SOPRA UNA CERTA CLASSE DI DETERMINANTI E SULLE FORME HERMITIANE

Per quanto mi consta le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma Hermitiana sia definita, almeno in modo generale ed esplicito, non sono state assegnate.

Ad esse può pervenirsi con vari metodi imitando i procedimenti notissimi che servono a risolvere la stessa quistione per il caso delle forme quadratiche ordinarie; ma per le curiose proprietà di certi speciali determinanti a cui mi ha condotto la via che più sotto è indicata, non mi è parso inopportuno di preferirla ad altre che mi avrebbero fatto raggiungere con maggior rapidità il risultato finale.

1. Dimostriamo in primo luogo il seguente

Lemma [1]. *Il determinante*

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1p}, -\beta_{11}, -\beta_{12}, \ldots, -\beta_{1p} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2p}, -\beta_{21}, -\beta_{22}, \ldots, -\beta_{2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{pp}, -\beta_{p1}, -\beta_{p2}, \ldots, -\beta_{pp} \\ \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{1p}, \quad \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \ldots, \quad \alpha_{1p} \\ \beta_{11}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{2p}, \quad \alpha_{21}, \quad \alpha_{22}, \ldots, \quad \alpha_{2p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_{p1}, \beta_{p2}, \ldots, \beta_{pp}, \quad \alpha_{p1}, \quad \alpha_{p2}, \ldots, \quad \alpha_{pp} \end{vmatrix}$$

[1] Esso è da considerarsi come noto. Cfr. le *Vorlesungen über Algebra* del Netto (Vol. II, p. 180).

eguaglia il prodotto degli altri due:

$$(2)\quad \delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}+i\beta_{11}, \alpha_{12}+i\beta_{12}, \dots, \alpha_{1p}+i\beta_{1p} \\ \alpha_{21}+i\beta_{21}, \alpha_{22}+i\beta_{22}, \dots, \alpha_{2p}+i\beta_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1}+i\beta_{p1}, \alpha_{p2}+i\beta_{p2}, \dots, \alpha_{pp}+i\beta_{pp} \end{vmatrix} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-i\beta_{11}, \alpha_{12}-i\beta_{12}, \dots, \alpha_{1p}-i\beta_{1p} \\ \alpha_{21}-i\beta_{21}, \alpha_{22}-i\beta_{22}, \dots, \alpha_{2p}-i\beta_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1}-i\beta_{p1}, \alpha_{p2}-i\beta_{p2}, \dots, \alpha_{pp}-i\beta_{pp} \end{vmatrix}$$

dove, secondo il solito, $i=\sqrt{-1}$.

Infatti si moltiplichino per $-i$ le ultime p colonne di Δ e si aggiungano alle prime p; poi nel determinante così modificato si moltiplichino le ultime p righe per $-i$ e si aggiungano ordinatamente alle prime p; risulterà facilmente:

$$\Delta=(-1)^p \begin{vmatrix} \beta_{11}-i\alpha_{11}, \beta_{12}-i\alpha_{12}, \dots, \beta_{1p}-i\alpha_{1p} \\ \beta_{21}-i\alpha_{21}, \beta_{22}-i\alpha_{22}, \dots, \beta_{2p}-i\alpha_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \beta_{p1}-i\alpha_{p1}, \beta_{p2}-i\alpha_{p2}, \dots, \beta_{pp}-i\alpha_{pp} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\beta_{11}-i\alpha_{11}, -\beta_{12}-i\alpha_{12}, \dots, -\beta_{1p}-i\alpha_{1p} \\ -\beta_{21}-i\alpha_{21}, -\beta_{22}-i\alpha_{22}, \dots, -\beta_{2p}-i\alpha_{2p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ -\beta_{p1}-i\alpha_{p1}, -\beta_{p2}-i\alpha_{p2}, \dots, -\beta_{pp}-i\alpha_{pp} \end{vmatrix}$$

cioè appunto, come volevasi,

$$\Delta = \frac{(-1)^p}{i^{2p}}\delta_1\,\delta_2 = \delta_1\,\delta_2 .$$

Si conclude che:

Il determinante Δ è la somma dei quadrati di due espressioni razionali intere nei suoi elementi; per modo che se questi elementi sono tutti reali, Δ è certo non negativo ed è il quadrato del modulo di δ_1 (o δ_2).

2. Ora si supponga che nel determinante Δ si abbia

$$\alpha_{kl}=\alpha_{lk}, \qquad \beta_{kl}+\beta_{lk}=0 \qquad (k, l = 1, 2, \dots, p);$$

i determinanti δ_1 e δ_2 risultano in tale ipotesi uguali perchè le colonne dell'uno non sono altra cosa che le righe dell'altro, quindi in questo caso particolare si ha più semplicemente:

$$(3)\qquad \Delta = \delta_1^2 = \delta_2^2$$

e *Δ è il quadrato di una espressione razionale intera nei suoi elementi.*

3. Ciò posto, consideriamo i due quadri di numeri

$$(4)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1p}, \dots \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2p}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \alpha_{p3}, \dots, \alpha_{pp}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix} 0\ , \beta_{12}, \beta_{13}, \dots, \beta_{1p}, \dots \\ \beta_{21}, 0\ , \beta_{23}, \dots, \beta_{2p}, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{p1}, \beta_{p2}, \beta_{p3}, \dots, 0, \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right.$$

dove, qualunque sieno gli indici k ed l, si ha:

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk}, \qquad \beta_{kl} + \beta_{lk} = 0,$$

e costruita con essi, mediante una legge di formazione evidente, la matrice

$$(5)\qquad \left\| \begin{matrix} \alpha_{11}, & 0, & \alpha_{12}, & \beta_{12}, & \alpha_{13}, & \beta_{13}, & \dots, & \alpha_{1p}, & \beta_{1p}, & \dots \\ 0, & \alpha_{11}, & \beta_{21}, & \alpha_{21}, & \beta_{31}, & \alpha_{31}, & \dots, & \beta_{p1}, & \alpha_{p1}, & \dots \\ \alpha_{21}, & \beta_{21}, & \alpha_{22}, & 0, & \alpha_{23}, & \beta_{23}, & \dots, & \alpha_{2p}, & \beta_{2p}, & \dots \\ \beta_{12}, & \alpha_{12}, & 0, & \alpha_{22}, & \beta_{32}, & \alpha_{32}, & \dots, & \beta_{p2}, & \alpha_{p2}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1}, & \beta_{p1}, & \alpha_{p2}, & \beta_{p2}, & \alpha_{p3}, & \beta_{p3}, & \dots, & \alpha_{pp}, & 0, & \dots \\ \beta_{1p}, & \alpha_{1p}, & \beta_{2p}, & \alpha_{2p}, & \beta_{3p}, & \alpha_{3p}, & \dots, & 0, & \alpha_{pp}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|$$

indichiamo con $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots$ i successivi minori principali di questa di $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots$ ordine, cioè poniamo:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & 0 \\ 0, & \alpha_{11} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & 0, & \alpha_{12} \\ 0, & \alpha_{11}, & \beta_{21} \\ \alpha_{21}, & \beta_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & 0, & \alpha_{12}, & \beta_{12} \\ 0, & \alpha_{11}, & \beta_{21}, & \alpha_{21} \\ \alpha_{21}, & \beta_{21}, & \alpha_{22}, & 0 \\ \beta_{12}, & \alpha_{12}, & 0, & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \dots.$$

Noi vogliamo dimostrare che:

Nella successione $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$ ogni determinante di ordine dispari (eccettuato il primo) è medio proporzionale tra quelli di ordine pari che lo comprendono; si ha cioè:

$$\Delta_{2j}\,\Delta_{2j+2} = \Delta_{2j+1}^2 \qquad (j > 0) \tag{6}$$

e inoltre ogni determinante d'ordine pari è un quadrato perfetto (ossia è il quadrato di una espressione razionale intera nei suoi elementi).

L'ultima parte di questo teorema è evidente, poichè ad ogni determinante d'ordine pari, con opportuni scambi di colonne e di righe, può darsi l'aspetto di un determinante del tipo di quello indicato nel n. 2 con Δ e quindi l'asserzione che lo riguarda resta giustificata da quel che ivi è detto.

Così, per es.:

$$\Delta_4 = -\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & 0, & \beta_{12} \\ 0, & \beta_{21}, & \alpha_{11}, & \alpha_{21} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \beta_{21}, & 0 \\ \beta_{11}, & 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & 0, & \beta_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \beta_{21}, & 0 \\ 0, & \beta_{21}, & \alpha_{11}, & \alpha_{21} \\ \beta_{12}, & 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + i\beta_{12} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}^2 .$$

Passiamo dunque a far vedere che

$$\Delta_{2j}\,\Delta_{2j+2} = \Delta_{2j+1}^2$$

o, più precisamente, che

$$\delta_j\,\delta_{j+1} = \Delta_{2j+1} \tag{7}$$

dove

$$\delta_j = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & , \alpha_{12} + i\beta_{12}, & \ldots, & \alpha_{1j} + i\beta_{1j} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21}, & \alpha_{22} & , \ldots, & \alpha_{2j} + i\beta_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{j1} + i\beta_{j1}, & \alpha_{j2} + i\beta_{j2}, & \ldots, & \alpha_{jj} \end{vmatrix},$$

$$\delta_{j+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & , \alpha_{12} + i\beta_{12} & , \ldots, & \alpha_{1,j+1} + i\beta_{1,j+1} \\ \alpha_{21} + i\beta_{21} & , \alpha_{22} & , \ldots, & \alpha_{2,j+1} + i\beta_{2,j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{j+1,1} + i\beta_{j+1,1}, & \alpha_{j+1,2} + i\beta_{j+1,2}, & \ldots, & \alpha_{j+1,j+1} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\delta_j^2 = \Delta_{2j}\,, \quad \delta_{j+1}^2 = \Delta_{2j+2}\,.$$

Per questo si riguardino le $\alpha_{kl}\,(k, l = 1, 2, \ldots, j+1\,; k \leq l)$ e le $\beta_{kl}\,(k, l = 1, 2, \ldots, j+1\,; k < l)$ come coordinate omogenee di un punto in uno spazio a $(j+1)^2 - 1$ dimensioni: in tale spazio le equazioni

$$\delta_j = 0\,, \quad \delta_{j+1} = 0\,, \quad \Delta_{2j+1} = 0$$

rappresenteranno allora tre ipersuperficie degli ordini $j\,, j+1$ e $2j+1$ rispettivamente, che diremo $D_j\,, D_{j+1}$ e D_{2j+1}.

Le D_j e D_{j+1}, se pure si spezzano, non possono contenere parti multiple: e infatti se, ad es., indicando con $\varphi\,, \psi\,, \ldots, \chi$ delle forme opportune, si avesse

$$\delta_j \equiv \varphi^r\,\psi^s \ldots \chi^t\,, \tag{8}$$

con almeno uno degli esponenti $r, s, \ldots, t$, diciamo r, maggiore dell'unità, nessuna delle coordinate $\alpha_{11}\,, \alpha_{22}\,, \ldots, \alpha_{jj}$ potrebbe comparire in φ, e allora il termine $\alpha_{11}\,\alpha_{22} \ldots\ldots \alpha_{jj}$ che si trova in δ_j col coefficiente 1, nel prodotto che si trova nel 2^0 membro della (8) verrebbe ad avere per coefficiente una espressione divisibile per φ^r; ciò che è assurdo.

Aggiungasi che D_j e D_{j+1} non possono avere una *parte comune* [di dimensione $(j+1)^2 - 2$], poichè se D_j e D_{j+1} avessero comune una tal parte, rappresentata, per, es., dall'equazione

$$\varphi = 0\,,$$

φ non potrebbe contenere le coordinate $\alpha_{l,\,j+1}\,(l = 1, 2, \ldots, j+1)$ e $\beta_{l,\,j+1}\,(l = 1, 2, \ldots, j)$; quindi, come si riconosce sviluppando δ_{j+1} per gli elementi dell'ultima riga e dell'ultima colonna, φ dovrebbe staccarsi da tutti i minori principali d'ordine $j-1$ del determinante δ_j. Ma allora φ non potrebbe contenere neppure le coordinate $\alpha_{11}\,, \alpha_{22}\,, \ldots, \alpha_{jj}$ e questo come già si è osservato è assurdo.

Ciò posto, noi faremo vedere che ogni punto di D_{j+1} esterno a D_j è situato su D_{2j+1}, e quindi poichè D_{j+1} non contiene parti multiple e non ha *parti* comuni con D_j, sarà pur dimostrato che δ_{j+1} è un fattore di Δ_{2j+1}. Dopo ciò, quando avremo dimostrato che anche δ_j si stacca da Δ_{2j+1}, poichè il prodotto $\delta_j\,\delta_{j+1}$ contiene, come Δ_{2j+1}, il termine $\alpha_{11}^2\,\alpha_{22}^2 \ldots \alpha_{jj}^2\,\alpha_{j+1,\,j+1}$ col coefficiente 1, sarà infine stabilito che

$$\delta_j\, \delta_{j+1} = \Delta_{2j+1}\,.$$

4. Per questo consideriamo il seguente sistema di $2j+2$ equazioni lineari omogenee nelle $2j+2$ incognite $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \dots; \xi_{j+1}, \eta_{j+1}$:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varphi_1 \equiv \alpha_{11}\xi_1 + \;\cdot\; + \alpha_{12}\xi_2 + \beta_{12}\eta_2 + \alpha_{13}\xi_3 + \beta_{13}\eta_3 + \dots + \alpha_{1,j+1}\xi_{j+1} + \beta_{1,j+1}\eta_{j+1} = 0 \\
\psi_1 \equiv \;\cdot\; + \alpha_{11}\eta_1 + \beta_{21}\xi_2 + \alpha_{21}\eta_2 + \beta_{31}\xi_3 + \alpha_{31}\eta_3 + \dots + \beta_{j+1,1}\xi_{j+1} + \alpha_{j+1,1}\eta_{j+1} = 0 \\
\varphi_2 \equiv \alpha_{21}\xi_1 + \beta_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \;\cdot\; + \alpha_{23}\xi_3 + \beta_{23}\eta_3 + \dots + \alpha_{2,j+1}\xi_{j+1} + \beta_{2,j+1}\eta_{j+1} = 0 \\
\psi_2 \equiv \beta_{12}\xi_1 + \alpha_{12}\eta_1 + \;\cdot\; + \alpha_{22}\eta_2 + \beta_{32}\xi_3 + \alpha_{32}\eta_3 + \dots + \beta_{j+1,2}\xi_{j+1} + \alpha_{j+1,2}\eta_{j+1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{j+1} \equiv \alpha_{j+1,1}\xi_1 + \beta_{j+1,1}\eta_1 + \cdots\cdots\cdots + \alpha_{j+1,j+1}\xi_{j+1} + \;\cdot\; = 0 \\
\psi_{j+1} \equiv \beta_{1,j+1}\xi_1 + \alpha_{1,j+1}\eta_1 + \cdots\cdots\cdots + \;\cdot\; + \alpha_{j+1,j+1}\eta_{j+1} = 0,
\end{array}\right.$$

il cui determinante è appunto Δ_{2j+2} e teniamo conto dell'identità che lega fra di loro le $\varphi_1, \psi_1; \varphi_2, \psi_2, \dots, \varphi_{j+1}, \psi_{j+1}$:

$$(10)\qquad \eta_1\varphi_1 - \xi_1\psi_1 + \eta_2\varphi_2 - \xi_2\psi_2 + \dots + \eta_{j+1}\,\varphi_{j+1} - \xi_{j+1}\,\psi_{j+1} = 0\,.$$

Se le α_{kl} e le β_{kl} che compaiono nelle (9) sono le coordinate di un punto di D_{j+1} esterno a D_j, sarà $\Delta_{2j+2} = 0$ e $\Delta_{2j} \neq 0$; quindi fra le $\varphi_1, \psi_1;\; \varphi_2, \psi_2, \dots, \varphi_{j+1}, \psi_{j+1}$ passerà una relazione identica (almeno) del tipo

$$(11)\qquad \lambda_1\varphi_1 + \mu_1\psi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \mu_2\psi_2 + \dots + \lambda_{j+1}\,\varphi_{j+1} + \mu_{j+1}\psi_{j+1} = 0\,,$$

dove le λ e le μ saranno delle *costanti* indipendenti dalle ξ e dalle η con λ_{j+1} e μ_{j+1} non contemporaneamente nulle, e inoltre le $2j$ equazioni lineari omogenee

$$(12)\qquad \varphi_1 = 0\,,\ \psi_1 = 0\,,\ \varphi_2 = 0\,,\ \psi_2 = 0\,, \dots, \varphi_j = 0\,,\ \psi_j = 0$$

fra le $2j+2$ incognite $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_{j+1}, \eta_{j+1}$ ammetteranno ∞^1 soluzioni *distinte.*

Dico che queste ∞^1 soluzioni soddisfano anche tutte il sistema (9).

E infatti se indichiamo con $\xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}; \xi_2^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \xi_{j+1}^{(0)}, \eta_{j+1}^{(0)}$ una di queste soluzioni e con $\varphi_{j+1}^{(0)}, \psi_{j+1}^{(0)}$ ciò che diventano le $\varphi_{j+1}; \psi_{j+1}$ allorchè vi si pongono le $\xi^{(0)}, \eta^{(0)}$ al posto delle ξ e delle η, la (10) porgerà

$$\eta_{j+1}^{(0)} \varphi_{j+1}^{(0)} - \xi_{j+1}^{(0)} \psi_{j+1}^{(0)} = 0$$

e la (11)

$$\lambda_{j+2} \varphi_{j+1}^{(0)} + \mu_{j+1} \psi_{j+1}^{(0)} = 0 ;$$

quindi, se supponiamo che la soluzione considerata *non* sia quella (*unica*) fra le ∞^1 per la quale risulta

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \eta_{j+1}^{(0)} & -\xi_{j+1}^{(0)} \\ \lambda_{j+1} & \mu_{j+1} \end{vmatrix} = 0 ,$$

sarà appunto:

$$\varphi_{j+1}^{(0)} = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi_{j+1}^{(0)} = 0 .$$

Ma allora sarà:

$$\varphi_{j+1}^{(0)} = \psi_{j+1}^{(0)} = 0$$

anche se la soluzione considerata è quella per la quale risulta soddisfatta la (13) e quindi la nostra asserzione è pienamente giustificata.

Segue che, nelle ipotesi fatte, la caratteristica di Δ_{2j+2} è $2j$ e che $\Delta_{2j+1} = 0$; quindi non solo è dimostrato che D_{j+1} fa parte di D_{2j+1} ossia che δ_{j+1} si stacca come fattore da Δ_{2j+1}, ma anche che:

L'espressione δ_{j+1} di cui Δ_{2j+2} è il quadrato si stacca da tutti i minori di Δ_{2j+2} d'ordine $2j+1$.

Di qui, sostituendo $j-1$ a j, si trae che se $\delta_j = 0$, si annulla non solo Δ_{2j} ma anche ciascuno dei suoi minori d'ordine $2j-1$; quindi se $\delta_j = 0$, anche $\Delta_{2j+1} = 0$.

Con ciò è pienamente dimostrato che

$$\delta_j \, \delta_{j+1} = \Delta_{2j+1} .$$

5. Ed ora consideriamo la forma Hermitiana

$$f = \Sigma \, a_{rs} \, x_r \, \overline{x}_s \qquad (r, s = 1, 2, \dots, p ; a_{sr} = \overline{a}_{rs})$$

dove $\overline{\lambda}$ sta ad indicare, secondo il solito, la quantità (complessa) coniugata alla quantità indicata con λ.

Posto

$$a_{rs} = \alpha_{rs} + i\beta_{rs}\,, \qquad x_r = \xi_r + i\eta_r$$

con α_{rs}, β_{rs}, ξ_r ed η_r reali, per modo che

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr} \quad \text{e} \quad \beta_{rs} + \beta_{sr} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \dots, p),$$

si avrà

$$f = \Sigma\,(\alpha_{rs} + i\beta_{rs})\,(\xi_r + i\eta_r)\,(\xi_s - i\eta_s)$$

cioè

$$f = \Sigma\,\alpha_{rs}\,(\xi_r\,\xi_s + \eta_r\,\eta_s) + 2\Sigma\,\beta_{rs}\,\xi_r\,\eta_s\,.$$

Questa è una forma quadratica reale nelle $2p$ variabili reali ξ_j, η_j $(j = 1 \dots p)$ e il suo discriminante è appunto il determinante che nel n. 3 è stato indicato con Δ_{2p}, dunque, adoperando sempre le notazioni del n. 3, le condizioni necessarie e sufficienti perchè f sia definita positiva sono espresse dalle disuguaglianze

$$\Delta_1 > 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 > 0\,, \dots,\ \Delta_{2p-1} > 0\,,\ \Delta_{2p} > 0$$

e quelle perchè f sia definita negativa sono espresse da:

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 < 0\,, \dots,\ \Delta_{2p-1} < 0\,,\ \Delta_{2p} > 0\,.$$

Ora, per quanto è stato detto precedentemente, delle condizioni

$$\Delta_2 > 0\,,\ \Delta_4 > 0\,, \dots,\ \Delta_{2p} > 0$$

nell'un caso e nell'altro è inutile tener conto, perchè Δ_2, Δ_4, ..., Δ_{2p} non possono essere negativi in quanto sono quadrati di quantità reali e non possono nemmeno esser zero se non sono nulli Δ_1, Δ_3, ..., Δ_{2p-1}; dunque la f è definita positiva o definita negativa, secondo che le quantità

$$\Delta_1\,, \Delta_3\,, \Delta_5\,, \dots, \Delta_{2p-1}$$

sono tutte positive o tutte negative.

D'altra parte se poniamo

$$\varepsilon_h = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{hh} \end{vmatrix} \qquad (h = 1, 2, \dots, p)\,,$$

risulta, da quanto precede, che:

$$\Delta_1 = \varepsilon_1\,,\ \Delta_3 = \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,,\ \Delta_5 = \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,, \dots,\ \Delta_{2p-1} = \varepsilon_{p-1}\,\varepsilon_p$$

dunque:

La forma f è definita positiva quando (e solo quando) le ε_1, $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ sono tutte positive; ed è definita negativa quando (e solo quando) le ε con indice dispari sono tutte negative e quelle con indice pari sono tutte positive.

Cagliari, 16 giugno 1913.