SULLE FUNZIONI IPERELLITTICHE SINGOLARI

Chiunque conosca la teoria delle funzioni iperellittiche singolari a due variabili sa che in essa compie un ufficio essenziale la considerazione di un certo invariante introdotto dal sig. HUMBERT nella prima (1) delle tre Memorie che egli ha dedicato allo studio di quelle funzioni. E la proprietà fondamentale di cui gode codesto invariante, stabilita pure dallo stesso scienziato, consiste nel fatto che, a seconda del segno attribuitogli per definizione, esso è un numero (intero) essenzialmente positivo o essenzialmente negativo.

Gli studî del sig. HUMBERT, che conducono a questa proposizione, per quanto spontanei nel concetto direttivo, sono tutt'altro che immediati nel loro sviluppo; e d'altra parte il punto di vista, dal quale egli si pone, non è il più adatto a mostrare il vero significato e la grande importanza delle sue considerazioni.

Spetta ai sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS il merito di aver messo nella luce migliore la nozione di invariante introdotta dal sig. HUMBERT; ma la semplice dimostrazione del teorema del sig. HUMBERT, che essi dànno incidentalmente nel n. 8 della loro Memoria sul numero ϱ di PICARD (2), è condotta sulla stessa linea direttiva di quella originale, e quindi lascia anche essa il desiderio di trovarne una che penetri più addentro nell'intimo fondamento di quel teorema.

Infine vi è da osservare che la conoscenza di una tal dimostrazione si rivela assolutamente necessaria quando si ponga il problema di costruire una teoria delle funzioni abeliane singolari a un numero qualunque di variabili indipendenti.

(1) HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* (Journal de Mathématiques, an. 1899).

(2) BAGNERA e DE FRANCHIS, *Le nombre ϱ de M. Picard ecc.* (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. 30).

È appunto questa la ragione principale che ci ha mossi a ritrovare il teorema del sig. HUMBERT per una via più adatta alla generalizzazione; e quella che qui esponiamo sembra che nulla lasci a desiderare anche dal lato della perspicuità e dell'eleganza. Faremo vedere infatti che quando si sia data una conveniente interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni iperellittiche a due variabili, la proposizione in discorso si riduce al fatto semplicissimo che una retta (reale), la quale passi per un punto interno a una quadrica (a punti ellittici), ha sempre con essa due punti (reali) a comune.

1. Sia

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{vmatrix}$$

la tabella dei quattro periodi fondamentali di un corpo di funzioni iperellittiche a due argomenti e pongasi

$$\omega_r = \alpha_r + i\beta_r \quad \text{e} \quad \omega'_r = \alpha'_r + i\beta'_r \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

con le α, β, α' e β' reali.

Allora esistono, come è ben noto, dei numeri interi

$$c_{rs} \qquad\qquad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

soddisfacenti alla condizione

$$c_{rs} + c_{sr} = 0$$

pei quali si ha, nel tempo stesso,

$$\text{(1)} \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 4} c_{rs}\, \omega_r\, \omega'_s = 0$$

e

$$\text{(2)} \qquad \delta\Delta < 0\,,$$

ove

$$\delta = c_{12}\, c_{34} + c_{13}\, c_{42} + c_{14}\, c_{23}\,,$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{vmatrix}.$$

Vogliamo dare delle (1) e (2) un'interpretazione geometrica, la quale, oltre ad essere interessante per sè stessa, ci darà poi come immediata conseguenza il teorema del sig. HUMBERT.

Indicando con $\overline{\omega}_r$ e $\overline{\omega}'_r$ le quantità complesse coniugate a ω_r e ω'_r rispettivamente, è chiaro intanto che si ha:

$$\Delta = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 & \overline{\omega}_4 \\ \overline{\omega}'_1 & \overline{\omega}'_2 & \overline{\omega}'_3 & \overline{\omega}'_4 \end{vmatrix},$$

e quindi, chiamando D il determinante che compare nel 2^0 membro di questa uguaglianza, la (2) si muta nella diseguaglianza

$$\delta D > 0. \tag{2'}$$

Adesso concepiamo le ω_r e le ω'_r come le coordinate proiettive omogenee di due punti (imaginari) Ω e Ω' di uno spazio reale a tre dimensioni, e indichiamo con v_{jk} $(j, k = 1, 2, 3, 4)$ le solite coordinate plückeriane della retta $v \equiv \Omega\Omega'$. Poi diciamo $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega}'$ i punti (imaginari) coniugati a Ω e Ω' rispettivamante, e $\overline{v}_{jk}$ la quantità complessa coniugata a v_{jk}.

Le $\overline{v}_{jk}$ saranno le coordinate plückeriane della retta $\overline{v} \equiv \overline{\Omega}\,\overline{\Omega}'$, e si avrà

$$D = v_{12}\,\overline{v}_{34} + v_{13}\,\overline{v}_{42} + v_{14}\,\overline{v}_{23} + \overline{v}_{12}\,v_{34} + \overline{v}_{13}\,v_{42} + \overline{v}_{14}\,v_{23}.$$

Se, come usa nella geometria della retta, poniamo in generale

$$(aa) = a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23},$$

e

$$(ab) = \sum_{j,k}^{1\ldots4} a_{jk}\frac{\partial(bb)}{\partial b_{jk}},$$

e inoltre poniamo

$$\gamma_{jk} = \frac{\partial(cc)}{\partial c_{jk}} \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4),$$

le (1) e (2') potranno scriversi rispettivamente

$$(\gamma v) = 0 \tag{3}$$

e

$$(\gamma\,\gamma)\ (v\,\overline{v}) > 0. \tag{4}$$

Poichè le γ_{jk} coincidono, a meno delle denominazioni, con le c_{rs} e quindi sono dei numeri (interi) reali, accanto alla (3) sussisterà anche la eguaglianza

$$(\gamma\overline{v}) = 0 . \tag{5}$$

Indicando con p_{jk} le coordinate correnti di retta, le (3) e (5) esprimono che il complesso lineare rappresentato dall'equazione

$$(\gamma p) = 0$$

contiene le rette v e $\overline{v}$; e queste, poichè dalla (4) risulta che

$$(v\,\overline{v}) \neq 0$$

sono due rette imaginarie coniugate di 2ª specie.

I complessi lineari passanti per v e $\overline{v}$ costituiscono un sistema lineare ∞^3; quindi possono rappresentarsi (omograficamente) sui punti di uno spazio a tre dimensioni S_3, e la rappresentazione può supporsi fatta in tal modo che i complessi reali del sistema ∞^3 abbiano per imagini i punti reali dell'S_3.

In questo S_3 i punti imagini dei complessi lineari speciali appartenenti al sistema saranno quelli di una quadrica reale Q con infiniti punti reali, che fornirà pure un'imagine della congruenza lineare avente per direttrici le rette v e $\overline{v}$. Poichè questa congruenza è a direttrici imaginarie coniugate di 2ª specie, la quadrica Q è irriducibile ed è a punti ellittici.

Segue che Q divide la totalità dei punti reali di S_3, che non le appartengono, in una totalità di punti interni e in una totalità di punti esterni.

Ebbene la diseguaglianza (4) esprime allora che: *il punto reale Γ, rispondente nel nostro S_3 al complesso lineare rappresentato dall'equazione*

$$(\gamma p) = 0 ,$$

è precisamente un punto interno a Q.

Diciamo infatti

$$(ap) = 0$$

l'equazione di un qualsiasi complesso lineare reale passante per v e $\overline{v}$, per modo che i numeri (reali) a_{jk} possono concepirsi come coordinate (sovrabbondanti) di punto (reale) nel nostro solito S_3.

Poichè

$$(v\bar{v}) \neq 0 ,$$

l'espressione

$$(aa)(v\bar{v})$$

non può annullarsi che per

$$(aa) = 0 ;$$

e quindi non può annullarsi che per i punti dell'S_3 appartenenti alla quadrica Q. Segue che essa deve avere un segno costante per i punti reali interni a Q, e il segno contrario per quelli che sono reali ed esterni a Q: e quindi sarà provato il nostro assunto se riusciamo a far vedere che pei punti esterni essa è negativa.

Nello spazio $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ dei punti Ω, Ω', $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}'$ eseguiamo la trasformazione (reale) di coordinate rappresentata dalle formule

$$x_j = \alpha_j X_1 + \beta_j X_2 + \alpha'_j X_3 + \beta'_j X_4 \quad (j = 1, 2, 3, 4);$$

il modulo della trasformazione è

$$- \Delta = \frac{1}{4} D ,$$

e le nuove coordinate dei punti Ω e Ω' saranno rispettivamente $(1, i, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, i)$.

Chiamiamo V_{jk} e $\bar{V}_{jk}$ le nuove coordinate delle rette v e $\bar{v}$, e A_{jk} i coefficienti della nuova equazione del complesso

$$(ap) = 0 .$$

Sarà

$$(V\bar{V}) = \frac{4}{D}(v\bar{v}),$$

e

$$(AA) = \frac{D}{4}(aa) ,$$

quindi

$$(aa)(v\bar{v}) = (AA)(V\bar{V});$$

e allora per decidere del segno di $(aa)(v\bar{v})$ per i punti interni ed esterni a Q, basterà decidere del segno di $(AA)(V\bar{V})$.

Fra i complessi reali del nostro sistema ∞^3 quelli che contengono la retta (reale) $\Omega\bar{\Omega}$ appartengono a una rete: tale rete contiene il complesso lineare speciale di asse $\Omega\overline{\Omega}$, e ogni suo fascio a cui appartenga quest' ultimo contiene due complessi lineari speciali che vengono a raccogliersi in esso. Ciò significa che la rete ha per imagine nell' S_3 rappresentativo un piano tangente alla quadrica Q, ossia che ogni suo complesso reale diverso da quello speciale di asse $\Omega\overline{\Omega}$ ha per imagine un punto (reale) esterno a Q.

Nelle nuove coordinate di retta P_{jk}, l'equazione di questa rete è

$$\lambda P_{34} + \mu P_{42} + \nu P_{23} - \mu P_{13} - \nu P_{14} = 0 ;$$

quindi per il suo complesso generico l'espressione $(A\,A)$ è data da

$$-(\mu^2 + \nu^2) .$$

D'altro canto

$$(V\,\overline{V}) = 4 ,$$

dunque $(A\,A)(V\,\overline{V})$ per μ, ν reali e non entrambi nulli è, come volevasi, negativa.

2. E ora supponiamo che

(II) $$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' & \omega_4' \end{vmatrix}$$

sia la tabella dei periodi fondamentali di un corpo di funzioni iperellittiche semplicemente singolare: allora fra i suoi elementi debbono passare due e due sole relazioni bilineari distinte del solito tipo di Riemann.

Siano queste le due relazioni

$$A \equiv \Sigma c_{rs}\, \omega_r\, \omega_s' = 0,$$

e

$$B \equiv \Sigma c_{rs}'\, \omega_r\, \omega_s' = 0,$$

ove le c_{rs} e le c_{rs}' sono numeri interi soddisfacenti alle condizioni

$$c_{rs} + c_{sr} = 0 \quad \text{e} \quad c_{rs}' + c_{sr}' = 0 .$$

Indicando con x e y due numeri interi qualunque, fra le ω e ω' passeranno tutte le relazioni del *fascio*

(7) $$xA + yB = 0 ,$$

e l'invariante di questo fascio è, coi nostri simboli,

$$4\,(cc)\,(c'c') - (cc')^2,$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$4\,(\gamma\gamma)\,(\gamma'\gamma') - (\gamma\gamma')^2,$$

se, come prima,

$$\gamma_{jk} = \frac{\partial\,(cc)}{\partial c_{jk}},$$

e

$$\gamma'_{jk} = \frac{\partial\,(c'c')}{\partial c'_{jk}}.$$

Il teorema del sig. HUMBERT consiste nell'affermazione che *è sempre*

$$4\,(\gamma\gamma)\,(\gamma'\gamma') - (\gamma\gamma')^2 < 0\,.$$

Per dimostrarlo, si introducano come prima le rette v e $\overline{v}$ e il sistema lineare dei complessi che le contengono. Corrispondentemente al fascio (7), in questo sistema apparisce un fascio di complessi lineari rappresentato dall'equazione

$$x\,(\gamma p) + y\,(\gamma' p) = 0\,, \tag{8}$$

nella quale, se si vogliono tutti i complessi del fascio, bisogna supporre di lasciar variare i parametri omogenei x e y in modo arbitrario.

Allora dimostrare il teorema del sig. HUMBERT equivale a dimostrare che questo fascio contiene necessariamente due complessi lineari speciali reali distinti.

Ora ciò è evidente, poichè per ipotesi nel fascio di relazioni (7) deve esisterne almeno una che soddisfaccia alla diseguaglianza che assicura l'esistenza di un corpo di funzioni abeliane con la tabella (II) di periodi fondamentali; e quindi se nell'S_3 rappresentativo dei complessi lineari passanti per v e $\overline{v}$, si considera la quadrica Q imagine della congruenza avente per direttrici v e $\overline{v}$, il fascio (8) è rappresentato da una retta reale che contiene un punto reale interno a Q; cioè da una retta che taglia Q in due punti reali distinti.