SUI DETERMINANTI EMISIMMETRICI D'ORDINE PARI E SUI RELATIVI PFAFFIANI.

È noto che un determinante emisimmetrico d'ordine pari $2n$ è il quadrato di una funzione razionale intera dei suoi elementi, alla quale, quando sia presa con un segno conveniente, si dà il nome di *pfaffiano* d'ordine n; ed è pur nota la formula ricorrente che permette di calcolare lo pfaffiano d'ordine n quando si siano già calcolati quelli di ordine inferiore.

Come applicazione dei teoremi dimostrati in una Nota precedente (1) dimostreremo in modo diretto la proposizione ora ricordata che, per ordinario, si stabilisce col metodo da n ad $n+1$, e nel tempo stesso daremo una formula semplice (che crediamo nuova) per lo sviluppo autonomo dello pfaffiano di ordine n (2).

1. Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix} \qquad (a_{ik} + a_{ki} = 0) \tag{1}$$

un determinante emisimmetrico d'ordine pari $2n$.

Si ha

$$\Delta = \Sigma (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{2nj_{2n}}, \tag{2}$$

(1) G. Scorza, *Osservazioni varie sulla teoria delle sostituzioni e sulle partizioni dei numeri interi in numeri interi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVI (2° semestre 1913), pp. 163-170].

(2) [*Nota dei revisori*]. Come lo stesso Gaetano Scorza avverte nel lavoro contrassegnato col n. 36 nell'elenco bibliografico di pag. 13 del presente volume, tale formula « era stata già incontrata da U. Scarpis nella sua Nota: *Una proprietà dei determinanti dedotta dal concetto di sostituzione* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 37 (1899) pp. 73-79] ».

dove

$$S = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{2n} \\ 1 & 2 & \dots & 2n \end{pmatrix} \tag{3}$$

è una qualunque sostituzione effettuata sui $2n$ elementi

$$1, 2, \dots, 2n; \tag{4}$$

j è la classe di S, cioè è un qualunque numero pari o un qualunque numero dispari secondo che S è di classe pari o di classe dispari; e infine il sommatorio si estende a tutte le possibili sostituzioni effettuate sugli elementi (4).

Ebbene è facile persuadersi che:

Nello sviluppo (2) *di* Δ *i termini corrispondenti a sostituzioni* S *che decomposte in cicli* (¹) *contengano un ciclo (almeno) di ordine dispari o sono nulli o si distruggono vicendevolmente.*

E infatti supponiamo che la sostituzione (3) contenga appunto un ciclo d'ordine dispari

$$\Gamma = (1 j_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{2k}). \tag{5}$$

Se $j_1 = 1$, cioè se Γ si riduce al ciclo *identico* (1), l'affermazione fatta è evidente, poichè allora il termine di Δ

$$T = (-1)^j a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{2nj_{2n}} \tag{6}$$

contiene il fattore a_{11} che è nullo; se no, si prendano di mira nel termine T i $2k+1$ fattori

$$a_{1j_1}, a_{j_1\lambda_2}, a_{\lambda_2\lambda_3}, \dots, a_{\lambda_{2k}1} \tag{7}$$

e si consideri il prodotto

$$T' = (-1)^j a_{j_1 1} \dots a_{1\lambda_{2k}} \dots \tag{8}$$

che si ottiene da T permutando gli indici dei fattori (7) e lasciando inalterati tutti gli altri.

Poichè il determinante è emisimmetrico, è chiaro intanto che

$$T + T' = 0;$$

(¹) Qui è inteso al solito che quando parliamo della decomposizione di una sostituzione in cicli intendiamo in cicli operanti su elementi diversi.

quindi la nostra affermazione sarà pienamente giustificata appena si sia fatto vedere che T' è un termine dello sviluppo di Δ.

E invero, accanto alla sostituzione S si consideri quella S' (della stessa classe di S, ma distinta certamente da S) che risulta dal prodotto di

$$\Gamma^{-1} = (1 \lambda_{2k} \dots \lambda_3 \lambda_2 j_1)$$

per tutti gli altri cicli S diversi da Γ. Il termine dello sviluppo (2) che corrisponde alla sostituzione S' è appunto (a meno dell'ordine dei fattori) T'.

2. Dall'osservazione fatta nel n. precedente segue che se si immaginano soppressi nello sviluppo di Δ tutti i termini che o son nulli o si distruggono, quelli che restano (quando non si raccolgano in un solo quelli che risultano uguali) son tanti quante sono le sostituzioni sui $2n$ elementi (4) che si decompongono in prodotti di cicli aventi tutti ordine pari (¹); cioè [loc. cit. a pag. 476, nota (¹)] sono in numero di

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (2n)! \tag{9}$$

3. Adesso si consideri l'espressione

$$P_n = \Sigma (-1)^l a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_n s_n}, \tag{10}$$

dove

$$r_1 s_1, r_2 s_2, \dots r_n s_n \tag{11}$$

è una qualunque distribuzione in n coppie dei $2n$ indici

$$1, 2, \dots, 2n;$$

l è la classe della sostituzione

$$S_1 = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & r_2 & s_2 & \dots & r_n & s_n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \end{pmatrix};$$

e infine il sommatorio si estende a tutte le distribuzioni distinte degli indici $1, 2, \dots, 2n$ in n coppie, quando si considerino come

(¹) Il lettore osservi come da quel che è detto qui risulti ancora il fatto ben noto che un determinante emisimmetrico d'ordine dispari è identicamente nullo.

distinte due distribuzioni solo se differiscono almeno per qualche coppia.

Notisi subito che, *in virtù dell'ipotesi fatta su* Δ, il segno di un termine qualunque di P_n dipende solo dalla distribuzione in n coppie che ad esso corrisponde e non dall'ordine delle coppie o dall'ordine degli elementi di ciascuna coppia.

Dico ora che

$$P_n^2 = \Delta\,,$$

ossia che:

Il polinomio P_n *è appunto lo pfaffiano d'ordine* n (¹).

E infatti P_n contiene

$$3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1) = \frac{(2n)\,!}{2^n\,.\,n\,!}$$

termini distinti, poichè tante sono le distribuzioni distinte di $2n$ cose in n coppie; quindi P_n^2 (ove non si facciano riduzioni, cioè non si raccolgano in doppi prodotti le coppie di prodotti uguali) è un polinomio di

$$\left[\frac{(2n)\,!}{2^n\,n!}\right]^2 = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(2n)\,!$$

termini. Ma allora in virtù di quanto è detto al n. 2 per dimostrare che

$$P_n^2 = \Delta$$

basta far vedere che ogni termine di P_n^2 è un termine di Δ.

Per questo si indichi con

$$\varrho_1\,\sigma_1\,,\ \varrho_2\,\sigma_2\,,\ \cdots,\ \varrho_n\,\sigma_n$$

una distribuzione in n coppie dei soliti $2n$ indici e si indichi con λ la classe della sostituzione

$$S_2 = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \sigma_1 & \varrho_2 & \sigma_2 & \cdots & \varrho_n & \sigma_n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \end{pmatrix}.$$

(¹) Notisi a questo proposito che P_n contiene col segno $+$ il termine

$$a_{12}\,a_{34}\cdots a_{2n-1,2n}\,.$$

Sarà evidentemente

$$P_n^2 = \Sigma (-1)^{l+\lambda} a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_n s_n} a_{\varrho_1 \sigma_1} \dots a_{\varrho_n \sigma_n}$$

purchè si immagini che la somma del secondo membro si estenda a tutti i termini che si ottengono da quello scritto facendo variare in tutte le maniere possibili (e l'una indipendentemente dall'altra) le due distribuzioni

$$r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_n s_n,$$

$$\varrho_1 \sigma_1, \varrho_2 \sigma_2, \dots, \varrho_n \sigma_n.$$

Poichè, come è stato già osservato, in entrambe queste due distribuzioni si può disporre dell'ordine degli elementi di ciascuna coppia è facile riconoscere [1] che se ne può disporre in modo da ottenere che le serie di indici

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n,$$

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$$

[1] Consideriamo i due schemi di indici

$$\begin{bmatrix} s_1 \, s_2 \dots s_n \\ r_1 \, r_2 \dots r_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \, \sigma_2 \dots \sigma_n \\ \varrho_1 \, \varrho_2 \dots \varrho_n \end{bmatrix},$$

ognuno dei quali contiene tutti gli indici $1, 2, \dots, 2n$; si tratta di far vedere che scambiando opportunamente nei due schemi gli indici che si trovan sovrapposti può ottenersi che gli indici inferiori al pari di quelli superiori risultino tutti distinti fra loro.

Per questo cominciamo dal prender di mira la 1ª colonna del 1º schema: essa contiene come elemento inferiore r_1 e come elemento superiore s_1. Allora andiamo a cercare nel 2º schema la colonna (certo esistente) che ha uno dei suoi elementi uguali ad r_1 e sia h_1 l'altro elemento della colonna stessa: scambiando, se occorre, i due elementi essa potrà scriversi

$$(\alpha) \qquad \begin{matrix} r_1 \\ h_1 \end{matrix}.$$

Adesso si vada a cercare nel 1º schema la colonna che ha un elemento uguale ad h_1. Questa colonna o è la 1ª o è un'altra. Se è la 1ª, poichè $h_1 \neq r_1$, sarà $h_1 = s_1$; se no, sia h_2 l'altro elemento della colonna in discorso. Nella prima alternativa siamo già riusciti a far comparire fra gli indici inferiori r_1 ed s_1 e fra rappresentino due permutazioni degli indici $1, 2, \ldots, 2n$; quindi, se indichiamo con r la classe della sostituzione

$$S_3 = \begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots r_n & \varrho_1 & \ldots \varrho_n \\ 1\ \ 2 \ldots n & n+1 & \ldots 2n \end{pmatrix}$$

e con s quella della sostituzione

$$S_4 = \begin{pmatrix} s_1\, s_2 \ldots s_n & \sigma_1 & \ldots \sigma_n \\ 1\ \ 2 \ldots n & n+1 & \ldots 2n \end{pmatrix},$$

il prodotto

$$(-1)^{r+s} a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_n s_n} a_{\varrho_1 \sigma_1} \ldots a_{\varrho_n \sigma_n}$$

è un termine dello sviluppo del nostro determinante Δ.

In seguito a ciò, tutto quel che dobbiamo far vedere si riduce a dimostrare che

$$(-1)^{l+\lambda} = (-1)^{r+s};$$

gli indici superiori s_1 ed r_1; nella seconda, con uno scambio eventuale, possiamo dare a due colonne del 1^0 schema l'aspetto

$$(\beta) \qquad \begin{matrix} s_1 & h_1 \\ r_1 & h_2 \end{matrix}.$$

Poniamoci nella 2^a alternativa e andiamo a cercare nel 2^0 schema la colonna certo distinta dalla (α), che contiene l'elemento h_2; se il suo elemento ulteriore è h_3 possiamo dare a due colonne del 2^0 schema l'aspetto

$$(\gamma) \qquad \begin{matrix} r_1 & h_2 \\ h_1 & h_3 \end{matrix}.$$

Adesso si vada a cercare nel 1^0 schema la colonna che contiene l'elemento h_3. Guardando a (γ) si riconosce che h_3 è diverso da r_1, h_1 e h_2; dunque o h_3 appartiene a una colonna del 1^0 schema diversa da quelle che appaiono in (β) o è $h_3 = s_1$. Se si verifica questa seconda alternativa, siamo già riusciti a far apparire tra gli indici inferiori r_1, h_2, h_1 ed s_1 e tra gli indici superiori s_1, h_1, r_1 ed h_2 (cioè gli stessi indici); se no, continueremo ad applicare il procedimento indicato. In ogni caso questo finirà per chiudersi e si chiuderà sempre per il presentarsi nel 2^0 schema di un indice $h_i = s_1$: ed allora o tutti gli indici saranno esauriti e la nostra affermazione sarà giustificata, o no e basterà riprendere a partire da uno dei rimanenti il ragionamento fatto a partire da r_1 per arrivare in ogni caso a raggiungere lo scopo voluto.

ossia, atteso che $l+\lambda$ è la classe della sostituzione

$$S_1^{-1} S_2 = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \sigma_1 & \varrho_2 & \sigma_2 & \dots & \varrho_n & \sigma_n \\ r_1 & s_1 & r_2 & s_2 & \dots & r_n & s_n \end{pmatrix}$$

ed $r+s$ è la classe della sostituzione

$$S_3^{-1} S_4 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n \end{pmatrix},$$

tutto si riduce a dimostrare che le sostituzioni

$$S_1^{-1} S_2 \text{ ed } S_3^{-1} S_4$$

sono della stessa classe.

Per questo si osservi che i due prodotti U e V dati dalle seguenti eguaglianze

$$U = S_1^{-1} S_2 (\varrho_1 \sigma_1)(\varrho_2 \sigma_2) \dots (\varrho_n \sigma_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & \varrho_1 & \sigma_2 & \varrho_2 & \dots & \sigma_n & \varrho_n \\ r_1 & s_1 & r_2 & s_2 & \dots & r_n & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n & s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix},$$

$$V = S_3^{-1} S_4 (s_1 \sigma_1)(s_2 \sigma_2) \dots (s_n \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n \end{pmatrix},$$

poichè gli indici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ sono diversi dagli indici $r_1, r_2, \dots, r_n$ $(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ e coincidono, a meno dell'ordine, con gli indici $s_1, s_2, \dots, s_n$ $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, possono anche scriversi così:

$$U = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n \end{pmatrix};$$

quindi è chiaro che U e V sono della stessa classe.

Ma la classe di U è pur data da $l+\lambda+n$ e quella di V da $r+s+n$, dunque è dimostrato che $l+\lambda$ ed $r+s$ sono della stessa parità.

Con ciò il nostro teorema è pienamente stabilito [1].

Cagliari, 27 marzo 1913.

[1] Occorre appena avvertire che un'altra dimostrazione del teorema può costruirsi partendo dalla formula ricorrente citata nell'introduzione e procedendo poi col metodo induttivo.