SULLE VARIETÀ DI SEGRE

In una breve Nota, pubblicata nell'ultimo fascicolo dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », ho dimostrato che:

È un S_{i-1}-cono ogni varietà $V_{r+i}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ che sia tagliata dagli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ del suo spazio in $V_r^{n^r}$ rappresentate sopra un S_r dal sistema di tutte le forme d'ordine n.

L'osservazione, assai semplice, che soggiace a quella dimostrazione, è suscettibile di applicazioni più larghe; e qui appunto essa vien rivolta a dimostrare un teorema analogo a quello ora enunciato per una importante classe di varietà razionali normali considerate per la prima volta dal prof. SEGRE ([1]).

Tali varietà si sono presentate in molte questioni di geometria, ed è facile prevedere che esse si presenteranno ancora in altre importanti ricerche ([2]); perciò, come ho già fatto altrove in vari casi particolari, io darò ad esse il nome di *varietà di* SEGRE.

1. Per procedere con tutta chiarezza cominciamo dal ricordare la definizione delle varietà di SEGRE.

Siano dati $n\,(\geq 2)$ spazi lineari $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_n}$, da riguardare, anche se sono sovrapposti, come distinti, e siano $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{p_i}^{(i)}$ le coordinate (omogenee) di un punto generico di S_{p_i}. Allora, se si pone:

$$X_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_n}^{(n)} \qquad \begin{pmatrix} i_j = 0, 1, \ldots p_j \\ j = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix} \tag{1}$$

([1]) SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. V, 1891.

([2]) Così ad esempio, il prof. SEGRE, dopo la presentazione di questo lavoro all'Accademia, mi ha gentilmente comunicato che le varietà in discorso gli si son mostrate come essenziali in una ricerca, ancora inedita, di geometria proiettivo-differenziale, da lui compiuta. Se cioè si fissa una posizione dello spazio (lineare) generatore di una varietà, gli spazi tangenti a questa nei punti di quello portano ad una varietà della classe suddetta.

e si riguardano le $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ come coordinate di un punto in un $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)-1}$, le (1) potranno considerarsi come le equazioni parametriche di una varietà V di questo spazio in corrispondenza biunivoca *senza eccezioni* con la varietà delle n-ple di punti, $A_1 A_2 \dots \dots A_{n-1} A_n$, che si vengono a formare associando un punto qualunque A_1 di S_{p_1}, con un punto qualunque A_2 di S_{p_2}, ... con un punto qualunque A_n di S_{p_n}.

La dimensione di V è, chiaramente, $p_1 + p_2 + \dots + p_n$, e l'ordine, come fu dimostrato dal Prof. SEGRE, vale:

$$\frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \dots\dots p_n!};$$

nell'ipotesi che nessuna delle p sia nulla, noi la diremo *la varietà di* SEGRE *di specie n con gli indici* $p_1, p_2, \dots p_n$.

Così la varietà di SEGRE di 2ª specie con gli indici 1, 1 è la quadrica ordinaria; quella di 2ª specie con gli indici 1, 2 è la V_3^3 razionale normale di S_5 luogo di ∞^1 S_2; quella di 3ª specie con gli indici 1, 1, 1 coincide con la V_3^6, razionale normale di S_7, rappresentabile sullo spazio ordinario mediante il sistema delle superficie cubiche per tre rette generiche, che si presentò al Prof. ENRIQUES come uno dei tipi di V_3 a curve sezioni ellittiche (¹), ecc.

Notisi che se qualcuno dei numeri $p_1, p_2, \dots p_n$ fosse zero la V si ridurrebbe a una varietà di SEGRE di specie inferiore (in particolare, a uno spazio lineare).

2. Ciò posto, cominciamo dallo stabilire una rappresentazione di una varietà di SEGRE sopra uno spazio lineare covenientemente esteso e, per non andare incontro ad inutili complicazioni, riferiamoci, per fissar le idee, al caso delle varietà di 3ª specie.

Sia dunque $V_{p_1+p_2+p_3}$ una varietà di 3ª specie, con gli indici p_1, p_2, p_3, e siano:

$$X_{i_1 i_2 i_3} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} x_{i_3}^{(3)} \tag{2}$$

$$(i_1 = 0, 1, \dots p_1; \quad i_2 = 0, 1, \dots p_2; \quad i_3 = 0, 1, \dots p_3)$$

le equazioni parametriche che la determinano.

(¹) SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, « Ann. di Matematica », serie 3ª, t. XV, n. 22.

Tenendo presenti le (2), si vede che la rappresentazione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ sopra un $S_{p_1+p_2+p_3}$ può ottenersi nel modo più semplice facendo:

$$x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = t$$

e poi riguardando la t e le rimanenti coordinate:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_{p_1}^{(1)}; \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots x_{p_2}^{(2)}; \quad x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots x_{p_3}^{(3)}$$

come coordinate proiettive omogenee di un punto in un $S_{p_1+p_2+p_3}$.

In tal modo viene stabilita una corrispondenza generalmente biunivoca tra i punti di $V_{p_1+p_2+p_3}$ e quelli dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ prescelto; di più si vede che, per essa, ai punti di una sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$ vengono a corrispondere nello spazio rappresentativo i punti di una forma cubica la cui equazione è del tipo:

$$(3) \qquad At^3 + \left[\sum_1^{p_1} B_i^{(1)} x_i^{(1)} + \sum_1^{p_2} B_i^{(2)} x_i^{(2)} + \sum_1^{p_3} B_i^{(3)} x_i^{(3)}\right] t^2 +$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} C_{i,j}^{1,2} x_i^{(1)} x_j^{(2)} + \sum_{i=1}^{i=p_2} \sum_{j=1}^{j=p_3} C_{i,j}^{2,3} x_i^{(2)} x_j^{(3)} + \sum_{i=1}^{i=p_3} \sum_{j=1}^{j=p_1} C_{i,j}^{3,1} x_i^{(3)} x_j^{(1)}\right] t$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=p_1} \sum_{j=1}^{j=p_2} \sum_{k=1}^{k=p_3} D_{i,j,k}\, x_i^{(1)} x_j^{(2)} x_k^{(3)} = 0 .$$

Viceversa, come è ben chiaro, ai punti di una forma cubica rappresentata da un'equazione di questo tipo [la quale contiene $1+(p_1+p_2+p_3)+(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+p_1p_2p_3=(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)$ parametri omogenei] vengono a corrispondere i punti di una determinata sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+p_3}$.

La varietà base del sistema lineare (3) è formata dai tre spazi $S_{p_1+p_2-1} \equiv \alpha_3$, $S_{p_2+p_3-1} \equiv \alpha_1$ ed $S_{p_3+p_1-1} \equiv \alpha_2$ dell'iperpiano $t=0$, che sono ivi rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \dots = x_{p_1}^{(1)} = 0 ; \qquad x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = \dots = x_{p_2}^{(2)} = 0 ;$$
$$x_1^{(3)} = x_2^{(3)} = \dots = x_{p_3}^{(3)} = 0 ;$$

e, come è facile persuadersi, ogni forma del sistema lineare in discorso ha tre spazi doppi negli spazi secondo cui α_1, α_2 e α_3 si tagliano a due a due.

D'altra parte è pur chiaro che ogni forma cubica dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, la quale debba passare per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e avere tre spazi doppi in quelli secondo cui α_1, α_2, e α_3 si tagliano a due a due, ha una equazione del tipo (3); dunque:

Ogni varietà di SEGRE *di* 3^a *specie con gli indici* p_1, p_2, p_3 *può rappresentarsi biunivocamente sopra un* $S_{p_1+p_2+p_3}$ *mediante il sistema completo delle forme cubiche che passano per tre spazi generici* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, *di un iperpiano, con le dimensioni rispettive* $p_2+p_3-1, p_3+p_1-1, p_1+p_2-1$ *e hanno tre spazi doppi negli* $S_{p_1-1}, S_{p_2-1}, S_{p_3-1}$ *secondo cui* α_1, α_2 *e* α_3 *si tagliano a due a due.*

Il fatto che il sistema di forme cubiche di cui si parla in questo teorema è completo, corrisponde, com'è ben noto, all'altro che la $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale, e di ciò sarebbe facile procurarsi una dimostrazione diretta ricordando le prime proprietà geometriche delle varietà di SEGRE; ma crediamo inutile di fermarci su questo proposito.

3. Piuttosto, osserveremo, poichè questo ha per noi importanza fondamentale, che nel sistema lineare (3) è contenuto parzialmente il sistema di tutti gli iperpiani dell'$S_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentativo, che il *resto* di questo sistema rispetto al primo è dato dall'iperpiano $t=0$ contato due volte, e che, per conseguenza, la rappresentazione considerata può riguardarsi come ottenuta per proiezione della $V_{p_1+p_2+p_3}$ da un certo $S_{(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)-(p_1+p_2+p_3)-2}$ sopra un conveniente $S_{p_1+p_2+p_3}$.

Se, per comodità, diciamo ω il centro di proiezione si vede che lo spazio ω è quello secondo cui si intersecano gl'iperpiani dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$ rappresentati dalle equazioni:

$$X_{000}=0\,, \quad X_{i_1 00}=0\,, \qquad X_{0 i_2 0}=0\,, \qquad X_{00 i_3}=0$$

$$(i_1=1, 2, \dots p_1\,; \quad i_2=1, 2, \dots p_2\,; \quad i_3=1, 2, \dots p_3)$$

e come spazio rappresentativo si può assumere quello *opposto* ad ω nella *piramide fondamentale* dello spazio della $V_{p_1+p_2+p_3}$.

Ora si osservi:

α) che lo spazio ω seca la $V_{p_1+p_2+p_3}$ secondo una varietà Φ di dimensione $p_1+p_2+p_3-2$ spezzata in tre varietà di SEGRE Φ_1, Φ_2, Φ_3; essendo Φ_1 la varietà generata nel solito modo dagli iperpiani:

$$x_0^{(2)}=0\,, \qquad x_0^{(3)}=0$$

di S_{p_2} ed S_{p_3} insieme con S_{p_1}; Φ_2 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(3)}=0\,; \qquad x_0^{(1)}=0$$

di S_{p_3} ed S_{p_1} insieme con S_{p_2} e Φ_3 la varietà generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(1)} = 0\,, \qquad x_0^{(2)} = 0$$

di S_{p_1} ed S_{p_2} insieme con S_{p_3} (¹);

β) che Φ *appartiene* ad ω (ciò che risulta o da una verifica analitica diretta, o da una semplice osservazione geometrica fondata sul fatto che $V_{p_1+p_2+p_3}$ è normale);

γ) che Φ_1, Φ_2, Φ_3 si tagliano nella varietà di Segre generata dagli iperpiani:

$$x_0^{(1)} = 0\,, \qquad x_0^{(2)} = 0\,, \qquad x_0^{(3)} = 0$$

di S_{p_1}, S_{p_2} ed S_{p_3};

δ) che la sezione di $V_{p_1+p_2+p_3}$ con l'iperpiano $X_{000} = 0$ si spezza in tre varietà di Segre delle quali ve n'è sempre due che passano per Φ_1, Φ_2 o Φ_3; e quindi l'iperpiano $X_{000} = 0$ *tocca* $V_{p_1+p_2+p_3}$ in tutti i punti di Φ.

4. Le cose dette nei n. 2 e 3 a proposito delle varietà di 3ª specie si estendono senza fatica a quelle di specie n; e si trova così il seguente teorema generale:

Sia $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ una varietà di Segre *di specie n generata dagli spazi lineari $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots S_{p_n}$. Sia inoltre S_{p_i-1} un iperpiano scelto comunque nello spazio S_{p_i} $(i = 1, 2 \dots n)$ e si chiamino: $\Phi_{h.k}$ la varietà di* Segre *generata da S_{p_h-1} ed S_{p_k-1} insieme con gli spazi che restano dai dati S_{p_i} dopo averne esclusi S_{p_h} ed S_{p_k}, e Φ la varietà che risulta dalla somma di tutte le $\Phi_{h,k}$ facendo percorrere ad (h, k) la serie di tutte le combinazioni binarie degli indici 1, 2, ... n.*

Allora Φ appartiene ad uno spazio ω di dimensione

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_n + 1) - (p_1 + p_2 + \dots p_n) - 2\,;$$

la proiezione di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ da ω sopra un $S_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ risulta generalmente biunivoca e le sezioni iperpiane di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ si riflettono nel sistema lineare completo delle forme d'ordine n di $S_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ che passano, semplicemente, per certi n spazi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ situati in

(¹) Notisi che se qualcuno degli indici p_1, p_2, p_3 è uguale all'unità, qualcuna delle Φ_1, Φ_2, Φ_3 risulterà di specie inferiore a 3.

un iperpiano dello spazio rappresentativo e aventi, ordinatamente, le dimensioni:

$$p_2 + p_3 + \dots + p_n - 1\,; \quad p_1 + p_3 + p_4 + \dots + p_n - 1\,; \quad \dots;$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} - 1\,;$$

doppiamente per gli spazi secondo cui $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ *si tagliano a due a due; tre volte per gli spazi secondo cui* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ *si tagliano a tre a tre;* $(n-1)$ *volte per quelli secondo cui* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ *si tagliano ad* $n-1$ *ad* $n-1$.

L'iperpiano che contiene $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ *è poi la traccia, sullo spazio rappresentativo, dell'iperpiano dello spazio ambiente che tocca* $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ *in tutti i punti di* Φ [1].

[1] È degno di nota, e per la sua semplicità e per le conseguenze a cui dà luogo, il caso particolare delle varietà di 2ª specie; le quali, se hanno gli indici p_1 e p_2, sono rappresentabili sopra un $S_{p_1+p_2}$ mediante il sistema di tutte le quadriche che passano per un S_{p_1-1} e per un S_{p_2-1} generici.

Così la V_4^6 di S_8 con due schiere doppiamente infinite di piani è rappresentabile sopra un S_4 mediante il sistema delle quadriche per due rette (donde segue, tenendo presente quel che è osservato al n. 60 del mio lavoro già citato degli «Annali di Matematica», che la nota V_4^3 di S_5 studiata già dal sig. Perazzo si può rappresentare sopra un S_4 mediante il sistema delle quadriche per due rette e per tre punti): la V_5^{10} di S_{11}, con $\infty^2\, S_3$ e $\infty^3\, S_2$, si può rappresentare sopra un S_5 mediante il sistema delle quadriche per una retta e per un piano, ecc.

Da questa rappresentazione della V_5^{10} (che è ottenuta mediante proiezione dall'S_5 di una V_3^3 della V_5^{10}, luogo di $\infty^1\, S_2$) possiamo trarre un'utile conseguenza. Infatti per essa una sezione iperpiana generica, V_4^{10}, della V_5^{10} (e, per evitare equivoci, si osservi che, per un facile computo di costanti, non è tale una sezione iperpiana contenente una V_3^3 luogo di $\infty^1\, S_2$) viene riferita punto per punto a una V_4^2 dell'S_5 rappresentativo e su questa V_4^2 il sistema lineare delle sezioni iperpiane di V_4^{10} vien rappresentato da un sistema lineare di V_3^4 con una varietà base formata da una retta e da un piano.

Ne segue, effettuando una proiezione stereografica da un punto di questa retta o di questo piano, che la V_4^{10} è rappresentabile punto per punto sopra un S_4 per modo che le sezioni iperpiane siano rappresentate da un sistema lineare di forme cubiche.

Così ai teoremi enunciati nell'Introduzione e nel n. 25 della mia Nota: *Sulle varietà a quattro dimensioni di S_r ($r \geq 9$) i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due* («Rendic. del Circ. Matem. di Palermo», t. XXVII, 1909), può darsi un aspetto più semplice.

5. Prima di procedere innanzi è utile fermarsi un momento sopra alcune osservazioni relative agli spazi lineari contenuti nella $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$.

Sia in primo luogo r una retta situata sulla $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ ed R un punto di r; sia poi $A_1 A_2 \ldots A_n$ l'n-pla di punti estratta da $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots S_{p_n}$ che ha per immagine R; è chiaro che al variare di R su r, degli n punti $A_1, A_2, \ldots A_n$, $n-1$ restano fissi.

E infatti, se anche due soli di essi, per es. A_{n-1} e A_n, assumessero ∞^1 posizioni distinte, una sezione iperpiana di $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ che, come quella rappresentata dall'equazione:

$$X_{000\ldots0} = 0 ,$$

si spezzi in n varietà di SEGRE, taglierebbe r in più di un punto.

Segue che, dei punti $A_1 \ldots A_n$, $n-1$ restano fissi al muoversi di R su r e l'n^{mo} descrive una retta.

Ora uno spazio lineare contiene per intero una retta appena ne contiene due punti; dunque i soli spazi lineari contenuti in $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ sono quelli che si ottengono fissando un punto in $n-1$ degli spazi S_{p_i}, per es. $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots S_{p_{n-1}}$, e poi considerando le n-ple formate riunendo codesti $n-1$ punti a un punto variabile in uno spazio lineare contenuto in (o coincid. con) S_{p_n}. Indicando con $|\Sigma_{p_h}|$ il sistema di $\infty^{p_1+\cdots+p_{h-1}+p_{h+1}+\cdots+p_n}$ spazi ad h dimensioni di $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ che si ottengono fissando nel modo ora detto una $(n-1)$-pla di punti in $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots S_{p_{h-1}}, S_{p_{h+1}}, \ldots S_{p_n}$ e poi aggregandola a tutti i punti di S_{p_h}, possiamo dire che:

Gli spazi lineari contenuti in $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ sono tutti e soli quelli degli n sistemi $|\Sigma_{p_i}|$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ e quelli ad essi subordinati.

Notisi in secondo luogo che la varietà di SEGRE indicata più sopra con $\Phi_{h,k}$ si comporta in modo ben diverso rispetto agli spazi del sistema $|\Sigma_{p_i}|$ secondo che $i = h, k$ oppure $i \neq h$ e k.

Infatti se $i = h$ o k, un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ o non ha alcun punto comune con $\Phi_{h,k}$ o la taglia secondo un S_{p_i-1} appartenente al sistema $|S_{p_i-1}|$, avente per $\Phi_{h,k}$ significato analogo a quello che $|\Sigma_{p_i}|$ ha per la data $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$; mentre se $i \neq h$ e k, un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ o non ha alcun punto comune con $\Phi_{h,k}$ o vi giace per intero ed è un S_{p_i} di un suo $|S_{p_i}|$.

Aggiungasi che se una varietà di SEGRE $\Psi_{h,k}$ della stessa specie e con gli stessi indici di $\Phi_{h,k}$ è situata su $V_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ e si comporta rispetto ai sistemi $|\Sigma_{p_i}|$ allo stesso modo di $\Phi_{h,k}$, necessariamente $\Psi_{h,k}$ coincide con una varietà del tipo di quelle indicate con $\Phi_{h,k}$.

E infatti, supposto, per fissar le idee, $h < k$, sia $A_1 \dots A_h \dots A_k \dots A_n$ l'n-pla immagine del punto A di $\Psi_{h,k}$. Poichè $\Psi_{h,k}$ contiene per intero un S_{p_i} di $|\Sigma_{p_i}|$ per $i \neq k$ e h appena ne contenga un punto, è chiaro che corrispondono a punti di $\Phi_{h,k}$ tutte le n-ple le quali si deducono da $A_1, \dots, A_n$ tenendo fermi tutti i punti $A_1, \dots, A_n$ tranne A_i e facendo variare comunque A_i nel relativo S_{p_i}. Allo stesso modo si vede che si riflettono in punti di $\Psi_{h,k}$ tutte le n-ple che si deducono da $A_1, A_2, \dots, A_n$ tenendo fermi tutti i punti $A_1, \dots, A_n$ ad eccezione di A_h (o A_k) e facendo descrivere ad A_h (o A_k) un certo iperpiano del relativo S_{p_h} (od S_{p_k}). Ora questo iperpiano di S_{p_h} (od S_{p_k}) è indipendente dalla scelta dell'n-pla $A_1, A_2, \dots, A_n$ fra quelle che corrispondono a punti di $\Psi_{h,k}$.

Per persuadersene si torni a considerare l'n-pla $A_1, \dots, A_{h-1}, A_h, A_{h+1}, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$, e si osservi che se si tengon fermi tutti i suoi punti tranne A_h e si fa variare A_h in un certo iperpiano di S_{p_h} si ottiene un S_{p_h-1} appartenente al sistema $|S_{p_h-1}|$ di $\Psi_{h,k}$ analogo a quello che abbiamo indicato nello stesso modo per $\Phi_{h,k}$. Se si suppone di far questa operazione per ogni n-pla ricavata dalla precedente, sostituendo ad A_i ($i \neq h$ e k) un punto qualunque B_i del relativo S_{p_i} si otterranno, in corrispondenza al punto A_k, $\infty^{p_1+\dots+p_{h-1}+p_{h+1}+\dots+p_{k-1}+p_{k+1}+\dots+p_n}$ S_{p_h-1} del sistema $|S_{p_h-1}|$. Ma allora basta tener presente la dimensione della varietà di S_{p_h-1} costituita da questo sistema $|S_{p_h-1}|$ per concludere che A_h non può assumere in S_{p_k} che ∞^{p_k-1} posizioni distinte e che, per conseguenza, quei tali iperpiani di S_{p_h} ed S_{p_k} sono fissi.

Segue che la $\Psi_{h,k}$ è una varietà del tipo di quelle che abbiamo indicato con $\Phi_{h,k}$.

6. Ed ora supponiamo che una $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ dell'ordine $\dfrac{(p_1+p_2 \dots + p_n)!}{p_1!\,p_2! \dots p_n!}$ di $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)}$ sia secata da ogni iperpiano del suo spazio in una varietà di Segre di specie n con gli indici $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Dico che, *eccettuato il caso in cui* $n = 2$ *e* $p_1 = p_2 = 1$, $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ è un cono proiettante dal suo vertice una siffatta varietà di Segre.

Infatti, consideriamo una sezione iperpiana Π di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ e una sua *varietà* Φ, Φ_0, appartenente a uno spazio ω; poi consideriamo un iperpiano τ che ruoti intorno ad ω in maniera continua. Per ogni posizione di τ si avrà una sezione di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ coi relativi sistemi $|\Sigma_{p_i}|$; e, come la sezione si può ottenere da Π per variazione continua, così questi sistemi si potranno dedurre per variazione continua da quelli di Π. Segue facilmente (ricordando che Φ_0 è una somma di varietà del tipo indicato più sopra con $\Phi_{h,k}$) che Φ_0 si comporta rispetto ai sistemi di Π come rispetto ai sistemi di qualsiasi altra sezione ottenuta per mezzo dell'iperpiano τ: e che, per conseguenza, Φ_0 è una varietà Φ per ogni sezione iperpiana uscente da ω.

Ciò posto, proiettiamo $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ da ω sopra un $S_{p_1+\dots+p_n+1}$ dello spazio ambiente, che non tagli ω; la proiezione risulterà generalmente biunivoca, le sezioni iperpiane passanti per Φ_0 si rifletteranno negli iperpiani dello spazio rappresentativo e il sistema di tutte le sezioni iperpiane di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ si rifletterà in un sistema completo di forme d'ordine n di dimensione $(p_1+1)(p_2+1)\dots$ $\dots(p_n+1)$ che segnerà sopra ogni iperpiano dello spazio rappresentativo un sistema lineare di forme d'ordine n, $(p_1+1)(p_2+1)\dots$ $\dots(p_n+1)-1$ volte infinito, avente per varietà base n spazi lineari $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_n$ (situati in un $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)-2}$), di cui l'$i^{mo}$ avrà per dimensione $p_1+p_2+\dots+p_{i-1}+p_{i+1}+\dots+p_n-1$.

Eccettuato il caso di $n=2$ e $p_1=p_2=1$, questa somma è sempre non inferiore ad 1 (¹), quindi, eccettuato codesto caso, la varietà base del sistema rappresentativo $|K|$ della $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ sarà formata da n spazi lineari $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, di cui l'$i^{mo}$ avrà la dimensione $p_1+p_2+\dots+p_{i-1}+p_{i+1}+\dots+p_n$; inoltre $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ apparterranno a un iperpiano, σ, che contato $n-1$ volte costituirà il *resto* rispetto a $|K|$ del sistema degli iperpiani dello spazio rappresentativo.

Dal fatto che gli spazi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ stanno in un iperpiano (cioè in un $S_{p_1+p_2+\dots+p_n}$) si deduce che essi hanno un punto comune O (²), e questo punto sarà $(n-1)$-plo per ogni forma del sistema $|K|$, poichè l'intersezione di $n-1$ degli spazi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ risulta tutta $(n-1)$-pla per le forme di $|K|$.

Gli spazi secondo cui $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ si tagliano ad $n-1$ ad $n-1$ sono degli $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots S_{p_n}$; un punto che appartenga a uno di questi S_{p_i} è un punto $(n-1)$-plo per le forme di $|K|$ e il cono ivi osculatore a una qualunque delle forme di $|K|$ è un cono d'ordine $n-1$ avente per vertice appunto l'S_{p_i} considerato; dunque il cono osculatore in O alle forme di $|K|$, dovendo avere per vertice uno

(¹) Si rammenti che ognuno degli indici $p_1, p_2, \dots p_n$ è sempre $\geqq 1$.

(²) E non più che un punto, poichè $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ non hanno punti comuni.

spazio che contenga $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots S_{p_n}$, sarà l'iperpiano σ contato $(n-1)$ volte.

Ma allora, poichè $|K|$ è un sistema lineare di monoidi col cono osculatore fisso nel punto $(n-1)$-plo O segue subito che $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ è un cono; c. d. d.

Il caso di $n=2$, $p_1=p_2=1$ sfugge al ragionamento fatto; e ciò è ben naturale, perchè quando $n=2$ e $p_1=p_2=1$ anche il teorema cessa d'esser vero.

Possiamo pertanto enunciare il seguente teorema:

Se una $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+1}$ *di* $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)}$ $\left[\textit{dell'ordine } \frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)!}{p_1!\,p_2!\dots p_n!}\right]$ *è secata da ogni iperpiano in una varietà di* SEGRE *di specie* n *con gli indici* $p_1, p_2, \dots p_n$,

a) essa è un cono proiettante dal suo vertice una siffatta varietà di SEGRE, *oppure*

b) $n=2$ *e* $p_1=p_2=1$, *e allora essa è la quadrica generale dello spazio a quattro dimensioni* [1].

A questo teorema può darsi agevolmente una forma più generale considerando le $V_{p_1+p_2+\dots+p_n+i}$ di $S_{(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)+i-1}$ che da ogni $S_{(p_1+1)\dots(p_n+1)-1}$ dello spazio ambiente siano secate in varietà di SEGRE di specie n con gli indici $p_1, p_2, \dots p_n$. Queste o sono degli S_{i-1}-coni o sono delle quadriche (e allora $n=2$ e $p_1=p_2=1$).

7. **Digressione.** — In una prima redazione di questa Nota (settembre 1909), il teorema del n. 6 era dimostrato in maniera analoga a quella adoperata qui, ma il ragionamento si presentava più complicato in taluni suoi particolari, perchè la rappresentazione di una $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ sopra un $S_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ che ivi si utilizzava non era di costruzione così semplice come quella a cui si fa ricorso nei n. 2, 3 e 4. Quest'ultima (caso particolare dell'altra) mi fu cortesemente suggerita dal Prof. SEGRE (cui mi è grato rivolgere ancora una volta i più cordiali ringraziamenti); ed essa ha reso più spedita l'esposizione in tutte le sue parti. In ogni modo, poichè il teorema di cui mi servivo prima non sembra del tutto privo d'interesse, credo che metta conto di fermarsi qui un momento ad enunciarlo.

Sia $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ una varietà di SEGRE di specie n definita mediante le equazioni parametriche (1) e supposto che ognuno degli

(2) Alcuni casi particolari di questo teorema si trovano stabiliti ai numeri 47 e 61 del mio già citato lavoro degli « Annali di Matematica ».

indici $p_1, p_2, \dots p_n$ sia non inferiore a $n-2$, consideriamo nell'S_{p_1}, nell'S_{p_2}, ... e nell'S_{p_n} che han dato origine alla $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$, n sistemi lineari d'iperpiani $n-2$ volte infiniti, riferiti proiettivamente fra di loro.

Senza venir meno alla generalità, noi possiamo supporre che tali sistemi siano definiti dalle equazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda_0 x_0^{(1)} + \lambda_1 x_1^{(1)} + \dots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(1)} = 0 \\ \lambda_0 x_0^{(2)} + \lambda_1 x_1^{(2)} + \dots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(2)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_0 x_0^{(n)} + \lambda_1 x_1^{(n)} + \dots + \lambda_{n-2} x_{n-2}^{(n)} = 0 \end{cases}$$

e che gli iperpiani corrispondenti siano quelli forniti dalle (4) quando per le λ si pongano in tutte gli stessi valori (non tutti nulli).

Ciò posto si consideri la $V_{p_1+p_2+\dots+p_n-2}$ di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ che si ottiene considerando, entro la varietà delle n-ple di punti estratte da $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots S_{p_n}$, quella formata dalle n-ple di punti $A_1, A_2, \dots A_n$ per le quali accade che i punti A_1, A_2, A_{n-1} e A_n si trovano ordinatamente in iperpiani di $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots S_{p_n}$ che si corrispondano fra loro nelle proiettività stabilite dalle (2).

Ebbene, si può dimostrare che tale $V_{p_1+p_2+\dots+p_n-2}$ appartiene ad uno spazio ω la cui dimensione è data da:

$$(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1) - (p_1+p_2+\dots+p_n) - 2 \,;$$

e che la proiezione di $V_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ da ω sopra un $S_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ risulta generalmente biunivoca. Le immagini delle sezioni iperpiane sono poi forme d'ordine n passanti per n spazi *generici* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ di cui l'i^{mo} ha per dimensione:

$$p_1 + p_2 \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n - 1 \,;$$

e il *resto* del sistema degli iperpiani dello spazio rappresentativo rispetto a quello di codeste immagini è *una* forma d'ordine $n-1$ passante per $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Più sopra, si è supposto, per maggiore semplicità, che nessuno degli indici $p_1, p_2, \dots p_n$ fosse inferiore ad $n-2$; ma le cose dette, con leggere modificazioni, continuano a sussistere anche quando una tale ipotesi non sia verificata.

Palermo, 9 dicembre 1909.