

26/1984

Krzysztof Wiśniewski

ANALIZA NUMERYCZNA  
POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ:  
STATECZNOŚĆ POZĄTKOWA  
POD OBCIĄŻENIEM WIATREM

26/84

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 maja 1984 r.

56974



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.druk.2. Ark.wyd. 1,4

Odsano do drukarni w czerwcu 1984 r.

Nr zamówienia 435/84.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa  
ul. Śniadeckich 8

Krzysztof Wiśniewski

Zakład Teorii Konstrukcji, IPPT PAN

ANALIZA NUMERYCZNA POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ:  
STATECZNOŚĆ POCZĄTKOWA POD OBCIĄŻENIEM  
WIATREM

1. WSTĘP

Problem statecznego zachowania się powłok cylindrycznych pod działaniem wiatru wiąże się z projektowaniem takich konstrukcji inżynierskich jak np. zbiorniki na ciecze, silosy itp. Ze względu na duże znaczenie praktyczne tych konstrukcji powstało wiele prac, głównie eksperymentalnych i numerycznych, dotyczących zagadnienia stateczności.

Badania eksperymentalne, przeprowadzane na modelach umieszczanych w tunelu aerodynamicznym, miały dwójaki cel:  
a/ określenie rozkładu parcia na powierzchni cylindrycznej przy opływie powietrza (np. Ziółko [23]), który to rozkład może stanowić podstawę do analiz numerycznych stateczności, bądź

b/ bezpośrednio wyznaczenie obciążenia krytycznego (np. Kundurpi i in. [13]).

Prace numeryczne bazują w większości na klasycznej, zaproponowanej przez Koitera [11], koncepcji stateczności początkowej. Rezultaty tych analiz, dla powłok obciążonych wiatrem są wyższe lub niższe od wyników doświadczalnych, w zależności od rozkładu obciążeń przyjętego do analizy. Stosowane są dwa rodzaje rozkładów obciążeń:

a/ niesymetryczny odpowiadający rezultatom badań doświadczalnych;

b/ osiowosymetryczny rozkład zastępczy, wykorzystywany ze względu na związane z nim uproszczenia obliczeń.

Przyjęcie do analizy osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego prowadzi do rezultatów niższych od otrzymanych doświad-

czalnie (patrz Kundurpi i in. [ 13 ] ). Prace bazujące na tym założeniu zazwyczaj wykorzystują rozwinięcia wektora postaci wybożenia w skończony szereg Fouriera w kierunku obwodowym. Otrzymuje się wtedy ciąg zadań jednowymiarowych, które następnie są rozwiązywane analitycznie ( Kundurpi i in. [ 13 ] ), przy pomocy metody różnic skończonych ( Bushnell [ 4 ] ), lub metod całkowania numerycznego ( Kalnins [ 9 ] ).

Wyjątek stanowi praca Wildego i Sawickiego [ 22 ] , w której do analizy wpływu imperfekcji początkowych na wartość obciążenia krytycznego, zastosowano dwuwymiarową metodę różnic skończonych.

Ze względu na niesymetrię rzeczywistego rozkładu parcia wiatru na obwodzie powłoki właściwsze jest przyjęcie osiowo-niesymetrycznego obciążenia obliczeniowego. Dla takiego obciążenia z analizy stateczności początkowej otrzymuje się wartości wyższe od doświadczalnych.

Uwzględnienie niesymetrii stanu porównawczego sił błonowych znacznie komplikuje obliczeniową stronę analizy. Z tego powodu rozwiązanie analityczne otrzymał Almroth [ 1 ] tylko dla uproszczonego obciążenia w postaci

$$(1.1) \quad p(\theta) = p_0 + p_1 \cdot \cos \theta$$

Formę wybożenia przyjęto jako podwójne szeregi trygonometryczne i w oparciu o metodę Rayleigha - Ritza określono obciążenie krytyczne.

W pracy Maderspacha i in. [ 16 ] przy użyciu tej samej metody ale już na drodze numerycznej, otrzymano rozwiązanie dla większej liczby wyrazów rozwinięcia funkcji obciążenia co pozwoliło lepiej uwzględnić charakter obciążenia wiatrem.

Rozwinięcia w szereg Fouriera w kierunku obwodowym stosowano łącznie z innymi metodami w kierunku tworzącej: z rozkładem w szereg potęgowy ( Kundurpi i in. [ 13 ] ), oraz z metodą różnic skończonych ( Sheinman i in. [ 18 ] ). Metoda zastosowana w pracy [ 18 ] stanowi uogólnienie sposobu rozwiązywania

wykorzystanego przez Bushnella [ 4 ] do problemu osiowosymetrycznego.

Bardzo interesującą metodę rozwiązania problemu zaprezentował Bushnell w pracy [ 5 ] , w której powłokę cylindryczną aproksymowano wycinkiem torusa o bardzo dużym promieniu. W pracy tej wykorzystano z pewnymi modyfikacjami metodę zastosowaną przez Kalninsa [ 9 ] , który zagadnienie statyczne dla powłok osiowosymetrycznych poddanych niesymetrycznym obciążeniom rozwiązał stosując rozwinięcia w szereg Fouriera wzdłuż obwodu i wielosegmentową metodę całkowania numerycznego wzdłuż tworzącej powłoki. W analizie stateczności postać wybożenia rozwija się w szereg Fouriera wzdłuż dużego obwodu torusa, a całkowanie numeryczne odbywa się wzdłuż małego obwodu torusa, który odpowiada kierunkowi obwodowemu cylindra.

Najbardziej istotne, ze względu na metodę zastosowaną w niniejszej pracy, są pozycje Wanga, Billingtona [ 20 ] oraz Langhaara i Millera [ 14 ] . W pracach tych koncepcję rozwinięcia w szereg Fouriera w kierunku obwodowym połączono z metodą zakładania formy utraty stateczności wzdłuż tworzącej. Wykorzystano formy otrzymane z analizy powłoki obciążonej równomiernym ciśnieniem, które po znormalizowaniu posłużyły do określenia odpowiednich całek wzdłuż tworzącej.

Przybliżone równanie problemu otrzymano przez całkowanie równania stateczności wzdłuż tworzącej i przyrównanie całki do zera. W ten sposób "rozmyto" cziony residualne będące wynikiem przyjęcia rozkładów z analizy symetrycznej. Analiza powyższa bazowała na wariancie równań teorii powłok Timoshenki uproszczonych przez Wanga, Lee i Billingtona [ 21 ] /przyjęcie założenia o niewydłużalności w kierunku obwodowym/. W konsekwencji wyeliminowano składową wektora przemieszczeń w kierunku obwodowym co pozwoliło zredukować liczbę równań i warunków brzegowych oraz obniżyć rząd równań różniczkowych problemu. Jest to istotne ze względu na przyjęty w tych pracach sposób tworzenia ostatecznego układu równań.

Należy zauważyć, że koncepcja rozwinięcia poszukiwanych funkcji w szeregi Fouriera przynajmniej w jednym kierunku /podobnie jak w zagadnieniu osiowosymetrycznym/ jest stosowana

nieomal we wszystkich pracach dotyczących obciążenia niesymetrycznego. Wyjątek stanowią pozycje Brendela i Ramma [ 2, 3 ] , w których stosuje się trójwymiarowe zdegenerowane elementy skończone.

Zamierzeniem niniejszej pracy jest wybór takich metod analizy stateczności początkowej, które pozwolą analizować przypadki o dowolnych warunkach brzegowych i różnych rozkładach grubości. Ze względu na wiele zalet wybrano metodę, w której do rozwiązania zadania niesymetrycznego wykorzystuje się formy utraty stateczności wzdłuż tworzącej otrzymane w zadaniu symetrycznym (Wang, Billington [ 20 ] oraz Langhaar, Miller [ 14 ]]). W celu zwiększenia możliwości tej metody sformułowano ją nieco inaczej. Zrezygnowano w zadaniu osiowosymetrycznym z zakładania postaci rozwiązania jako kombinacji liniowej funkcji wykładniczych i trygonometrycznych.

$$(1.2) \quad w^{(k)} = A_{k1} \cdot e^{-\xi_k(1-y)} + A_{k2} \cdot e^{-\xi_k y} + A_{k3} \cdot e^{\eta_k y} + \\ A_{k4} \cdot e^{-\eta_k y} + A_{k5} \cdot \cos \xi_k y + A_{k6} \cdot \sin \xi_k y$$

gdzie:

$y = x/R$  - bezwymiarowa współrzędna wzdłuż tworzącej;  
 $\pm \xi_k, \pm \eta_k, \pm \zeta_k$  - pierwiastki równania charakterystycznego.

Zamiast tego, rozwinięcia w szereg Fouriera wykorzystano łącznie z metodą różnic skończonych (Bushnell [ 4 ]), która umożliwia uwzględnienie dowolnego, ograniczonego tylko gęstością siatki, rozkładu grubości po tworzącej.

Podkreślić należy, że powyższe numeryczno-analityczne metody są szczególnie efektywne w zagadnieniach lokalnej utraty stateczności, do których można zaliczyć problem stateczności powłoki cylindrycznej pod działaniem wiatru.

W oparciu o wymienione metody zbudowano programy na EMC i rozwiązano dwa przykłady.

Pierwszy przykład posłużył do oceny jakości rezultatów, przez

porównanie z wynikami otrzymanymi za pomocą innych metod. Ponadto w ramach tego przykładu zestawiono rezultaty otrzymane dla wariantów Donnella i Sandersa-Koitera równań teorii powłok. Jako drugi przykład analizowano powłokę o tej samej geometrii co w przykładzie pierwszym lecz skokowo zmiennej grubości. Wnioski dotyczą wpływu rozkładu grubości na wartość obciążenia krytycznego i postać utraty stateczności.

## 2. RÓWNANIA STATECZNOŚCI POCZĄTKOWEJ DLA POWŁOK CYLINDRYCZNYCH

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę stateczności powłoki pod działaniem obciążeń martwych, zaproponowaną przez Koitera [11]. W analizie tej przyjmuje się następujące założenia:

- (i) część obrotowa deformacji przedwyboczeniowej może być pominięta. Ten sam efekt uzyskuje się przyjmując, że konfiguracja przedwyboczeniowa pokrywa się z konfiguracją początkową.
- (ii) siły błonowe przed wyboczeniem są funkcjami liniowych miar odkształcenia.

Uwzględnienie założenia (i) linearyzuje równania problemu natomiast założenie (ii) pozwala sprowadzić problem do postaci uogólnionego zagadnienia na wartości własne. Powyższą analizę można interpretować [7, 10] jako analizę jednoznaczności rozwiązania liniowego zagadnienia statycznego lub jako analizę stabilności tego rozwiązania /wyłącznie dla układów dyskretnych i powłok małowyniosłych/. Poszukiwane obciążenie krytyczne stanowi odpowiednio: punkt bifurkacji rozwiązania lub, jeżeli zastosować kryterium dynamiczne wg Lapunowa oraz normę energetyczną w przestrzeni przemieszczeń, punkt rozdzielający stabilne i niestabilne odcinki rozwiązania. Nie jest z góry rozstrzygnięta kwestia stabilności w punkcie krytycznym; warunek wystarczający podany został przez Koitera [12].

Równania stateczności początkowej dla powłoki cylindrycznej

otrzymuje się w oparciu o warunek stanu krytycznego.

$$(2.1) \quad \delta ( P_2 ) = 0$$

gdzie:  $P_2$  - jest drugą różniczką przyrostu energii potencjalnej  $P$ . Przy czym przyrost ten jest skutkiem kinematycznie dopuszczalnej deformacji od położenia równowagi do położenia sąsiedniego. Na skutek założenia (1) o deformacji przedwyboczeniowej, w wyrażeniu na  $P_2$  zaniedbuje się składowe styczne  $\varphi_\alpha$  wektora obrotu charakteryzujące deformację w położeniu równowagi.

W niniejszej pracy analizę stateczności przeprowadzono dla dwóch wariantów teorii powłok: teorii powłok małowyniosłych Donnella [8] oraz teorii Sandersa [17]. Wyrażenia na drugą różniczkę przyrostu energii potencjalnej podane zostały dla powłok małowyniosłych w pracy [11] a dla teorii Sandersa w materiałach konferencyjnych [19]. W równaniach Sandersa przyjęto dodatkowo, że składowa  $\varphi_3$  wektora obrotu /prostopadła do powierzchni środkowej/ dla deformacji związanej z wyboczeniem jest małą tego samego rzędu co odkształcenie

$\epsilon_{\alpha\beta}$  oraz co kwadrat składowych  $\varphi_\alpha$  stycznych do powierzchni środkowej. Pozwala to pominąć człony zawierające  $(\varphi_3)^2$  tak, że wyrażenia dla drugiej różniczki przyrostu energii potencjalnej, w obydwu wspomnianych wariantach teorii, różnią się wyłącznie składowymi  $\varphi_\alpha$  wektora obrotu.

Postać drugiej różniczki przyrostu energii potencjalnej jest następująca:

$$(2.2) \quad P_2 = \int_S \left[ \frac{h}{2} E^{\alpha\beta\lambda\mu} (\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu}) \right] ds + \frac{1}{2} \int_S N^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta ds$$



gdzie:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} w$$

$$\chi_{\alpha\beta} = -\varphi_{\alpha,\beta}$$

$$N^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu}$$

$\epsilon_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}$  - liniowe miary odkształceń i zmian krzywizny powłoki

$N^{\alpha\beta}$  - siły błonowe

$w, u_\alpha$  - składowe wektora przemieszczeń od konfiguracji początkowej do konfiguracji sąsiedniej

$E^{\alpha\beta\lambda\mu}$  - tensor sprężystości materiału powłoki

$h$  - grubość powłoki

$\varphi_\alpha$  - oznacza składowe wektora obrotu /styczne do powierzchni środkowej/

W teorii powłok małowyniosłych Donnella

$$(2.3) \quad \varphi_\alpha = -w_{,\alpha}$$

natomiast w teorii Sandersa

$$(2.4) \quad \varphi_\alpha = -w_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} u^\beta$$

Założenie (ii) pozwala wyrazić stan sił błonowych w następującej postaci:

$$(2.5) \quad N^{\alpha\beta} = \lambda \cdot N_0^{\alpha\beta}$$

$N_0^{\alpha\beta}$  jest stanem porównawczym sił błonowych wyznaczonym na podstawie liniowej analizy statycznej dla obciążenia jednostkowego. Analiza stateczności początkowej sprowadza się do wyznaczenia z warunku (2.1) wartości mnożnika  $\lambda$  charakteryzują-

cej stan krytyczny tzn.  $\lambda_{kr}$ .

Po dyskretyzacji drugiej różniczki przyrostu energii potencjalnej powłokę traktuje się jak układ sprężysty o  $n$ -stopniach swobody. W efekcie deformacja powłoki charakteryzowana jest przez współrzędne uogólnione  $q_k$ ,  $k=1, \dots, n$  mierzone od konfiguracji równowagi. Należy zaznaczyć, że interpretacja współrzędnych uogólnionych jest różna w zagadnieniach omawianych w rozdziałach 3 i 4.

Z warunku minimum drugiej różniczki przyrostu energii potencjalnej (2.1) otrzymujemy jednorodny układ  $n$  liniowych równań zagadnienia

$$(2.6) \quad ([K] + \lambda [K^6]) \{q\} = \{0\}$$

gdzie:  $[K]$  - symetryczna i dodatnio określona macierz sztywności sprężystej

$[K^6]$  - symetryczna macierz naprężeń początkowych

$\{q\} = \{q_1, \dots, q_n\}$  - wektor współrzędnych uogólnionych

Rozwiązanie powyższego uogólnionego zadania na wartości własne stanowi  $n$  par  $[\lambda_i, \{q\}_i]$  gdzie  $\lambda_i$  to wartości własne, a  $\{q\}_i$  odpowiadające im wektory własne.

Najmniejsza dodatnia wartość  $\lambda_i$  to obciążenie krytyczne  $\min \lambda_i = \lambda_{kr}$ , a odpowiadający jej wektor własny to postać utraty stateczności.

Przeprowadzenie powyższej analizy nie rozstrzyga kwestii czy wyznaczony punkt krytyczny jest stabilny w sensie Lapunowa. Jednak ponieważ dla analizowanych przykładów istnieją rezultaty doświadczalne więc można wnioskować o stabilności bez odwoływania się do odpowiedniego twierdzenia Koitera [ 12 ] .

### 3. ANALIZA STATECZNOŚCI DLA OSIOWOSYMETRYCZNEGO OBCIĄŻENIA ZASTĘPCZEGO

Pomimo, że obciążenie wiatrem jest osiowoniesymetryczne, pewną wartość użyteczną ma analiza oparta na założeniu osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego. Przyjęcie takiego obciążenia, któremu odpowiada osiowosymetryczny stan porównawczy  $N_o^{AS}$ , prowadzi do wartości obciążenia krytycznego niższych od otrzymanych eksperymentalnie. Zalety powyższego uproszczenia uwiadcniają się w analizach numerycznych opartych na rozwinięciu formy utraty stateczności w szereg Fouriera w kierunku obwodowym powłoki. Przyjmijmy, że forma utraty stateczności jest następująca:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} w(x, \varphi) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^l w_n(x) \cdot \cos n\varphi \\ u(x, \varphi) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^l u_n(x) \cdot \sin n\varphi \\ v(x, \varphi) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^l v_n(x) \cdot \cos n\varphi \end{aligned}$$

gdzie  $x, \varphi$  - współrzędne cylindryczne: południkowa i kątowa  
 $l$  - liczba fal w kierunku obwodowym

Dla powyższych reprezentacji i stałej wartości sił błonowych w kierunku obwodowym druga różniczka przyrostu energii potencjalnej (2.1) jest wielomianem trygonometrycznym 2-go stopnia. Wykonanie całkowania względem  $\varphi$  prowadzi do dekompozycji funkcjonału  $P_2$  na funkcjonały składowe  $(P_2)_j$  związane z deformacją, przy utracie stateczności, w postaci pojedynczej harmoniki  $j$ .

$$(3.2) \quad P_2 = \sum_{j=0}^l (P_2)_j$$

Otrzymane funkcjonały składowe, zależne wyłącznie od

współrzędnej  $x$ , przekształcono do postaci algebraicznej za pomocą metody różnic skończonych. W pierwszym etapie wybrano punkty węzłowe i przydzielono im wzajemnie rozłączne lecz pokrywające cały obszar, przedziały całkowania. Następnie w otoczeniu każdego punktu węzłowego rozwinięto funkcje  $w_j(x)$ ,  $u_j(x)$ ,  $v_j(x)$  w szereg Taylora i wykonano całkowanie wzdłuż  $x$ , w przedziałach przypisanych tym punktom.

W ostatnim etapie pochodne w punktach węzłowych zastąpiono operatorami różnicowymi, które tworzą w oparciu o warunek minimum błędu, jednak inaczej niż w pracy Liszki i Orkisz [15]. Nie przytaczając tutaj tego warunku, zwięźle opiszemy model różnicowy i sposób tworzenia operatorów.

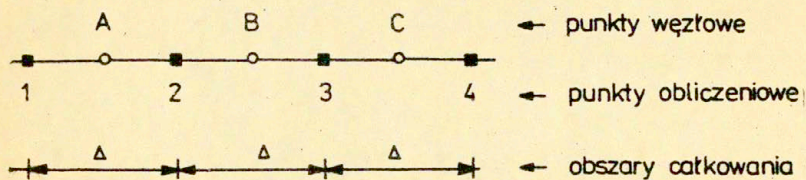
W modelu różnicowym, /patrz rys.1/, rozróżniono dwa rodzaje punktów: węzłowe (A,B,C) oraz obliczeniowe (1,2,3,4). Punktem węzłowym przypisano obszary całkowania i w punktach tych zdefiniowano operatory różnicowe, które były wyrażone za pomocą wielkości w punktach obliczeniowych. Przyjęto, że punkty węzłowe są rozmieszczone, równomiernie, a punkty obliczeniowe znajdują się na granicach przedziałów całkowania. Warunki brzegowe uwzględniono operując wielkościami w punktach obliczeniowych.

Operatory różnicowe tworzą w dwóch etapach. Na początku pierwszą pochodną, np. w punkcie B, wyrażono za pomocą wielkości w sąsiednich punktach obliczeniowych 2 i 3

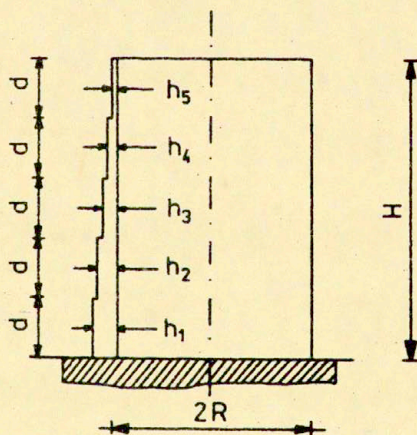
$$(3.3) \quad f_{,x}(B) = \frac{1}{2\Delta} (f(3) - f(2))$$

gdzie:  $f$  - dowolna składowa wektora przemieszczenia,  
a  $\Delta$  - odległość punktów obliczeniowych.

Jest to klasyczny operator różnicowy dla pierwszej pochodnej. W kolejnym etapie, drugą pochodną otrzymano z warunku minimum błędu, przy czym pierwsza pochodna wykorzystywana była w postaci różnicowej. W efekcie drugą pochodną w punkcie B wyrażono jest za pomocą wielkości w punktach 1,2,3,4. Jeżeli punkt B jest odpowiednio odległy od brzegu obszaru



Rys. 1. Schemat obliczeniowy : numeracja punktów i przydział obszarów całkowania .



Rys. 2. Geometria powłoki .

wtedy postać operatora dla drugiej pochodnej jest następująca:

$$(3.4) \quad f_{,xx}(B) = \frac{1}{90\Delta} (f(1) - f(2) - f(3) + f(4))$$

Zastosowanie powyższych operatorów zapewnia gładkie rozwiązania zagadnienia na wartości własne dla powłok o stałej grubości, podobnie jak operatory klasyczne dla siatek naprzemiennych zaproponowane przez Bushnella i in. w [ 6 ] .

Ostatecznie otrzymaliśmy zdyskretyzowany funkcjonał drugiej różniczki przyrostu energii potencjalnej  $(P_2)_j$ , który związany jest z formą utraty stateczności, odpowiadającą  $j$ -tej harmonice. Obliczenie wariacji tego funkcjonału względem składowych wektora, opisującego formę utraty stateczności, prowadzi do warunków:

$$(3.5) \quad \frac{\partial (P_2)_j}{\partial q_{jz}} = 0 \quad j = 0, \dots, l \quad z = 1, \dots, 3r$$

gdzie:

$$q_{jz} \in \{ w_{j1}, v_{j1}, u_{j1}, \dots, w_{jr}, v_{jr}, u_{jr} \}$$

$q_{jz}$  - składowa wektora formy utraty stateczności odpowiadającego  $j$ -tej harmonice, w punkcie obliczeniowym

$l$  - liczba wyrazów rozwinięcia w szereg Fouriera

$r$  - liczba punktów obliczeniowych.

W rezultacie z warunku (3.5) otrzymujemy uogólnione zagadnienie na wartości własne (2.6). Rozwiązując  $(l+1)$  takich zagadnień, znajdujemy dla każdego minimalną wartość własną i odpowiadający wektor własny. Obciążenie krytyczne określamy następująco:

$$(3.6) \quad \lambda_{kr} = \min \lambda_j \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 0, \dots, l$$

a postać utraty stateczności jest charakteryzowana, w kierunku obwodowym, przez odpowiadającą obciążeniu krytycznemu harmonikę. Obie macierze zagadnienia (2.6): infinitezymalna  $[K]$  i naprężeń początkowych  $[K^0]$  są dla tego problemu macierzami pasmowymi, co wpływa bardzo korzystnie na efektywność metody.

#### 4. ANALIZA STATECZNOŚCI DLA OBCIĄŻENIA NIESYMETRYCZNEGO

W przypadku niesymetrycznego obciążenia powłoki właściwsza, od zaprezentowanej w poprzednim rozdziale, jest metoda uwzględniająca niesymetrię stanu porównawczego sił błonowych. Obciążenie krytyczne, wyznaczone na podstawie analizy z niesymetrycznym stanem  $N_0^{\alpha\beta}$  jest wyższe od rezultatów eksperymentalnych.

Założmy, że składowe wektora postaci utraty stateczności są aproksymowane skończonymi szeregami Fouriera:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} w(x, \varphi) &= w_0(x) + \sum_{n=1}^l w_n(x) \cdot \cos n\varphi \\ u(x, \varphi) &= u_0(x) + \sum_{n=1}^l u_n(x) \cdot \sin n\varphi \\ v(x, \varphi) &= v_0(x) + \sum_{n=1}^l v_n(x) \cdot \cos n\varphi \end{aligned}$$

gdzie:  $x, \varphi$  - współrzędne cylindryczne: południkowa i kątowa

$l$  - liczba fali w kierunku obwodowym.

Również stan porównawczy sił błonowych przyjęto w postaci szeregu Fouriera

$$(4.2) \quad \begin{aligned} N_0^{11}(x, \varphi) &= [N_0^{11}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [N_0^{11}(x)]_n \cdot \cos n\varphi \\ N_0^{22}(x, \varphi) &= [N_0^{22}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [N_0^{22}(x)]_n \cdot \cos n\varphi \\ N_0^{12}(x, \varphi) &= [N_0^{12}(x)]_0 + \sum_{n=1}^k [N_0^{12}(x)]_n \cdot \sin n\varphi \end{aligned}$$

Dla powyższych aproksymacji we wzorze (2.2) wyrażenie podcałkowe drugiego członu

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} \int_S N_o^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta ds$$

jest wielomianem trygonometrycznym 3-go stopnia. W konsekwencji macierz naprężeń początkowych  $[K^0]$ , utworzona z tego członu nie jest macierzą jednopasmową. Nie można, jak uprzednio, rozłożyć całego zagadnienia na podzagadnienia i analizować problemu przez rozwiązanie ciągu zadań składowych o dużo mniejszych rozmiarach. Konieczność rozwiązywania od razu całego zagadnienia powoduje znaczny wzrost rozmiarów rozwiązywanego zadania, w porównaniu z zagadnieniem osiowosymetrycznym. Z tego względu zrezygnowano z łącznego zastosowania rozwinięć w szeregi Fouriera (4.1), (4.2) i aproksymacji metodą różnic skończonych w kierunku tworzącej.

W celu zmniejszenia rozmiarów zadania wykorzystano koncepcję przyjęcia wektora formy utraty stateczności w kierunku tworzącej powłoki [20,14]. Oznacza to, że w rozwinięciu (4.1) przyjęto następujące relacje:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} w_j(x) &= w_j \cdot \bar{w}_j(x) \\ u_j(x) &= u_j \cdot \bar{u}_j(x) \\ v_j(x) &= v_j \cdot \bar{v}_j(x) \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{w}_j(x) &= \frac{w_j^s(x)}{w_j^s(x_{max})} \\ \bar{u}_j(x) &= \frac{u_j^s(x)}{u_j^s(x_{max})} \\ \bar{v}_j(x) &= \frac{v_j^s(x)}{v_j^s(x_{max})} \end{aligned}$$



przy czym indeks  $j$  odpowiada indeksowi  $o$  lub  $m$  lub  $n$ .  
Funkcje  $\bar{w}_j(x), \bar{u}_j(x), \bar{v}_j(x)$  są znormalizowanymi wektorami własnymi  $w_j^s(x), u_j^s(x), v_j^s(x)$  zadania dla symetrycznego stanu porównawczego a  $w_j, u_j, v_j$  to współczynniki, które tworzyć będą niewiadomy wektor własny zadania.

Przyjęcie wektora formy utraty stateczności z zadania osiowo-symetrycznego, rozwiązanego przy użyciu metody różnic skończonych w kierunku tworzącej, pozwala uwzględnić między innymi skokowo zmienną grubość powłoki w tym kierunku.

Założenie wektora formy utraty stateczności, poprzedzone rozdzielaniem zmiennych, umożliwia znaczne uproszczenie funkcjonału przyrostu drugiej różniczki energii potencjalnej. Obliczając całki w kierunku obwodowym wykorzystuje się najpierw tożsamości trygonometryczne typu

$$(4.6) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [ \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) ]$$

w celu zredukowania wielomianów trygonometrycznych 3-go stopnia do wielomianów 2-go stopnia, a następnie korzysta się z ortogonalności funkcji trygonometrycznych w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Etap powyższy poprzedzony jest określeniem całek w kierunku tworzącej; ponieważ zarówno stan porównawczy sił jak i formy utraty stateczności określono w oparciu o model różnicowy, potrzebne całki obliczono numerycznie wykorzystując wartości w węzłach siatki.

Następnie dokonano wariacji potencjału 2-giej różniczki przyrostu energii potencjalnej względem współczynników  $w_j, u_j, v_j$  co prowadziło do warunków

$$(4.7) \quad \frac{\partial (P_2)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 0, \dots, l$$

przy czym

$$q_j \in \{ w_0, u_0, v_0, \dots, w_l, u_l, v_l \}$$

Ostatecznie musimy rozwiązać jedno zadanie (2.6) na wartości własne o rozmiarze  $3 \cdot (L+1)$ . Ponieważ w niektórych zagadnieniach z góry można określić charakter deformacji przy utracie stateczności, istnieje możliwość pominięcia pewnych wyrazów szeregu (4.1). Pozostawienie wyłącznie istotnych harmonik umożliwia dalsze zmniejszenie rozmiarów zadania.

## 5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

W oparciu o metody opisane w rozdziałach 3 i 4 zbudowano programy numeryczne do rozwiązania postawionych zagadnień. Programy napisano w języku FORTRAN i uruchomiono na maszynie cyfrowej ODRA 1305.

### Przykład 1

W celu dokonania oceny jakości rezultatów otrzymywanych za pomocą przygotowanych programów obliczono powłokę, która była już analizowana w pracach [13] i [2]. Jest to powłoka cylindryczna otwarta od góry, o stałej grubości, ze swobodną górną a utwierdzoną dolną krawędzią, rys.2. Dane geometryczne i materiałowe dla tej powłoki są następujące:

$$R = 40 \text{ [in]} \quad (101.6 \text{ [cm]})$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h = 0.1064 \text{ [in]} \quad (0.2703 \text{ [cm]})$$

$$L = 120 \text{ [in]} \quad (304.8 \text{ [cm]})$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ [psi]} \quad (0.2109 \cdot 10^7 \text{ [kg/cm}^2\text{]})$$

$$\nu = 0.3$$

Przyjęto, że obciążenie wiatrem jest stałe wzdłuż wysokości cylindra natomiast w kierunku obwodowym ma postać:

$$(5.1) \quad C(\varphi) = \sum_{n=0}^6 C_n \cdot \cos n\varphi$$

przy czym kąt  $\varphi$  jest odmierzany od płaszczyzny symetrii obciążenia. Współczynniki  $C_n$  ustalono na podstawie badań modelowych w tunelu aerodynamicznym [ 13 ] :

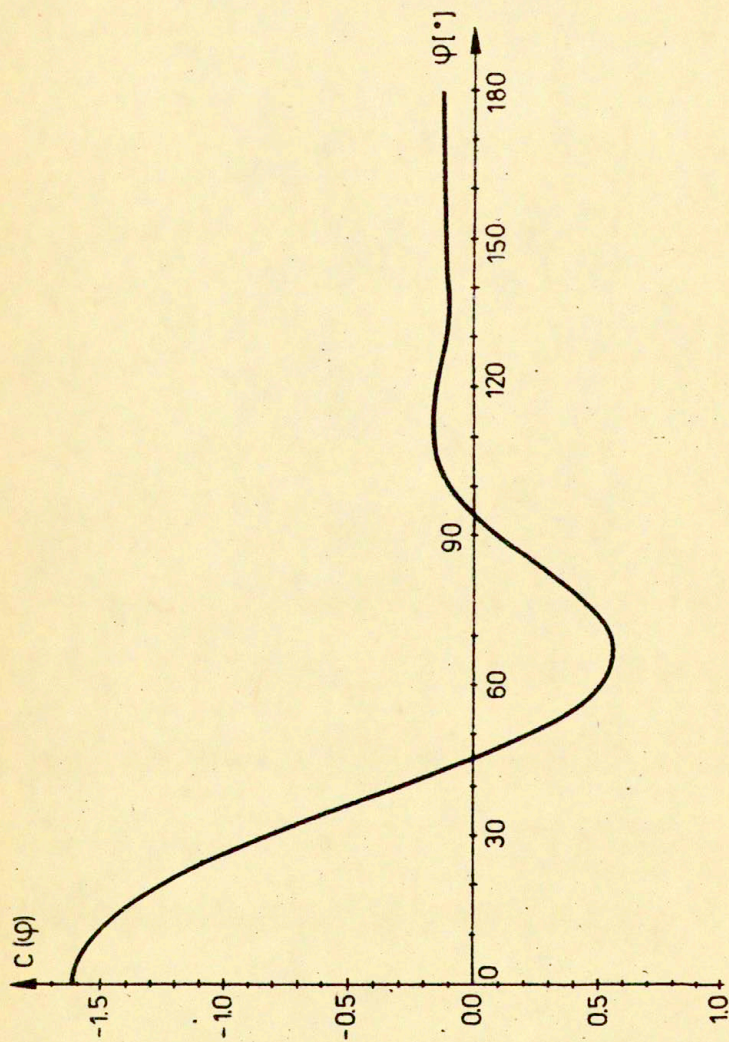
$$\begin{aligned} C_0 &= -0,220 & , & & C_1 &= -0,338 & , & & C_2 &= -0,533 & , \\ C_3 &= -0,471 & , & & C_4 &= -0,166 & , & & C_5 &= +0,066 & , \\ C_6 &= +0,055 \end{aligned}$$

Rozkład parcia wiatru  $C(\varphi)$  pokazano na rys.3. Wartość maksymalna  $C(\varphi)$  jest równa -1,607 dla  $\varphi = 0^\circ$ .

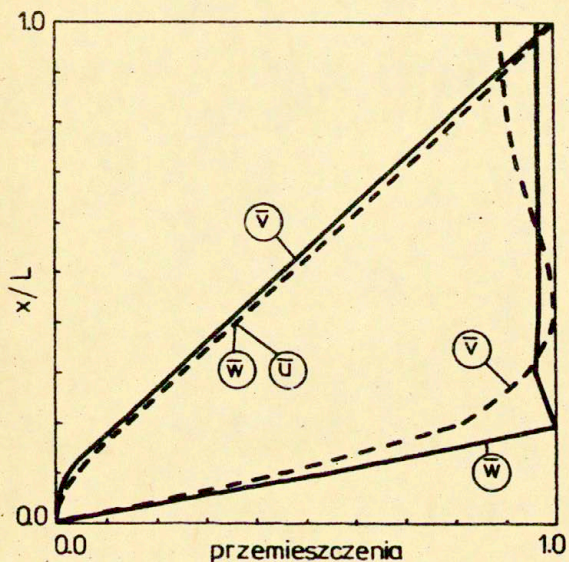
Dla zadanej powłoki i obciążenia przeprowadzono liniową analizę statyczną w celu określenia stanu porównawczego sił błonowych. Do analizy tej wykorzystano program bazujący na rozwinięciu funkcji przemieszczeń w szereg Fouriera i metodzie różnic skończonych.

W analizie stateczności pod działaniem zastępczego, osiowo-symetrycznego obciążenia wykorzystano metody opisane w rozdziale 3. Błonowy stan sił porównawczych generowano w oparciu o wektor przemieszczeń otrzymany w analizie liniowej dla zerowej harmoniki obciążenia. Zastosowano model różnicowy składający się z 11 węzłów obliczeniowych, co daje około 30 niewiadomych w zadaniu. Założono wektor formy utraty stateczności w postaci szeregu cosinusowego /patrz wzór (3.1)/, dla  $n = 1, \dots, 9$ . Poszukując obciążenia krytycznego przeprowadzono 9 analiz dla wektora formy utraty stateczności w postaci poszczególnych harmonik. Otrzymano obciążenie krytyczne równe  $\lambda_{kr} = 2,108$ , które odpowiada harmonice dla  $n=6$ , jako formie utraty stateczności w kierunku obwodowym. Znormalizowany rozkład postaci utraty stateczności wzdłuż tworzącej przedstawiono na rys.4. Na rysunku tym zamieszczono również znormalizowane przemieszczenie odpowiadające harmonice dla  $n=0$ , na podstawie którego generowano stan porównawczy sił błonowych

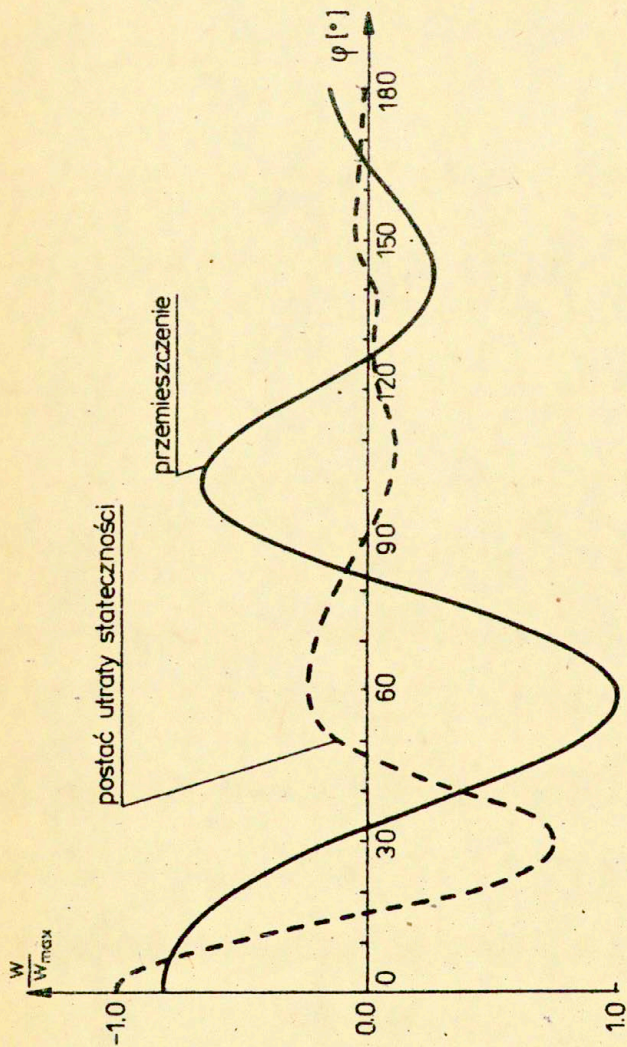
W analizie uwzględniającej niesymetrię obciążenia, do utworzenia stanu porównawczego sił błonowych, wykorzystano



Rys. 3. Rozkład parcia wiatru po obwodzie powłoki .



Rys. 4. Znormalizowane przemieszczenia dla  $n=4$  /linia ciągła/ i postać utraty stateczności dla  $n=6$  /linia przerywana/. Powłoka o stałej grubości .



Rys. 5. Znormalizowane przemieszczenie /linia ciągła/ i postać utraty stateczności /linia przerywana/ górnej krawędzi powłoki,  $x/L=1,0$ . Powłoka o stałej grubości.

rezultaty liniowej analizy statycznej otrzymane dla wszystkich harmonik rozwinięcia (5.1). Podstawą analizy z niesymetrycznym stanem porównawczym stanowi założenie, że w kierunku tworzącej formy wektora utraty stateczności są takie same jak otrzymano w analizie osiowosymetrycznej. Wektora utraty stateczności poszukiwano jako szerego cosinusowego.

Wykorzystując rezultaty zawarte w pracy [13] ograniczono się wyłącznie do istotnych, dla zadanej geometrii harmonik tj. dla  $n=3, \dots, 9$ ; co prowadzi do zadania z 21 niewiadomymi.

Przeprowadzono analizy dla wariantów równań Donnella i Sandersa /patrz rozdz.2/. Znormalizowaną składową normalną  $\bar{W}$  wektora postaci utraty stateczności, dla równań Donnella przedstawia rys.5. Postać otrzymana dla równań Sandersa /której nie naniesiono na rys.5/ niewiele różni się od niej. Obliczone obciążenia krytyczne zestawiono w tabelicy 1 z rezultatami otrzymanymi eksperymentalnie oraz za pomocą różnych metod obliczeniowych i wariantów równań przez innych autorów.

Zestawienie w tabelicy 1 potwierdza poprawność programów, zbudowanych w oparciu o opisane uprzednio metody. Rezultaty analizy z osiowosymetrycznym obciążeniem zastępczym niewiele różnią się ( $< 3\%$ ) od rezultatów otrzymanych metodą rozwinięć w szeregi Fouriera. Bardzo dobre, w porównaniu z wynikami pracy [13], są rezultaty analizy dla obciążenia niesymetrycznego. W pracy tej stosowano rozwinięcia w szeregi Fouriera w kierunku obwodowym oraz aproksymację szeregiem potęgowym 5-go stopnia w kierunku tworzącej. Stosując metodę zakładania postaci utraty stateczności otrzymaliśmy identyczną wartość obciążenia krytycznego. Wartość ta jest niższa o około 27% od obciążenia krytycznego otrzymanego w pracy [2] za pomocą zdegenerowanych, trójwymiarowych elementów skończonych. Należy zaznaczyć, że rezultat autora jest bliższy wynikom doświadczalnym. W analizowanym przykładzie rezultaty obliczeń numerycznych przeprowadzonych przez autora są wyższe oraz niższe o około 30% od wartości eksperymentalnej. Można oczekiwać zbieżności wyników tych dwóch typów analiz gdy grubość powłoki maleje.

Tablica 1. Zestawienie obciążeń krytycznych  $\lambda_{kr}$  dla powłoki o stałej grubości obciążonej wiatrem.

	EKSPERYMENT	O B L I C Z E N I A					
		obciążenie symetryczne			obciążenie niesymetryczne		
		obl. własne	[13]	[2]	obl. własne	obl. własne	
pozycja	[13]						
równania		Donnella	Sandersa	Donnella		Donnella	Sandersa
metoda rozwiązania		szeregi Fouriera	szereg Fouriera i różnice skończone	wielomian potęgowy 5-go stopnia i szereg Fouriera	elementy skończone 3 wymiarowe zdegenerowane S16	szereg Fouriera	szereg Fouriera i postaci z analizy symetrycznej
$\lambda_{kr}$	3.045	2.03	2.108	3.857	4.69	3.860	3.927
$\frac{\lambda_{kr}}{\lambda_{ksp}}$	1.0	0.667	0.692	1.267	1.54	1.268	1.289



## Przykład 2

Zastosowane metody wyznaczania obciążenia krytycznego dają możliwość analizowania powłok o nierównomiernym rozkładzie grubości. W celach porównawczych przeprowadzono obliczenia dla powłoki, która różni się od tej z przykładu 1 wyłącznie skokowo zmiennym rozkładem grubości. Szerokość poszczególnych pasów wynosi  $d=24$  [in] (60.96 [cm]) a grubości są następujące:

$$h_1 = 0.1596 \text{ [in]} \quad (0.4054 \text{ [cm]})$$

$$h_2 = 0.1330 \text{ [in]} \quad (0.3378 \text{ [cm]})$$

$$h_3 = 0.1064 \text{ [in]} \quad (0.2703 \text{ [cm]})$$

$$h_4 = 0.0798 \text{ [in]} \quad (0.2027 \text{ [cm]})$$

$$h_5 = 0.0532 \text{ [in]} \quad (0.1351 \text{ [cm]})$$

Grubości pasów maleją skokowo od krawędzi zamocowanej do krawędzi swobodnej, rys.2. Pozostałe parametry powłoki oraz obciążenie są takie same jak w przykładzie 1.

Średnia grubość obydwu powłok, tej z przykładu 1 i z przykładu 2, jest identyczna. Można zatem, powłokę o stałej grubości traktować jako zastępczą dla powłoki o skokowo zmiennej grubości. Powłoka zastępcza jest często przyjmowana w uproszczonych analizach inżynierskich; interesująca jest zatem kwestia jakie powoduje to niedokładności. W niniejszej pracy porównano podstawowe rezultaty analizy stateczności dla powłoki rzeczywistej i zastępczej tzn. wartości obciążeń krytycznych i postaci utraty stateczności.

W analizie powłoki o skokowo zmiennej grubości zastosowano ten sam model różnicowy co w przykładzie 1, lecz o 21 punktach obliczeniowych. Rozkład węzłów siatki zapewnia, że na pojedynczy pas przypadają 4 obszary całkowania wzdłuż tworzącej oraz, że w poszczególnych obszarach grubość powłoki jest stała.

Analizę stateczności z zastępczym osiowosymetrycznym obciążeniem przeprowadzono w oparciu o równania powłok Sandersa, natomiast analizę dla obciążenia niesymetrycznego bazując na wariancie równań Donnella. Otrzymane wartości obciążenia krytycznego zamieszczono w tabelicy 2 a składową w wektora przemieszczeń

i formy utraty stateczności dla harmoniki  $n=7$  pokazano na rys.6.

Tablica 2. Wartości obciążeń krytycznych  $\lambda_{kr}$  dla powłoki o stałej i skokowo zmiennej grubości.

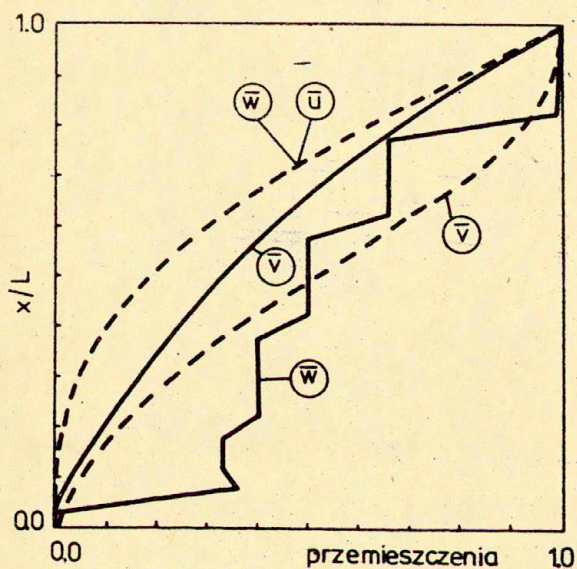
grubość	obciążenie	
	symetryczne	niesymetryczne
stała	2.108	3.860
zmienna	0.879	0.920

Poniżej pokonamy porównania obciążeń krytycznych i postaci utraty stateczności dla powłoki rzeczywistej i zastępczej. Wyznaczone obciążenia krytyczne dla powłoki o skokowo zmiennej grubości są w istotny sposób niższe od tych dla powłoki o stałej grubości. Dla obciążenia symetrycznego stanowią ok. 41 %, a dla niesymetrycznego 24 % wartości krytycznej dla powłoki o stałej grubości. Stąd wniosek, że posługiwanie się w analizie powłoką zastępczą prowadzi do znacznego zawyżenia wartości obciążenia krytycznego.

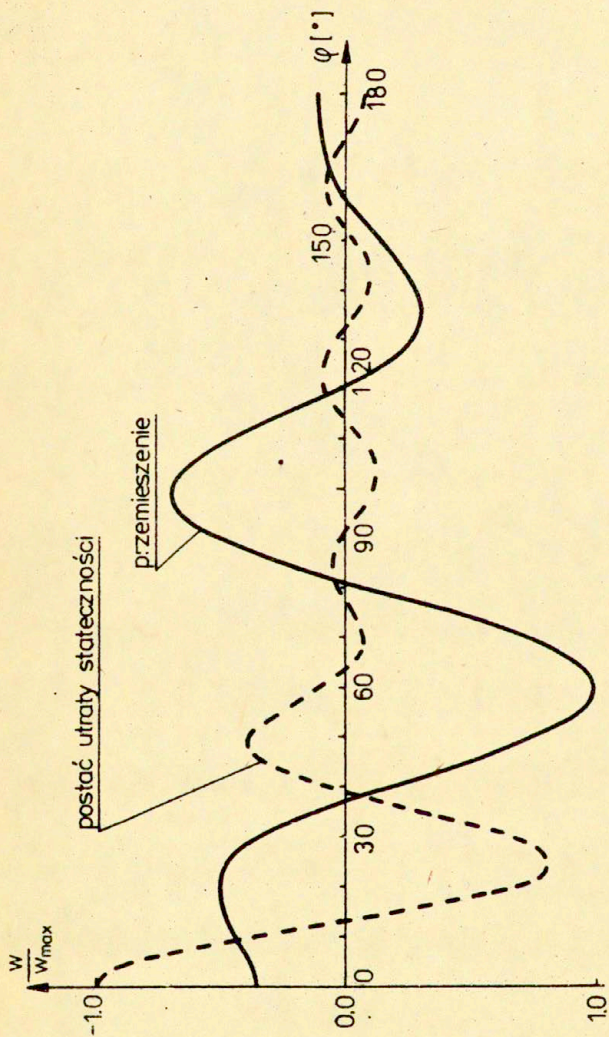
Zmniejszyła się różnica pomiędzy wynikami analizy dla obciążenia symetrycznego i niesymetrycznego: dla powłoki o stałej grubości stosunek obciążeń krytycznych wynosi  $3.860/2.108 \approx 1.83$ , dla skokowo zmiennej jest równy  $0.920/0.879 \approx 1.05$ . Efekt powyższy związany jest z dwukrotnym wzrostem wiotkości powłoki  $R/h$ , od wartości 376 do wartości 752 lub najcieńszego pasa powłoki o zmiennej grubości.

Porównując znormalizowane przemieszczenia i formy utraty stateczności (rys.4 i 6), stwierdzić można różnice w rozkładzie tych wielkości wzdłuż tworzącej, odpowiadające różnicom w rozkładzie grubości.

Porównanie przemieszczeń górnej krawędzi (rys. 5 i 7), pokazuje różnicę kształtu w strefie czołowej, w pobliżu płaszczyzny symetrii obciążenia. Wielkości maksymalne przemieszczeń,



Rys. 6. Znormalizowane przemieszczenia dla  $n=0$  /linia ciągła/ i postać utraty stateczności dla  $n=7$  /linia przerywana/. Powłoka o skokowo zmiennej grubości .



rys. 7. Znormalizowane przemieszczenie /linia ciągła/ i postać utraty stateczności /linia przerywana/ górnej krawędzi powłoki ,  $x/l=1.0$  . Powłoka o skokowo zmiennej grubości.

dla  $\varphi = 60^\circ$ , są podobne. Dla składowej w wynoszą one: dla powłoki o stałej grubości  $-0.403$  [in] ( $-1.024$  [cm]) a dla powłoki o zmiennej grubości  $-0.410$  [in] ( $-1.041$  [cm]). Jeżeli traktować wartość dla powłoki o zmiennej grubości jako dokładną to wartość dla powłoki o stałej grubości różni się od niej o  $1,7\%$ . To samo porównanie okazuje się mniej korzystne dla tworzącej  $\varphi = 0^\circ$ ; przemieszczenia wynoszą odpowiednio  $-0.325$  [in] ( $-0.826$  [cm]) oraz  $-0.149$  [in] ( $-0.378$  [cm]) co daje błąd względny około  $118\%$ .

Analizując formy utraty stateczności górnej krawędzi obu powłok (rys. 5 i 7) zauważyć można, że postać odpowiadająca powłoce o zmiennej grubości charakteryzuje się większą ilością małych fal oraz, że w strefie czołowej fale są bardziej zagęszczone. Zjawisko to jest spowodowane większą wiotkością górnych pasów powłoki o zmiennej grubości; zauważono to w pracy [2], analizując dwie powłoki o stałej grubości różniące się parametrem  $R/h$ .

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy, w ramach deterministycznego podejścia do zagadnień stateczności powłok cylindrycznych obciążonych wiatrem, zostały zaprezentowane dwa sposoby określania obciążeń krytycznych. Pierwszy polega na analizie dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego, a drugi na analizie uwzględniającej niesymetrię obciążenia. Oba sposoby bazują na koncepcji stateczności początkowej. W celu dokonania wyboru metod, przydatnych do rozwiązania równań odpowiadających wspomnianym sposobom, dokonano przeglądu prac dotyczących tej tematyki. Przy wyborze metod kierowano się tym aby prowadziły one do zadań o niewielkich rozmiarach, dających się efektywnie rozwiązać. Z tego względu wybrano metody półanalityczne oparte na rozwinięciach w szeregi Fouriera. Ze względu na konieczność analizowania powłok o skokowo zmiennej grubości, przy rozwiązywaniu zadania osiowosymetrycznego, posłużono się dodatkowo dyskretyzacją różnicową. Zadanie niesymetryczne sformułowano w taki

sposób, że wykorzystywane są rozkłady postaci utraty stateczności wzdłuż tworzącej otrzymane w zadaniu symetrycznym. Powoduje to, że zagadnienie na wartości własne dla problemu, niesymetrycznego jest niewielkich rozmiarów, co jest istotne ponieważ macierz naprężeń początkowych nie ma charakteru pasmowego.

Przygotowano programy numeryczne bazujące na powyższych metodach i obliczono dwa przykłady. Pierwszy dotyczący powłoki o stałej grubości wykazał, że dokładność otrzymanych wyników jest bardzo dobra w porównaniu z wynikami innych metod. Wartości krytyczne dla symetrycznego i niesymetrycznego obciążenia różnią się o około 30 % od wartości eksperymentalnej stanowiąc jej dolne i górne oszacowanie. Drugi przykład stanowi powłoka o tej samej geometrii lecz o skokowo zmiennej grubości. Ponieważ średnia grubość obydwu powłok była taką samą, dokonano porównań traktując powłokę o stałej grubości jako zastępczą dla powłoki o skokowo zmiennej grubości. Stwierdzono znaczną różnicę w otrzymanych wartościach obciążenia krytycznego. Oznacza to, że zasadność posługiwania się powłoką zastępczą jest ograniczona do przypadków gdy grubości pasów są mniej zróżnicowane niż w analizowanym przykładzie.

7. LITERATURA

- [ 1 ] B.O.ALMROTH : Buckling of cylindrical shells subjected to non-uniform external pressure .  
J. Appl. Mech. , 29 , 675-682 /1962/
- [ 2 ] B.BRENDEL, E.RAMM : Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells .  
Comp. Structures , 12 , 549-558 /1980/
- [ 3 ] B.BRENDEL, E.RAMM, D.F.FISHER, F.G.RAMMERSTORFER : Linear and nonlinear stability analysis of thin cylindrical shells under wind loads .  
J. Struc. Mech. , 9/1/ , 91-113 /1981/
- [ 4 ] D.BUSHNELL : Analysis of buckling and vibration of ring-stiffened , segmented shells of revolution .  
Int. J. Solids Structures , 6 , 157-181 /1970/
- [ 5 ] D.BUSHNELL : Stress , buckling and vibration of prismatic shells . AIAA J. , 9/10/ , 2004-2013 /1971/
- [ 6 ] D.BUSHNELL, B.O.ALMROTH, F.BROGAN : Finite-difference energy method for nonlinear shell analysis .  
Comp. Structures , 1 , 361-387 /1971/
- [ 7 ] M.COMO, A.GRIMALDI : Stability , buckling and post-buckling of elastic structures .  
Part I : Meccanica , 10/4 , 254-268 /1975/  
Part II : Meccanica , 12/4 , 236-248 /1977/
- [ 8 ] L.H.DONNELL : A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending .  
Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. , 56 , 795 /1934/

- [ 9 ] A.KALNINS : Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and nonsymmetrical loads .  
J. Appl. Mech. , 31 , 467-476 /1964/
- [ 10 ] R.J.KNOPS,I.W.WILKES : Theory of elastic stability .  
Handbuch der Physik , vol. VIa/3 , 125-302 ,  
Springer Verlag 1973
- [ 11 ] W.T.KOITER : General equations of elastic stability for thin shells . Proc. Symp. Theory of shells to honour L.H.Donnell , Univ. of Houston , 187-230 /1967/
- [ 12 ] W.T.KOITER : A sufficient condition for the stability of shallow shells .  
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. , B70 , 367-375 /1967/
- [ 13 ] P.S.KUNDURPI,G.SAMAVEDAM,D.J.JOHNS : Stability of cantilever shells under winds loads .  
Proc. ASCE , J. Engng. Mech. Div. , EM5 , 517-530 /1975/
- [ 14 ] H.L.LANGHAAR,R.E.MILLER : Buckling of an elastic isotropic cylindrical shell subjected to wind loads . Proc. Symp. Theory of shells to honour L.H.Donnell , Univ. of Houston , 404-429 /1967/
- [ 15 ] T.LISZKA,J.ORKISZ : The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics .  
Comp. Structures , 11 , 83-95 /1980/
- [ 16 ] V.MADERSPACH,J.T.GAUNT,J.H.SWORD : Buckling of cylindrical shells due to wind loading .  
Der Stahlbau 9/1973 , 269-277



- [17] J.L.SANDERS : Nonlinear theories for thin shells .  
Q. Appl. Math. , 21 , 1 , 21-36 /1963/
- [18] I.SHEINMAN,Y.TENE : Buckling of segmented shells of  
revolution subjected to symetric and assymmetric  
loads . AIAA J. , 12 , 1 , 15-20 /1974/
- [19] H.STUMPF : On the linear and nonlinear stability  
analysis in the theory of thin elastic shells .  
Lecture XVth Int. Congr. Theor. Appl. Mech. ,  
Toronto/Canada , 17 Aug. 1980
- [20] Y.WANG,D.P.BILLINGTON : Buckling of cylindrical shells  
by wind pressure . Proc. ASCE , J. Engng. Mech. Div.,  
EM5 , 100 , 1005-1024 /1974/
- [21] Y.WANG,P.C.Y.LEE,D.P.BILLINGTON : Simplified theory of  
thin cylindrical shells . Proc. ASCE ,J. Engng. Mech.  
Div. , EM4 , 100 , 719-736 /1974/
- [22] P.WILDE,A.SAWICKI,Z.MATULEWICZ :Numerical analysis of  
the influence of initial deflection on stability  
of cylindrical tanks . Arch. Inż. Łądowej , 23 , 1 ,  
89-103 /1977/
- [23] J.ZIÓŁKO : Badania aerodynamiczne modeli stalowych  
zbiorników z pływającymi dachami .  
Arch. Inż. Łądowej , 23 , 4 , 455-473 /1977/

Spis treści

	str.
1. Wstęp	3
2. Równania stateczności początkowej dla powłok cylindrycznych.	7
3. Analiza stateczności dla osiowosymetrycznego obciążenia zastępczego.	11
4. Analiza stateczności dla obciążenia niesymetrycznego.	15
5. Przykłady numeryczne.	18
6. Uwagi końcowe.	29
7. Literatura.	31