sandersa /patrz rozdział 4.1/. Znormalizowaną składową normalną \bar{w} wektora postaci utraty stateczności dla równań Donnella przedstawia rys.4.5. Postać otrzymana dla równań Sandersa /której nie naniesiono na rys.4.5/ niewiele różni się od niej. Obliczone obciążenia krytyczne zestawiono w tabelicy 4.1 z rezultatami otrzymanymi eksperymentalnie oraz za pomocą różnych metod obliczeniowych i wariantów równań przez innych autorów.

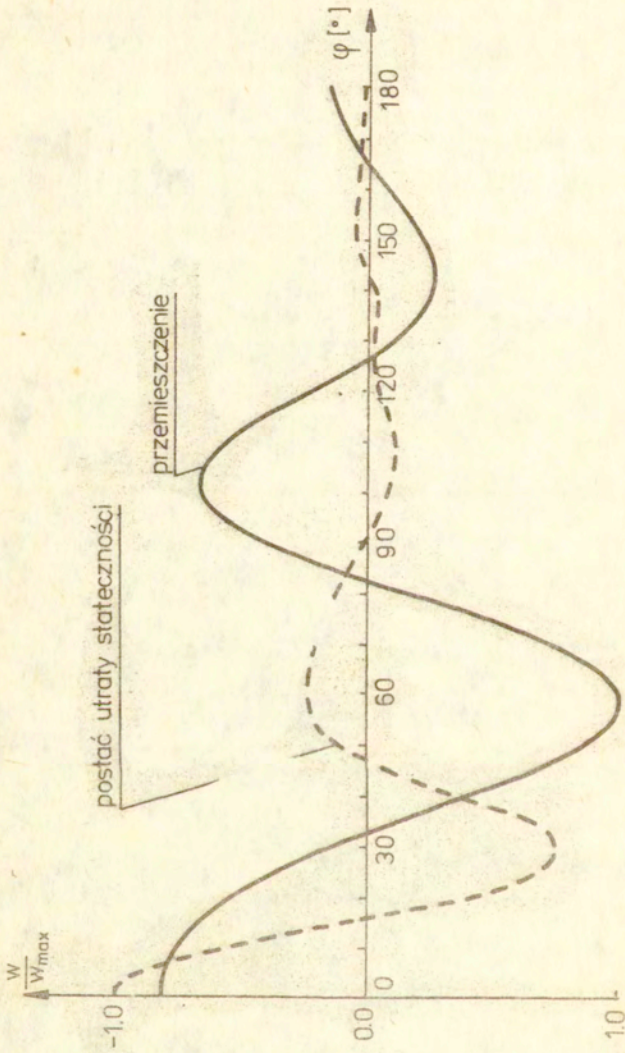
Zestawienie w tabelicy 4.1 potwierdza poprawność programów, zbudowanych w oparciu o opisane uprzednio metody. Rezultaty analizy z osiowoosymetrycznym obciążeniem zastępczym niewiele różnią się ($< 3\%$) od rezultatów otrzymanych metodą rozwinięć w szeregi Fouriera. Bardzo dobre, w porównaniu z wynikami pracy [46] są rezultaty analizy dla obciążenia niesymetrycznego. W pracy tej stosowano rozwinięcia w szeregi Fouriera w kierunku obwodowym oraz aproksymację szeregiem potęgowym 5-go stopnia w kierunku tworzącej. Stosując metodę zakładania postaci utraty stateczności otrzymaliśmy identyczną wartość obciążenia krytycznego.



Rys.4.3. Rozkład parcia wiatru po obwodzie powłoki.



rys.4.4. Znormalizowane przemieszczenia dla $n=0$ /linia ciągła, i postać utraty stateczności dla $n=6$ /linia przerywana/. Powłoka o stałej grubości.



Rys.4.5. Znormalizowane przemieszczenia / linia ciągła/ i postać utraty stateczności /linia przerywana/ górnej krawędzi powłoki , $x/L=1.0$. Powłoka o stałej grubości.

Tablica 4.1. Zestawienie obciążeń krytycznych λ_{kr} dla powłoki o stałej grubości obciążonej wiatrem.

		O B L I C Z E N I A			
EKSPERYMENT		obciążenie symetryczne		obciążenie niesymetryczne	
bibliogr.	[46]	obl. własne	[46]	[10]	obl. własne
równania		Sandersa	Donnella	Donnella	Sandersa
metoda rozwiązań		szereg Fouriera i różnice skończone	szereg Fouriera i wielomiany potęgowe 5-go stopnia	elementy skończone 3 wymiarowe zdęgnięte rowane S16	szereg Fouriera i postaci z analizy symetrycznej
λ_{kr}	3.045	2.108	3.857	4.69	3.860
$\frac{\lambda_{kr}}{\lambda_{eksper}}$	1.0	0.867	1.267	1.54	1.268
					3.927
					1.289

Wartość ta jest niższa o około 27% od obciążenia krytycznego otrzymanego w pracy [10] za pomocą zdegenerowanych, trójwymiarowych elementów skończonych. Należy zaznaczyć, że rezultat autora jest bliższy wynikowi doświadczalnemu. W analizowanym przykładzie rezultaty obliczeń numerycznych przeprowadzonych przez autora różnią się, są wyższe lub niższe w zależności od postaci obciążenia przyjętej do analizy, o około 30% od wartości eksperymentalnej. Można oczekiwać zbliżności wyników tych dwóch typów analiz przy zmniejszaniu grubości powłoki.

Przykład 4.2

Zastosowane metody wyznaczania obciążenia krytycznego dają możliwość analizowania powłok o nierównomiernym rozkładzie grubości. W celach porównawczych przeprowadzono obliczenia dla powłoki, która różni się od tej z przykładu 4.2, wyłącznie skokowo zmiennym rozkładem grubości. Szerokość poszczególnych pasów wynosi $a = 24$ [in] (60.96 [cm]) a grubości są następujące:

$$h_1 = 0.1596 \text{ [in]} \quad (0.4054 \text{ [cm]})$$

$$h_2 = 0.1330 \text{ [in]} \quad (0.3378 \text{ [cm]})$$

$$h_3 = 0.1064 \text{ [in]} \quad (0.2703 \text{ [cm]})$$

$$h_4 = 0.0798 \text{ [in]} \quad (0.2027 \text{ [cm]})$$

$$h_5 = 0.0532 \text{ [in]} \quad (0.1351 \text{ [cm]})$$

Grubości pasów maleją skokowo od krawędzi zamocowanej do krawędzi swobodnej, rys.4.2. Pozostałe parametry powłoki oraz obciążenie są takie same jak w przykładzie 4.1.

Średnia grubość obydwu powłok, tej z przykładu 4.1 i z przykładu 4.2, jest identyczna. Można zatem, powłokę o stałej grubości traktować jako zastępczą dla powłoki o skokowo zmiennej grubości. Powłoka zastępcza jest często przyjmowana w uproszczonych analizach inżynierskich; interesująca jest zatem kwestia jakie powoduje to niedokładności. W niniejszej pracy porównano podstawowe rezultaty analizy stateczności dla powłoki rzeczywistej i zastępczej tzn. wartości obciążeń krytycznych i postaci utraty stateczności.

W analizie powłoki o skokowo zmiennej grubości zastosowano ten sam model różnicowy co w przykładzie 4.1, lecz o 21 punktach obliczeniowych. Rozkład węzłów siatki zapewnia, że na pojedynczy pas przypadają 4 obszary całkowania wzdłuż tworzącej oraz, że w poszczególnych obszarach grubość powłoki jest stała.

Analizę stateczności z zastępczym osiowosymetrycznym obciążeniem przeprowadzono w oparciu o równania powłok Sandersa, natomiast analizę dla obciążenia niesymetrycznego bazując na wariancie równań Donnella. Otrzymane wartości obciążenia krytycznego zamieszczono w tabelicy 4.2. a składową w wektorze przemieszczeń i formy utraty stateczności dla harmoniki pokazano na rys.4.6.

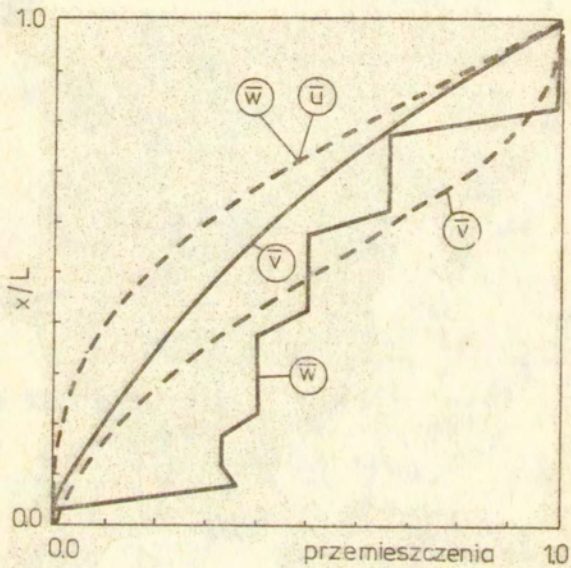
Tabela 4.2. Wartości obciążeń krytycznych λ_{cr} dla powłoki o stałej i skokowo zmiennej grubości.

grubość	o b c i ą ż e n i e	
	symetryczne	niesymetryczne
stała	2.108	3.860
zmienna	0.879	0.920

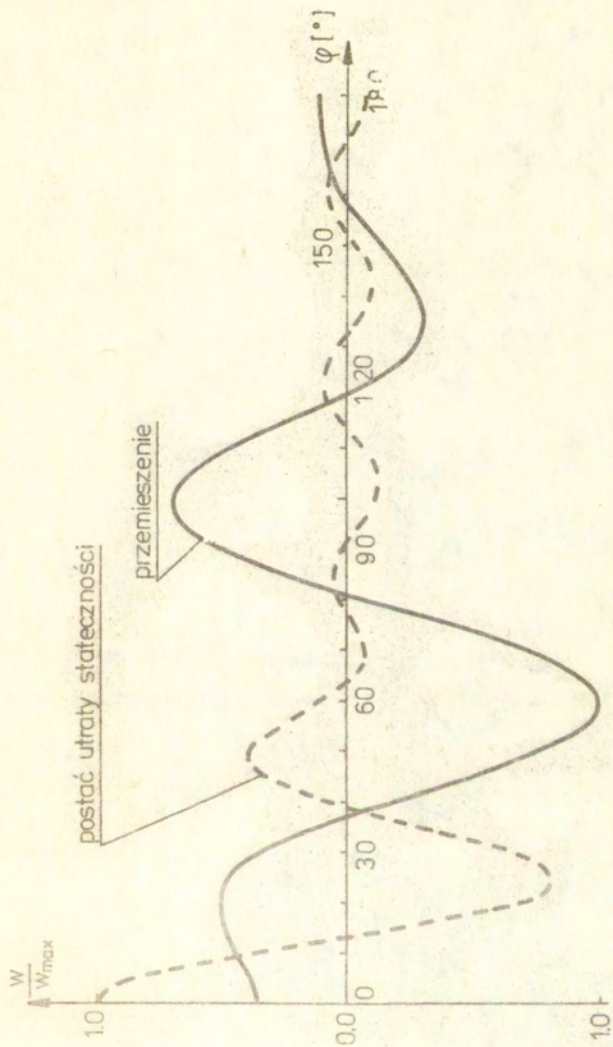
Poniżej dokonamy porównania obciążeń krytycznych i postaci utraty stateczności dla powłoki rzeczywistej i zastępczej. Wyznaczone obciążenia krytyczne dla powłoki o skokowo zmiennej grubości są w istotny sposób niższe od tych dla powłoki o stałej grubości. Dla obciążenia symetrycznego stanowią ok. 41%, a dla niesymetrycznego 24% wartości krytycznej dla powłoki o stałej grubości. Stąd wniosek, że posługiwanie się w analizie powłoką zastępczą prowadzi do znacznego zawyżenia wartości obciążenia krytycznego.

Zmniejszyła się różnica pomiędzy wynikami analizy dla obciążenia symetrycznego i niesymetrycznego: dla powłoki o stałej grubości stosunek obciążeń krytycznych wynosi $3.860/2.108 \approx$

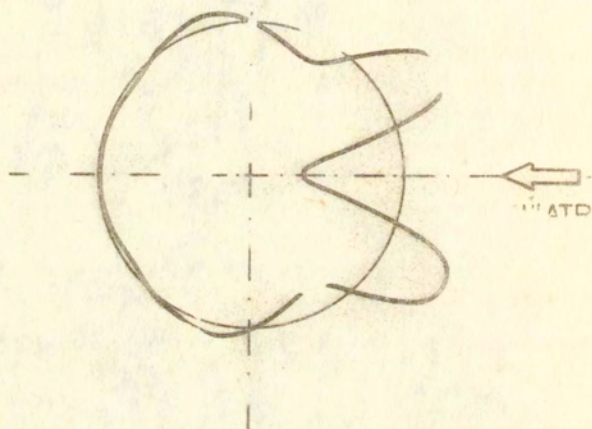
1.83, dla skokowo zmiennej jest równy $0.920/0.879 \approx 1.05$. Efekt powyższy związany jest z dwukrotnym wzrostem wiotkości



Rys.4.6. Znormalizowane przemieszczenia dla $n=0$ /linia ciągła/ i postać utraty stateczności dla $n=7$ /linia przerywana/. Powłoka o skokowo zmiennej grubości.



Rys.4.7. znormalizowane przemieszczenie / linia ciągła/ i postać utraty stateczności /linia przerywana/ górnej krawędzi powłoki , $x/l=1.0$. Powłoka c. okokowo zmiennej grubości.



s.4.8. Postać utraty stateczności / składowa w / górnej krawędzi powłoki z analizy stateczności początkowej.

powłoki τ/h , od wartości 376 do wartości 752 dla najcieńszego pasa powłoki o zmiennej grubości.

Porównując znormalizowane przemieszczenia i formy utraty stateczności /rys.4.4 i 4.6/, stwierdzić można różnice w rozkładzie tych wielkości wzdłuż tworzącej, odpowiadające różnicom w rozkładzie grubości.

Porównanie przemieszczeń górnej krawędzi /rys.4.5 i 4.7/, pokazuje różnicę kształtu w strefie czołowej, w pobliżu płaszczyzny symetrii obciążenia. Wielkości maksymalne przemieszczeń, dla $\varphi = 60^\circ$, są podobne. Dla składowej w wynoszą one: dla powłoki o stałej grubości -0.403 [in] (-1.024 [cm]) a dla powłoki o zmiennej grubości -0.410 [in] (-1.041 [cm]). Jeżeli traktować wartość dla powłoki o zmiennej grubości jako dokładną to wartość dla powłoki o stałej grubości różni się od niej o 1,7%. To samo porównanie okazuje się mniej korzystne dla tworzącej $\varphi = 0^\circ$; przemieszczenia wynoszą odpowiednio -0.325 [in] (-0.826 [cm]) oraz -0.149 [in] (-0.378 [cm]) co daje błąd względny około 118%.

Analizując formy utraty stateczności górnej krawędzi obu powłok /rys.4.5 i 4.7/ zauważyć można, że postać odpowiadająca powłoce o zmiennej grubości charakteryzuje się większą ilością małych fal oraz, że w strefie czołowej fale są bardziej zagęszczone. Zjawisko to jest spowodowane większą wiotkością górnych pasów powłoki o zmiennej grubości; zauważono to w pracy [10] analizując dwie powłoki o stałej grubości różniące się parametrem τ/h .

5. ANALIZA STATECZNOŚCI Z UWZGLĘDNIENIEM DEFORMACJI DOKRYTYCZNEJ

5.1. Metoda rozwiązania nieliniowych równań i wyznaczania punktu granicznego.

Analiza stateczności, w której uwzględnia się deformację dokrytyczną wymaga dwóch etapów postępowania:

- 1/ wyznaczenia kolejnych, odpowiadających przyrostowi obciążenia, konfiguracji równowagi w oparciu o nieliniowe równania statyki oraz
- 2/ sprawdzenia stateczności tych konfiguracji w celu wyznaczenia punktu granicznego obciążenia.

Poniżej omówimy sposób otrzymania i metodę rozwiązania równań statyki, które zostały zastosowane w niniejszej pracy.

Funkcjonał energii potencjalnej powłoki w postaci przyrostowej /zgodnie z (2.56) / jest następujący:

$$(5.1) \quad P[\underline{u}, \underline{p}] = P[\underline{u}^*, \underline{p}^*] + \int_M (\underline{N} \cdot \Delta \underline{\gamma}^{NL} + \frac{1}{2} (\Delta \underline{N} \cdot \Delta \underline{\gamma} + \Delta \underline{M} \cdot \Delta \underline{\alpha})) dA - \int_M \Delta \underline{p} \cdot \Delta \underline{u} dA + R$$

Znaczenie poszczególnych wielkości jest takie jak określono w punkcie 2.7. Zlinearyzujemy przyrost tensora odkształcenia $\Delta \underline{\gamma}$ przez odrzucenie części nieliniowej tzn.

$$(5.2) \quad \Delta \underline{\gamma} \cong \Delta \underline{\gamma}^{LN}$$

Ponadto rozdzielimy $\Delta \underline{\gamma}^{LN}$ na część $\Delta \underline{\gamma}^0$ zależną tylko od przyrostu przemieszczeń oraz na część $\Delta \underline{\gamma}^L$ zależną także od przemieszczenia całkowitego \underline{u}^* .

$$(5.3) \quad \Delta \underline{\gamma}^{LN} = \Delta \underline{\gamma}^0 + \Delta \underline{\gamma}^L$$

Wprowadźmy powyższą relację do wzoru (5.1) a następnie odpowiednio pogrupujemy występujące w nim wyrazy .

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\Delta \tilde{N}^0 \cdot \Delta \tilde{\gamma}^0 + \Delta \tilde{M} \cdot \Delta \tilde{\alpha}) dA = \{\Delta q\}^T [K_0] \{\Delta q\} \\
 (5.4) \quad & \int_{\mathcal{M}} \tilde{N}^* \cdot \Delta \tilde{\gamma}^{NL} dA = \{\Delta q\}^T [K_6] \{\Delta q\} \\
 & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^0 + \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L + \Delta \tilde{N}^0 \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L) dA = \\
 & \quad \{\Delta q\}^T [K_u] \{\Delta q\} \\
 & \int_{\mathcal{M}} \Delta \tilde{p} \cdot \Delta \tilde{u} dA = \{\Delta q\}^T \{\Delta p\}
 \end{aligned}$$

We wzorach tych zaznaczono /po znaku równości/ wielkości, które otrzymuje się z poszczególnych grup wyrazów po przeprowadzeniu dyskretyzacji i niezbędnych całkowań.

Warunek stacjonarności (2.55) funkcjonału energii potencjalnej prowadzi do następującej postaci liniowego, przyrostowego równania równowagi

$$(5.5) \quad ([K_0] + [K_6] + [K_u]) \cdot \{\Delta q\} = \{\Delta p\} - \{R\}$$

gdzie

- $[K_0]$ - macierz sztywności sprężystej
- $[K_6]$ - macierz początkowych naprężeń
- $[K_u]$ - macierz początkowych przemieszczeń
- $\{\Delta q\}$ - wektor przyrostu przemieszczeń
- $\{\Delta p\}$ - wektor przyrostu obciążeń
- $\{R\}$ - wektor sił niezrównoważonych.

Rozwiązując otrzymany układ równań zastosowano następującą procedurę. Dla pojedynczego przyrostu obciążenia jedнокrotnie określano macierz styczną $[K_1] = [K_0] + [K_6] + [K_u]$ a następnie iteracyjnie wyznaczano wartość przyrostu wektora przemieszczeń

$$(5.6) \quad [K_t] \cdot \{\Delta q_i\} = \{\Delta P\} - \{R_{i-1}\}$$

Wektor sił niezrównoważonych $\{R_{i-1}\}$, kompensujący odejście od rozwiązania dokładnego był wyznaczony na podstawie wektora przemieszczeń $\{q_{i-1}\}$ określonego w poprzedniej iteracji. Poprawioną wartość wektora przemieszczeń określano następująco:

$$(5.7) \quad \{q_i\} = \{q_{i-1}\} + \{\Delta q_i\}$$

Powyższe postępowanie odpowiada zmodyfikowanej metodzie Newtona-Raphsona dla równań przyrostowych, patrz np. Haisler i in. [29].

Po wyznaczeniu, za pomocą opisanych metod, konfiguracji równowagi odpowiadającej danemu obciążeniu należy sprawdzić stateczność tej konfiguracji. Podstawę do określenia czy dana konfiguracja jest krytyczna stanowi /zgodnie z ustaleniami rozdziału 3/ definicja stanu krytycznego:

$$(5.8) \quad \delta P_2 = 0$$

gdzie P_2 jest drugą różniczką energii potencjalnej układu. W ogólnym przypadku warunkowi temu, po przeprowadzeniu dyskretyzacji i całkowań, odpowiada równanie postaci

$$(5.9) \quad ([K_o] + [K_e] + [K_u])\{\Delta q\} = \{0\}$$

Warunek konieczny istnienia nietrywialnych rozwiązań tego równania jest następujący:

$$(5.10) \quad \det ([K_o] + [K_e] + [K_u]) = 0$$

Powyższy warunek zerowania się macierzy stycznej jest bardzo dogodny ponieważ wartość wyznacznika można łatwo obliczać przy rozkładzie macierzy stycznej na czynniki trójkatne, podczas rozwiązywania układu równań.

Bardzo często, w celu przyśpieszenia procesu wyznaczania obciążenia krytycznego, warunek (5.9) wykorzystuje się w formie ekstrapolacyjnej. Warunek ten stanowi wtedy podstawę analizy będącej uogólnieniem analizy stateczności początkowej. W analizie tej zakłada się, że stan przemieszczeń \tilde{u}^* charakteryzujący punkt graniczny można wyrazić przez stan przemieszczeń \tilde{u} , wyznaczony z nieliniowej analizy, w następujący sposób:

$$(5.11) \quad \tilde{u}^* = \lambda \cdot \tilde{u}$$

W rezultacie otrzymujemy, że:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \Delta \tilde{\gamma}^L &= \lambda \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L \\ \Delta \tilde{N}^L &= \lambda \cdot \Delta \tilde{N}^L \\ \tilde{N}^* &= \lambda \cdot \tilde{N}^{LN} + \lambda^2 \cdot \tilde{N}^{NL} \end{aligned}$$

a poszczególne człony w (5.4) są następujące:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^* \cdot \Delta \tilde{\gamma}^{NL} &= (\lambda \cdot \tilde{N}^{LN} + \lambda^2 \cdot \tilde{N}^{NL}) \cdot \Delta \tilde{\gamma}^{NL} \\ \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^0 &= \lambda \cdot \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^0 \\ \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L &= \lambda^2 \cdot \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L \\ \Delta \tilde{N}^0 \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L &= \lambda \cdot \Delta \tilde{N}^0 \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L \end{aligned}$$

Po przeprowadzeniu dyskretyzacji i obliczeniu wariacji względem pola przemieszczeń otrzymujemy równanie (5.9) w postaci:

$$(5.14) \quad ([K_0] + \lambda [K_1] + \lambda^2 [K_2]) \{\Delta q\} = \{0\}$$

gdzie macierze $[K_1]$ i $[K_2]$ tworzą z następujących członów:

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (2 \tilde{N}^{LN} \cdot \Delta \tilde{\gamma}^{NL} + \Delta \tilde{N}^L \cdot \Delta \tilde{\gamma}^0 + \Delta \tilde{N}^0 \cdot \Delta \tilde{\gamma}^L) dA = \{\Delta q\}^T [K_1] \{\Delta q\}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (2\bar{N}^{NL} \cdot \Delta \bar{y}^{NL} + \Delta \bar{N}^L \cdot \Delta \bar{y}^L) dA = \{\Delta q\}^T [K_2] \{\Delta q\}$$

Równanie (5.14) stanowi kwadratowe zagadnienie na wartości własne i w tej postaci może być wykorzystywane do obliczania obciążeń krytycznych np. Nachbar, Jeng [54]. W pracy Brusha [12] zagadnienie to rozwiązywano dla przegubowo podpartego cylindra pod obciążeniem osiowosymetrycznym i normalnym do powierzchni /o różnych rozkładach wzdłuż tworzącej/. Najczęściej jednak ze względu na trudności numeryczne związane z tym zagadnieniem wykorzystuje się zlinearyzowane wersje (5.14). Najbardziej oczywistą formą linearyzacji jest pominięcie członu $\lambda^2 \cdot [K_2]$. Prowadzi to do równania

$$(5.16) \quad ([K_0] + \lambda [K_1]) \{\Delta q\} = \{0\}$$

Jeżeli przy tworzeniu macierzy $[K_1]$ pominąć deformację początkową w wyrażeniach na $\Delta \bar{N}^L$ i $\Delta \bar{y}^L$ to

$$(5.17) \quad \{\Delta q\}^T [K_1] \{\Delta q\} = \int_{\mathcal{M}} \bar{N}^{LN} \Delta \bar{y}^{NL} dA$$

i otrzymujemy równanie odpowiadające zagadnieniu stateczności początkowej. Korzystanie z równania (5.16) jest utrudnione tym, że trzeba dodatkowo tworzyć macierz $[K_1]$. W związku z tym w pracach Ramma i in. [10,11] rozwiązywane są dwa przybliżone zagadnienia na wartości własne, zbudowane w oparciu o macierze $[K_E]$ i $[K_u]$ wchodzące w skład macierzy stycznej:

$$(5.18) \quad ([K_0] + [K_u] + \lambda [K_E]) \{\Delta q\} = \{0\}$$

$$([K_0] + \lambda ([K_u] + [K_E])) \{\Delta q\} = \{0\}$$

Wartości λ wyznaczone za pomocą tych równań mają tę cechę, że gdy stan przemieszczeń \bar{u} wyznaczony z analizy nieliniowej łączy do przemieszczeń odpowiadających punktowi granicznemu to rozwiązania obu tych równań są zbieżne do wartości obciążenia

krytycznego. Eksperymenty numeryczne wykazały, że pierwsze z równań daje wartości λ większe natomiast drugie równanie daje wartości mniejsze od wartości granicznej. Stąd różnica pomiędzy wartościami wyznaczonymi za pomocą tych równań może służyć do szacowania punktu granicznego.

Oprócz wymienionych powyżej sposobów wyznaczania punktów granicznych wykorzystanych w programach zbudowanych przez autora, stosuje się także inne omówione np. w przeglądowej pracy Waszczyszyna [76].

5.2. Zastosowanie koncepcji rozwinięć Fouriera do analizy konstrukcji.

Powłoki obrotowo-symetryczne poddane dowolnemu niesymetrycznemu obciążeniu można analizować wykorzystując reprezentacje funkcji obciążenia i przemieszczenia w postaci skończonych szeregów Fouriera w kierunku obwodowym powłoki. Metoda ta w zastosowaniu do zagadnienia stateczności początkowej omówiona została w rozdziale 4. W poniższym rozdziale wykorzystamy tę metodę do analizy stateczności, w której uwzględnia się deformację powłoki przed osiągnięciem stanu krytycznego.

W przypadku liniowego zagadnienia statycznego metoda ta prowadzi do dekompozycji zadania na zadania składowe przy czym w każdym z nich wyznacza się deformację w postaci pojedynczej harmoniki. Zadania składowe są jednowymiarowe dzięki czemu można je efektywnie rozwiązywać przy pomocy metody różnic skończonych /np. Budiansky i Radkowski [15] /, elementów skończonych /np. Wilson [78] / lub metod całkowania numerycznego /np. Kalnins [34] /. Powyższe podejście zostało także wykorzystane do rozwiązania zadania liniowego, w którym dodatkowo uwzględniono efekty termiczne i odkształcenia początkowe, patrz praca Ahmada i in. [29].

W niniejszej pracy dla liniowego zagadnienia statycznego rozwinięcia w szeregi Fouriera wykorzystano łącznie z metodą różnic skończonych w sformułowaniu energetycznym.

Zakres stosowania metody rozwinięć podstawowych wielkości w szeregi Fouriera można rozszerzyć na zagadnienia nieliniowe.

Koncepcja ta jest wykorzystywana głównie w zagadnieniach materiałowo nieliniowych /materiał plastyczny lub lepkoplastyczny/ przy założeniu małych ugięć np. prace Witmera i Kotanchika [80] , Winnickiego i Zienkiewicza [79] , Zienkiewicza i in. [86] .

Nieliczne są prace stosujące tę koncepcję do zagadnień geometrycznie nieliniowych np. prace dla powłok sprężystych: Balla i Ryana [7] oraz Balla [6] a także Greenbauma i Conroya [26] . W zagadnieniach dynamicznych, geometrycznie i materiałowo nieliniowych, podejście to stosowali Kleiber i Hien [37] oraz Hien [30] .

We wszystkich wymienionych powyżej pracach nieliniowy układ równań rozwiązywano stosując metodę początkowych obciążeń /metodę kolejnych przybliżeń/. Metoda ta ma tę zaletę, że wymaga tylko jednokrotnego odwrócenia macierzy sztywności sprężystej $[K_0]$ bowiem nieliniowość zagadnienia uwzględnia się za pomocą wektora początkowych obciążeń /wektora pseudo-sił/. Do określania tych obciążeń stosuje się dwie, podstawowe metody: początkowych naprężeń i początkowych odkształceń, patrz Zienkiewicz [85] . Metoda ta stosowana była w wielu pracach, nie zawsze wykorzystujących rozwinięcia w szeregi Fouriera, i znane są jej wady, takie jak np. nieprawidłowe rozwiązania dla zagadnień sprężysto-idealnie plastycznych oraz słaba zbieżność, por. Stricklin, Haisler [69] . Także testy przeprowadzone przez autora potwierdziły słabą zbieżność metody i dlatego ostatecznie do rozwiązania układu równań nieliniowych wykorzystano metodę Newtona-Raphsona.

Ponadto, metoda rozwinięć w szeregi Fouriera w zadaniach geometrycznie nieliniowych dla materiału liniowo sprężystego prowadzi do innego algorytmu niż dla materiału nieliniowego. W analizach materiałowo nieliniowych istnieje konieczność obliczania /po każdym przyroście obciążenia i iteracji/ naprężeń w punktach kontrolnych i aktualizowania lokalnych związków fizycznych, patrz np. Zienkiewicz i in. [86] . W konsekwencji do określenia początkowych obciążeń niezbędne jest obliczenie początkowych naprężeń w punktach kontrolnych a następnie przeprowadzenie analizy Fouriera w celu uproszczenia całkowania w

kierunku obwodowym. W analizie sprężystej etap ten jest zbędny. Ponieważ wszystkie wielkości są stałe lub są szeregami Fouriera w kierunku obwodowym więc wystarczy operować na współczynnikach odpowiednich szeregów by sprowadzić wielomiany trygonometryczne 3 i 4 stopnia do postaci sumy wielomianów 2-go stopnia, których całkowanie jest bardzo proste. W konsekwencji inaczej tworzy się podstawowe macierze i wektory zagadnienia; kwestia ta zostanie podjęta w punktach 5.3 i 5.4.

5.3. Tworzenie układu równań dla zadania liniowego

Poniżej zostaną opisane etapy otrzymywania z funkcjonu energii potencjalnej P , odpowiadającego liniowemu zagadnieniu statyki, równań algebraicznych wykorzystywanych do rozwiązania zadania na komputerze. Etapy te są konsekwencją przyjęcia reprezentacji Fouriera dla pola przemieszczeń i obciążeń oraz stosowania metody różnic skończonych w kierunku tworzącej powłoki.

Pierwszym etapem modyfikacji funkcjonu jest rozdzielnie zmiennych niezależnych przez przyjęcie następującej reprezentacji dla składowych przemieszczeń:

$$\begin{aligned}
 w(\varphi, x) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^l w_n(x) \cdot \cos n\varphi + \sum_{m=1}^k w_m(x) \cdot \sin m\varphi \\
 (5.19) \quad u(\varphi, x) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^l u_n(x) \cdot \sin n\varphi + \sum_{m=1}^k u_m(x) \cdot \cos m\varphi \\
 v(\varphi, x) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^l v_n(x) \cdot \cos n\varphi + \sum_{m=1}^k v_m(x) \cdot \sin m\varphi
 \end{aligned}$$

gdzie: φ, x - współrzędne: kątowa i południkowa
 l, k - liczba fal w kierunku obwodowym.

W analogiczny sposób przedstawimy składowe wektora obciążenia działającego na powierzchnię powłoki.

$$\begin{aligned}
 p_w(\varphi, x) &= p_w^0(x) + \sum_{n=1}^l p_w^n(x) \cdot \cos n\varphi + \sum_{m=1}^k p_w^m(x) \cdot \sin m\varphi \\
 (5.20) \quad p_u(\varphi, x) &= p_u^0(x) + \sum_{n=1}^l p_u^n(x) \cdot \sin n\varphi + \sum_{m=1}^k p_u^m(x) \cdot \cos m\varphi \\
 p_v(\varphi, x) &= p_v^0(x) + \sum_{n=1}^l p_v^n(x) \cdot \cos n\varphi + \sum_{m=1}^k p_v^m(x) \cdot \sin m\varphi
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcjonal energii potencjalnej jest formą kwadratową więc wykonanie całkowania względem φ prowadzi, ze względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ do dekompozycji funkcjonału P na funkcjonały składowe P_j związane z deformacją i obciążeniem w postaci pojedynczej harmoniki j .

$$(5.21) \quad P = \sum_{j=0}^i P_j \quad ; \quad i = l + k$$

W każdym $(i+1)$ zadań składowych, charakteryzowanych przez parametr j , dla obciążeń (p_w^j, p_u^j, p_v^j) należy określić (w_j, u_j, v_j) . W każdym z funkcjonałów składowych występują wielkości zależne wyłącznie od współrzędnej x ; w tym sensie problem sprowadzono do ciągu zadań jednowymiarowych.

Po wybraniu punktów węzłowych przydzielamy im wzajemnie rozłączne lecz pokrywające cały obszar przedziały całkowania. W otoczeniu każdego punktu węzłowego rozwijamy funkcje składowych przemieszczeń $w_j(x), u_j(x), v_j(x)$ w szereg Taylora i obliczamy ich pochodne. Niech $f(x)$ oznacza jedną z funkcji składowych przemieszczeń. Wtedy

$$\begin{aligned}
 (5.22) \quad f(x) &= f(x_0) + f_{,x}(x_0) \cdot s + f_{,xx}(x_0) \cdot s^2/2 \\
 f_{,x}(x) &= f_{,x}(x_0) + f_{,xx}(x_0) \cdot s \\
 f_{,xx}(x) &= f_{,xx}(x_0)
 \end{aligned}$$

przy czym x_0 - współrzędna punktu węzłowego, $s = x - x_0$

Po podstawieniu powyższych wielkości do funkcyjonałów energii wykonujemy całkowanie względem x , w przedziałach przypisanych punktom węzłowym. Aproksymację szeregiem Taylora wykonano w celu zmniejszenia wrażliwości zadania na sposób przydzielania obszaru całkowania.

Ostatnim etapem przekształcania funkcyjonałów P_j jest dyskretyzacja różnicowa. Polega ona na zastąpieniu pochodnych występujących w funkcyjonałach operatorami różnicowymi zbudowanymi w oparciu o wartości funkcji w węzłach siatki. Sposób tworzenia operatorów różnicowych opisano w punkcie 5.5.

Po przeprowadzeniu opisanych powyżej etapów otrzymuje się $(i+1)$ zdyskretyzowanych funkcyjonałów P_j , które związane są z deformacją i obciążeniem w postaci j -tej harmoniki. P_j są funkcjami kwadratowymi względem wektora przemieszczeń w punktach węzłowych.

Poszukując minimum energii potencjalnej, zapisujemy następujące warunki:

$$(5.23) \quad \frac{\partial P_j}{\partial q_{jz}} = 0 \quad ; \quad j=0, \dots, i \quad z=1, \dots, 3r$$

przy czym

- q_{jz} - składowa przemieszczenia odpowiadająca j -tej harmonice w punkcie węzłowym;
- i - liczba wyrazów rozwinięcia w szereg Fouriera;
- r - liczba punktów węzłowych.

W rezultacie układ równań (5.5) dekomponuje się na $(i+1)$ układów zawierających $3r$ liniowych równań algebraicznych. Każdy z tych układów można zapisać w postaci

$$(5.24) \quad [K_o]_j \{q\}_j = \{p\}_j$$

gdzie $[K_o]_j$ - macierz sztywności sprężystej

$\{q\}_j$ - wektor składowych przemieszczeń

$\{p\}_j$ - wektor składowych obciążeń.

Po rozwiązaniu wszystkich układów równań wartości przemieszczeń w dowolnych punktach powłoki określamy stosując superpozycję, zgodnie z reprezentacją (5.19). W analogiczny sposób określamy wartości sił i momentów przekrojowych.

5.4. Tworzenie układu równań dla zadania nieliniowego

Zastosowanie rozwinięć w szeregi Fouriera w zadaniu nieliniowym nie prowadzi do jego dekompozycji na zadania składowe, jak to miało miejsce w przypadku liniowym. Powodem jest to, że funkcjonal przyrostu energii potencjalnej, po rozwinięciu przyrostów przemieszczeń i przemieszczeń w szeregi Fouriera, nie jest wielomianem trygonometrycznym drugiego stopnia. Tylko człony odpowiadające macierzy sztywności sprężystej $[K_0]$ są 2-go stopnia, natomiast człony odpowiadające pozostałym macierzom są wyższych stopni: 4-go stopnia człony odpowiadające macierzy początkowych przemieszczeń $[K_u]$ oraz 4-go stopnia te, z których tworzona jest macierz początkowych naprężeń $[K_\epsilon]$.

Ponieważ tworzenie macierzy $[K_0]$ zostało już omówione w poprzednim punkcie poniżej zajmiemy się wyłącznie macierzami $[K_u]$ i $[K_\epsilon]$. Przekształcając człony przyrostu energii potencjalnej odpowiadające tym macierzom do postaci algebraicznej należy przeprowadzić etapy, które opisano dla zadania liniowego. W tym punkcie pracy charakteryzujemy operacje, które związane są z rozwinięciami w szeregi Fouriera przenosząc kwestie związane ze stosowaniem metody różnic skończonych do punktu 5.5.

Przyjmijmy dla wektora przemieszczeń i wektora przyrostu przemieszczeń reprezentacje Fouriera analogiczne do reprezentacji (5.19). Tworzenie macierzy przemieszczeń i naprężeń początkowych wymaga mnożenia 3 lub 4 szeregów trygonometrycznych a następnie całkowania otrzymanych wyrażeń w kierunku obwodowym / po zmiennej φ /.

Etap wstępny stanowi obliczenie wyrażeń tworzonych na podstawie wektora przemieszczeń \tilde{u} , którego wartość została wyznaczona w poprzednich krokach obliczeń. W tym etapie oblicza się wartość sił błonowych \tilde{N} oraz pewne człony w wyrażeniach

$\Delta \tilde{N}^0 \cdot \delta(\Delta \tilde{y}^L)$, $\Delta \tilde{N}^L \cdot \delta(\Delta \tilde{y}^0)$, $\Delta \tilde{N}^L \cdot \delta(\Delta \tilde{y}^L)$,
 patrz wzór (5.4). Wykonanie powyższego wymaga m.in. mnożenia
 2 szeregów co sprowadza się do wykorzystania tożsamości trygo-
 nometrycznych typu

$$(5.25) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

i wykonywania operacji wyłącznie na współczynnikach szeregów.
 Po zakończeniu tego etapu wszystkie obliczane wielkości wyra-
 żone są w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych.

Następny etap stanowi obliczenie wariacji względem wektora przyrostu przemieszczeń i wykonanie całkowania w kierunku obwodowym. Niech indeksy y, n oznaczają harmoniki odpowiadające przyrostowi wektora przemieszczeń $\Delta \tilde{u}$, przy czym y to numer harmoniki po której obliczamy wariację przyrostu energii potencjalnej. Indeks i oznacza harmonikę dla rozwinięcia wektora przemieszczeń \tilde{u} . Przez t_k oznaczymy jedną z funkcji trygonometrycznych /sinus lub cosinus/ dla argumentu $k\varphi$.

Dowolny człon A_y , występujący w funkcjonale energii po obliczeniu wariacji względem harmoniki y dla punktu x , można przedstawić w postaci

$$(5.26) \quad A_y = a \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\sum_{i=0}^N t_i b_i \right) \cdot t_y \left(\sum_{n=0}^N t_n \Delta q_n \right) \right\} r d\varphi$$

gdzie

- a to mnożnik /stały względem φ / związany z metodą różnic skończonych /operatory różnicowe lub delty Kroneckera/ i całkowaniem po tworzącej;
- b_i to wielkości utworzone ze znanego wektora przemieszczeń \tilde{u} oraz parametrów geometrycznych i materiałowych powłoki;

t_y to rezultat obliczenia wariacji względem $y\varphi$ dla punktu x ;

$$q_n \equiv \{w_n, u_n, v_n\}$$

Mnożenie powyższych szeregów i całkowanie w kierunku obwodowym wiąże się z obliczaniem całek typu:

$$(5.27) \quad C = \int_0^{2\pi} t_i \cdot t_y \cdot t_n \cdot d\varphi$$

gdzie $i, y, n = 0, \dots, N$

W celu uniknięcia wykonywania operacji na wielkościach zerowych należy wyznaczyć kombinacje indeksów i, y, n dla których całka C jest niezerowa. Jeśli przemnożyć $t_i \cdot t_y$ /wykorzystując relacje typu (5.25) / i uwzględnić ortogonalność funkcji trygonometrycznych to otrzymuje się następujący warunek logiczny:

$$(5.28) \quad i + y = n \quad \vee \quad |i - y| = n$$

Dla ustalonych indeksów y, n do niezerowych C prowadzą tylko te wartości indeksu i , które spełniają powyższy warunek. Tylko wtedy obliczane są iloczyny odpowiednich współczynników szeregów we wzorze (5.26) stanowiące mnożniki całek C .

Przeprowadzenie etapów związanych ze stosowaniem rozwinięć w szeregi Fouriera doprowadza wyrażenie A_y do postaci

$$(5.29) \quad A_y = \sum_{n=0}^N A_{yn} \cdot \Delta q_n$$

Wszystkie współczynniki A_{yn} są w ogólnym przypadku niezerowe, pomimo że wariacja była obliczana względem harmoniki y . Oznacza to, że macierz sztywności zbudowana z wyrażeń typu A_y na pewno nie będzie jednopasmowa /co miało miejsce w zadaniu liniowym/.

Opisane powyżej operacje pomijały zupełnie fakt, że współczynniki rozwinięć Fouriera są funkcjami współrzędnej w kie-

runku tworzącej powłoki. Stosując metodę różnic skończonych funkcje te zastąpimy ich dyskretnymi reprezentacjami w wybranych punktach. W porównaniu z zadaniem liniowym zastosowano nieco prostszy wariant postępowania. A mianowicie, zamiast aproksymować funkcje przemieszczeń i przyrostów przemieszczeń szeregiem Taylora (5.22) w otoczeniu punktu węzłowego przyjęto następujące relacje:

$$(5.30) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) \\ f_{,x}(x) &= f_{,x}(x_0) \\ f_{,xx}(x) &= f_{,xx}(x_0) \end{aligned}$$

gdzie $f(x)$ oznacza jedną z funkcji składowych przemieszczeń lub przyrostów przemieszczeń a x_0 to współrzędna punktu węzłowego. Wariant ten jest powszechnie stosowanym wariantem postępowania, np. patrz Bushnell i in. [18,20].

Sposób tworzenia operatorów różnicowych jest identyczny jak dla zadania liniowego i będzie opisany w punkcie 5.5.

Proces tworzenia globalnej macierzy sztywności rozpoczynamy od obliczenia dla każdego punktu węzłowego wyrażeń zależnych od \tilde{u}_i^* . W rezultacie dla każdego punktu dysponujemy wyrażeniami w postaci szeregów o znanych współczynnikach /harmoniki z indeksem $i/$. Następnie tworzymy podmacierze. Niech dowolna podmacierz będzie identyfikowana parą indeksów (y, n) , gdzie y oznacza harmonikę względem której oblicza się wariancję a n to dowolna harmonika $n = 0, \dots, N$. Podmacierz (y, n) tworzymy analogicznie jak podmacierz $[K_0]_i$ w zadaniu liniowym, przedtem jednak określając wartości indeksu i /warunek (5.28) /, które zapewniają niezerowość całek typu C , wzór (5.27). Wykorzystuje się przy tym cechy metod różnicowych opisane w punkcie 5.5. W rezultacie zastosowania metody różnic skończonych otrzymana podmacierz ma budowę pasmową. Macierz globalna utworzona przez złożenie podmacierzy jest macierzą wielopasmową.

Wielopasmowość macierzy sztywności będąca skutkiem stosowania rozwinięć w szeregi Fouriera łącznie z metodą różnic skończonych stwarza pewne wymagania odnośnie metod rozwiązania

układu równań. W przypadku zadań z dużą liczbą węzłów różnicowych wzrasta procent elementów zerowych macierzy i wtedy niezbędne jest stosowanie algorytmów przechowujących i wykonujących operacje tylko na elementach niezerowych np. algorytmu metody frontальной Szmeltera i Kurowskiego [71] lub algorytmu dla macierzy rzadkich Georgea, Liu [28].

5.5. Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych została wykorzystana w niniejszej pracy jako uzupełnienie metody rozwinięć w skończone szeregi Fouriera. Ponieważ metoda ta jest szczególnie dogodna w przypadkach jednowymiarowych dyskretyzacji /por. np. Orkisz i Waszczyszyn [58] / dlatego połączenie jej z metodą rozwinięć stwarza możliwość tworzenia bardzo efektywnych algorytmów.

Poniżej omówiono sposób tworzenia operatorów różnicowych i oceny poprawności modeli różnicowych a także konsekwencje stosowania metody różnic dla procesu tworzenia układu równań.

Do tworzenia operatorów różnicowych wybrano metodę opartą o warunek minimum błędu patrz np. Liszka i Orkisz [48], Orkisz [57].

Poniżej podano postać tego warunku. Załóżmy, że funkcja przemieszczeń $f(x)$ w otoczeniu punktu węzłowego „0” jest odpowiednio gładka, tak by można ją było rozwinąć w szereg Taylora. Niech „i” będzie punktem sąsiednim punktu „0”. Każdemu „i” przypisuje się kwadrat błędu rozwinięcia B_i i wagę τ_i

$$(5.31) \quad \begin{aligned} B_i &= [f_i - (f_0 + f_{0,x} \cdot s_i + f_{0,xx} \cdot s_i^2/2)]^2 \\ \tau_i &= s_i^{-3} \quad ; \quad s_i = x_i - x_0 \end{aligned}$$

Ważony kwadrat błędu rozwinięcia dla wszystkich punktów sąsiednich jest równy:

$$(5.32) \quad B = \sum_{i=1}^2 B_i \cdot \tau_i$$

Warunek minimum tego błędu względem $f_{0,x}$ i $f_{0,xx}$ dostarcza postaci operatorów różnicowych w punkcie „0”.

aryterium powyższe przy regularnym rozkładzie punktów i we wnętrzu obszaru prowadzi, w przypadku jednowymiarowym, do klasycznej postaci operatorów różnicowych. Natomiast dla punktów brzegowych postać klasyczną otrzymamy przy pewnej zmianie postępowania, określając najpierw $f_{0,x}$, a dopiero później $f_{0,xx}$. W pierwszym etapie pomijamy człon kwadratowy w (5.31) rozwijając $f(x)$ tylko do najbliższego punktu i wykorzystujemy warunek minimum względem $f_{0,x}$. W drugim etapie stosujemy pełną postać (5.31) rozwijamy $f(x)$ do obydwu punktów, a następnie minimalizujemy B względem $f_{0,xx}$, przy czym pierwsza pochodna wykorzystana jest w postaci różnicowej.

Cechą charakterystyczną metod różnicowych jest, że rezultaty analiz mogą być w dużym stopniu determinowane przez sposób dyskretyzacji. Wrażliwość na cechy modelu różnicowego głównie przejawia się w problemach, które prowadzą do zagadnień na wartości własne takich jak np. zagadnienie stateczności posążkowej lub drgań swobodnych. Z tego względu rozwiązanie tych zagadnień może stanowić formę sprawdzenia poprawności modelu różnicowego.

W celu określenia wpływu postaci operatorów różnicowych oraz liczby i rozmieszczenia punktów węzłowych na rezultaty analizy rozwiązano problem drgań swobodnych powłoki cylindrycznej. Analizę tę sformułowano w ten sposób, że dla założonej postaci drgań w kierunku obwodowym /n-ta harmonika/ wyznacza się najmniejszą częstotliwość własną oraz odpowiadający wektor własny /w kierunku tworzącej/. Dyskretyzacja opierała się na rozwinięciach w szereg Taylora /punkt 5.3/ i opisanym powyżej "posobie tworzenia operatorów. Analizowano drgania w postaci kilku pierwszych harmonik dla powłoki o swobodnej górnej krawędzi i przegubowym podparciu dolnej krawędzi, o stałej lub skokowo zmiennej grubości /dane jak dla przykładu 5.1/. Podstawy teoretyczne i rezultaty tych analiz zamieszczono w pracy autora [81].

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można sformułować kilka uwag.

Tworząc operator różnicowy na brzegu bez użycia punktów fikcyjnych unikamy pojawienia się dodatkowej, błędnej częstotliwości własnej. Jednak nie zabezpiecza to przed skokową zmianą wektora

własnego w strefie brzegowej.

Wektor własny dla powłoki o zmiennej grubości zachowuje się skokowo także w obszarach zmian sztywności oznacza to, że sprzężenie punktów sąsiednich wprowadzone przez rozwinięcia Taylora nie jest tak skuteczne jak siatki zmodyfikowane opisane przez Bushnella [18].

Czynnikiem mającym istotny wpływ na zachowanie gładkiego charakteru wektora własnego i na najniższą częstość własną jest rozkład punktów węzłowych. Korzystniej jest wyodrębnić fikcyjne podobszary powłoki i stosować w nich równomierne rozkłady o różnych gęstościach niż w ramach jednego obszaru zmieniać zagęszczenie punktów. Wiąże się to z różnicą w sposobie tworzenia operatorów na fikcyjnym brzegu i we wnętrzu obszaru.

Niekorzystne są także duże zmiany gęstości siatki. Potwierdza to przykład, w którym w trzech podobszarach powłoki zadano siatki o różnych gęstościach przy czym maksymalna do minimalnej była jak 12:1. Podobszary zagęszczone utworzono w pobliżu obu brzegów powłoki. Częstości otrzymane w oparciu o tę siatkę są w przybliżeniu o połowę mniejsze od wyników poprawnych otrzymanych dla regularnej siatki. Także postać wektora własnego charakteryzuje się znacznymi skokami wartości w miejscach zmian gęstości siatki.

Powyższe stwierdzenia skłoniły autora by w problemie stateczności początkowej zastosować nieco inny sposób tworzenia operatorów różnicowych, który daje lepsze rezultaty w zagadnieniach na wartości własne. Model różnicowy użyty w tym przypadku opisany został w punkcie 4.2. Natomiast w problemie analizy statycznej /liniowej i nieliniowej/ bazowano na sposobie tworzenia operatorów opisanym powyżej dodatkowo pomijając w analizie nieliniowej rozwinięcia w szeregi Taylora.

Budując podmacierze sztywności zagadnienia liniowego lub nieliniowego należy uwzględnić specyficzne cechy problemu wynikające ze sformułowania różnicowego. Wszystkie podane niżej uwagi będą dotyczyć funkcjonałów w postaci zdyskretyzowanej, zapisanych jako funkcje składowych wektora przemieszczeń w węzłach siatki.

Jedną z cech specyficznych sformułowania różnicowego jest

występowanie każdej dyskretnej niewiadomej tylko w pewnej liczbie wyrażań na energię w poszczególnych punktach. Uwzględnienie lokalności niewiadomej ma szczególne znaczenie dla czasochłonnego procesu generowania macierzy sztywności. W wyniku wykorzystania tej cechy tworzone są wyłącznie elementy nieregularnego paśma macierzy.

Zdefiniujemy zbiór T_i punktów wykorzystywanych przy budowie operatora różnicowego w punkcie "i"

$$(5.33) \quad T_i = \{ j ; df_i = g(\dots, f_j, \dots) \}$$

gdzie

f_j - składowa wektora przemieszczeń przypisanego punktowi "j" ;

df_i - operator różnicowy w punkcie "i" ;

g - funkcja liniowa względem f_j .

Każdy punkt węzłowy „k” jest używany do tworzenia operatorów różnicowych tylko w pewnej liczbie punktów zbioru R_k

$$(5.34) \quad R_k = \{ j ; k \in T_j \}$$

We wnętrzu obszaru R_k i T_k dla punktu „k” są identyczne. Dla punktów strefy brzegowej można podać relację między tymi zbiorami w oparciu o kryterium modyfikowania T_k w tej strefie. Obliczając pochodną funkcjonału energii potencjalnej P względem niewiadomej przypisanej punktowi „k” sumowanie po wszystkich punktach zastępowane jest sumowaniem po punktach należących do R_k

$$(5.35) \quad \frac{\partial P}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial P_j}{\partial q_k}$$

$i=1, \dots, r \quad j \in R_k$

gdzie

P_i - oznacza energię otrzymaną przez całkowanie w obszarze przypisanym punktowi „i”

r - liczba punktów modelu dyskretnego.

Ograniczenie postępowania, przy tworzeniu równania odpowiadającego punktom R_k jest konsekwencją lokalności występowania niewiadomej q_k w dyskretnej funkcji energii P .

Wzrost z cech charakterystycznych metody różnic skończonych są problemy związane z uwzględnieniem warunków brzegowych nałożonych na obroty tzn. warunków na pochodne składowych przemieszczeń. Warunki te są szczególnie kłopotliwe w zadaniach wielowymiarowych, gdzie zachodzi konieczność rozwiązywania dodatkowego układu równań oraz podania kryterium wyboru niewiadomych eliminowanych. W przypadkach jednowymiarowych zagadnienie uwzględniania tych warunków wiąże się z problemem sposobu generowania operatorów różnicowych na brzegu i zmianami w budowie układu równań. Założmy, że postać warunku brzegowego jest następująca

$$(5.36) \quad q_l = h(\dots, q_k, \dots)$$

gdzie:

- q_l - niewiadoma przypisana punktowi „l”
- q_k - niewiadoma przypisana punktowi „k”
- h - operator liniowy.

Przy obliczaniu pochodnej energii względem q_k trzeba wziąć pod uwagę punkty nie należące do R_k , których wyrażenia na energię zawierają q_k . Są to punkty należące do R_l .

$$(5.37) \quad \frac{\partial P}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial P_j}{\partial q_k} + \sum_m \frac{\partial P_m}{\partial q_k}$$

$j \in R_k, m \in R_l$

przy czym

$$(5.38) \quad \sum_m \frac{\partial P_m}{\partial q_k} = \frac{\partial h}{\partial q_k} \sum_m \frac{\partial P_m}{\partial q_l}$$

Ostateczna postać równania przypisanego q_k jest kombinacją liniową :

$$(5.39) \quad r(q_k) + \frac{\partial h}{\partial q_k} r(q_i) = 0$$

gdzie: $r(q_k), r(q_i)$ są równaniami przypisanymi q_k i q_i bez uwzględniania warunków brzegowych.

Poniżej podamy jednowymiarowy przykład ilustrujący powyższe stwierdzenia.

Wyberzmy ciąg punktów węzłowych $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ przy czym punkt $\{1\}$ jest punktem brzegowym. Niech zbiory $T_i, i=1, 2, 3, 4$, związane ze sposobem tworzenia operatora różnicowego, będą następujące:

$$(5.40) \quad \begin{aligned} T_1 &= \{1, 2, 3\} & , & & T_2 &= \{1, 2, 3\} \\ T_3 &= \{2, 3, 4\} & , & & T_4 &= \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Dla powyższych T_i określmy zbiory R_i zgodnie z definicją (5.34).

$$(5.41) \quad \begin{aligned} R_1 &= \{1, 2\} & , & & R_2 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ R_3 &= \{1, 2, 3, 4\} & , & & R_4 &= \{3, 4, 5\} \end{aligned}$$

co pozwala zapisać wyrażenia na pochodne energii potencjalnej w przypadku bez warunków brzegowych.

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} (P_1 + P_2) \\ \frac{\partial P}{\partial q_2} &= \frac{\partial}{\partial q_2} (P_1 + P_2 + P_3) \\ \frac{\partial P}{\partial q_3} &= \frac{\partial}{\partial q_3} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \\ \frac{\partial P}{\partial q_4} &= \frac{\partial}{\partial q_4} (P_3 + P_4 + P_5) \end{aligned}$$

Załóżmy, że należy uwzględnić warunek brzegowy w dyskretnej postaci

$$(5.43) \quad q_3 = h(q_2)$$

Wtedy pochodna po q_2 ulegnie zmianie

$$(5.44) \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial q_2} = \frac{\partial P}{\partial q_2} + \frac{dh}{dq_2} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_3}$$

czyli równanie dla q_2 tworzymy w sposób następujący:

$$(5.45) \quad r(q_2) + \frac{dh}{dq_2} \cdot r(q_3) = 0$$

Pozostałe równania pozostają bez zmian.

Punkty $\{1, 2, 3\}$ tworzą strefę brzegową, której zasięg został zdeterminowany typem warunku brzegowego oraz postacią operatora różnicowego w punkcie $\{1\}$. Punkt $\{4\}$ jest punktem wnętrza, w którym czynniki powyższe nie uwidaczniają się.

Reasumując można stwierdzić, że w strefie brzegowej komplikują się procesy tworzenia operatora różnicowego i generowania układu równań i jest to cechą nieodłączną metody różnic skończonych.

5.6. Przykłady numeryczne

W oparciu o metodę rozwinięć w szeregi Fouriera i metodę różnic skończonych zbudowane programy numeryczne do przeprowadzania liniowej i nieliniowej analizy statycznej a także do rozwiązywania zadania na wartości własne odpowiadającego równaniom stateczności. Programy napisano w języku FORTRAN i uruchomiono na maszynie ODRA 1305.

Przykład 5.1.

Wykorzystując opisaną metodę oraz równania liniowej teorii powłok Sandersa-Koitera /równania podano w punkcie 2.5a/ przygotowano program do przeprowadzania liniowej analizy statycznej. Przy pomocy tego programu generowano między innymi stan porównawczy sił błonowych niezbędny w analizie stateczności początkowej /rozdział 4/.

Obecnie zaprezentujemy rezultaty obliczeń dla powłoki cylindrycznej o osi pionowej, która ma znaczenie w projektowaniu zbiorników na ciecze. W celach porównawczych obliczenia prze-

przewodzone dla dwóch modeli tej powłoki:

- a/ o grubości skokowo zmiennej, zgodnej z rzeczywistą geometrią
 b/ o stałej grubości zastępczej, obliczonej jako średnia grubość pasów.

Powłokę zastępczą stosuje się zwykle wtedy gdy wykorzystywane są równania teorii błonowej, z warunkami brzegowymi B lub D wg tablicy 5.1, patrz np. praca Baczyńskiego i Janasa [5].

W niniejszym rozdziale dokonamy oceny skutków posługiwania się modelem zastępczym porównując podstawowe rezultaty analizy statycznej otrzymane dla tych dwóch modeli.

Tablica 5.1. Warunki brzegowe wykorzystywane w obliczeniach powłok cylindrycznych.

	A	B	C	D
GÓRNY BRZEG $x = L$	$N_{xx} = N_{\varphi x} = 0$	$N_{xx} = N_{\varphi x} = 0$	$N_{xx} = N_{\varphi x} = 0$	$N_{xx} = 0$ $\int_0^{2\pi} N_{\varphi x} \cdot \sin \varphi \, d\varphi = 0$ $u = e \cdot \sin \varphi ; e = \text{const}$
DOLNY BRZEG $x = 0$	$w = u = v = 0$	$u = v = 0$	$w = u = v = 0$ $\beta_x = 0$	$u = v = 0$

Podstawowe wielkości geometryczne /patrz rys.5.1/ i dane materiałowe dla analizowanej powłoki są następujące:

$$r = 4300 \text{ [cm]}, l = 2000 \text{ [cm]}, d = 200 \text{ [cm]}$$

$$h_1 = 3.2 \text{ [cm]}, h_2 = 2.9 \text{ [cm]}, h_3 = 2.5 \text{ [cm]}$$

$$h_4 = 2.2 \text{ [cm]}, h_5 = 1.9 \text{ [cm]}, h_6 = 1.6 \text{ [cm]}$$

$$h_7 = h_8 = 1.5 \text{ [cm]}, h_9 = 1.2 \text{ [cm]}, h_{10} = 1.0 \text{ [cm]}$$

$$h_{3r} = 1.95 \text{ [cm]}$$

$$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ [kg/cm}^2\text{]}, \quad \nu = 0.3$$

gdzie: E - moduł Younga, ν - współczynnik Poissona.
 Obciążenie parciem wiatru przyjęto wg Polskiej Normy [60]
 w postaci:

$$(5.46) \quad p(\varphi, x) = p_0 \cdot C(\varphi), \quad C(\varphi) = \sum_{n=0}^6 c_n \cos n\varphi$$

gdzie:

$C(\varphi)$ - jest współczynnikiem aerodynamicznym ciśnienia, uwzględniającym także ssanie wewnętrzne w przypadku powłok otwartych od góry. W obliczeniach przykładowych ssanie pominięto. Wartości tego współczynnika dla proporcji analizowanej powłoki podano na rys.5.3, na którym kąt φ jest odmierzany od płaszczyzny symetrii obciążenia.

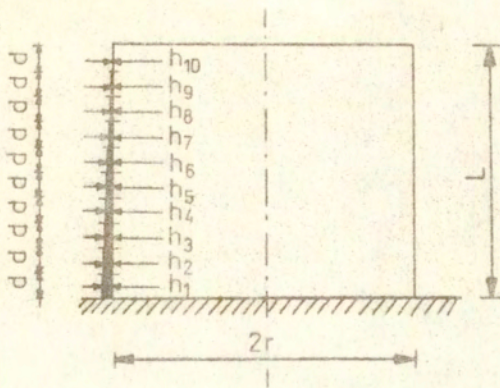
p_0 - jest pewnym globalnym współczynnikiem uwzględniającym między innymi dynamiczny charakter działania wiatru. Współczynnik ten jest uzależniony od podatności powłoki na dynamiczne działanie wiatru i związany jest z częstością drgań swobodnych.

W obliczeniach przyjęto wartość $p_0 = 1.0$.

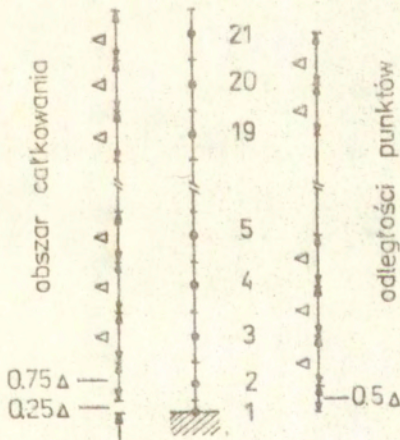
W związku z postacią obciążenia (5.46) reprezentację dla składowych wektora przemieszczeń (5.19) ograniczono do wyrazów zerowych i członów odpowiadających sumowaniu po n .

Schemat obliczeniowy uwzględniający sformułowanie różnicowe pokazany jest na rys.5.2, przy czym granice obszaru całkowania przydzielanego punktowi są wyznaczone przez środki odcinków łączących węzeł z punktami sąsiednimi. Warunkiem uzupełniającym jest żądanie, żeby w każdym obszarze całkowania grubość powłoki była stała, co jest istotne w przypadku analizowania powłok o skokowo zmiennej grubości. Zasada ta jest spełniona, dla pasów o równej szerokości, gdy punkty węzłowe rozmieszcza się równomiernie, z dodatkowym punktem na dolnej krawędzi powłoki.

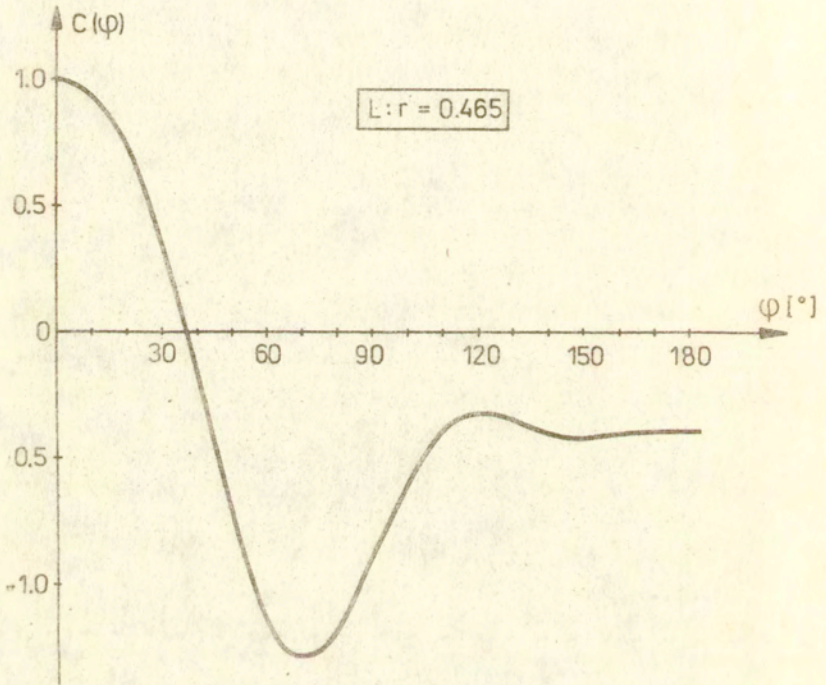
Obliczenia wykonano dla modelu składającego się z 21 punktów, z różnymi warunkami podparcia dolnej krawędzi i ze swobodnym górnym brzegiem.



Rys.5.1. Geometria zbiornika.



Rys.5.2. Schemat obliczeniowy: numeracja punktów i przydział obszarów całkowania.

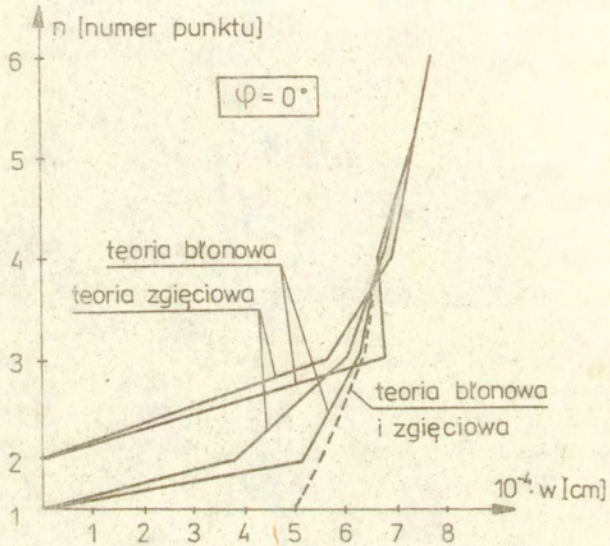


Rys.5.3. Współczynnik aerodynamiczny ciśnienia.

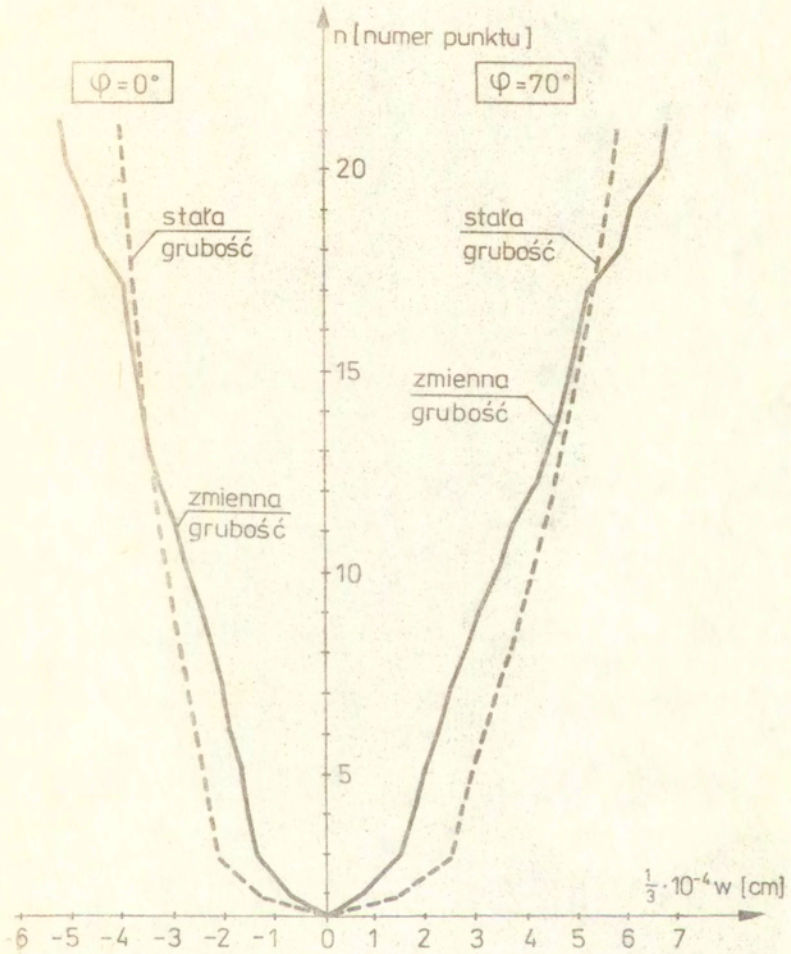
Otrzymane wyniki dla powłoki z warunkami brzegowymi A, obrazujące wpływ rodzaju modelu na stan przemieszczeń, przedstawione zostały na rys. 5.5, 5.6, 5.7 i 5.8. Rys. 5.5 uwidacznia związek składowej normalnej W wektora przemieszczenia z rozkładem grubości po wysokości powłoki. Rysunek ten pokazuje składową normalną w dwóch charakterystycznych przekrojach, w których składowa ta osiąga najmniejszą i największą wartość. W obu przekrojach przemieszczenia na górnej krawędzi powłoki są większe w przypadku powłoki o zmiennej grubości, natomiast w strefie sześciu dolnych pasów większa jest wartość przemieszczeń powłoki o stałej grubości. Łamany charakter wykresu dla powłoki o zmiennej grubości, spowodowany przez znaczne różnice w przemieszczeniach punktów należących do różnych pasów, jest efektem skokowej zmiany grubości pasów. Wyniki uzyskane dla modelu zastępczego odbiegają w sposób istotny od wyników dla modelu o zmiennej grubości: maksymalna różnica dla przekroju $\varphi = 0^\circ$ wynosi 23% a dla przekroju $\varphi = 70^\circ$ jest rzędu 14%. Stąd wniosek, że ocena stanu przemieszczeń w oparciu o model zastępczy nie może być dokonana w sposób adekwatny. Pomijamy przy tym kwestię, że powłokę zastępczą analizuje się zazwyczaj w oparciu o teorię błonową co jest powodem dodatkowych błędów. Uzupełniające porównanie stanu przemieszczeń umożliwiając rysunki 5.6, 5.7, 5.8 pokazujące poszczególne składowe wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi powłoki.

Wykonano także, dla powłoki o stałej grubości, analizę porównawczą mającą określić wpływ stosowanej teorii powłok /błonowa lub zgięciowa/ oraz warunków brzegowych /A lub B lub C/ na przemieszczenia powłoki. W oparciu o tę analizę można stwierdzić, że różnice w przemieszczeniach obliczonych wg różnych teorii powłok występują tylko w strefie brzegowej obejmującej dwa dolne pasy, patrz rys. 5.4. Powyżej tej strefy rezultaty bez względu na zastosowaną teorię powłok i sposób podparcia są identyczne.

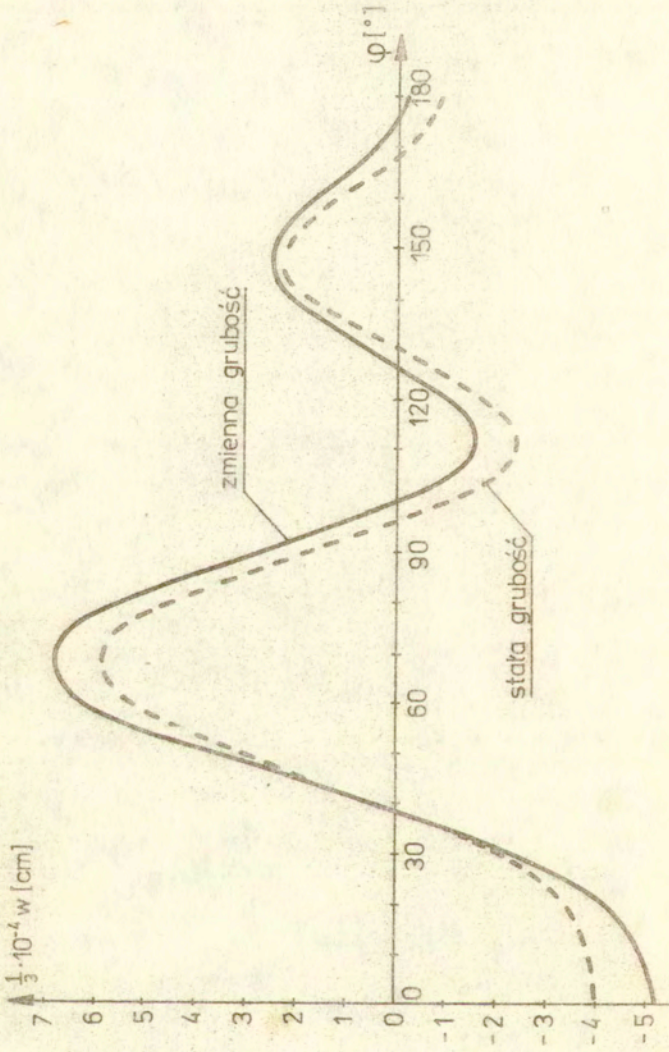
Dla powłoki o stałej grubości i warunkach brzegowych A na rys. 5.9 pokazano rozkład sił błonowych dla przekroju w połowie wysokości powłoki. Zwraca uwagę fakt, że N_φ i N_x mają w przybliżeniu w tym samym miejscu, $\varphi = 37^\circ$, punkt serowy.



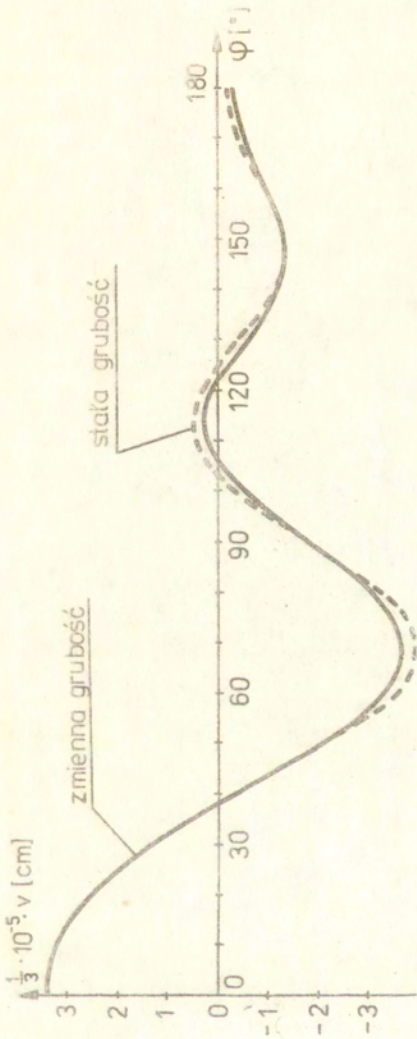
Rys.5.4. Składowa w w strefie brzegowej przy różnych sposobach podparcia dolnej krawędzi. Powłoka o stałej grubości.



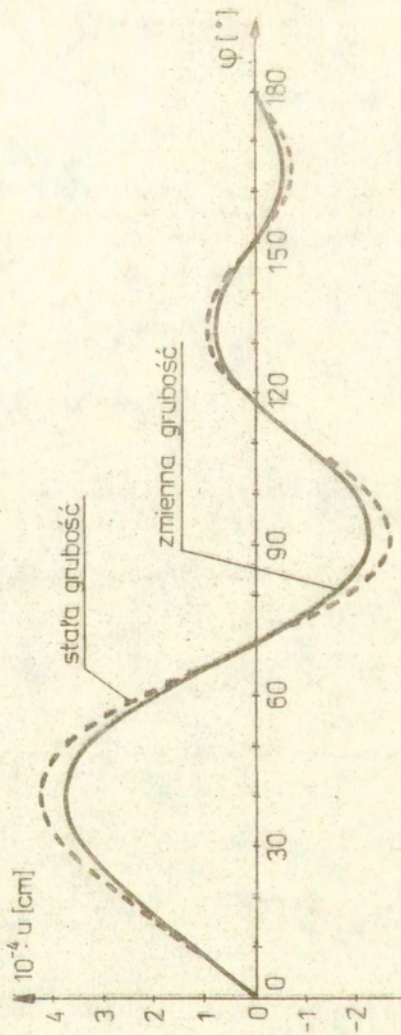
Rys.5.5. Składowa w wektora przemieszczeń dla tworzących $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 70^\circ$.



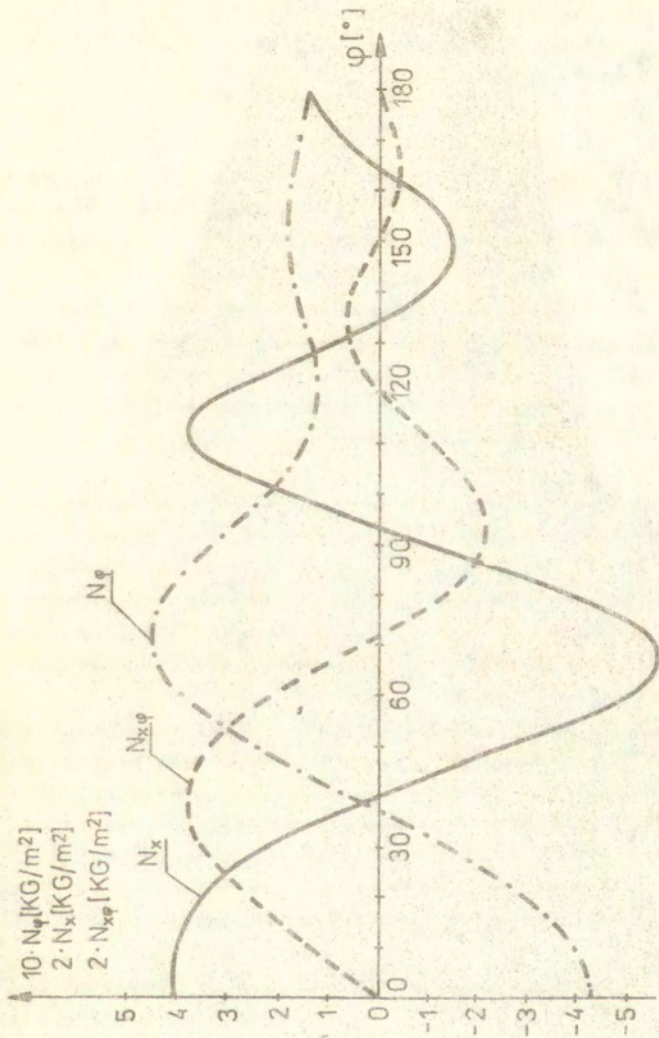
Rys. 5.6. Składowa w wektora przemieszczeń górnej krewędzi.



Rys.5.7. Składowa v wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi.



Bya.5.8. Składce u wektora przemieszczeń dla górnej krawędzi.



Rys. 5.9. Rozkład sił błonowych w połowie wysokości powłoki o stałej grubości, z warunkami brzegowymi A. + oznacza rozciąganie.

Obszar od 0° do 37° tworzy strefę czołową, która ze względu na ściskające siły obwodowe N_φ , jest narażona na utratę stateczności. Najbardziej jest zagrożona górna część tej strefy bo siły N_x , rozciągające wzdłuż całej wysokości, osiągają na górnej krawędzi wartość zerową.

Przykład 5.2.

Poniższy przykład ma na celu przetestowanie programów do geometrycznie nieliniowej analizy i do rozwiązania uzupełniającego zadania na wartości własne (5.18b). Programy te bazują na wariancie równań wg teorii powłok Donnella /patrz punkt 2.5C/.

W celu dokonania oceny programów obliczono powłokę, która była już analizowana w przykładzie 4.1. Jest to powłoka cylindryczna otwarta od góry, o stałej grubości, ze swobodną górną a utwierdzoną dolną krawędzią. Dane geometryczne i materiałowe a także postać obciążenia są takie jak poprzednio.

W związku z postacią obciążenia /szereg cosinusów/ reprezentację dla składowych wektora przemieszczeń i przyrostów przemieszczeń ograniczono do wyrazów zerowych i członów odpowiadających sumowaniu po n (wzór (5.19)). Schemat obliczeniowy uwzględniający sformułowanie różnicowe jest pokazany na rys.5.2. Obliczenia przeprowadzono dla 10 pierwszych harmonik oraz modelu różnicowego składającego się z 5 punktów. Daje to zadanie zawierające 150 niewiadomych.

Początkową wartość przyrostu obciążenia ustalono na poziomie około 0.02 wartości eksperymentalnej i była ona zmniejszona, w przypadku osiągnięcia liczby 10 iteracji na 1 przyrost, do 20% wartości poprzedniej. Natomiast proces iteracyjnego poprawiania rozwiązania był przerywany gdy zmiana wartości składowej w /obliczanej w 19 kontrolnych punktach na górnej krawędzi powłoki/ była mniejsza od 0.001 największej wartości w w pierwszej iteracji.

Analizę nieliniową prowadzono do osiągnięcia wartości obciążenia równej 1.125 a następnie, rozwiązując uzupełniające zadanie na wartości własne

$$(5.47) \quad ([K_0] + \lambda ([K_E] + [K_u])) \{\Delta q\} = \{0\}$$

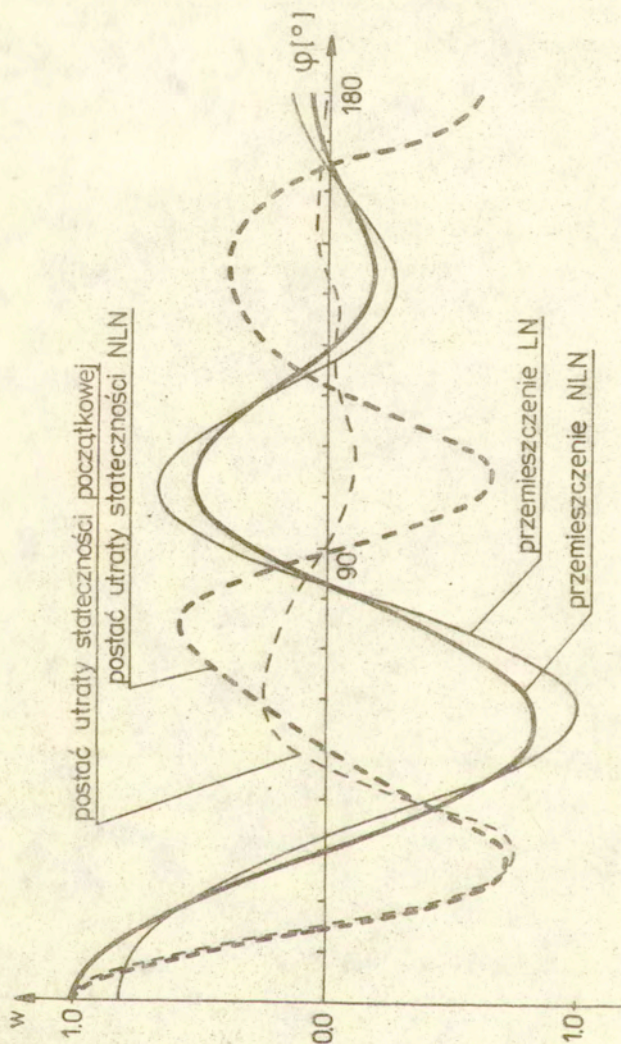
wyznaczone, wartość krytyczną równą 2.284. Znormalizowane składowe w przemieszczenia i postaci utraty stateczności górnej krawędzi powłoki pokazano na rys.5.10 i 5.12. Natomiast przemieszczenie w punktu znajdującego się na górnej krawędzi powłoki i tworzącej $\varphi = 0^\circ$ w zależności od obciążenia przedstawiono na rys.5.11. Na rysunku tym h oznacza grubość powłoki.

W celu dokonania oceny otrzymanych rezultatów zestawiono je w tabelicy 5.2. z wynikami analizy stateczności początkowej a także zamieszczono w tej tabelicy rezultaty analiz przeprowadzonych przez Brendela i Ramma [10].

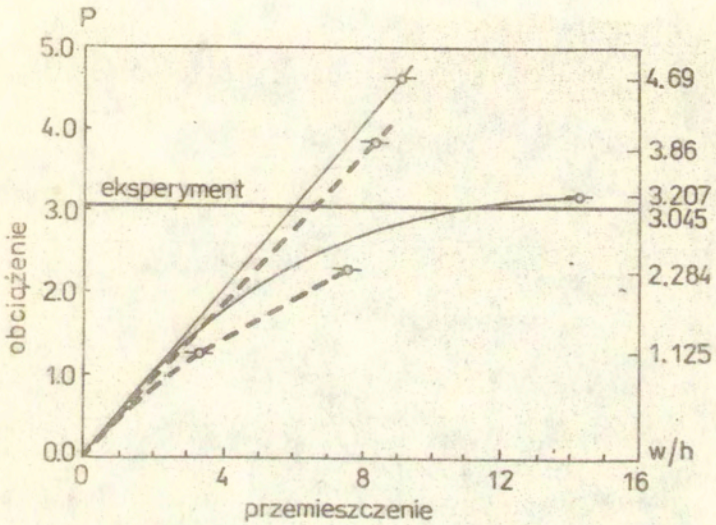
Do obliczenia analizowanego przykładu autorzy pracy zastosowali dwukrzywiznowy element skończony S16, opisany np. w pracy Ramma [65]. Element ten można scharakteryzować jako 3-wymiarowy, zdegenerowany element izoparametryczny. Jest to element czworokątny, 16 punktowy przy czym funkcje kształtu przyjęto w postaci wielomianów Lagrange'a 3-go stopnia. Degenerację elementu trójwymiarowego do elementu powłokowego przeprowadzono przyjmując następujące założenia:

- a/ prosta normalna do powierzchni środkowej w procesie deformacji pozostaje prosta i nieodkształcona,
- b/ energia odkształcenia odpowiadająca naprężeniom prostopadłym do powierzchni środkowej jest pomijalnie mała.

Założenie a/ odpowiada hipotezie Heissnera w teorii powłok i redukuje liczbę stopni swobody w przekroju normalnym do powierzchni środkowej z sześciu do pięciu. Oprócz tego na poziomie elementu są eliminowane, przez statyczną kondensację, stopnie swobody odpowiadające wewnętrznym punktom elementu. W rezultacie przeprowadzenia degeneracji i statycznej kondensacji element S16 zawiera 52 stopnie swobody.



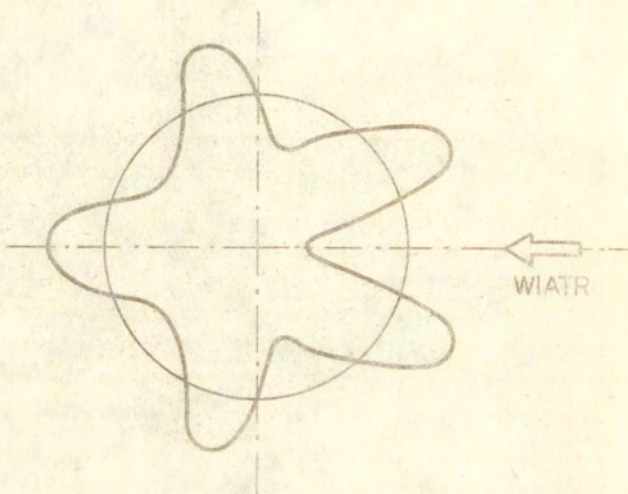
Rys.5.10. Znormalizowane przemieszczenia /linia ciągła/ i postaci utraty stateczności /linia przerywana/ górnej krawędzi powłoki, $x/l=1.0$. Powłoka o stałej grubości. LN to rezultaty analizy liniowej, NLN to rezultaty analizy nieliniowej.



Rys.5.11. Wykres obciążenie-przemieszczenie.

Linia ciągła rezultaty wg [10].

Linia przerywana rezultaty własne.



Rys.5.12. Postać utraty stateczności / składowa w / górnej krawędzi powłoki z analizy, w której uwzględnia się deformację dokrytyczną.

Tablica 5.2. Zestawienie obciążeń krytycznych λ_{kr} dla powłoki o stałej grubości obciążonej wiatrem /z uwzględnieniem niesymetrii obciążenia/

	EKSPERYMENT	OBLICZENIA			
		Stateczność początkowa	Analiza nieliniowa		
bibliog.	[46]	[10]	[10]	obl. własne	
równania				Donnella	
metoda rozwiązania		elementy skończone 3wymiarowe zdegenerowane S16	szereg Fouriera i postać z analizy symetrycznej	szereg Fouriera i metoda różnic skończonych	
λ_{kr}	3.045	4.69	3.860	3.207	2.284
$\frac{\lambda_{kr}}{\lambda_{eksper.}}$	1.0	1.54	1.268	1.053	0.750

Analizując omawianą powłokę Brendel i Ramm zastosowali następującą dyskretyzację:

- a/ 4 elementy wzdłuż tworzącej
- b/ 8 elementów w kierunku obwodowym:
5 elementów co 15° w pierwszej ćwiartce oraz 3 elementy co 30° w drugiej ćwiartce.

W rezultacie do obliczenia tego zadania użyto około 1500 niewiadomych.

Reasumując, obliczenia z pracy [10] można scharakteryzować, w porównaniu z obliczeniami własnymi autora, w następujący sposób:

- a/ równania odpowiadają mniej ograniczającym więzom kinematycznym,
- b/ 10-krotnie większa liczba niewiadomych,
- c/ większa precyzja obliczeń wynikająca z tego, że komputer CDC 6600 posiada znacznie dokładniejszą reprezentację liczby niż ODRA 1305.

Biorąc pod uwagę powyższe czynniki otrzymane rezultaty należy uznać za zadawalające. Lepszych rezultatów można oczekiwać dopiero wtedy gdy zwiększy się rozmiary analizowanego modelu a także nie jest wykluczone, że dopiero wtedy gdy wykorzystana się bogatszy wariant teorii powłok.

6. CHARAKTERYSTYKA PROGRAMÓW NUMERYCZNYCH

Opisane w rozdziałach 4 i 5 różne rodzaje analiz dla powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem przeprowadzone przy pomocy programów numerycznych napisanych w języku FORTRAN IV i uruchomionych na maszynie cyfrowej Odra 1305. Przygotowano następujące programy numeryczne:

1/ program do liniowej analizy statycznej. Program bazuje na równaniach teorii powłok Sandersa-Koitera oraz na metodach rozwinięć w szeregi Fouriera i różnic skończonych. Układ równań rozwiązywany jest za pomocą metody Gaussa, w wersji opartej na rozkładzie trójkątnym dla macierzy dodatnio określonych. Program ten jest bardzo efektywny i zagadnienie o 420 stopniach swobody /przy przyjęciu funkcji obciążenia i przemieszczenia w postaci 7 pierwszych harmonik/ rozwiązywany jest w czasie 120 sekund procesora. Program ten był wykorzystany do obliczenia przykładu 5.1. a także do generacji porównawczego stanu sił błonowych w przykładach 4.1 i 4.2;

2/ program do geometrycznie nieliniowej analizy dokrytycznej. Program zbudowano dla równań teorii powłok małowyniosłych dla powłok cylindrycznych Donnell'a. Wykorzystano te same metody dyskretyzacji zagadnienia i rozwiązania układu równań co w programie do analizy statycznej. Dla 150 stopni swobody czas tworzenia macierzy sztywności i rozkładu jej na czynniki trójkątne wynosi 210 sekund a czas jednej iteracji około 8 sekund.

W programie przewidziano identyfikację stanu krytycznego poprzez sprawdzanie warunku osobliwości macierzy stycznej oraz przez rozwiązanie dodatkowego zadania na wartości własne:

$$([K_1] + \lambda ([K_g] + [K_u])) \{\Delta q\} = \{0\}$$

Do rozwiązania powyższego uogólnionego zagadnienia na wartości własne zastosowano rozkład macierzy $[K_0]$ na czynniki trójkątne metodą Cholesky'ego-Banachiewicza a następnie po sprowadzeniu problemu do postaci standardowej stosowano metodę Jacobiego. Czas rozwiązania zagadnienia o 90 stopniach swobody wynosił 90 sek. Program wykorzystano do rozwiązania przykładu 5.2;

- 3/ program do analizy stateczności początkowej dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego.

Stan porównawczy sił generowano w oparciu o zerową harmonikę stanu przemieszczeń otrzymanego z liniowej analizy statycznej /program nr 1/. Program bazował na równaniach nieliniowej teorii powłok Sandersa oraz metodzie rozwinięć w szeregi Fouriera i metodzie różnic skończonych. Uogólnione zagadnienie na wartości własne rozwiązano tą samą metodą, która została opisana dla programu nr 2. Najmniejszej wartości krytycznej /w funkcji ilości fal w kierunku obwodowym/ poszukuje się w ten sposób, że startując od harmoniki o zadanym numerze wyznacza się wartości krytyczne także dla harmonik o sąsiednich numerach. Następnie przeprowadza się paraboliczną interpolację wartości krytycznych i wyznacza minimum oraz odpowiadający minimum numer harmoniki.

Dla wyznaczonego numeru harmoniki oblicza się wartość krytyczną i dokonuje się kolejnej interpolacji /z wykorzystaniem nowo obliczonej wartości/, wyznacza minimum i odpowiadający numer harmoniki. Operacja jest kontynuowana aż do momentu wyznaczenia numeru harmoniki, dla której wartość krytyczna jest już znana. Czas potrzebny do rozwiązania zadania o 60 stopniach swobody dla jednej harmoniki wynosi 205 sekund. Program zastosowano w przykładach 4.1 i 4.2;

- 4/ program do analizy stateczności początkowej dla niesymetrycznego obciążenia. Program zrealizowano w dwóch wersjach: dla równań Donnella oraz równań teorii powłok Sandersa. Program składa się z dwóch części. W pierwszej na podstawie rozkładów przemieszczeń /uzyskanych za pomocą programu nr 1/ i postaci utraty stateczności po tworzącej /uzyskanych za

pomocą programu nr 3/ oblicza się niezbędne całki w kierunku tworzącej. Druga część służy do generowania, w oparciu o całki oraz dane geometryczne i materiałowe, podstawowych macierzy zagadnienia i rozwiązania zagadnienia na wartości własne. Uogólnione zagadnienie na wartości własne rozwiązano tą samą metodą, która została zastosowana w programie nr 2.

Czas obliczenia całej dla wariantu równań Donnella i 21 punktów po tworzącej wynosi 190 sekund natomiast czas tworzenia macierzy i rozwiązania zadania na wartości własne /7 istotnych harmonik, 21 niewiadomych/ wynosi 75 sekund. Program zastosowano do obliczenia przykładów 4.1. i 4.2;

- 5/ program do analizy drgań swobodnych. Program ten wykorzystano m.in. do oceny dyskretnego modelu różnicowego /patrz punkt 5.5/. W programie tym, bazującym na równaniach teorii Sandersa-Koitera ograniczono się do poszukiwania najmniejszej częstości własnej odpowiadającej danej harmonice /postaci drgań w kierunku obwodowym/. Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia na wartości własne przeprowadzono w oparciu o metodę tzw. iteracji podprzestrzennej, opisaną w pracy Bathe'go i Wilsona [8] . Metoda ta wykorzystuje szereg czynników przyspieszających zbieżność lecz jej efektywność zapewniona jest przede wszystkim przez właściwy wybór podprzestrzeni iteracyjnej. Stosowanie podprogramu opartego na tej metodzie, z prowadzeniem obliczeń z podwójną precyzją, pozwala rozwiązywać zadanie dla jednej harmoniki o 60 stopniach swobody w czasie 40 sekund procesora, wliczając w to czas tworzenia podstawowych macierzy.

We wszystkich programach uwzględniono symetrię macierzy a w programach 1,3 i 5 dodatkowo wykorzystano pasmowy charakter macierzy, tak że w efekcie wszystkie operacje wykonuje się na półpasmach. Cechą powyższych programów jest to, że bardzo oszczędnie wykorzystują pamięć operacyjną i używają zewnętrznych zbiorów dyskowych co pozwala obliczać nimi zadania o znacznie większych rozmiarach.

7. UWAGI KOŃCOWE

Zamierzeniem niniejszej pracy było opracować w sposób kompleksowy zagadnienie analizy stateczności sprężystych powłok cylindrycznych pod działaniem obciążeń symulujących ciśnienie wiatru. Obciążenia traktowano w sposób deterministyczny przyjmując ponadto, że mają one charakter statyczny i niezależny o deformacji powłoki. Omówiono podstawy teoretyczne analizy stateczności wychodząc od definicji stateczności konfiguracji równowagi wg Lapunowa a następnie formułując kryteria tę stateczność zapewniające dla analizowanej konstrukcji i obciążenia. Podstawę numerycznych analiz stateczności przeprowadzonych w niniejszej pracy stanowiła definicja stanu krytycznego konstrukcji sformułowana w oparciu o drugą różniczkę energii potencjalnej. Z metodami obliczeniowymi analizy stateczności wiążą się, moim zdaniem, elementy oryginalne pracy - szczególnie w stosunku do prac polskich. Zaliczyć do nich można opracowanie następujących kwestii szczegółowych:

- 1/ w osiowosymetrycznej analizie stateczności początkowej /punkt 4.2/ - propozycja sposobu tworzenia operatora różnicowego, który eliminuje skokowe zachowanie się wektora własnego, nie korzystając z siatek naprzemiennych Bushnella [20]. Usuwa to konieczność całkowania po różnych obszarach energii zgięciowej i bionowej powłoki i upraszcza tworzenie układu równań zagadnienia;
- 2/ w niesymetrycznej analizie stateczności początkowej /punkt 4.3/ - uogólnienie i zmodyfikowanie metody Wanga, Billingtona [74] i Langhaara, Millera [47] polegającej na wykorzystaniu w analizie niesymetrycznej postaci utraty stateczności /w kierunku tworzącej/ z analizy osiowosymetrycznej w taki sposób, że:
 - a/ wykluczono konieczność posługiwania się uproszczonymi równaniami teorii powłok Timoshenki; metodę tę sformułowano tak, że można stosować dowolny wariant teorii powłok,

- b/ dostosowano tę metodę do analizy powłok o skokowo zmiennej grubości w kierunku tworzącej stosując sformułowanie energetyczne i metodę różnic skończonych w kierunku tworzącej,
- c/ rozszerzono zakres stosowania tej metody na dowolne powłoki osiowosymetryczne o dowolnych, klasycznych warunkach brzegowych. Metoda zachowuje przy tym wszystkie zalety podejścia analityczno-numerycznego;
- 3/ w analizie stateczności z uwzględnieniem deformacji dokrytycznej /punkt 5.4/ - opracowanie dla potrzeb analizy nieliniowej metody bazującej na reprezentacji Fouriera w kierunku obwodowym i różnicach skończonych w kierunku tworzącej. W szczególności opisano sposób tworzenia macierzy sztywności, co dotychczas nie było w literaturze przedmiotu opracowane.

Oceniając walory użytkowe przygotowanych programów numerycznych należy stwierdzić, że mogą one stanowić podstawę do tworzenia pakietu programów, pozwalających z różną dokładnością i różnym kosztem wyznaczać obciążenie przeskoku dla podjętego w pracy zagadnienia. Programy bazujące na koncepcji stateczności początkowej umożliwiają wyznaczanie obciążenie przeskoku małym kosztem lecz także z mniejszą dokładnością. Program do analizy nieliniowej jest znacznie bardziej czasochłonny ale za to, wraz ze wzrostem liczby stopni swobody układu powinien prowadzić do dużo dokładniejszych rezultatów. Przeprowadzone obliczenia wykazały, że nieliniowa analiza zagadnienia utraty stateczności pod obciążeniem wiatrowym, wymaga znacznie większego modelu obliczeniowego niż ten, który zastosowano w przykładzie 5.2, co wiąże się z możliwością korzystania z komputera o znacznie lepszych parametrach. Dopiero wtedy ma sens badanie takich ważnych praktycznie problemów jak wrażliwość konstrukcji na imperfekcje czy zachowanie konstrukcji w obszarze pokrytycznym.

Istnieją dwa sposoby poprawiania dokładności rezultatów analizy stateczności powłok cylindrycznych pod obciążeniem wiatrem. Pierwszy sposób polega na precyzyjniejszym uwzględnianiu defor-

wacji powłoki przed utratą stateczności tzn. wykorzystuje się bogatsze teorie powłok, rozwiązuje pełne, nieliniowe równania i używa dużych modeli obliczeniowych. Ten sposób poprawiania rezultatów jest najczęściej wykorzystywany - stosowano go także w niniejszej pracy. Drugi sposób wiąże się z dokładniejszym modelowaniem wzajemnych oddziaływań konstrukcji i przepływającego powietrza. Nawet przy zachowaniu statycznego charakteru obciążeń, można na przykład uwzględnić zależność obciążeń od deformacji konstrukcji w postaci obciążenia typu ciśnienie. W przypadku powłoki cylindrycznej i osiowosymetrycznego obciążenia typu ciśnienie oraz warunków brzegowych zapewniających konserwatywność tego obciążenia Loganathan i in. w pracy [49] uzyskali z analizy stateczności początkowej niższą wartość obciążenia krytycznego niż dla obciążeń martwych. Wydaje się, że także w przypadku niesymetrycznego obciążenia wiatrem za pomocą obciążenia typu ciśnienie można by, ze zlinearyzowanej analizy stateczności, otrzymać niższe, a przez to bliższe doświadczalnym, rezultaty. Niestety dla powłok cylindrycznych ze swobodną krawędzią, które były analizowane w niniejszej pracy obciążenie typu ciśnienie nie jest konserwatywne. Tak więc zlinearyzowana analiza stateczności nie mogłaby bazować na kryterium drugiej różniczki lecz musiałaby badać małe drgania w otoczeniu konfiguracji pierwotnej.

Wydaje się, że obydwa sposoby ulepszania rezultatów analizy stateczności są warte rozwijania ponieważ obecnie trudno jest przesądzić, który z tych sposobów zapewni, przy pomocy prostszego i efektywniejszego postępowania, dokładność rezultatów wymaganą we współczesnym projektowaniu inżynierskim.

8. LITERATURA

1. S.AHMAD, B.M.IRONS, O.C.ZIENKIEWICZ : Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems.
Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio /1968/
2. B.O.ALMROTH : Buckling of cylindrical shells subjected to non-uniform external pressure.
J. Appl. Mech., 29, 675-682 /1962/
3. J.H.ARGYRIS, M.KÖNIG, D.A.NAGY, M.HAASE, G.MALEJANAKIS : Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych.
Met. Oblicz. w Mech. Nielin., Ossolineum, 163-234 /1977/
4. D.G.ASHWELL : On large deflection of a spherical shell with an inward point load.
Proc. of IUTAM Symp. Theory Thin Elastic Shells, Delft 1959, North Holland Publish., 43-63 /1960/
5. Z.F.BACZYŃSKI, M.JANAS : Zagadnienia stateczności zbiorników stalowych na cieczy.
Prace IPPT, 26/1969
6. R.E.BALL : A program for the nonlinear static and dynamic analysis of arbitrarily loaded shells of revolution.
Comp. Struct., 2, 141-162 /1972/
7. R.E.BALL, F.A.RYAN : Computer analysis of buckling of imperfect shells.
Proc. ASCE, ST, 99, 10, 2097-2108 /1973/
8. K.J.BATHE, E.L.WILSON : Numerical methods in finite element analysis.
Prentice-Hall, New Jersey 1976
9. M.BERNADOU, J.T.ODEN : An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems.
J. Math. pures et appl., 60, 285-308 /1981/

10. B.BRENDEL,E.RAMM : Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells.
Comp. Struct., 12, 549-558 /1980/
11. B.BRENDEL,E.RAMM,D.F.FISHER,F.G.RAMMERSTORFER : Linear and nonlinear stability analysis of thin cylindrical shells under wind loads.
J. Struc. Mech., 9/1, 91-113 /1981/
12. D.O.BRUSH : Prebuckling rotations and cylinder buckling analysis.
J. Engng Mech. Div., Proc. ASCE, 106, 225-232 /1980/
13. D.O.BRUSH,E.O.ALMROTH : Buckling of bars,plates and shells.
McGraw-Hill, New York 1975
14. B.BUDIANSKY : Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures.
Advances in Applied Mechanics, 14, 1-65 /1974/
15. B.BUDIANSKY,P.P.RADKOWSKI : Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution.
AIAA J., 1, 8, 1833-1842 /1963/
16. B.BUDIANSKY,J.L.SANDERS : On the "best" first-order linear shell theory.
Progress in Applied Mechanics, Prager Anniversary Vol., 192, Macmillan, New York 1963, 129-140
17. D.BUSHNELL : Nonlinear axisymmetric behavior of shells of revolution.
AIAA J., 5, 432-439 /1967/
18. D.BUSHNELL : Analysis of buckling and vibration of ring-stiffened, segmented shells of revolution.
Int. J. Solids Structures , 6, 157-181 /1970/
19. D.BUSHNELL : Stress, buckling and vibration of prismatic shells.
AIAA J.,9/10, 2004-2013 /1971/
20. D.BUSHNELL,B.O.ALMROTH,F.BROGAN : Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis.
Comp. Struct., 1, <http://rcin.org.pl>

21. M.COMO,A.GRIMALDI : Stability, buckling and post buckling of elastic structures.
Part I : Meccanika, 10/4, 254-268 /1975/
Part II: Meccanika, 12/4, 236-248 /1977/
22. L.H.DONNELL : A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending.
Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 56, 795 /1934/
23. C.L.DIM : Stability theory and its applications to structural mechanics.
Noordhoff Int. Publ., Leyden 1973
24. Z.DŹYGADŁO : Zagadnienia aerospřężystości w teorii powłok.
Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowania., t.2,
65-84, W-wa 1979
25. H.FRĄCKIEWICZ,A.LEGAT : Geometryczna zmienność powłok siatkowych.
PWN, W-wa - Poznań 1982
26. G.A.GREENBAUM,D.C.CONROY : Postwrinkling behavior of a conical shell of revolution subjected to bending loads.
AIAA J., 8, 700-707 /1970/
27. E.J.GRIGOLUK,V.V.KABANOV : Ustojčivost oboloček.
Izd. Nauka, Moskva 1978
28. A.GEORGE,J.W-H.LIU :Computer solution of large sparse positive definite systems.
Prentice-Hall, New Jersey 1981
29. W.E.HAISLER,J.A.STRICKLIN,F.J.STEBBINS : Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis.
AIAA J., 10, 264-272 /1972/
30. T.D.HIEN : Nieliniowa dynamika ciał i powłok osiowo-symetrycznych poddanych dowolnym obciążeniem.
Prace IPPT, 37/1981

31. J.W.HUTCHINSON,W.T.KOITER : Postbuckling theory.
Appl. Mech. Rev., 23, 1353-1366 /1970/
32. F.JOHN : Estimates for the derivatives of the stresses
in a thin shell and interior shell equations.
Comm. Pure and Appl. Math., 18, 235-267 /1965/
33. F.JOHN : Refind interior equations for thin elastic shells.
Comm. Pure and Appl. Math., 24, 585-615 /1971/
34. A.KALNINS : Analysis of shells of revolution subjected
to symmetrical and nonsymmetrical loads.
J. Appl. Mech., 31, 467-476 /1964/
35. A.KALNINS,J.F.LESTINGI : On nonlinear analysis of
elastic shells of revolution.
J. Appl. Mech., 34, 59-64 /1967/
36. M.KLEIBER : Some results in the numerical analysis
of structural instabilities.Part I.Statics.
Rozpr. Inż., 30, 3/4, 327-353 /1982/
37. M.KLEIBER,T.D.HIEN : Nonlinear dynamics of complex
axisymmetric structures under arbitrary loads.
Comp. Meths Appl. Mech. Engng., 37, 93-107 /1983/
38. R.J.KNOPS,I.W.WILKES : Theory of elastic stability.
Handbuch der Physik, vol. VIa/3, 125-302,
Springer Verlag 1973
39. W.T.KOITER : A consistent first approximation in the
general theory of thin elastic shells.
Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Shells, Delft 1959,
North-Holland Publ., Amsterdam 1960, 12-33
40. W.T.KOITER : Theory of elastic stability and post-
buckling behaviour.
Brown Univ., Providence R.I. 1962
41. W.T.KOITER : On the nonlinear theory of thin elastic shells.
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser.B, 69, no 1, 1-54 /1966/

42. W.T.KOITER : General equations of elastic stability for thin shells.
Proc. Symp. Theory of shells to honour L.H.Donnell, Univ. of Houston, 187-230 /1967/
43. W.T.KOITER : A sufficient condition for the stability of shallow shells.
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B70, 367-375 /1967/
44. W.T.KOITER : A basic open problem in the theory of elastic stability.
Proc. IUTAM/IMU Symp. Applic. of Meths. of Functional Analysis to Problems in Mechanics, Marseille Sept.1975, Springer Verlag 1976, 366-375
45. W.T.KOITER, J.G.SIMMONDS : Foundations of shell theory. Theoretical and Applied Mechanics, Proc 13-th Int.Congr., Moscow Univ., Aug.1972, Springer Verlag 1973, 150-176
46. P.S.KUNDURPI, G.SAMAVEDAM, D.J.JOHN : Stability of cantilever shells under wind loads.
Proc. ASCE, J. Engng. Mech. Div., EM5, 517-530 /1975/
47. H.L.LANGHAAR, R.E.MILLER : Buckling of an elastic isotropic cylindrical shell subjected to wind loads.
Proc. Symp. Theory of shells to honour L.H.Donnell, Univ. of Houston, 404-429 /1967/
48. T.LISZKA, J.ORKISZ : The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics.
Comp. Struct., 11, 83-95 /1980/
49. K.LOGANATHAN, S.C.CHANG, R.H.GALLAGHER, J.F.ABEL : Finite element representation and pressure stiffness in shell stability analysis.
Int. J. Num. Meth. Engng., 14, 1413-1429 /1979/
50. V.MADERSPACH, J.T.GAUNT, J.H.SWORD : Buckling of cylindrical shells due to wind loading.
Der. Stahlbau /9/1973, 269-277

51. J.MAKOWSKI : Liniowa i nieliniowa analiza stateczności sprężystych cienkich powłok.
Praca doktorska, Gdańsk 1981
52. A.A.MOVCHAN : Stability of processes with respect to two metrics.
Prikl. Mat. i Mekh., 24, 988-1001 /1960/
53. K.M.MUSZTARI, K.Z.GALIMOV : Nieliniejnaja teoria uprugich oboloček.
Tatknigizdat, Kazań 1957
54. W.NACHBAR, J.M.JONG : Quadratic eigenvalue problems from a nonlinear structural analysis.
SIAM J. Appl. Math., 25/3, 539-555 /1973/
55. S.NEMAT-NASSER : On elastic stability under nonconservative loads.
Ed. H.H.E.Leipholtz, Solid Mechanics Div., Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario May 1972
56. V.V.NOVOŽILOV, V.A.ŠAMINA : O kinematičeskich kraevych uslovijach v nieliniejnykh zadačach teorii uprugosti.
Izv. AN SSSR, Mekh. Tv. Tela, 5, 63-74/1975/
57. J.ORKISZ : Komputeryzacja metody różnic skończonych.
Mat. IV Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Koszalin, kwiecień 1979, 19-102
58. J.ORKISZ, Z.WASZCZYSZYN : Metody komputerowe w teorii powłok. Cz.II. Metody numerycznego całkowania, metoda różnic skończonych, metody różne.
Mat. Symp. Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowanie, Kraków kwiecień 1974, PWN, W-wa 1979
59. A.V.POGORIELOV : Geometričeskie metody w nieliniejnoj teorii uprugich obołoček.
Izd. Nauka, Moskva 1967
60. POLSKA NORMA PN-77/B-02011. Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.
61. W.PIETRASZKIEWICZ : Finite rotations and Lagrangean description in the nonlinear theory of shells.
PWN, Warszawa-Poznań 1979

62. W.PIETRASZKIEWICZ : Finite rotations in the nonlinear theory of thin shells.
Thin shell theory : new trends and applications ,CISM Courses and Lectures No. 240, 155-208, Springer V. 1980
63. W.PIETRASZKIEWICZ : Lagrangian description and incremental formulation in the nonlinear theory of thin shells
Int. J. Non-Linear Mech., 19, 115-140 /1983/
64. W.PIETRASZKIEWICZ : Introduction to the non-linear theory of shells.
Mitt. Inst. Mech., 10, Ruhr-Univ. Bochum 1977
65. E.RAMM : A plate/shell element for large deflections and rotations.
US-Germany Symp. Formulations and algorithms in finite element analysis , MIT Cambridge,1976. MIT Press 1977
66. J.L.SANDERS : An improved first approximation theory for thin shells.
NASA Report 24, 1959
67. J.L.SANDERS : Non-linear theories for thin shells.
Q. Appl. Math., 21, 1, 21-36 /1963/
68. I.SHEINMAN,Y.TENE : Buckling of segmented shells of revolution subjected to symmetric and asymmetric loads.
AIAA J., 12, 1, 15-20 /1974/
69. J.A.STRICKLIN,W.E.HAISLER : Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis.
Comp. Struct., 7, 125-136 /1977/
70. H.STUMPF : On the linear and nonlinear stability analysis in the theory of thin elastic shells.
Lecture XVth Int. Congr. Theor. Appl. Mech., Toronto/Canada, August 1980
71. J.SZMELTER,Z.KUROWSKI : Algorytm rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych przy dowolnej dyskretyzacji obszaru.
Mechanika i Komputer, t.2, 67-87, W-wa 1980

72. J.M.THOMPSON,G.W.HUNT : A general theory of elastic stability.
J,Wiley and Sons 1973
73. A.S.VOLMIR : Ustojliwość deformirujemych sistem.
Izd. Nauka, Moskva 1967
74. Y.WANG,D.P.BILLINGTON : Buckling of cylindrical shells by wind pressure.
Proc. ASCE, J. Engng. Mech. Div., EM5, 100, 1005-1024 /1974/
75. Y.WANG,P.C.LEE,D.P.BILLINGTON : Simplified theory of thin cylindrical shells.
Proc. ASCE, J. Engng. Mech. Div., EM4, 100, 719-736 /1974/
76. Z.WASZCZYSZYN : Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych.
Mat. Konf. Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, wrzesień 1980. Ossolineum 1981, 341-360
77. P.WILDE,A.SAWICKI,Z.MATULEWICZ : Numerical analysis of the influence of initial deflection on stability of cylindrical tanks.
Arch. Inż. Lądowej, 23, 1, 89-103 /1977/
78. E.L.WILSON : Structural analysis of axisymmetric solids.
AIAA J., 3, 2269-2274 /1965/
79. L.A.WINNICKI,O.C.ZIENKIEWICZ : Plastic / or visco-plastic / behaviour of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading. Semi-analytical finite element solution.
Int. J. Num. Meth. Engng., 14, 1399-1412 /1979/
80. E.A.WITMER,J.J.KOTANCHIK : Progress report on discrete element elastic and elasto-plastic analyses of shells of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading.
Proc. 2nd Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio 1968

81. K.WIŚNIEWSKI : Analiza numeryczna powłoki cylindrycznej-
statyka dla obciążeń niesymetrycznych i drgania swobodne.
Prace IPPT, 20/1984
82. CZ.WOŹNIAK : Nieliniowa teoria powłok.
PWN, W-wa 1966
83. CZ.WOŹNIAK, M.KLEIBER : Nieliniowa mechanika konstrukcji.
PWN, Warszawa-Poznań 1982
84. H.ZIEGLER : Principles of structural stability.
Birkhauser Verlag, Basel und Stuttgart 1977
85. O.G.ZIENKIEWICZ : The finite element method.
Mc Graw-Hill, London 1977
86. O.C.ZIENKIEWICZ, S.VALLIAPPAN, I.P.KING : Elasto-plastic
solution of engineering problems ; initial stress,
finite element approach.
Int. J. Num. Meth. Engng., 1, 75-100 /1969/
87. J.ZIÓŁKO : Badania aerodynamiczne modeli stalowych
zbiorników z pływającymi dachami.
Arch. Inż. Lądowej, 23, 4, 455-473 /1977/
88. J.A.ŻURAWSKI : Obciążenia wiatrem budowli i konstrukcji.
Arkady, W-wa 1978

9. DODATEK. MACIERZ SZTYWNOŚCI DLA NIELINIOWEJ ANALIZY PRZYROSTOWEJ

Procedura związana z tworzeniem macierzy sztywności, gdy stosowane są reprezentacje Fouriera i metoda różnic skończonych, opisana została w punktach 5.3, 5.4 i 5.5. Poniżej zostaną podane odpowiadające tej procedurze relacje macierzowe dla wariantu równań teorii powłok wg Donnella.

1. Oznaczenia

1. [] -macierz, { } -wektor-kolumna, [] -wektor-wiersz
2. $\text{diag}(a,b,c)$ -macierz diagonalna o elementach przekątniowych a, b, c
3. \sum^n -sumowanie po n
4. $\bigcup_{n,m}$ -agregacja macierzy z podmacierzy (n, m)
5. RF -reprezentacja Fouriera
MRS -metoda różnic skończonych
..wskaznik u góry wyznacza punkt tworzącej $(i, j, x = 1, \dots, r)$
wskaznik u dołu wyznacza harmonikę rozwinięcia Fouriera
 $(m, n, p, y = 0, \dots, N), (l = -N, \dots, N), (k = 0, \dots, 2N)$
7. * -wielkości dla znanej konfiguracji
8. \square -puste miejsce na dowolny z symboli występujących na tej pozycji
9. wielkości różniące się symbolami Δ lub * /np. $\{N\}, \{\Delta N\}, \{N\}^*$
są zdefiniowane w analogiczny sposób.

2. Miary odkształceń i przyrostów odkształceń

Miary odkształceń dla teorii powłok Donnella zawierają wzory (2.40) i (2.41). W oparciu o te wzory zdefiniujemy poniższe wektory.

$$\{\gamma\} = \{\gamma^{LN}\} + \{\gamma^{NL}\}$$

3x1 3x1 3x1

$$\{\gamma^{LN}\}_{3 \times 1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} (u, \varphi + w) \\ v, x \\ \frac{1}{2} (u, x + \frac{1}{r} w, \varphi) \end{array} \right\} \quad \{\gamma^{NL}\}_{3 \times 1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} r z w, \varphi \cdot w, \varphi \\ \frac{1}{2} w, x \cdot w, x \\ \frac{1}{2} r w, \varphi \cdot w, x \end{array} \right\}$$

$$\{\Delta \varepsilon\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tau^2} W, \varphi \varphi \\ -W, xx \\ -\frac{1}{\tau} W, \varphi x \end{Bmatrix}$$

W, V, u to składowe wektora przemieszczeń /rys.2.3/ .

$$\{\Delta \gamma\}_{3 \times 1} = \{\Delta \gamma^0\}_{3 \times 1} + \{\Delta \gamma^L\}_{3 \times 1} + \{\Delta \gamma^{NL}\}_{3 \times 1}$$

$$\{\Delta \gamma^0\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\tau} (\Delta u, \varphi + \Delta W) \\ \Delta V, x \\ \frac{1}{2} (\Delta u, x + \frac{1}{\tau} \Delta V, \varphi) \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \gamma^L\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\tau^2} (2 \overset{*}{W}, \varphi \cdot \Delta W, \varphi) \\ \frac{1}{2} (2 \overset{*}{W}, x \cdot \Delta W, x) \\ \frac{1}{2\tau} (\overset{*}{W}, x \cdot \Delta W, \varphi + \overset{*}{W}, \varphi \cdot \Delta W, x) \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \gamma^{NL}\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\tau^2} (\Delta W, \varphi)^2 \\ \frac{1}{2} (\Delta W, x)^2 \\ \frac{1}{2\tau} \Delta W, \varphi \cdot \Delta W, x \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \varepsilon\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tau^2} \Delta W, \varphi \varphi \\ -\Delta W, xx \\ -\frac{1}{\tau} \Delta W, \varphi x \end{Bmatrix}$$

Określenie miar odkształceń i przyrostów odkształceń dla punktu i .

$$\{\gamma^{LN}\}^i \stackrel{RF}{=} \sum_{n=1}^n [\Phi_n] \{B_n^i\}$$

$$\{B_n^i\}_{3 \times 1} = \left[\frac{1}{\tau} W_n^i + \frac{n}{\tau} u_n^i, v_{n,x}^i, -\frac{n}{2\tau} v_n^i + \frac{1}{2} u_{n,x}^i \right]^T$$

$$\{B_n^i\} \stackrel{MRS}{=} [G_n^i] \{q_n^i\}$$

$$[G_n^i] = L [g_n^{i-1}], [g_n^i], [g_n^{i+1}] -$$

$$[g_n^i] = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} P^j & 0 & \frac{n}{T} P^j \\ 0 & \hat{P}^j & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2T} P^j & \frac{1}{2} \hat{P}^j \end{bmatrix}$$

$$\{q_n^i\} = L w_n^{i-1}, v_n^{i-1}, u_n^{i-1}, w_n^i, v_n^i, u_n^i, w_n^{i+1}, v_n^{i+1}, u_n^{i+1}]^T$$

gdzie j przyjmuje wartości określone w punkcie 9.7.

$$\{y^{LN}\}^i = \sum^n [\hat{\phi}_n] [G_n^i] \{q_n^i\}$$

Analogicznie

$$\{y^o\}^i = \sum^n [\hat{\phi}_n] [G_n^i] \{\Delta q_n^i\}$$

$$\{y^{NL}\}^i \stackrel{RF}{=} \frac{1}{2} \sum^m [\hat{B}_m^i] [\hat{\phi}_m] \sum^n [\hat{\phi}_n] \{\hat{B}_n^i\}$$

$$[\hat{B}_m^i] = \text{diag} \left(\frac{m}{T} w_m^i, w_{m,x}^i, \frac{m}{T} w_m^i \right)$$

$$\{\hat{B}_n^i\} = L \frac{n}{T} w_n^i, w_{n,x}^i, w_{n,x}^i]^T$$

$$[\hat{B}_m^i] \stackrel{MRS}{=} [Q_m^i] [\hat{T}_m^i]$$

$$[\hat{T}_m^i] = L [\hat{t}_m^{i-1}], [\hat{t}_m^i], [\hat{t}_m^{i+1}]]^T$$

$$[\hat{t}_m^i] = \text{diag} \left(\frac{m}{T} P^j, \hat{P}^j, \frac{m}{T} P^j \right)$$

$$[Q_m^i] = L [w_m^{i-1}], [w_m^i], [w_m^{i+1}]]$$

$$[w_m^i] = \text{diag} (w_m^i, w_m^i, w_m^i)$$

$$\{\hat{B}_n^i\} \stackrel{MRS}{=} [\hat{T}_n^i] \{q_n^i\}$$

$$\text{http://reiner.org.pl/} [\hat{t}_n^i], [\hat{t}_n^{i+1}]]$$

$$[\hat{t}_n^i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{\tau} P^i & 0 & 0 \\ P^i & 0 & 0 \\ \hat{P}^i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{y^{NL}\}^i = \frac{1}{2} \sum^m [Q_m^i] [\hat{T}_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] [\hat{T}_n^i] \{q_n^i\}$$

Analogicznie

$$\{\Delta y^{NL}\}^i = \frac{1}{2} \sum^m [\Delta Q_m^i] [\hat{T}_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] [\hat{T}_n^i] \{\Delta q_n^i\}$$

$$\{\Delta y^L\}^i \stackrel{RF}{=} \frac{1}{2} \sum^m [\hat{C}_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] \{\Delta \hat{C}_n^i\} + \frac{1}{2} \sum^m [B_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] \{\Delta \hat{B}_n^i\}$$

$$[\hat{C}_m^i]_{3 \times 3} = \text{diag} \left(\frac{m}{\tau} w_m^i, w_{m,x}^i, w_{m,x}^i \right)$$

$$\{\hat{C}_n^i\}_{3 \times 1} = L \left[\frac{\eta}{\tau} w_n^i, w_{n,x}^i, \frac{\eta}{\tau} w_n^i \right]^T$$

$$[\hat{C}_m^i] \stackrel{MRS}{=} [Q_m^i] [\hat{S}_m^i]$$

$$[\hat{S}_m^i]_{3 \times 3} = L [\hat{s}_m^{i-1}, [\hat{s}_m^i], [\hat{s}_m^{i+1}]]^T$$

$$[\hat{s}_m^i]_{3 \times 3} = \text{diag} \left(\frac{m}{\tau} P_j, \hat{P}_j, \hat{P}_j \right)$$

$$\{\hat{C}_n^i\} \stackrel{MRS}{=} [\hat{S}_n^i] \{q_n^i\}$$

$$[\hat{S}_n^i]_{3 \times 3} = L [\hat{s}_n^{i-1}, [\hat{s}_n^i], [\hat{s}_n^{i+1}]]$$

$$[\hat{s}_n^i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{\tau} P_j & 0 & 0 \\ \hat{P}_j & 0 & 0 \\ \frac{\eta}{\tau} P_j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta y^L\}^i = \frac{1}{2} \sum^m [Q_m^i] [\hat{S}_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] [\hat{S}_n^i] \{\Delta q_n^i\} + \frac{1}{2} \sum^m [Q_m^i] [\hat{T}_m^i] [\hat{\phi}_m^3] \cdot \sum^n [\hat{\phi}_n^4] [\hat{T}_n^i] \{\Delta q_n^i\}$$

$$\{\alpha\}^i \stackrel{RF}{=} \sum_{3 \times 1}^n [\dot{\phi}_n] \{\bar{B}_n^i\}$$

$$[\bar{B}_n^i] = L \begin{bmatrix} \frac{n^2}{\tau^2} w_n^i & , & -w_n^i,_{xx} & , & \frac{n}{\tau} w_n^i,_{x} \end{bmatrix}^T$$

$$[\bar{B}_n^i] \stackrel{MRS}{=} [\bar{G}_n^i] \{q_n^i\}$$

$$[\bar{G}_n^i] = L [\bar{g}_n^{i-1}], [\bar{g}_n^i], [\bar{g}_n^{i+1}]$$

$$[\bar{g}_n^j] = \begin{bmatrix} \frac{n^2}{\tau^2} p^j & 0 & 0 \\ -\bar{p}^j & 0 & 0 \\ \frac{n}{\tau} \bar{p}^j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha\}^i = \sum^n [\dot{\phi}_n] [\bar{G}_n^i] \{q_n^i\}$$

Analogicznie

$$\{\Delta \alpha\}^i = \sum^n [\dot{\phi}_n] [\bar{G}_n^i] \{\Delta q_n^i\}$$

9.3. Wariacje przyrostów odkształceń

Wariacje obliczane są względem harmoniki y rozwinięć Fouriera składowych w, v, u wektora przemieszczeń w punkcie x na tworzącej powłoki. Macierz wariacji dowolnej miary tworzona jest następująco:

$$[\delta \Delta \gamma^0]^i = L \delta_w \{\Delta \gamma^0\}^i, \delta_v \{\Delta \gamma^0\}^i, \delta_u \{\Delta \gamma^0\}^i$$

Wariacje poszczególnych miar są następujące:

$$[\delta \Delta \gamma^0]^i = [\dot{\phi}_y] [g_y^x] [\delta \Delta q_y^x]$$

$$[\delta \Delta \gamma^{NL}]^i = \sum^m [\Delta Q_m^i] [\hat{T}_m^i] [\dot{\phi}_m] [\dot{\phi}_y] [\hat{t}_y^x] [\delta \Delta q_y^x]$$

$$[\delta \Delta \gamma^L]^i = \frac{1}{2} \sum^m [\dot{Q}_m^i] ([\hat{S}_m^i] [\dot{\phi}_m] [\dot{\phi}_y] [\hat{s}_y^x] + [\hat{T}_m^i] [\dot{\phi}_m] [\dot{\phi}_y] [\hat{t}_y^x]) [\delta \Delta q_y^x]$$

$$[\delta \Delta \alpha]^i = [\dot{\phi}_y] [\bar{g}_y^x] [\delta \Delta q_y^x]$$

gdzie $[\delta \Delta q_y^x] = \text{diag}(\delta w_y^x, \delta w_y^x, \delta w_y^x)$

Przy obliczaniu $[\delta \Delta \gamma^{NL}]^i$ wykorzystano symetrię zdyskretyzowanej miary $\{\Delta \gamma^{NL}\}^i$ względem wektora przyrostu przemieszczeń.

9.4. Siły i momenty wewnętrzne

$$\{N\}_{3 \times 1}^i = \begin{Bmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ 2N_{12}^i \end{Bmatrix} \quad \{M\}_{3 \times 1}^i = \begin{Bmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ 2M_{12}^i \end{Bmatrix}$$

Związki fizyczne zapiszemy w postaci:

$$\{N\}^i = h [C] \{\gamma\}^i$$

$$\{M\}^i = \frac{h^3}{12} [C] \{\alpha\}^i$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad c_2 = \nu \cdot c_1, \quad c_3 = 2(1-\nu) \cdot c_1$$

gdzie h to grubość powłoki, E to moduł Younga a ν to współczynnik Poissona.

Siły i momenty wewnętrzne będziemy przedstawiać w postaci pojedynczego szeregu Fouriera:

$$\{N\}_{3 \times 1}^i = \sum_{n=1}^N [\phi_n]_{3 \times 3} \{N_n\}_{3 \times 1}^i \quad \{M\}_{3 \times 1}^i = \sum_{n=1}^N [\phi_n]_{3 \times 3} \{M_n\}_{3 \times 1}^i$$

Stosowana też będzie macierz sił błonowych $[N]^i$ zdefiniowana następująco:

$$[N]^i = \text{diag}(\underbrace{([N]^i, \{0\}, \{0\})}_{9 \times 9}, \underbrace{([N]^i, \{0\}, \{0\})}_{3 \times 1}, \underbrace{([N]^i, \{0\}, \{0\})}_{3 \times 1}, \underbrace{([N]^i, \{0\}, \{0\})}_{3 \times 1})$$

i rozkład tej macierzy

$$[N]^i = \sum_{n=1}^n [\bar{\phi}_n] [N_n^i]$$

9.5. Tworzenie macierzy sztywności

Jeżeli w przyrostowej postaci funkcjonału energii potencjalnej P wg wzoru (5.1) uwzględnimy relacje (5.2) i (5.3) to warunek stacjonarności P przyjmuje postać:

$$\{\delta P\} = \{\delta P_2\} - \{\delta W\} + \{\delta R\} = \{0\}$$

gdzie

$$\{\delta P_2\} = \{\delta P_0\} + \{\delta P_\theta\} + \{\delta P_u\}$$

Powyższe wielkości pozwalają także zapisać warunek stanu krytycznego.

Na podstawie $\{\delta P_2\}$ tworzymy macierz sztywności odpowiadającą sformułowaniu przyrostowemu. Poniższe relacje macierzowe odpowiadają energii dla punktu i przy czym wariacje obliczono tak jak w 9.3. Całkowanie w kierunku obwodowym, po φ , przeprowadzono zgodnie z punktem 9.6 a całkowanie po tworzącej uwzględniono w formie omówionej w punkcie 9.7.

a/ Macierz sztywności nieskończonej

$$\begin{aligned} \{\delta P_0\}^i &= \Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta \gamma^0]^T \{\Delta N^0\}^i + [\delta \Delta z]^T \{\Delta M\}^i r d\varphi = \\ &= \Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta q_y^0] (h [g_y^0]^T [\bar{\phi}_y] [C] \cdot \sum [\bar{\phi}_n] [G_n^i] + \\ &+ \frac{h^3}{12} [\bar{g}_y^0]^T [\bar{\phi}_y] [C] \cdot \sum [\bar{\phi}_n] [\bar{G}_n^i]) \{\Delta q_n^i\} r d\varphi \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\phi}_y] [\bar{\phi}_n] d\varphi = \delta_{yn} \cdot [\varphi_y]$$

$$[C] [\bar{\phi}_n] = [\bar{\phi}_n] [C]$$

otrzymujemy

$$\{\delta P_0\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k_0]_{yn}^{xi} \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k_0]_{yn}^{xi} = \Delta^i \cdot r \cdot (h [g_y^x]^T [\varphi_y] [C] [G_n^i] + \frac{h^3}{12} [\bar{g}_y^x]^T [\varphi_y] [C] [\bar{G}_n^i]) \cdot \delta.$$

b/ Macierz początkowych naprężeń

$$\{\delta P_6\}^i = \Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta \gamma^{N^L}]^T \{N\}^i r d\varphi =$$

$$\Delta^i [\delta \Delta q_y^x] \int_0^{2\pi} \sum^n [\hat{t}_y^x]^T [\hat{\phi}_y] [\hat{\phi}_n] [\hat{T}_n^i]^T [\Delta Q_n^i] r d\varphi.$$

Po uwzględnieniu

$$[\Delta Q_n^i]^T \{N\}^i = [N]^i \{\Delta q_n^i\}$$

$$[N]^i = \sum^m [\hat{\phi}_m] [N_m^i]$$

$$[\hat{T}_n^i]^T [\hat{\phi}_m] = [\hat{\phi}_m] [\hat{T}_n^i]^T$$

$$\int_0^{2\pi} [\hat{\phi}_y] [\hat{\phi}_n] [\hat{\phi}_m] d\varphi = [\varphi_{ynm}]$$

otrzymujemy

$$\{\delta P_6\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k_6]_{yn}^{xi} \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k_6]_{yn}^{xi} = \Delta^i \cdot r \cdot \sum^m [\hat{t}_y^x]^T [\varphi_{ynm}] [\hat{T}_n^i]^T [N_m^i]$$

c/ Macierz początkowych przemieszczeń

$$\{\delta P_u\}^i = \{\delta P_u^1\}^i + \{\delta P_u^2\}^i + \{\delta P_u^3\}^i$$

$$3 \times 1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1$$

$$\{\delta P_u\}^i = \Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta \gamma^0]^{iT} \cdot \{\Delta N^L\}^i r d\varphi =$$

$$\Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta q_y^x] [g_y^x]^T [\phi_y^2] \cdot h \cdot [C] \cdot \frac{1}{2} \sum^m \sum^n [\phi_m^3] [\phi_n^4]$$

$$[Q_m^*] ([\hat{S}_m^i] [\hat{S}_n^i] + [\hat{T}_m^i] [\hat{T}_n^i]) \{\Delta q_n^i\} r d\varphi$$

Po uwzględnieniu

$$\int_0^{2\pi} [\phi_n^4] [\phi_m^3] [\phi_y^2] d\varphi = [\varphi_{nmy}]$$

$$[\phi_y^2] [C] = [C] [\phi_y^2]$$

$$[\hat{E}_m^i]_{3 \times 3} = \frac{h}{2} [C]_{3 \times 3} [Q_m^*]_{3 \times 9} [\hat{S}_m^i]_{9 \times 3}$$

$$[\hat{E}_m^i]_{3 \times 3} = \frac{h}{2} [C]_{3 \times 3} [Q_m^*]_{3 \times 9} [\hat{T}_m^i]_{9 \times 3}$$

otrzymujemy

$$\{\delta P_u\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k_u]_{yn}^{xi} \cdot \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k_u]_{yn}^{xi} = \Delta^i \cdot r \cdot [g_y^x]^T \sum^m [\varphi_{nmy}] ([\hat{E}_m^i] [\hat{S}_n^i] + [\hat{E}_m^i] [\hat{T}_n^i])$$

$$\{\delta P_u\}^i = \Delta^i \int_0^{2\pi} [\delta \Delta \gamma^L]^{iT} \cdot \{\Delta N^L\}^i r d\varphi =$$

$$\Delta^i \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\delta \Delta q_y^x] ([\hat{T}_y^x]^T [\phi_y^4] \cdot \sum^l [\phi_l^3] [\hat{B}_l^i])^T +$$

$$[\hat{S}_y^x]^T [\phi_y^4] \cdot \sum^l [\phi_l^3] [\hat{C}_l^i]^T) \cdot h \cdot [C] \cdot \frac{1}{2} (\sum^m [\hat{B}_m^i] [\phi_m^3] \cdot$$

$$\sum^n [\phi_n^4] [\hat{T}_n^i] + \sum^m [\hat{C}_m^i] [\phi_m^3] \cdot \sum^n [\phi_n^4] [\hat{S}_n^i]) \{\Delta q_n^i\} r d\varphi$$

Po uwzględnieniu

$$\frac{h}{4} \sum^l [\hat{\phi}_i] [\hat{B}_i]^T [C] \sum^m [\hat{B}_m] [\hat{\phi}_m] = \sum_{3 \times 3}^m [H_m^1] [\hat{\phi}_m^1]$$

$$\frac{h}{4} \sum^l [\hat{\phi}_i] [\hat{B}_i]^T [C] \sum^m [\hat{C}_m] [\hat{\phi}_m] = \sum_{3 \times 3}^m [H_m^2] [\hat{\phi}_m^2]$$

$$\frac{h}{4} \sum^l [\hat{\phi}_i] [\hat{C}_i]^T [C] \sum^m [\hat{C}_m] [\hat{\phi}_m] = \sum_{3 \times 3}^m [H_m^3] [\hat{\phi}_m^3]$$

gdzie $[\hat{H}_m^i]$ to macierze diagonalne,

$$[\hat{\phi}_y] [\hat{H}_m^i] = [\hat{H}_m^i] [\hat{\phi}_y]$$

$$\int_0^{2\pi} [\hat{\phi}_y] [\hat{\phi}_m] [\hat{\phi}_n] d\varphi = [\bar{\varphi}_{ymn}]$$

otrzymujemy

$$\{\delta \hat{P}_u\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k_u]_{y_n}^{x_i} \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k_u]_{y_n}^{x_i} = \Delta^i \cdot r \cdot ([\hat{t}_y^x]^T \sum^m [\bar{\varphi}_{ymn}] ([H_m^1] [\hat{T}_n^i] + [H_m^2] [\hat{S}_n^i]) + [\hat{s}_y^x]^T \sum^m [\bar{\varphi}_{ymn}] ([H_m^2] [\hat{T}_n^i] + [H_m^3] [\hat{S}_n^i]))$$

$$\{\delta \hat{P}_u\}^i = \Delta^i \cdot \int_0^{2\pi} [\delta \Delta q_y^x]^T \{\Delta N^0\} r d\varphi =$$

$$\frac{1}{2} \Delta^i \cdot \int_0^{2\pi} [\delta \Delta q_y^x] \sum^m ([\hat{s}_y^x]^T [\hat{S}_m^i]^T + [\hat{t}_y^x]^T [\hat{T}_m^i]^T) \cdot$$

$$[Q_m^*]^T [\hat{\phi}_m] [\hat{\phi}_y] \cdot h \cdot [C] \sum^n [\hat{\phi}_n] [G_n^i] \{\Delta q_n^i\} r d\varphi$$

Po uwzględnieniu

$$[C] [\hat{\phi}_n] = [\hat{\phi}_n] [C]$$

$$\int_0^{2\pi} [\hat{\phi}_y] [\hat{\phi}_m] [\hat{\phi}_n] d\varphi = [\varphi_{ymn}]$$

$$[\hat{E}_m^1] = \frac{h}{2} \cdot [C][Q_m^*][\hat{S}_m^1]$$

$$[\hat{E}_m^2] = \frac{h}{2} \cdot [C][Q_m^*][\hat{T}_m^1]$$

otrzymujemy

$$\{\delta P_u^3\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k_u]_{yn}^{xi} \cdot \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k_u]_{yn}^{xi} = \Delta^i \cdot \tau \cdot \sum^m ([\hat{S}_y^x]^T [\hat{E}_m^1]^T + [\hat{T}_y^x]^T [\hat{E}_m^2]^T) [\varphi_{ymn}] [G_n^i]$$

Ostatecznie

$$[k_u]_{yn}^{xi} = [k_u]_{yn}^{xi} + [k_u]_{yn}^{xi} + [k_u]_{yn}^{xi}$$

d/ Tworzenie globalnej macierzy sztywności

$$\{\delta P_2\}^i = [\delta \Delta q_y^x] \cdot \sum^n [k]_{yn}^{xi} \{\Delta q_n^i\}$$

$$[k]_{yn}^{xi} = [k_o]_{yn}^{xi} + [k_\theta]_{yn}^{xi} + [k_u]_{yn}^{xi}$$

Podmacierz identyfikowaną parą (y, n) tworzymy składając $[k]_{yn}^{xi}$ dla wszystkich punktów i

$$[k]_{yn} = \bigcup_{x, i} [k]_{yn}^{xi} \quad x, i = 1, \dots, r$$

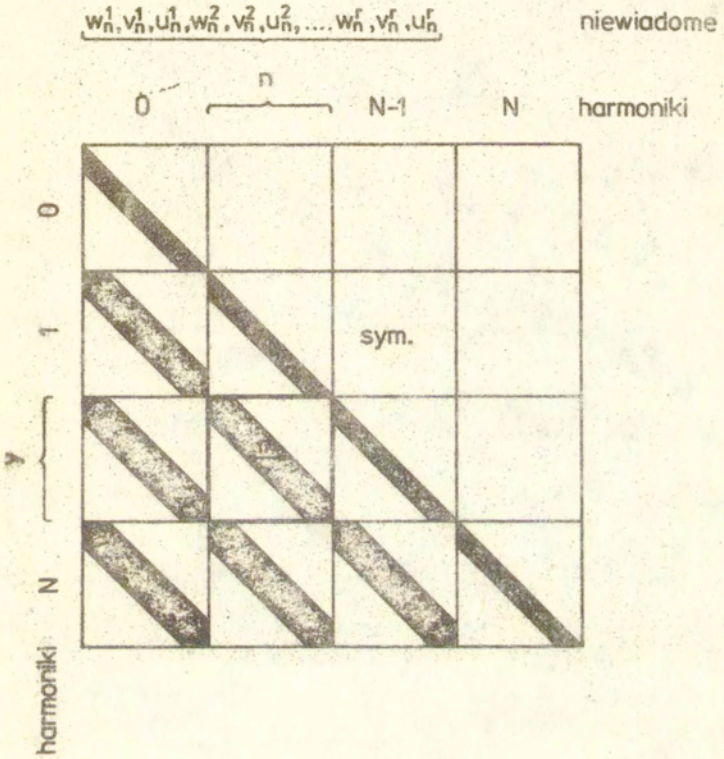
i obliczając wariacje względem wszystkich punktów tworzącej x .
Przed obliczeniem $[k]_{yn}$ wykonujemy obliczenia wstępne, wspólne dla wszystkich (y, n) :

i/ sprowadzenie iloczynów dwóch szeregów do postaci pojedynczego szeregu, tzn. obliczenie $[\hat{N}_m^1], [\hat{H}_m^1], [\hat{H}_m^2], [\hat{H}_m^3]$

ii/ utworzenie wyrażeń mających postać pojedynczego szeregu tzn. $[\hat{E}_m^1], [\hat{E}_m^2]$

Następnie wykonujemy mnożenia macierzy tworzących $[k]_{yn}$ dla tych indeksów m , które prowadzą do niezerowych całek $[\varphi_{ym}], [\varphi_{ymn}], [\bar{\varphi}_{ymn}]$. Globalną macierz sztywności tworzymy przeprowadzając agregację macierzy $[k]_{yn}$

$$[K] = \bigcup_{y, n} [k]_{yn} \quad y, n = 0, \dots, N \quad a = r(N+1)$$



Rys.9.1. Budowa macierzy sztywności.

W rezultacie otrzymujemy macierz wielopasmową pokazaną na rys. 9.1.

9.6. Macierze funkcji trygonometrycznych i całek z funkcji trygonometrycznych

$$[\overset{1}{\Phi}_n] = \text{diag}(\cos n\varphi, \cos n\varphi, \cos n\varphi)$$

3×3

$$[\overset{2}{\Phi}_n] = \text{diag}(\cos n\varphi, \cos n\varphi, \sin n\varphi)$$

3×3

$$[\overset{3}{\Phi}_n] = \text{diag}(\sin n\varphi, \cos n\varphi, \sin n\varphi)$$

3×3

$$[\overset{4}{\Phi}_n] = \text{diag}(\sin n\varphi, \cos n\varphi, \cos n\varphi)$$

3×3

$$[\overset{5}{\Phi}_n] = \text{diag}([\overset{2}{\Phi}_n], [\overset{2}{\Phi}_n], [\overset{2}{\Phi}_n])$$

9×9

W obliczeniach całek z iloczynów macierzy funkcji trygonometrycznych wykorzystano warunki ortogonalności funkcji trygonometrycznych. Dla wielomianów trygonometrycznych trzeciego stopnia prowadzi to do warunków logicznych onówionych dla całki (5.27).

$$\int_0^{2\pi} [\overset{2}{\Phi}_m][\overset{2}{\Phi}_n] d\varphi = \delta_{mn} [\varphi_n]$$

$$[\varphi_n] = \text{diag}(c_n, c_n, s_n)$$

3×3

$$c_n = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi = \begin{cases} n=0 \Rightarrow c_n = 2\pi \\ n \neq 0 \Rightarrow c_n = \pi \end{cases}$$

$$s_n = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi = \begin{cases} n=0 \Rightarrow s_n = 0 \\ n \neq 0 \Rightarrow s_n = \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} [\overset{4}{\phi}_p][\overset{3}{\phi}_m][\overset{2}{\phi}_n] d\varphi = [\varphi_{pmn}]$$

$$[\varphi_{pmn}] = \frac{1}{2} ([\overset{1}{J}] \cdot \delta_{kn} + [\overset{2}{J}] \cdot \delta_{ln}) \cdot [\varphi_n]$$

$$[\overset{1}{J}] = \text{diag}(-1, 1, 1)$$

$$[\overset{2}{J}] = \text{diag}(1, 1, -1 \cdot \text{sign}(p-m))$$

$$k = p+m \quad l = |p-m|$$

$$\int_0^{2\pi} [\overset{4}{\phi}_p][\overset{1}{\phi}_m][\overset{4}{\phi}_n] d\varphi = [\bar{\varphi}_{pmn}]$$

$$[\bar{\varphi}_{pmn}] = \frac{1}{2} ([\overset{3}{J}] \cdot \delta_{kn} + [\overset{4}{J}] \cdot \delta_{ln}) \cdot [\bar{\varphi}_n]$$

$$[\bar{\varphi}_n] = \text{diag}(s_n, c_n, c_n)$$

$$[\overset{3}{J}] = \text{diag}(1, 1, 1)$$

$$[\overset{4}{J}] = \text{diag}(1 \cdot \text{sign}(p-m), 1, 1)$$

δ_{kn}, δ_{ln} to delty Kroneckera.

9.7. Dyskretyzacja różnicowa i całkowanie po tworzącej

Operatory różnicowe tworzą w sposób opisany w rozdziale 5.5, wykorzystując punkty należące do wnętrza i brzegu obszaru. W rezultacie dyskretyzacji różnicowej dowolną składową wektora przemieszczeń f oraz jej pierwszą i drugą pochodną w punkcie i zapisujemy w postaci:

$$f^i = [p_i^{-1}, p_i, p_i^{+1}] \cdot \{f\}^i$$

$$f_{,x}^i = [p_i^{-1}, p_i, p_i^{+1}] \cdot \{f\}^i$$

$$f_{,xx}^i = [p_i^{-1}, p_i, p_i^{+1}] \cdot \{f\}^i$$

gdzie

$$\{f\}^t = [f^{i-1}, f^i, f^{i+1}]^T$$

$$p^{i-1}, p^{i+1} = 0, \quad p^i = 1$$

$j=i$ gdy i należy do wnętrza obszaru

$j=2$ lub $j=r-1$ gdy i jest punktem brzegowym

r to liczba węzłów.

Jeżeli dowolne wyrażenie podcałkowe Z zdyskretyzujemy metodą różnic skończonych to całkowanie po tworzącej sprowadza się do obliczenia następującej sumy:

$$\int_0^L Z dx = \sum_s \int_s Z dx = \sum_s \Delta^i \cdot Z$$

gdzie: s to obszar całkowania przypisany punktowi

Δ^i to długość obszaru całkowania.

	str.
Spis treści	
1. WSTĘP	
1.1. Wprowadzenie	4
1.2. Przegląd literatury	7
1.3. Cel i zakres pracy	11
2. PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII POWŁOK	
2.1. Oznaczenia	17
2.2. Deformacja typu Kirchhoffa-Love'a	17
2.3. Równania równowagi i statyczne warunki brzegowe	22
2.4. Związki fizyczne	24
2.5. Wybrane warianty teorii powłok	26
2.6. Równania teorii powłok dla geometrii powłoki cylindrycznej	32
2.7. Przyrostowy opis deformacji powłoki	37
3. ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ	
3.1. Definicja stateczności	41
3.2. Kryteria stateczności oraz warunek stanu krytycznego	42
3.3. Charakterystyka przeprowadzonych analiz stateczności	47
4. ANALIZA STATECZNOŚCI POCZĄTKOWEJ	
4.1. Równania stateczności początkowej dla powłok cylindrycznych	51
4.2. Analiza stateczności dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego	54
4.3. Analiza stateczności dla obciążenia niesymetrycznego	58
4.4. Przykłady numeryczne	61
5. ANALIZA STATECZNOŚCI Z UWZGLĘDNIENIEM DEFORMACJI DOKRYTYCZNEJ	
5.1. Metoda rozwiązania nieliniowych równań i wyznaczania punktu granicznego	74
5.2. Zastosowanie koncepcji rozwinięć Fouriera do analizy konstrukcji	79
5.3. Tworzenie układu równań dla zagadnienia liniowego	81
5.4. Tworzenie układu równań dla zagadnienia nieliniowego	84

	str.
5.5. Metoda różnic skończonych	88
5.6. Przykłady numeryczne	94
6. CHARAKTERYSTYKA PROGRAMÓW NUMERYCZNYCH	113
7. UWAGI KOŃCOWE	116
8. LITERATURA	119
9. DODATEK. MACIERZ SZTYWNOŚCI DLA NIELINIOWEJ ANALIZY PRZYROSTOWEJ	
9.1. Oznaczenia	128
9.2. Miary odkształceń i przyrostów odkształceń	128
9.3. Wariacje przyrostów odkształceń	132
9.4. Siły i momenty wewnętrzne	133
9.5. Tworzenie macierzy sztywności	134
9.6. Macierze funkcji trygonometrycznych i całek z funkcji trygonometrycznych	140
9.7. Dyskretyzacja różnicowa i całkowanie po tworzącej	141