LE SUPERFICIE A CURVE SEZIONI DI GENERE 3.

Sia F^n una superficie algebrica irriducibile d'ordine n di S_r $(r \geq 3)$, e, detto $|C|$ il sistema (lineare) delle sue sezioni iperpiane, supponiamo che il genere di $|C|$ sia 3 e diciamo $|C^*|$ il sistema lineare di curve del 4^0 ordine di dimensione *massima* che taglia sopra ogni curva di $|C|$ gruppi della relativa serie canonica g_4^2.

Se la dimensione di $|C^*|$ supera 2, ogni curva di $|C|$ deve staccarsi da qualche curva di $|C^*|$, dunque $n \leq 4$. Ma, per l'ipotesi fatta sul genere di $|C|$, non può essere $n<4$, dunque $n=4$ ed $r=3$.

Segue che, escluse le superficie ordinarie del 4^0 ordine, per ogni altra superficie a sezioni iperpiane del genere 3 la dimensione di $|C^*|$ non può essere che ≤ 2.

Se la dimensione di $|C^*|$ è uguale a 2, una ricerca del prof. Castelnuovo (1) mostra che la superficie F^n:

a) è una rigata di genere 3; oppure

b) coincide con la F^{16} dell'S_{14} rappresentata nel piano dal sistema di tutte le quartiche o con una sua proiezione (fatta da punti esterni, o non); oppure

c) coincide con la F^8 di S_6 intersezione completa di una quadrica con un cono proiettante dal suo vertice una superficie di Veronese (2), o con una sua proiezione (fatta da punti, esterni, o non); oppure

d) coincide con la F^{16} di S_{14} rappresentata sul piano mediante

(1) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere* 3. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXV, 1890).

(2) Tale superficie può sempre rappresentarsi sopra una superficie cubica ordinaria mediante il sistema delle curve segate su questa dalle quadriche che la toccano in un punto fisso (Castelnuovo, loc. cit.); quindi o è razionale, o è riducibile per trasformazione birazionale a un cono cubico e allora si ha per essa $p_g = 0$ e $p_a = -1$.

le curve del 6^0 ordine che hanno un punto quadruplo e un punto doppio in comune, o con una sua proiezione; oppure, infine,

e) coincide con la F^{16} di S_{14} rappresentata sul piano mediante le curve d'ordine $8 - \mu$ con un punto $(6 - \mu)$-plo e $3 - \mu$ punti doppi infinitamente vicini a questo ($\mu = 0, 1, 2, 3$), o con una sua proiezione.

In questo lavoro, ponendo a fondamento un teorema dei proff. CASTELNUOVO ed ENRIQUES [1], che fece fare alla teoria delle superficie a curve sezioni di genere 3 «un progresso essenziale», si fa l'ipotesi che la dimensione di $|C^*|$ sia < 2 (e allora, come si vedrà, essa non può essere che uguale a 1), si trova che la F^n ha in tal caso *al massimo l'ordine* 8 *ed appartiene al più ad un* S_5 e si determinano le F^n *normali* dello spazio ordinario.

Esse hanno tutte l'ordine 6 e contengono ∞^1 coniche le quali possono essere situate

α) a coppie nei piani di un fascio; oppure

β) una per una nei piani tangenti di un cono ellittico di 3^a classe; oppure

γ) una per una nei piani tangenti di una sviluppabile ellittica di 4^a classe non conica.

Ciascuna delle ipotesi α), β) e γ) dà luogo a più tipi diversi, a seconda della natura della linea doppia; ma, ad evitare ripetizioni inutili, rimandiamo il lettore alla fine dei capitoli 2^0 e 3^0 per l'enumerazione di questi tipi.

Le superficie che così si incontrano sembrano nuove, e in un altro lavoro, che è da considerarsi come la continuazione di questo e che presto sarà pubblicato, si esaminerà la questione della loro riducibilità a un cono cubico (ellittico) per *trasformazioni Cremoniane* dello spazio e quella della loro deducibilità per proiezione da superficie dell'8^0 ordine dello spazio a cinque dimensioni.

Nel seguito, per amore di brevità, le superficie già enumerate dal professore CASTELNUOVO si diranno *superficie di* 1^a *specie;* le altre, *di* 2^a *specie:* il nostro problema consiste, adunque, nella determinazione di tutte le *superficie della* 2^a *specie.*

(1) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, (s. 3), t. VI, 1901), n. 16.

Capitolo I.

IL TEOREMA FONDAMENTALE.

1. Consideriamo una superficie F dello spazio ordinario a sezioni piane del genere 3 e indichiamo con n il suo ordine.

Se $n > 4$, per un importante teorema dei proff. Castelnuovo ed Enriques (loc. cit.), la F è razionale o riducibile (per trasformazione birazionale) ad una rigata: quindi, se essa non è una rigata (di genere 3) ([1]), è riducibile a una rigata del genere 1 o 2.

Ora se F fosse riducibile a una rigata del genere 2, si avrebbe su di essa un fascio (del genere 2) di curve razionali di un certo ordine m e sopra una sezione piana generica una involuzione di ordine m e genere 2; quindi, applicando la formola di Zeuthen, il numero dei punti doppi dell'involuzione sarebbe dato da

$$y = 4 - 2\,m.$$

Di qui, non potendo essere $m = 1$, seguirebbe $m = 2$ ed $y = 0$; ossia la F conterrebbe un fascio di coniche (del genere 2) di cui nessuna toccherebbe un piano generico dello spazio.

L'assurdo cui siamo pervenuti ([2]) ci dà intanto il teorema:

Le superficie a curve sezioni del genere 3 (appartenenti o non allo spazio ordinario), che non siano del 4^0 ordine e non siano rigate, sono razionali o riducibili per trasformazione birazionale a un cono cubico ellittico.

2. Lasciando da parte le superficie razionali, le quali sono tutte manifestamente di *1^a specie*, consideriamo una superficie F non rigata, di ordine $n > 4$, a sezioni piane del genere 3 e riducibile a un cono cubico ellittico.

Per essa il genere geometrico sarà dato da $p_g = 0$ e il genere

([1]) Dalla formula di Zeuthen che dà il numero dei punti doppi di una involuzione di ordine ν (> 1) e genere π sopra una curva di genere p, segue subito che deve essere $\pi < p$, se $p > 1$; e quindi, se una superficie a curve sezioni di genere $p > 1$ è trasformabile birazionalmente in una rigata di genere p, essa è addirittura una rigata di genere p.

([2]) Cfr. per un ragionamento analogo De Franchis, *Le superficie irrazionali di 4^0 ordine*, ecc. (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XIV, 1900), n. 1.

aritmetico da $p_a = -1$. Se $|C|$ è il sistema lineare completo contenente il (o coincidente col) sistema delle sezioni piane ed r è la sua dimensione, il teorema di RIEMANN-ROCH esteso alle superficie dà:

$$n - r \leq 3;$$

quindi, se mediante $|C|$ si muta birazionalmente la F in una superficie Φ d'ordine n dello spazio S_r $(r \geq 3)$ e poi (per $r > 3$) si proietta Φ da $r - 3$ suoi punti generici sopra un S_3, si otterrà in questo spazio una superficie F normale a sezioni piane del genere 3, riferita birazionalmente ad F e di un ordine $n' = n - r + 3 \leq 6$.

Questa osservazione suggerisce di cominciare a considerare in modo particolare per la determinazione di tutte le superficie a sezioni piane (o iperpiane) del genere 3, quelle fra di esse che appartengono allo spazio ordinario, sono normali ed hanno l'ordine $n' = 5$ o 6.

3. Una superficie del 5^0 ordine F (dello spazio ordinario) a sezioni piane del genere 3 ammette sempre una rete di quadriche subaggiunte che la taglia (fuori delle linee multiple) in una rete di quartiche (sghembe) segnante sopra ogni sezione piana la serie canonica g_4^2.

Infatti, ripetendo solo per comodità del lettore un ragionamento adoperato dal prof. CASTELNUOVO in un caso assai più generale (1), siano A e B due punti di una retta generica r dello spazio. Un piano generico per la retta r sega F in una curva del 5^0 ordine di genere 3 normale non speciale che possiede una rete di coniche aggiunte: quindi una sola di queste coniche passa per i punti A e B. Le ∞^1 coniche che così si ottengono relativamente agli ∞^1 piani del fascio r passano tutte per i punti A e B e di esse nessuna può spezzarsi nella retta r e in una retta residua, dunque esse costituiscono una quadrica sub-aggiunta ad F.

Facendo variare sulla retta r i punti A e B si ottiene allora, come appunto è stato affermato, una rete di quadriche sub-aggiunte ad F.

Ciò dimostra che *le superficie del 5^o ordine a sezioni piane del genere* 3 *sono tutte di 1^a specie* e quindi possiamo fare a meno di considerarle (2).

(1) *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (Math. Ann., Bd. 44), n. 16.

(2) E possiamo anzi fare a meno, per una dimostrazione del prof. CASTELNUOVO che trovasi nel luogo ora citato, di considerare tutte le superficie di S_r a sezioni di genere 3 e di ordine $n = r + 2$, poichè esse risultano tutte di 1^a specie.

4. Abbiasi ora una superficie F del 6^0 ordine a sezioni piane del genere 3 con $p_g = 0$ e $p_a = -1$.

Il sistema aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane è costituito necessariamente da un fascio di quartiche, poichè se il sistema aggiunto fosse una rete esso taglierebbe sopra ogni curva di $|C|$ la serie canonica completa e la F sarebbe, contro l'ipotesi, regolare; e se il sistema aggiunto fosse dato da una sola curva o mancasse affatto, la deficienza della serie tagliata da esso sulla curva generica di $|C|$ sarebbe superiore a $p_g - p_a = 1$ [1].

Ma, come è noto, sebbene il sistema delle quartiche aggiunte al sistema delle sezioni piane di F sia soltanto un fascio, può darsi che quello delle quartiche sub-aggiunte sia invece una rete; ora a noi importa decidere quali sono i casi in cui il sistema delle quartiche sub-aggiunte è più ampio di quello delle quartiche aggiunte, perchè, date le ricerche già citate del prof. Castelnuovo, per aver tipi nuovi di superficie a curve sezioni del genere 3 bisognerà restringersi a quelli pei quali accade che il sistema delle quartiche sub-aggiunte coincide col fascio delle quartiche aggiunte.

Per questo consideriamo una sezione piana generica C di F e un suo punto P. Mutando la curva C in una quartica piana γ mediante la serie canonica g_4^2 (ciò che è certamente possibile, poichè C, per un teorema del prof. Enriques [2], non essendo F nè razionale nè rigata, non è iperellittica), la serie lineare di γ che corrisponderà alla serie lineare g_6^2 tagliata su C dalle rette del suo piano potrà considerarsi come staccata su γ da una rete di cubiche avente sei punti base su γ, e se π è il punto di γ omologo al punto P di C, vi sarà una sola cubica della rete che seghi γ in tre punti allineati con π; essa sarà *la* cubica che appartiene al fascio avente sei dei suoi punti base in quelli della rete e secante la quartica γ nelle terne di punti allineati con π.

Corrispondentemente vi sarà sopra C una sola terna di punti allineati Q, R, S che insieme con P dia un gruppo della serie canonica [3]: anzi il ragionamento fatto prova di più che la terna

[1] La stessa cosa, del resto, segue da un teorema del sig. Picard, di cui il prof. Severi ha dato ultimamente un'elegante dimostrazione geometrica (*Sulla regolarità*, ecc., Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 8 novembre 1908).

[2] *Sui sistemi lineari di superficie*, ecc. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1893), n. 2.

[3] La cosa stessa poteva del resto dedursi dalla formula generale data dal prof. Castelnuovo al n. 8 delle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXIV, 1889).

QRS è indeterminata solo quando la retta QRS esca da un punto triplo di C e P sia il *resto*, rispetto alla serie canonica, della g_3^1 che essa descrive quando la retta che la sostiene ruota intorno al punto triplo.

Ciò posto, preso su F il punto generico P, consideriamo le ∞^2 terne QRS che nel modo ora detto vengono a corrispondere a P sulle ∞^2 sezioni piane di F uscenti da P. Può darsi che tali terne QRS invadano tutta la superficie F e può darsi che esse descrivano soltanto una linea g_p della superficie stessa.

Nella 2ª ipotesi è chiaro che g_p, possedendo ∞^2 trisecanti, è una curva piana; poi, giacchè ogni punto Q di g_p deve appartenere a ∞^1 terne QRS, queste terne saranno quelle relative a P negli ∞^1 piani passanti per la retta PQ, quindi ogni punto di g_p diverso da P e sezione di g_p con un piano ω uscente da P deve appartenere alla terna QRS relativa ad ω. Ciò porta che la g_p o non passa per P ed è una cubica piana o ha in P un punto t-plo ed è dell'ordine $3+t$.

Se g_p è una cubica, il piano che la contiene taglia la superficie F in una curva spezzata; e la stessa conclusione vale se g_p passa per P, perchè in tal caso non può essere $t > 2$ (altrimenti il piano che la contiene sarebbe tangente ad F in P e taglierebbe F in una curva con un punto più che doppio in P): quindi al variare del punto P, per un noto teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO [1], il piano della curva g_p non può assumere che ∞^1 posizioni diverse. Segue dunque, senza insistere sopra una maggiore caratterizzazione della curva g_p, che del resto non presenterebbe alcuna difficoltà, che se le terne QRS relative al punto generico P non invadono tutta la superficie F le rette che contengono le terne relative a *tutti* i punti della superficie F costituiscono un complesso e quindi una retta generica r dello spazio *non contiene* terne relative ad alcun punto di F.

Ora si vede facilmente che quest'ultima circostanza porta alla conclusione che sulla superficie F il sistema delle sezioni piane ammette certo una rete di quartiche sub-aggiunte.

E infatti si tagli la superficie F in una curva C mediante un piano ω e, presa una delle ∞^2 cubiche aggiunte a C, che diremo φ_3, si consideri la retta r che congiunge due (A e B) dei quattro punti ove φ_3 taglia C fuori dei suoi punti multipli. La retta r, data la ge-

[1] CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono*, ecc. (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 7 gennaio 1894).

nericità di φ_3, e quindi la genericità dei punti A e B sopra C, sarà una retta generica del piano ω, cioè una retta generica dello spazio, quindi non è possibile che per qualche piano uscente da r i punti A e B insieme con uno degli altri quattro punti ove r taglia F formino sulla relativa sezione di F un gruppo speciale. Allora sopra ogni piano uscente da r costruiamo *la* cubica aggiunta, alla relativa sezione con F, che passa per i punti A e B e dimostriamo che il terzo punto D ove la cubica taglia r è fisso, cioè indipendente dalla scelta del piano per r.

E infatti se D al variare del piano secante intorno ad r, descrivesse la retta r, per qualche posizione del piano medesimo dovrebbe coincidere con uno dei quattro punti ove r taglia F fuori di A e B; e questo, come abbiam visto, è assurdo. D'altra parte è pure assurdo che per qualche posizione del piano secante la cubica in discorso si spezzi nella retta r e in una conica residua, dunque le ∞^1 cubiche costruite stanno sopra una superficie cubica sub-aggiunta ad F secante ω nella cubica φ_3; e le superficie cubiche sub-aggiunte ad F, cioè le quartiche sub-aggiunte al sistema C delle sezioni piane di F formano una rete.

I ragionamenti fatti dimostrano pertanto che se le sezioni piane di F *non* ammettono una rete di quartiche sub-aggiunte, necessariamente le ∞^2 terne $Q\,R\,S$ relative al punto generico P di F debbono invadere *tutta* la superficie F (¹).

5. Questo risultato è sufficiente per procedere innanzi nella nostra analisi, perchè come vedremo, esso ci permette di caratterizzare pienamente il fascio delle quartiche aggiunte alle sezioni piane di F quando non esista un sistema più ampio (rete) di quartiche sub-aggiunte.

Dimostriamo in primo luogo che le quartiche aggiunte non possono essere irriducibili. Infatti se esse fossero irriducibili (la F non essendo razionale) sarebbero o delle quartiche sghembe ellittiche o delle quartiche piane. In ciascuna di queste due alternative, preso un punto P di F è chiaro che le solite terne $Q\,R\,S$ relative a P *non* invadono la superficie F; perchè, se *la* quartica aggiunta passante per P è sghemba ed è ellittica, sopra ogni piano ω

(¹) Notisi che non è vera la proposizione inversa; cioè se le terne $Q\,R\,S$ invadono la superficie F può bene accadere che le quartiche sub-aggiunte (oppure aggiunte) formino una rete. Si pensi, per es., alle superficie (razionali) del 6⁰ ordine che contengono una rete di quartiche sghembe di 2ª specie.

uscente da una sua corda PT il gruppo canonico della sezione con F contenente i punti P e T è completato dai due punti ulteriori ove ω taglia la quartica e quindi non contiene *mai* tre punti allineati (il che significa appunto che la terna QRS, non potendo mai avere un suo punto nel punto T, non invade tutta la superficie F) e se la quartica aggiunta passante per P è piana, essa è evidentemente, mantenendo le notazioni già adoperate, la curva g_p relativa ad ogni suo punto P.

Atteso il risultato del n. precedente possiamo adunque enunciare il teorema:

Se una superficie F del 6^0 ordine dello spazio ordinario a sezioni piane del genere 3 è di 2^a specie (per modo che per essa è certo $p_g = 0$ e $p_a = -1$), necessariamente il fascio delle quartiche aggiunte è un fascio di quartiche tutte spezzate.

6. Poichè la superficie F del teorema precedente non è rigata, le quartiche aggiunte si spezzeranno

a) o in una retta fissa e in una cubica (ellittica e quindi) piana variabile in un fascio lineare,

b) o nelle coppie di coniche di un fascio (non lineare, ma necessariamente) ellittico.

Dimostriamo che il caso *a*) non può presentarsi se, come sempre supponiamo, la superficie F non rientra fra quelle classificate dal prof. Castelnuovo.

Per questo si incominci dall'osservare che nell'ipotesi *a*) la F ammette una retta tripla t e i piani per t tagliano ulteriormente la superficie in cubiche ellittiche che insieme con una retta fissa a pure appartenente ad F costituiscono le quartiche aggiunte alle sezioni piane di F. Ora queste sezioni debbono essere di genere 3, dunque F deve ammettere oltre t una linea multipla ulteriore, e questa non potendo essere incontrata in punti variabili dai piani uscenti da t, consterà di curve piane situate in piani per t, anzi, come è evidente, di rette appoggiate a t. Poi le superficie cubiche aggiunte ad F che hanno in t una retta doppia non possono essere irriducibili, perchè altrimenti sarebbero rigate razionali e non potrebbero contenere delle cubiche piane ellittiche, dunque si spezzeranno in una quadrica fissa Φ e in un piano variabile intorno a t.

Le rette multiple di F diverse da t debbono *equivalere* a quattro rette doppie, quindi F oltre t ha:

a') una retta tripla ulteriore s e una retta doppia d_1, oppure

a'') quattro rette doppie d_1, d_2, d_3, d_4;

e ciascuna delle ipotesi a') e a'') darà luogo a vari casi particolari supponendo che le rette di cui si tratta siano in vario modo infinitamente vicine fra di loro (1).

Nel caso a') le rette t, s e d_1 possono esser distinte o no; ma, comunque, Φ si spezza in due piani uscenti da s dei quali uno contiene la retta t e l'altro la retta d_1; inoltre le tre rette t, s e d_1 concorrono in uno stesso punto O, perchè d_1 deve appoggiarsi tanto a t quanto ad s e le tre rette t, s e d_1 non possono stare in un piano. Segue che la rete dei coni quadrici (irriducibili) della stella O passanti per t, s e d_1 (rete che insieme col piano ts dà la rete dei coni cubici sub-aggiunti ad F) taglia F in una rete di quartiche e che quindi F è una superficie di 1ª specie.

Per discutere l'ipotesi a'') si incominci dall'osservare che la quadrica Φ non può essere una quadrica non specializzata. Infatti, se ciò fosse, le quattro rette d, dovendo appoggiarsi a t non potrebbero essere che della serie delle rette incidenti a t e non potrebbero mai avvicinarsi infinitamente a t. Segue che in ogni caso vi sarebbe almeno un fascio di piani secanti la F in quartiche con tre punti doppi distinti o infinitamente vicini. Ma allora o tali quartiche sono irriducibili e la F è razionale o si spezzano in coppie di coniche di un fascio ellittico, e allora il sistema delle aggiunte è formato da curve spezzate in coppie di queste coniche (2), e quindi o F è una superficie di 1ª specie o si cade in contraddizione con le ipotesi fatte.

La quadrica Φ non può nemmeno essere un cono quadrico irriducibile; poichè se ciò accadesse considerando il fascio di coni per t e per tre delle rette d (fascio irriducibile al pari di Φ) si avrebbe sulla F un fascio di cubiche gobbe (irriducibili se F non è un cono) ed F sarebbe razionale.

Non resta adunque se non supporre che Φ consti di due piani (distinti) δ ed ε di cui uno, δ, passi per t e contenga una delle quattro rette d e la retta a, l'altro, ε, tagli F secondo tre delle quattro rette doppie d, uscenti tutte dallo stesso punto $t\varepsilon$. Ma allora la retta d contenuta in δ, dovendo appoggiarsi a t e non potendo tagliare il piano ε in un punto diverso da $t\varepsilon$, poichè altrimenti il piano δ si staccherebbe da F, dovrà passare anch'essa per

(1) Notisi che quando una retta d o la retta s si avvicina infinitamente a t le due rette infinitamente vicine debbono essere sempre considerate come *incidenti*.

(2) Cfr. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Società italiana delle Scienze, serie III, t. X), n. 30.

il punto $t\,\varepsilon$, e quindi la rete dei coni cubici col vertice in $t\,\varepsilon$, passanti doppiamente per t e semplicemente per le rette doppie d_1, d_2, d_3, d_4 sarà una rete di coni sub-aggiunti ad F ed F risulterà una superficie di 1ª specie.

7. La discussione fatta nei n. precedenti ci autorizza ad enunciare il seguente:

TEOREMA FONDAMENTALE. *Una superficie F dello spazio ordinario a sezioni piane di genere 3 che sia normale e di 2ª specie è necessariamente del 6º ordine e contiene un fascio ellittico di coniche.*

A questo enunciato può darsi una forma più completa osservando che le superficie normali di 2ª specie a curve sezioni del genere 3 sono tutte quelle che appartengono ad S_r ed hanno l'ordine $n = r + 3$ (n. 2 e 3) e che inoltre $r < 6$.

E infatti se, ad es., F^9 è una superficie del nono ordine di S_6 a curve sezioni del genere 3, gli iperpiani uscenti dal piano tangente a F^9 in un suo punto generico tagliano su F un sistema lineare di dimensione 3, grado 5 (¹) e genere 2, il quale risulta certo semplice; quindi F^9 è certamente razionale (²) (altrimenti sarebbe birazionalmente identica a una rigata di genere 2, contro quel che è stato dimostrato al n. 1) e non è di 2ª specie.

Si aggiunga che se F^{r+3} è una superficie normale di S_r ($r \leq 5$) di 2ª specie la sua proiezione fatta da $r - 3$ suoi punti generici sopra uno spazio ordinario risulta una F^* del 6º ordine e di 2ª specie; quindi anche la F^{r+3} deve, al pari di questa, contenere un fascio ellittico di coniche.

Si conclude che:

Una superficie F a sezioni piane di genere 3 e di 2ª specie ha al più l'ordine 8 ed appartiene al più a uno spazio a cinque dimensioni; e in ogni caso contiene un fascio ellittico di coniche.

(¹) Il dubbio che il grado di questo sistema lineare possa essere minore di 5 per la presenza di qualche punto comune a F^9 e al suo piano tangente diverso dal punto di contatto si toglie nel caso nostro immediatamente.

(²) ENRIQUES, loc. cit., al n. 4.

Capitolo II.

LE SUPERFICIE NORMALI DI 2ª SPECIE DELLO SPAZIO ORDINARIO CON LE CONICHE SITUATE NEI PIANI DI UN FASCIO.

8. In ordine al teorema fondamentale stabilito nel capitolo precedente, sia F una superficie normale del 6^0 ordine dello spazio ordinario a sezioni piane di genere 3 e di 2ª specie e dimostriamo, in primo luogo, che le ∞^1 coniche che essa contiene (e formanti un fascio ellittico) non possono essere distribuite in terne di coniche complanari.

Infatti, se le coniche di F sono situate a terne in ∞^1 piani, di questi piani ne passerà uno solo per ogni punto generico di F, e allora, poichè F non è certo l'inviluppo dei piani in discorso, si conclude che questi passano tutti per una medesima retta g (non situata, evidentemente, su F ma) appoggiata ad F in due suoi punti tripli (1). Segue che le terne di coniche situate nei vari piani per g formano, entro la ∞^1 ellittica delle coniche di F, una g_3^1 e quindi possiamo riferire birazionalmente la detta ∞^1 ai piani generatori di un cono cubico di uno spazio a quattro dimensioni S_4 avente per vertice una retta a, in modo che le terne di piani del cono corrispondenti alle terne di coniche situate nei piani per g siano le terne di piani staccati dal cono dagli iperpiani passanti per un piano α uscente da a.

Ora si immagini che lo spazio S_4 passi per lo spazio ordinario contenente la F e si supponga inoltre, come è chiaramente possibile, che il piano α passi per g: la proiezione del cono cubico da un punto generico O di α sullo spazio di F si ridurrà al fascio triplo g, e, ricorrendo, ove occorra, a una conveniente trasformazione omografica di questo spazio, può sempre supporsi che i tre piani del cono cubico corrispondenti alle tre coniche di un piano τ per g siano situati nell'S_3 che proietta τ da O. Risulta da ciò che, se si considera l'intersezione di un piano del cono cubico col cono quadrico che proietta da O la relativa conica di F, tale intersezione è

(1) Nei due punti, cioè, per i quali vengono a passare *tutte* le coniche della superficie F.

una conica che al variare del piano descrive una superficie F_1 del 6^0 ordine (di S_4) avente F per proiezione. Si conclude che F non è normale, o anche, come si vede proiettando F_1 da un suo punto in una superficie del 5^0 ordine (1), che F rientra fra le superficie di 1ª specie, e quindi, per l'una ragione o per l'altra, la nostra asserzione è pienamente giustificata.

9. Vediamo, in secondo luogo, se le coniche di F possono essere distribuite a coppie in piani; e precisamente (2) nei piani di un fascio avente per asse una retta g doppia per F.

Si osservi, per questo, che ogni superficie cubica Φ (passante per g e) aggiunta ad F, taglia F, fuori delle linee multiple, in due coniche situate in due piani *differenti* (3) del fascio g, e quindi, se chiamiamo omologhi un piano del fascio g e una superficie Φ del fascio delle aggiunte quando si intersecano (oltre g) in una conica di F, è chiaro che tra i due fasci verrà stabilita una corrispondenza (2, 2). Segue che la F può considerarsi come generata dalla corrispondenza (2, 2) così stabilita tra i due fasci (che chiameremo Σ), in quanto che essa viene ad essere il luogo delle coniche secondo cui si tagliano (fuori di g) le coppie di elementi omologhi.

Ma, mediante un'ovvia applicazione del principio di corrispondenza di CHASLES, si vede subito che un fascio di piani e un fascio di superficie cubiche, passanti per l'asse del primo, riferiti in corrispondenza (2, 2) dànno origine, in generale, a una superficie dell'8^0 ordine con un fascio ellittico di coniche, avente nell'asse del fascio di piani una retta quadrupla, quindi se le coniche di F debbono esser distribuite a coppie nei piani del fascio g, bisogna che la superficie dell'8^0 ordine generata da Σ si spezzi in F e in una coppia di piani (eventualmente coincidenti) passanti per g. Ciò significa che

a) o deve esserci una superficie Φ spezzata in due piani α e β per g (e in un piano residuo) e avente per omologhi entro Σ precisamente i piani α e β;

b) o debbono esservi due superficie Φ, Φ_1 e Φ_2, che si spezzano in uno dei piani ad esse corrispondenti entro Σ e in una residua quadrica;

(1) Cfr. la seconda nota del n. 3.

(2) Si rammenti che F non è rigata.

(3) Altrimenti le quartiche aggiunte alle sezioni piane di F sarebbero piane ed F sarebbe di 1ª specie (cfr. più sopra il n. 5).

c) oppure vi è una sola superficie Φ che si spezzi in uno dei due piani che le corrispondono per Σ e in una quadrica residua (*non* contenente quel piano) ma questo piano si stacca due volte dalla superficie dell'8^0 ordine generata dai due fasci.

Un esame un po' minuto, che ora passiamo ad esporre *in extenso* soltanto per le ipotesi a) e b), mostra che di queste tre alternative soltanto la seconda conduce a superficie di 2ª specie.

10. *Ipotesi* a). Supposto in primo luogo che i piani α e β siano distinti, prendiamoli come piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ in un sistema di coordinate proiettive omogenee dello spazio ambiente e sia

$$\varphi = 0$$

l'equazione del 3^0 piano in cui si spezza la superficie Φ contenente α e β.

Se diciamo

$$\Phi_1 = 0$$

l'equazione di una superficie *generica* Φ_1 del fascio delle Φ (per modo che Φ_1 risulti una forma cubica delle quattro variabili x_1, x_2, x_3, x_4 dei 2^0 grado in x_1 e x_2), l'equazione del fascio delle superficie Φ sarà:

$$x_3\, x_4\, \varphi - \lambda\, \Phi_1 = 0. \tag{1}$$

L'equazione del fascio g è, poi,

$$x_3 - \mu\, x_4 = 0\,; \tag{2}$$

e la corrispondenza (2, 2) fra i due fasci sarà rappresentata da un'equazione del tipo:

$$A\,\lambda^2\,\mu^2 + B\,\lambda^2\,\mu + C\,\lambda^2 + D\,\lambda\,\mu^2 + E\,\lambda\,\mu + G\,\lambda + H\,\mu = 0, \tag{3}$$

atteso che i valori di μ corrispondenti al valor 0 di λ debbono essere 0 e ∞.

L'eliminazione di λ e μ fra (1), (2) e (3), quando si sia soppresso il fattore $x_3\, x_4$, conduce per F all'equazione:

$$\Psi \equiv x_3 x_4 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2)\varphi^2 + (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)\varphi\,\Phi_1 + H\,\Phi_1^2 = 0 \tag{4}$$ [1].

[1] Risulta di qui che la superficie Φ_1 è irriducibile. Infatti se essa si spezzasse non potrebbe spezzarsi che in un piano fisso e in una quadrica variabile (altrimenti F non si comporrebbe di coniche) e il piano fisso sarebbe α, β o quello rappresentato dall'equazione $\varphi = 0$; ma allora la (4) dimostra che un tal piano fisso si staccherebbe anche dalla superficie F.

Ora si vede facilmente che questa equazione, finchè i coefficienti delle forme φ e Φ_1 e del 1^0 membro della (3) sono arbitrari, rappresenta una superficie del 6^0 ordine avente soltanto due rette doppie infinitamente vicine in g [1] e una cubica doppia nella intersezione di $\varphi = 0$ con $\Phi_1 = 0$; quindi si tratta di vedere come si debbono scegliere i coefficienti di φ e Φ_1 e del 1^0 membro della (3), perchè la (4) rappresenti una superficie a curve sezioni di genere 3 e (eventualmente) di 2ª specie. Ad evitare equivoci, noi diremo perciò Ψ il 1^0 membro della (4) e Ψ, anche, la superficie rappresentata dalla (4), salvo a chiamare F l'uno e l'altra quando si siano determinati i coefficienti in discorso in maniera che la (4) rappresenti una superficie di 2ª specie.

Dalla (4) si riconosce che la curva dell'ordine 18 complessivo secondo cui la Ψ è tagliata da Φ_1 si compone della retta g contata quattro volte, della cubica, contata due volte, secondo cui Φ_1 è tagliata dal piano $\varphi = 0$ e delle coniche ulteriori secondo cui Φ_1 è tagliata, fuori di g, dai piani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e da quelli la cui equazione complessiva è

$$A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2 = 0 .$$

Questi ultimi sono quelli che corrispondono a Φ_1 entro la (2,2) rappresentata dall'equazione (3), quindi se Ψ deve ridursi a una F avente per aggiunte le superficie Φ bisogna che i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ taglino Φ_1 secondo linee *multiple* per Ψ. D'altra parte l'ordine complessivo della curva intersezione di Φ_1 e Ψ deve esser sempre 18, dunque bisogna che i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ taglino Φ_1, oltre g, in una retta contata due volte e diversa da g, oppure nella retta g contata tre volte.

L'ipotesi *a*) dà luogo, pertanto, ai seguenti tre casi:

a') i piani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ tagliano Φ_1 fuori di g in rette contate due volte, diverse da g e sghembe fra di loro e quindi si può

[1] Infatti se entro (4) si fa $x_2 = p x_1 + r x_3 + s x_4$ (il che corrisponde a considerare la proiezione di una sezione piana generica di Ψ fatta dal vertice 2 del tetraedro fondamentale sul piano $x_2 = 0$) il coefficiente di x_1^4 entro l'equazione che così si ottiene è il quadrato del coefficiente A di x_1^2 entro Φ_1, quando anche in Φ_1 si faccia la detta sostituzione, e dal coefficiente di x_1^3 si stacca appunto il fattore A.

supporre che tali rette siano i lati 14 e 23 del tetraedro fondamentale;

a'') i piani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ tagliano Φ_1 fuori di g in rette contate due volte diverse da g e incidenti fra di loro e quindi si può supporre che tali rette siano i lati 24 e 23 del tetraedro fondamentale;

a''') il piano $x_3 = 0$ taglia Φ_1 nella retta g contata tre volte, e il piano $x_4 = 0$ taglia Φ_1 fuori di g in una retta contata due volte diversa da g e quindi si può supporre che tal retta sia il lato 23 del tetraedro fondamentale ([1]).

11. *Caso* a').

In questo caso l'equazione di Φ_1 è del tipo:

$$\Phi_1 \equiv a\, x_3\, x_1^2 + b\, x_4\, x_2^2 + x_3\, x_4\, (c\, x_1 + d\, x_2 + e\, x_3 + f\, x_4) = 0 \tag{5}$$

con a e b diversi da zero e le rette 23 e 14 debbono risultare doppie per Ψ.

Le derivate di Ψ rispetto a x_1, x_2, x_3, x_4, indicando con P_i e Q_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ degli opportuni polinomi possono scriversi:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= P_1 x_4 + D x_3^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + 2H\Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= P_2 x_4 + D x_3^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + 2H\Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} &= P_3 x_4 + D x_3^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}\varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) + 2 D x_3 \Phi_1 \varphi + 2H\Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_4} &= P_4 x_4 + A x_3^3 \varphi^2 + D x_3^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4}\varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right) + E x_3 \Phi_1 \varphi + 2H\Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4}
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

([1]) I casi possibili sono soltanto questi tre, poichè se i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ tagliassero entrambi Φ_1 nella retta g contata tre volte, Φ_1 avrebbe una retta doppia in g e i piani per g non taglierebbero Φ_1 in coniche ulteriori irriducibili.

oppure:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= Q_1 x_3 + G x_4^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + 2 H \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= Q_2 x_3 + G x_4^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + 2 H \Phi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} &= Q_3 x_3 + C x_4^3 \varphi^2 + E x_4 \Phi_1 \varphi + G x_4^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) + 2 H \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x_4} &= Q_4 x_3 + G x_4^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \varphi + \Phi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \right) + 2 G x_4 \Phi_1 \varphi + 2 H \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} ;
\end{aligned}
\right.
$$

quindi, posto

$$
(8)\qquad \varphi = \nu x_1 + \varrho x_2 + \sigma x_3 + \tau x_4 ,
$$

tenendo presenti le (7) e la (8), si vede che condizione necessaria e sufficiente perchè le rette 23 e 14 risultino doppie per Ψ, è che siano identicamente nulli i polinomi:

$$
(9)\qquad x_3^2 (\varrho x_2 + \sigma x_3) [A x_3 (\varrho x_2 + \sigma x_3) + D (b x_2^2 + d x_2 x_3 + e x_3^2)]
$$

$$
(10)\qquad x_4^2 (\nu x_1 + \tau x_4) [C x_4 (\nu x_1 + \tau x_4) + G (a x_1^2 + c x_1 x_4 + f x_4^2)] .
$$

Perchè sia identicamente nullo il polinomio (9) occorre e basta che sia $\varrho = \sigma = 0$, oppure, se ciò non è, $D = 0$ [1], e $A = 0$. Ma noi possiamo supporre $A \neq 0$, perchè altrimenti uno dei piani corrispondenti a Φ_1 entro la corrispondenza (2, 2) sarebbe il piano $x_4 = 0$, mentre Φ_1 è una superficie generica del fascio (1); dunque deve essere $\varrho = \sigma = 0$. Un ragionamento dello stesso tipo mostra che deve essere $\nu = \tau = 0$; dunque φ è identicamente zero e Ψ si spezza. Ciò dimostra che il caso a') non può dar luogo a superficie a curve sezioni di genere 3.

12. *Caso a''*). Qui l'equazione di Φ_1 è del tipo

$$
(11)\qquad \Phi_1 \equiv (a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2 + e x_3 + f x_4) = 0 .
$$

[1] Si ricordi che $b \neq 0$.

con a e b diversi da zero e le rette 23 e 24 debbono risultare doppie per Ψ.

Ragionando come prima si trova che, posto al solito

$$\varphi = \nu x_1 + \varrho x_2 + \sigma x_3 + \tau x_4 ,$$

deve essere, in primo luogo,

$$\varrho = \sigma = 0 \quad \text{oppure} \quad A\sigma + De = A\varrho + Dd = 0$$

e, in secondo luogo,

$$\varrho = \tau = 0 \quad \text{oppure} \quad C\varrho + Gd = C\tau + Gf = 0 .$$

L'essere $\varrho = 0$ porta $d \neq 0$, poichè altrimenti Ψ, al pari di Φ_1, sarebbe un cono col vertice in 2, e d'altra parte possiamo supporre $A \neq 0$ e $C \neq 0$; dunque le sole due ipotesi distinte che possono farsi sono le seguenti:

$$\varrho = \sigma = \tau = 0$$

oppure

$$A\sigma + De = A\varrho + Dd = C\varrho + Gd = C\tau + Gf = 0 .$$

Sia dapprima $\varrho = \sigma = \tau = 0$. Allora le rette 23 e 24 vengono a far parte della cubica intersezione di $\varphi = 0$ con $\Phi_1 = 0$, quindi, perchè Ψ possa essere a sezioni di genere 3, bisogna che tanto in 23 quanto in 24, Ψ venga ad avere due rette doppie infinitamente vicine.

Per vedere sotto quali condizioni ciò possa accadere si incominci dall'osservare che dovendo essere $d \neq 0$, si può supporre che la terza retta appartenente alla cubica intersezione di $\varphi = 0$ e $\Phi_1 = 0$ e rappresentata nel piano $x_1 = 0$ dall'equazione

$$d x_2 + e x_3 + f x_4 = 0$$

coincida con la retta 34, e quindi l'equazione di Φ_1 assumerà la forma più semplice

$$\Phi_1 \equiv (a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2),$$

e l'equazione di Ψ potrà scriversi (fatto $\nu = 1$):

$$x_3 x_4 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) x_1^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) x_1 [(a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2)] +$$

$$+ H [(a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2)]^2 = 0 .$$

Ora se in questa equazione si fa $x_2 = p x_1 + r x_3 + s x_4$, con p, r, s coefficienti arbitrari, si trova che i coefficienti di x_3^4 e x_4^4 sono rispettivamente

$$D d r x_1 x_4 + H d^2 r^2 x_4^2$$

$$G d s x_1 x_4 + H d^2 s^2 x_3^2$$

quindi, perchè si abbiano tanto in 23 quanto in 24 due rette doppie infinitamente vicine per Ψ occorre intanto che sia:

$$D = G = 0.$$

Si vede subito d'altra parte che queste condizioni sono anche sufficienti, quindi l'equazione:

$$x_3 x_4 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) x_1^2 + E x_1 x_3 x_4 [(a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2)] +$$

$$+ H [(a x_3 + b x_4) x_1^2 + x_3 x_4 (c x_1 + d x_2)]^2 = 0$$

rappresenta una superficie a curve sezioni di genere 3 con due rette doppie infinitamente vicine a 12 (*nel piano* $a x_3 + b x_4 = 0$), due rette doppie infinitamente vicine a 23 (*nel piano* $x_4 = 0$), due rette doppie infinitamente vicino a 24 (*nel piano* $x_3 = 0$) e infine una retta doppia nella retta 34. Ma tale superficie è di 1ª specie, poichè essa, oltre al fascio delle superficie Φ, ha ancora come sub-aggiunte le superficie costituite dai piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ insieme con un piano variabile intorno alla retta 34.

Supponiamo ora

$$A c + D e = A \varrho + D d = C \varrho + G d = C \iota + G f = 0$$

dove ϱ e d sono diversi da zero, insieme con A, C, D e G. Sarà

$$\frac{D}{A} = \frac{G}{C} \tag{12}$$

e, posto

$$k = -\frac{D}{A},$$

sarà inoltre

$$\varrho = kd, \ \sigma = ke, \ \tau = kf;$$

quindi φ e Φ_1 diventano:

$$\varphi = \nu x_1 + k(dx_2 + ex_3 + fx_4) \tag{13}$$

$$\Phi_1 = (ax_3 + bx_4)x_1^2 + x_3x_4(cx_1 + dx_2 + ex_3 + fx_4). \tag{14}$$

L'equazione (4), quando vi si tenga conto della (12) e si pongano per φ e Φ_1 i valori forniti dalle (13) e (14), viene pertanto a rappresentare una superficie a curve sezioni di genere 3 con due rette doppie infinitamente vicine a 12 (*nel piano* $ax_3 + bx_4 = 0$), due rette doppie in 23 e 24, e una cubica doppia nell'intersezione di $\varphi = 0$ e $\Phi_1 = 0$; cubica che si spezza nella retta

$$\begin{cases} dx_2 + ex_3 + fx_4 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

e in una conica ulteriore.

Ora tale superficie è sempre di 1ª specie poichè essa oltre le superficie Φ ha ancora come sub-aggiunte quelle costituite dal piano $\varphi = 0$ insieme coi coni quadrici passanti per 21, 23, 24 e tangenti lungo 21 al piano $ax_3 + bx_4 = 0$; dunque, anche il caso $a'')$ non dà luogo a superficie di 2ª specie.

13. *Caso* $a''')$. Qui

$$\Phi_1 = ax_3x_1^2 + bx_4^3 + x_3x_4(cx_1 + dx_2 + ex_3 + fx_4)$$

con a e b diversi da zero, e Ψ deve avere intanto una retta doppia nel lato 23 del tetraedro fondamentale.

Posto al solito,

$$\varphi = \nu x_1 + \varrho x_2 + \sigma x_3 + \tau x_4,$$

segue allora, tenendo presenti le (6), che deve essere

$$\varrho = \sigma = 0 \quad \text{oppure} \quad A\varrho + Dd = A\sigma + De = 0\,.$$

Sia dapprima $\varrho = \sigma = 0$ e quindi la cubica intersezione di $\varphi = 0$ con $\Phi_1 = 0$ si spezzi nella retta 23 e in una conica ulteriore.

In questo caso la linea doppia di Ψ dovrà constare della retta 12 contata tre volte, della retta 23 contata due volte e della conica ora nominata; quindi se, come al solito, nell'equazione di Ψ, che stavolta è:

$$x_3\,x_4\,(A\,x_3^2 + B\,x_3\,x_4 + C\,x_4^2)\,(\nu\,x_1 + \tau\,x_4)^2 +$$
$$+ (Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)(\nu x_1 + \tau x_4)[a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4(c x_1 + d x_2 + e x_3 + f x_4)] +$$
$$+ H\,[a\,x_3\,x_1^2 + b\,x_4^3 + x_3\,x_4\,(c\,x_1 + d\,x_2 + e\,x_3 + f\,x_4)]^2 = 0$$

facciamo $x_2 = p\,x_1 + r\,x_3 + s\,x_4$, con che viene:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & x_3\,x_4\,(A\,x_3^2 + B\,x_3\,x_4 + C\,x_4^2)\,(\nu\,x_1 + \tau\,x_4)^2 + \\ & + (D\,x_3^2 + E\,x_3\,x_4 + G\,x_4^2)\,(\nu\,x_1 + \tau\,x_4) \times \\ & \times [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + d p x_1 + d r x_3 + d s x_4 + e x_3 + f x_4)] + \\ & + H\,[a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + d p x_1 + d r x_3 + d s x_4 + e x_3 + f x_4)]^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

bisogna che la (15), qualunque siano p, r ed s, rappresenti, nel piano $x_2 = 0$, una sestica dotata di due punti doppi infinitamente vicini nel punto 3 e tre punti doppi infinitamente vicini nel punto 1.

Esprimendo che la sestica in discorso ha due punti doppi infinitamente vicini in 3 si trova come condizione necessaria e sufficiente [1]:

$$D\,\nu = 0$$

esprimendo che essa ha tre punti doppi infinitamente vicini in 1, si

[1] A proposito di ciò è bene rammentare che qui, per una ragione già detta, non può essere $d = 0$.

trova come condizione necessaria e sufficiente [1]:

$$G\,\nu = 0$$

quindi o si ha: $\varrho = \sigma = D = G = 0$, oppure $\varrho = \sigma = \nu = 0$.

Nel 1º caso, essendo $\nu \neq 0$, si può supporre senza venir meno alla generalità che sia anche $\tau = 0$ (poichè ciò corrisponde ad assumere il piano $\varphi = 0$ come piano $x_1 = 0$), e per conseguenza l'equazione di Ψ assume l'aspetto:

$$x_3\,x_4\,(A\,x_3^2 + B\,x_3\,x_4 + C\,x_4^2)\,x_1^2 +$$

$$+ E\,x_1\,x_3\,x_4\,[a\,x_3\,x_1^2 + b\,x_4^3 + x_3 x_4\,(c\,x_1 + d\,x_2 + e\,x_3 + f\,x_4)] +$$

$$+ H\,[a\,x_3\,x_1^2 + b\,x_4^3 + x_3\,x_4\,(c\,x_1 + d\,x_2 + e\,x_3 + f\,x_4)]^2 = 0\,.$$

Ora questa equazione rappresenta realmente una superficie a curve sezioni di genere 3, ma essa è sempre di 1ª specie, perchè ammette la rete di superficie cubiche sub-aggiunte:

$$k_0\,x_3\,x_1^2 + k_1\,x_3\,x_4\,x_1 + k_2\,[b\,x_4^3 + x_3\,x_4\,(d\,x_2 + e\,x_3 + f\,x_4)] = 0$$

dove k_0, k_1 e k_2 sono dei parametri arbitrari.

Nel secondo caso, essendo $\varrho = \sigma = \nu = 0$, il piano $\varphi = 0$ si riduce al piano $x_4 = 0$ e la conica più sopra considerata si spezza nelle rette 21 e 23, quindi Ψ deve avere tre rette doppie infinitamente vicine in 23 e quattro in 12.

Perchè si abbiano tre rette doppie infinitamente vicine in 23 occorre e basta che sia $D = 0$: resterebbero dunque da cercare le

[1] L'equazione

$$x_3^2\,x_1^4 + x_3\,(a_1\,x_2^2 + 2\,a_2\,x_2\,x_3 + a_3\,x_3^2)\,x_1^3 + (b_1\,x_2^4 + 4\,b_2\,x_2^3\,x_3 + \ldots + b_5\,x_3^4)\,x_1^2 +$$

$$+ (c_1\,x_2^5 + \ldots)\,x_1 + \ldots = 0$$

rappresenta nel piano $(x_1\,x_2\,x_3)$ una sestica con due punti doppi infinitamente vicini nel punto (1, 0, 0). Ebbene, perchè essa abbia in questo punto tre punti doppi infinitamente vicini, occorre che sia:

$$b_1 = \frac{1}{4}\,a_1^2 \text{ e inoltre } \frac{1}{2}\,a_1^2\,a_2 - 2\,a_1\,b_2 + c_1 = 0\,.$$

condizioni necessarie e sufficienti perchè si abbiano quattro rette doppie infinitamente vicine in 12. Ma una tale ricerca può essere risparmiata, poichè si vede senz'altro che il piano $x_3 = 0$ taglia Ψ in tre rette doppie infinitamente vicine a 12 e il piano $x_4 = 0$ taglia Ψ in due rette doppie infinitamente vicine a 23 (fuori di 12); quindi Ψ ammette, secondo il solito, oltre le superficie sub-aggiunte Φ anche quelle che sono costituite dai piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ insieme con un piano variabile intorno a 23, ed è di 1ª specie.

Sia ora

$$A\varrho + D d = A\sigma + D e = 0 .$$

Se fosse $\varrho = 0$, dovendo poi essere $d \neq 0$, sarebbe $D = 0$, e infine, potendosi supporre $A \neq 0$, $\sigma = 0$: avremmo cioè $\varrho = \sigma = 0$ e ricadremmo nel caso precedente. Per fare un caso nuovo dobbiamo dunque supporre ϱ (e d) diversi da zero.

Allora le ipotesi fatte dànno:

$$d = k\varrho \quad e = k\sigma \quad (k \neq 0)$$

e si può scrivere

$$\Phi_1 = a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 [c x_1 + k(\varrho x_2 + \sigma x_3) + f x_4]$$

$$\varphi = \nu x_1 + \varrho x_2 + \sigma x_3 + \tau x_4$$

o, per un'ovvia trasformazione di coordinate e continuando a indicare con le x_i le nuove coordinate,

$$\Phi_1 = a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 [c x_1 + k x_2 + f x_4],$$

$$\varphi = \nu x_1 + x_2 + \tau x_4 .$$

Il piano $\varphi = 0$ *non* passa pel vertice 2 del tetraedro fondamentale, quindi, senza venir meno alla generalità, si può supporre $\nu = \tau = 0$ e con ciò l'equazione di Ψ diventa:

$$x_3 x_4 x_2^2 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) x_2 [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + k x_2 + f x_4)] +$$

$$+ H [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + k x_2 + f x_4)]^2 = 0 .$$

La linea doppia della superficie Ψ rappresentata da questa equazione è costituita dalla retta 12 contata due volte, dalla retta 23 e dalla cubica secondo cui $\varphi = 0$ (cioè $x_2 = 0$) taglia $\Phi_1 = 0$: perchè Ψ sia adunque una superficie a curve sezioni di genere 3 occorre trovare sotto quali condizioni Ψ può acquistare una ulteriore retta doppia infinitamente vicina a 12.

Ponendo $x_2 = p\,x_1 + r\,x_3 + s\,x_4$ e procedendo come prima si trova che tali condizioni sono espresse dall'uguaglianza

$$G = 0\,;$$

ma la superficie che così si trova, rappresentata dall'equazione:

$$\begin{gathered} x_3 x_4 x_2^2 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) + \\ + x_3 x_2 (D x_1 + E x_4) [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + k x_2 + f x_4)] + \\ + H [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + k x_2 + f x_4)]^2 = 0\,, \end{gathered}$$

è, al solito, di 1ª specie perchè ammette la rete di superficie subaggiunte:

$$k_0 x_1 x_2 x_3 + k_1 x_2 x_3 x_4 + k_2 [a x_3 x_1^2 + b x_4^3 + x_3 x_4 (c x_1 + f x_4)] = 0$$

dove k_0, k_1 e k_2 sono dei parametri arbitrari.

14. Per esaurire la discussione dell'ipotesi a) resta a considerare il caso in cui i piani α e β coincidono e, per es., con $x_4 = 0$. Il fascio delle superficie Φ diventa allora:

$$x_4^2 \varphi - \lambda \Phi_1 = 0 \tag{16}$$

mentre il fascio di piani g è sempre rappresentato dall'equazione

$$x_3 - \mu x_4 = 0\,. \tag{17}$$

Nella corrispondenza (2, 2) stabilita tra i due fasci, alla superficie $x_4^2 \varphi = 0$ corrisponde il piano $x_4 = 0$ contato due volte; dunque essa è rappresentata da un'equazione del tipo:

$$A \lambda^2 \mu^2 + B \lambda^2 \mu + C \lambda^2 + D \lambda \mu^2 + E \lambda \mu + G \lambda + K = 0\,. \tag{18}$$

La (18), quando si considerino le λ e μ come coordinate cartesiane di un punto in un piano rappresenta una quartica di genere 1 con un punto doppio nel punto all'infinito dell'asse $\mu = 0$ e un altro nel punto all'infinito dell'asse $\lambda = 0$; ma se si suppone che nella (18) sia $D = 0$, allora tale quartica acquista un altro punto doppio infinitamente vicino a quello situato sull'asse $\lambda = 0$ e quindi diventa di genere *zero*, dunque stavolta noi dobbiamo supporre che nella (18) si abbia necessariamente $D \neq 0$.

L'eliminazione di λ e μ fra le (16), (17) e (18) dà per la superficie Ψ l'equazione

$$\Psi \equiv x_4^2\varphi^2 (A x_3^2 + Bx_3 x_4 + Cx_4^2) + (Dx_3^2 + Ex_3 x_4 + Gx_4^2)\varphi \Phi_1 + K \Phi_1^2 = 0$$

e a questa, a seconda delle varie ipotesi che possono farsi sul piano

$$\varphi = 0 ,$$

può darsi una delle tre seguenti forme:

$$\text{I} \qquad x_4^4(Ax_3^2 + Bx_3x_4 + Cx_4^2) + x_4(Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\Phi_1 + K \Phi_1^2 = 0$$

$$\text{II} \qquad x_3^2x_4^2(Ax_3^2 + Bx_3x_4 + Cx_4^2) + x_3(Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\Phi_1 + K\Phi_1^2 = 0$$

$$\text{III} \qquad x_1^2x_4^2(Ax_3^2 + Bx_3x_4 + Cx_4^2) + x_1(Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\Phi_1 + K\Phi_1^2 = 0;$$

quindi ci resta da far vedere che nessuna di queste tre può condurre a superficie di 2ª specie.

15. *Forma I.* Qui la superficie Φ_1 taglia Ψ nella retta g contata sei volte, nelle due coniche in cui essa è tagliata, fuori di g, dai piani che le corrispondono nella (2,2) e nella conica in cui è tagliata, fuori di g, dal piano $x_4 = 0$ contata quattro volte. Perchè dunque Ψ possa essere una delle nostre superficie F occorre che essa abbia in g tre rette doppie (almeno) infinitamente vicine e in quest'ultima conica due coniche doppie infinitamente vicine. Ora io dico che perchè questo accada la conica in discorso deve spezzarsi in una retta contata due volte (che può esser distinta da g o coincidente con g).

E infatti supponiamo che il piano $x_4 = 0$ tagli Φ_1 in qualche punto fuori di g e prendiamo in uno di essi il vertice 3 del tetraedro fondamentale.

L'equazione di Φ_1 sarà allora del tipo:

$$(ax_3+bx_4)x_1^2+(cx_2x_3+dx_2x_4+ex_3^2+fx_3x_4+gx_4^2)x_1+(hx_3+kx_4)x_2^2+$$

$$+(lx_3^2+m\,x_3x_4+n\,x_4^2)\,x_2+q\,x_3^2x_4+r\,x_3x_4^2+s\,x_4^3=0$$

e l'equazione della sezione di Ψ col piano $x_1=0$ (che, si noti, è un piano qualunque uscente dal punto 3) sarà, entro il piano medesimo,

$$x_4^4(A\,x_3^2+B\,x_3x_4+C\,x_4^2)+x_4(D\,x_3^2+E\,x_3x_4+G\,x_4^2)\times$$

$$\times[(h\,x_3+k\,x_4)\,x_2^2+(lx_3^2+m\,x_3x_4+n\,x_4^2)\,x_2+q\,x_3^2x_4+r\,x_3x_4^2+s\,x_4^3]+$$

$$+K[(hx_3+kx_4)x_2^2+(lx_3^2+mx_3x_4+nx_4^2)x_2+qx_3^2x_4+rx_3x_4^2+sx_4^3]^2=0.$$

Qui il coefficiente di x_3^4 è:

$$D\,x_4\,(l\,x_2+q\,x_4)+K\,(l\,x_2+q\,x_4)^2,$$

e questo, se la sezione in discorso deve avere nel punto 3 due punti doppi infinitamente vicini, deve essere un quadrato perfetto: dunque, atteso che $D\neq 0$, bisogna che sia $K\,l=0$. Ma $K\neq 0$, altrimenti Ψ si spezza, quindi infine $l=0$.

Essere $l=0$ significa che la retta 23 tocca nel punto 3 la superficie Φ_1; d'altra parte 23 è una retta qualunque del piano $x_4=0$ uscente dal punto 3, dunque il punto 3 è doppio per la conica sopra considerata ed è stabilito che il piano $x_4=0$ taglia Φ_1 o nella retta g contata tre volte o in g e in una retta ulteriore contata due volte.

Ma quest'ultima alternativa si vede subito che nel caso nostro deve essere esclusa. Infatti se essa si verificasse, scegliendo come retta 13 la retta secondo cui $x_4=0$ toccherebbe Φ_1, l'equazione di Φ_1 assumerebbe l'aspetto:

$$b\,x_4x_1^2+(d\,x_2x_4+f\,x_3x_4+g\,x_4^2)\,x_1+(h\,x_3+k\,x_4)\,x_2^2+$$

$$+(mx_3x_4+n\,x_4^2)\,x_2+q\,x_3^2x_4+r\,x_3x_4^2+s\,x_4^3=0$$

e l'equazione della sezione di Ψ col piano $x_1=0$ sarebbe (in questo piano):

$$
(19)\quad \left\{ \begin{aligned} & x_4^4(A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) + x_4 (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) \times \\ & \times [(h x_3 + k x_4) x_2^2 + (m x_3 + n x_4) x_2 x_4 + q x_3^2 x_4 + r x_3 x_4^2 + s x_4^3] + \\ & + K[(h x_3 + k x_4) x_2^2 + (m x_3 + n x_4) x_2 x_4 + q x_3^2 x_4 + r x_3 x_4^2 + s x_4^3]^2 = 0 . \end{aligned} \right.
$$

Inoltre Ψ dovrebbe avere (per risultare a sezioni di genere 3) quattro rette doppie infinitamente vicine in 13, quindi nella (19) dovrebbero essere intanto soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè nel punto 3 si abbiano tre punti infinitamente vicini. Ora di cosiffatte condizioni la prima è espressa dall'uguaglianza[1]

$$\frac{1}{K q^2 + D q} K h^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(K q^2 + D q)^2} (2 K q h + D h)^2$$

o, riducendo, da:

$$D h = 0$$

quindi (atteso che $D \neq 0$) dovrebbe essere $h = 0$. Ma allora da Φ_1, e quindi anche da Ψ si staccherebbe il fattore x_4, e Ψ non sarebbe più irriducibile.

Resta dunque da supporre che il piano $x_4 = 0$ tagli Φ_1 nella retta 12 contata tre volte, o, ciò che fa lo stesso, che la linea multipla di Ψ si riduca alla retta 12 contata 7 volte. Ora, se pure è possibile che questo accada, è certo che una tale superficie Ψ è di 1ª specie. Infatti per ogni sua sezione piana la rete delle cubiche aggiunte è costituita da una rete di cubiche con un contatto 7-punto in un punto, situato sopra 12, che (come risulta dall'ipotesi fatta su Φ_1) è flesso per tutte le cubiche della rete. Ma allora nella rete esiste un fascio di cubiche che si spezzano nella tangente di flesso contata due volte e in una retta variabile intorno al flesso: quindi le rette uscenti dal punto doppio della considerata sezione piana tagliano su di essa una g_4^1 speciale. Ciò significa che per ogni punto P di Ψ la curva g_P di cui si discorreva al n. 4 è costituita dalla

(1) Qui, per togliere ogni dubbio, è bene osservare che non può essere $K q^2 + D q = 0$. Se ciò fosse, infatti, la sezione considerata, che è poi una sezione qualunque passante per il punto 3, avrebbe un punto triplo nel punto 3.

quartica ulteriore intersezione di Ψ col piano $g\,P$, o, precisamente, che Ψ è (in caso) di 1.ª specie.

16. *Forma II.* Indichiamo qui con $\Phi'_{1(x_4=0)}$ ciò che diviene la forma Φ_1 quando, dopo avervi fatto $x_4=0$, se ne stacca il fattore x_3: $\Phi'_{1(x_4=0)}=0$ sarà nel piano $x_4=0$ l'equazione della conica ulteriore secondo cui Φ_1 è tagliata da $x_4=0$ fuori di $g\equiv 12$. Tale conica deve poi, per un ragionamento già fatto, risultare doppia per Ψ, quindi essa si spezza necessariamente nella retta 12 contata due volte.

Per giustificare quest'ultima asserzione si osservi che il piano $x_4=0$ taglia Ψ nella retta 12 contata intanto due volte e poi nella curva rappresentata in esso dall'equazione:

$$D\,x_3^2\,\Phi'_{1(x_4=0)}+K\,\Phi'^2_{1(x_4=0)}=0$$

e, poichè $D\neq 0$, il 1^0 membro di questa equazione non può essere un quadrato perfetto se non a patto che sia, a meno di un fattor costante,

$$\Phi'_{1(x_4=0)}=x_3^2\,.$$

Segue che Ψ, se deve risultare a sezioni di genere 3, deve avere cinque rette doppie (almeno) infinitamente vicine a g; e quindi per ogni sua sezione piana si ha sempre un fascio di cubiche aggiunte spezzate nella retta situata in $x_4=0$ (tangente di flesso per tutte le cubiche aggiunte), nella retta situata in $x_3=0$ e in una retta variabile intorno al punto (situato su g) in cui esse si intersecano. Ciò significa che anche nell'ipotesi presente Ψ non può risultare che di 1ª specie.

17. *Forma III.* Attribuendo a $\Phi'_{1(x_4=0)}$ lo stesso significato precedente, si trova, con un ragionamento analogo a quello fatto più sopra, che deve essere necessariamente (a meno di un fattor costante)

$$\Phi'_{1(x_4=0)}=x_1\,x_3\,;$$

e allora della linea doppia di Ψ dovrà far parte la retta 12 contata tre volte e la retta 23 contata due volte.

D'altra parte, qui, l'equazione di Φ_1 è del tipo:

$$b\,x_4x_1^2+(d\,x_2x_4+e\,x_3^2+f\,x_3x_4+g\,x_4^2)\,x_1+k\,x_4x_2^2+$$
$$+(m\,x_3+n\,x_4)\,x_4x_2+q\,x_3^2x_4+r\,x_3x_4^2+s\,x_4^3=0$$

(con $b \neq 0$, perchè Φ_1 non può avere in g una retta doppia e quindi nemmeno un punto doppio in 1, che, dopo tutto, non è che un punto generico di $g \equiv 12$); per conseguenza la sezione di Ψ col piano $x_2 = 0$ ha per equazione, nel piano medesimo,

$$x_4^2 x_1^2 (A x_3^2 + B x_3 x_4 + C x_4^2) + x_1 (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) \times$$

$$\times [b x_4 x_1^2 + (e x_3^2 + f x_3 x_4 + g x_4^2) x_1 + q x_3^2 x_4 + r x_3 x_4^2 + s x_4^3] +$$

$$+ K [b x_4 x_1^2 + (e x_3^2 + f x_3 x_4 + g x_4^2) x_1 + q x_3^2 x_4 + r x_3 x_4^2 + s x_4^3]^2 = 0 .$$

Se si vanno a cercare le condizioni perchè questa sezione abbia nel punto 1 tre punti doppi infinitamente vicini, si trova che la prima di esse è espressa dall'uguaglianza:

$$\frac{1}{K b^2} (K e^2 + D e) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{K^2 b^4} (2 K b e + D b)^2$$

cioè da

$$D = 0 ,$$

atteso che $b \neq 0$, quindi è inutile che si continui a cercare di realizzare, nelle ipotesi fatte, una superficie Ψ a sezioni di genere 3. Essa risulterebbe, in ogni caso, con un fascio *razionale* di coniche e quindi sarebbe razionale, cioè, senz'altro di 1ª specie.

È, adunque, compiutamente dimostrato che l'ipotesi a) *non può dar luogo a superficie di 2ª specie.*

18. *Ipotesi b).* Anche qui supponiamo dapprima che i piani α e β siano distinti e assumiamoli come piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ in un sistema di coordinate proiettive omogenee dello spazio ambiente. Indicando con Φ_1' e Φ_2 delle forme quadratiche, il fascio delle superficie Φ ha, questa volta, l'equazione:

(20) $$x_3 \Phi_1' - \lambda x_4 \Phi_2' = 0 ;$$

il fascio dei piani per g è rappresentato da:

(21) $$x_3 - \mu x_4 = 0 ;$$

e la corrispondenza (2, 2) avrà un'equazione del tipo:

(22) $$B \lambda^2 \mu + C \lambda^2 + D \lambda \mu^2 + E \lambda \mu + G \lambda + H \mu^2 + K \mu = 0$$

atteso che ai valori 0 e ∞ di λ debbono corrispondere rispettivamente per μ i valori 0 e ∞.

Eliminando λ e μ fra le (20), (21) e (22) si trova per Ψ l'equazione:

$$(23)\quad \begin{cases} \Psi \equiv x_3(Bx_3 + Cx_4)\,\Phi_1'^2 + (Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\Phi_1'\,\Phi_2' + \\ \qquad + x_4(Hx_3 + Kx_4)\,\Phi_2'^2 = 0 \end{cases}$$

e noi dobbiamo vedere sotto quali condizioni Ψ può essere una superficie a curve sezioni di genere 3.

Notisi, intanto, che la superficie rappresentata dall'equazione (23) ha sempre una retta doppia nella retta $g \equiv 12$ e una quartica sghemba doppia nella quartica secondo cui si tagliano

$$\Phi_1' = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_2' = 0.$$

Dalla (23) si rileva che la quartica $\Phi_1' = 0$ taglia Ψ, fuori della quartica doppia ora nominata, nelle due coniche in cui essa è tagliata dai piani $x_4 = 0$ e

$$Hx_3 + Kx_4 = 0.$$

Dico che di queste due coniche la prima si spezza in ogni caso in una retta contata due volte.

Supponiamo, infatti, in primo luogo, che la quartica doppia di Ψ non abbia parti situate nel piano $x_4 = 0$ e distinguiamo il caso in cui $\Phi_1' = 0$ passa per la retta g, da quello in cui non vi passa. In quest'ultimo caso o $H \neq 0$ e il piano $x_4 = 0$, non essendo uno dei piani omologhi alla superficie $x_3\,\Phi_1' = 0$ nella corrispondenza (2,2) deve tagliare $\Phi_1' = 0$ in una linea multipla per Ψ [1], cioè, quindi, in una conica spezzata in una retta contata due volte; o $H = 0$ e allora la conica

$$\begin{cases} \Phi_4' = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

[1] Si ricordi che Ψ deve risultare una superficie a curve sezioni di genere 3 e che $x_3\,\Phi_1' = 0$ deve risultare una sua aggiunta che la tagli, *fuori delle linee multiple*, soltanto in una coppia di coniche.

conta per due nell'intersezione di $\Phi'_1 = 0$ con Ψ. Segue che una volta conterà come una delle coniche di Ψ situata sopra l'aggiunta $x_3\, \Phi'_1 = 0$, l'altra come una linea d'intersezione del 2^0 *ordine* proveniente da una linea doppia per Ψ; e quindi, ancora, la nostra conica deve spezzarsi in una retta contata due volte.

Resterebbero da fare su $\Phi'_1 = 0$ l'ipotesi che essa passi per g e su $x_4 = 0$ l'ipotesi che esso contenga una parte della quartica doppia di Ψ; ma ci asteniamo dall'insistere più oltre su questo argomento, perchè considerazioni del tutto analoghe a quelle ora fatte guidano in ogni caso a concludere che quella conica si spezza in una retta contata due volte, distinta da g o coincidente con g.

Ripetendo per $x_3 = 0$ e $\Phi'_2 = 0$ quel che è stato detto per $x_4 = 0$ e $\Phi'_1 = 0$, ed osservando che le quadriche $\Phi'_1 = 0$ e $\Phi'_2 = 0$ non possono passare entrambe per g, poichè altrimenti g sarebbe doppia per tutte le superficie Φ, si vede che, in conformità delle ipotesi fatte, non possono presentarsi che i seguenti tre casi:

b') i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ tagliano ordinatamente $\Phi'_2 = 0$ e $\Phi'_1 = 0$ in rette contate due volte, diverse da g e sghembe fra di loro e quindi si può supporre che tali rette siano i lati 14 e 23 del tetraedro fondamentale;

b'') i piani $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ tagliano ordinatamente $\Phi'_2 = 0$ e $\Phi'_1 = 0$ in rette contate due volte, diverse da g e incidenti fra di loro e quindi si può supporre che tali rette siano i lati 24 e 23 del tetraedro fondamentale;

b''') il piano $x_4 = 0$ taglia $\Phi'_1 = 0$ nella retta g contata due volte, e il piano $x_3 = 0$ taglia $\Phi'_2 = 0$ in una retta contata due volte e diversa da g, e quindi si può supporre che questa retta sia il lato 14 del tetraedro fondamentale.

19. *Caso* b'). Qui le equazioni di $\Phi'_1 = 0$ e $\Phi'_2 = 0$ sono del tipo:

$$\Phi'_1 \equiv x_4 (a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4) + e\, x_1^2 = 0$$

$$\Phi'_2 \equiv x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e' x_2^2 = 0\,,$$

cioè l'equazione di Ψ diventa:

$$\begin{gathered} x_3 (B\, x_3 + C\, x_4)(a\, x_1 x_4 + b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + d\, x_4^2 + e\, x_1^2)^2 + \\ + (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(a\, x_1 x_4 + b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + d\, x_4^2 + e\, x_1^2) \times \\ \times (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_2^2) + \\ + x_4 (H\, x_3 + K\, x_4)(a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_2^2)^2 = 0\,; \end{gathered}$$

e poi bisogna scrivere le condizioni che debbono essere soddisfatte perchè Ψ acquisti delle rette doppie in 23 e 14.

Ora si ha:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_1=0\\x_4=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_1=0\\x_4=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\right)_{\substack{x_1=0\\x_4=0}} = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_4}\right)_{\substack{x_1=0\\x_4=0}} = D\,x_3^2\,(b\,x_2 + c\,x_3)\,(b'\,x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2) +$$

$$+ H\,x_3\,(b'\,x_2 x_3 + c'\,x_3^2 + e'\,x_2^2)^2\,;$$

inoltre:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right)_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right)_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_4}\right)_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\right)_{\substack{x_2=0\\x_3=0}} = C\,x_4\,(a\,x_1 x_4 + d\,x_4^2 + e\,x_1^2)^2 +$$

$$+ G\,x_4^2\,(a\,x_1 x_4 + d\,x_4^2 + e\,x_1^2)\,(a'\,x_1 + d'\,x_4)\,;$$

quindi bisogna che si abbia, *identicamente*,

$$x_3\,(b'\,x_2 x_3 + c'\,x_3^2 + e'\,x_2^2)\,[D\,(b\,x_2 + c\,x_3)\,x_3 +$$

$$+ H\,(b' x_2 x_3 + c'\,x_3^2 + e'\,x_2^2)] = 0$$

e

$$x_4\,(a\,x_1 x_4 + d\,x_4^2 + e\,x_1^2)\,[G\,(a'\,x_1 + d'\,x_4)\,x_4 +$$

$$+ C\,(a\,x_1 x_4 + d\,x_4^2 + e\,x_1^2)] = 0\,.$$

Ora e ed e' non possono esser zero, perchè altrimenti dal primo membro dell'equazione di Ψ si staccherebbe il fattore x_4 o il fattore x_3, dunque deve essere *identicamente:*

$$H\,e'\,x_2^2 + (D\,b + H\,b')\,x_2 x_3 + (D\,c + H\,c')\,x_3^2 = 0$$

e inoltre:

$$C\;e\,x_1^2 + (C\,a + G\,a')\,x_1 x_4 + (C\,d + G\,d')\,x_4^2 = 0\,.$$

Di qui si trae

$$He' = Db + Hb' = Dc + Hc' = Ce = Ca + Ga' = Cd + Gd' = 0\,,$$

ossia

$$C = H = 0$$

e poi

$$D\,b = D\,c = G\,a' = G\,d' = 0\,.$$

Badando all'equazione (22) si vede che se insieme con H si annullasse anche D, la (22), interpretate le λ e μ come coordinate cartesiane di un punto in un piano, rappresenterebbe una cubica piana con un punto doppio nel punto all'infinito dell'asse $\mu = 0$, e quindi Ψ contenendo un fascio razionale di coniche sarebbe razionale; e così se insieme con C si annullasse anche G, l'equazione (22) diventerebbe riducibile; dunque, nel caso in discussione, deve essere $D \neq 0$ e $G \neq 0$, ciò che porta

$$b = c = a' = d' = 0\,.$$

Segue che Φ'_1 si spezza in una coppia di piani uscenti dalla retta 23, Φ'_2 in una coppia di piani uscenti dalla retta 14, e che quindi la linea doppia di Ψ si compone delle tre rette 12, 23, 14 e delle altre quattro (in generale distinte) in cui si tagliano le due coppie di piani in cui si spezzano Φ'_1 e Φ'_2.

Tale superficie Ψ non ammette, si vede subito, che un sol fascio di superficie cubiche (sub-)aggiunte; essa è adunque *una prima superficie a curve sezioni di genere 3 e di 2ª specie.*

La sua equazione è:

$$(24)\begin{cases} B\,x_3^2\,(e\,x_1^2 + a\,x_1\,x_4 + d\,x_4^2)^2 + \\ + (Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\,(ex_1^2 + ax_1x_4 + dx_4^2)\,(e'x_2^2 + b'x_2x_3 + c'x_3^2) + \\ + K\,x_4^2\,(e'\,x_2^2 + b'\,x_2\,x_3 + c'\,x_3^2)^2 = 0 \end{cases}$$

e la sua linea doppia si può dir costituita dai sei spigoli di un tetraedro e da una retta ulteriore appoggiata a due spigoli opposti. Quest'ultima retta è l'asse del fascio dei piani che ne contengono a coppie le coniche.

Notisi che delle due quadriche Φ_1' e Φ_2' una sola può spezzarsi in due piani coincidenti.

E infatti se Φ_1' e Φ_2' si spezzassero entrambe in un piano contato due volte, l'equazione (24) assumerebbe l'aspetto

$$B x_3^2 (e x_1 + d x_4)^4 + (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(e x_1 + d x_4)^2 (e' x_2 + c' x_3)^2 +$$

$$+ K x_4^2 (e' x_2 + c' x_3)^4 = 0$$

e la superficie da essa rappresentata sarebbe una rigata avente in g una direttrice doppia.

20. *Caso b'')*. Qui:

$$\Phi_1' \equiv x_4 (a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4) + e x_1^2 = 0\,,$$

$$\Phi_2' \equiv x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e' x_1^2 = 0\,,$$

$$\Psi \equiv x_3 (B x_3 + C x_4) [a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2]^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2) [a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2] \times$$

$$\times [a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_1^2] +$$

$$+ x_4 (H x_3 + K x_4) [a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_1^2]^2 = 0\,,$$

e Ψ deve avere una retta doppia in 23 e un'altra in 24.

Per $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$ le derivate di Ψ rispetto a x_1, x_2, x_3 si annullano identicamente, mentre quella rispetto a x_4 diviene:

$$D x_3^2 (b x_2 + c x_3)(b' x_2 x_3 + c' x_3^2) + H x_3 (b' x_2 x_3 + c' x_3^2)^2\,,$$

e così per $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$ le derivate di Ψ rispetto a x_1, x_2, x_4 si annullano identicamente, mentre quella rispetto a x_3 diviene:

$$C x_4 (b x_2 x_4 + d x_4^2)^2 + G x_4^2 (b x_2 x_4 + d x_4^2)(b' x_2 + d' x_4)\,;$$

quindi bisogna che si abbia, *identicamente*

$$x_3^3 (b' x_2 + c' x_3) [(D b + H b') x_2 + (D c + H c') x_3] = 0$$

e inoltre

$$x_4^3 (b\, x_2 + d\, x_4) [(C\, b + G\, b')\, x_2 + (C\, d + G\, d')\, x_4] = 0\,.$$

Ciò porta, da una parte

$$b' = c' = 0, \quad \text{oppure} \quad D\, b + H\, b' = D\, c + H\, c' = 0$$

e dall'altra

$$b = d = 0, \quad \text{oppure} \quad C\, b + G\, b' = C\, d + G\, d' = 0\,;$$

ma b e b' non possono annullarsi insieme, altrimenti Ψ diventerebbe un cono col vertice nel punto 2: dunque

$$\text{(I)} \qquad b' = c' = 0 \quad \text{e} \quad C\, b + G\, b' = C\, d + G\, d' = 0$$

oppure

$$\text{(II)} \qquad b = d = 0 \quad \text{e} \quad D\, b + H\, b' = D\, c + H\, c' = 0$$

oppure

$$\text{(III)} \quad D\, b + H\, b' = D\, c + H\, c' = C\, b + G\, b' = C\, d + G\, d' = 0\,.$$

Poichè le alternative (I) e (II) sono perfettamente analoghe, noi ci limiteremo a discutere soltanto la (I) e la (III).

Consideriamo in primo luogo l'alternativa (I).

Qui si ha $C\, b = 0$, ma $b \neq 0$ poichè già $b' = 0$, dunque $C = 0$. Poi C e G non possono annullarsi insieme, quindi $d' = 0$. Allora resta per Ψ l'equazione:

$$B x_3^2 (a\, x_1 x_4 + b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + d\, x_4^2 + e\, x_1^2)^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2)(e' x_1 + a' x_3)\, x_1 +$$

$$+ x_1^2 x_4 (H\, x_3 + K\, x_4)(e' x_1 + a' x_3)^2 = 0$$

e poichè dalla quartica intersezione di $\Phi_1' = 0$ e $\Phi_2' = 0$ si stacca la retta 23, bisogna che Ψ venga ad avere in 23 due rette doppie infinitamente vicine. Per questo, occorre e basta che sia $D\, a' = 0$, quindi

$$D = 0 \quad \text{oppure} \quad a' = 0\,.$$

Se $D = 0$ si trova per Ψ l'equazione:

$$B x_3^2 (a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2)^2 +$$

$$+ x_1 x_4 (E x_3 + G x_4)(a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2)(e' x_1 + a' x_3) +$$

$$+ x_1^2 x_4 (H x_3 + K x_4)(e' x_1 + a' x_3)^2 = 0$$

che rappresenta realmente una superficie a curve sezioni di genere 3; ma tale superficie è sempre di 1ª specie, perchè ammette la rete di superficie cubiche sub-aggiunte rappresentata dall'equazione:

$$k_0 x_1 x_4 (e' x_1 + a' x_3) +$$

$$+ k_1 [a' x_3 x_4 (b x_2 + c x_3 + d x_4) + e' d x_1 x_4^2 + e' b x_1 x_2 x_4 + e' c x_1 x_3 x_4] +$$

$$+ k_2 [- e a' x_3 x_1^2 + e' d x_1 x_4^2 + e' b x_1 x_2 x_4 + (c e' - a a') x_1 x_3 x_4] = 0$$

dove k_0, k_1, k_2 sono dei parametri arbitrari [1].

Se invece si ha $a' = 0$, l'equazione di Ψ diventa:

$$\Psi \equiv B x_3^2 (a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2]^2 +$$

$$+ e' x_1^2 (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(a x_1 x_4 + b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + d x_4^2 + e x_1^2) +$$

$$+ e'^2 x_1^4 x_4 (H x_3 + K x_4) = 0$$

e adesso Ψ deve avere due rette doppie infinitamente vicine nella retta

$$(25) \qquad \begin{cases} b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

e tre rette doppie infinitamente vicine nella retta 23.

Per facilitare i calcoli si osservi che qui $b \neq 0$, altrimenti Ψ sarebbe un cono col vertice nel punto 2; per conseguenza il piano

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0$$

(1) L'equazione $x_3 \Phi_1' = 0$ si ottiene di qui facendo $k_0 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = 1$; l'equazione $x_4 \Phi_2' = 0$ si ottiene facendo $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$.

non passa pel vertice 2 e si può supporre che coincida col piano $x_2 = 0$. Con ciò l'equazione di Ψ risulta (fatto anche $e' = 1$):

$$(26) \quad \begin{cases} \Psi \equiv Bx_3^2(x_2x_4 + ex_1^2)^2 + x_1^2(Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)(x_2x_4 + ex_1^2) + \\ \qquad + x_1^4x_4(Hx_3 + Kx_4) = 0 . \end{cases}$$

Sulla (26) si verifica subito che Ψ ammette due rette doppie infinitamente vicine nella retta 34, cioè nella retta che prima era rappresentata dalle (25), quindi resta da cercare sotto quali condizioni la (26) rappresenta una superficie con tre rette doppie infinitamente vicine nella retta 23.

Procedendo nel solito modo si trova che la condizione necessaria e sufficiente in discorso è espressa dall'uguaglianza:

$$D = 0 ;$$

e quindi infine resta per Ψ l'equazione:

$$(27) \quad \begin{cases} Bx_3^2(x_2x_4 + ex_1^2)^2 + x_1^2x_4(Ex_3 + Gx_4)(x_2x_4 + ex_1^2) + \\ \qquad + x_1^4x_4(Hx_3 + Kx_4) = 0 . \end{cases}$$

La (27) è, naturalmente, l'equazione di una superficie a curve sezioni di genere 3; ma, al solito, essa è di 1ª specie, perchè ammette la rete di superficie cubiche sub-aggiunte:

$$k_0 x_3(x_2x_4 + ex_1^2) + k_1x_1x_2x_4 + k_2x_1^2x_4 = 0$$

dove k_0, k_1 e k_2 sono dei parametri arbitrari.

E ora passiamo a considerare l'alternativa (III).

Se si ammette che qui *uno* dei coefficienti b e b' sia zero, si vede subito che si ricade in un caso già discusso, quindi possiamo supporre b e b' diversi da zero. Allora, tenuto conto che D e H (al pari di C e G) non possono esser zero insieme, per ragioni già addotte, si conclude che, indicando con ϱ un conveniente fattore di proporzionalità diverso da zero, si ha:

$$b' = \varrho b, \quad c' = \varrho c, \quad d' = \varrho d, \quad \left(\varrho = -\frac{D}{H} = -\frac{C}{G}\right)$$

e quindi

$$\Phi'_2 = x_3(a'x_1 + \varrho b x_2 + \varrho c x_3 + \varrho d x_4) + e'x_1^2 .$$

Con un'ovvia trasformazione di coordinate le equazioni delle quadriche Φ'_1 e Φ'_2 possono ridursi alla forma:

$$\Phi'_1 = x_4 (a\, x_1 + b\, x_2) + e\, x_1^2 = 0$$

$$\Phi'_2 = x_3 (a' x_1 + b' x_2) + e' x_1^2 = 0$$

e allora rispetto a questo nuovo tetraedro fondamentale si vede facilmente che la linea doppia di Ψ è formata in questo caso dalle rette 12, 23, 24 e dalla quartica intersezione di Φ'_1 e Φ'_2, la quale si spezza nella retta 34 e in una cubica gobba per 2, 3, 4 tangente alla retta 12 nel punto 2.

Per una cosiffatta linea doppia passano (si vede subito) ∞^2 superficie cubiche, dunque Ψ è ancora una superficie di 1ª specie.

21. *Caso* $b''')$. Qui si ha:

$$\Phi'_1 = x_4 (a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4) + e\, x_3^2$$

$$\Phi'_2 = x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e' x_2^2$$

$$\Psi = x_3 (B\, x_3 + C\, x_4)(a\, x_1 x_4 + b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + d\, x_4^2 + e\, x_3^2)^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(a\, x_1 x_4 + b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + d\, x_4^2 + e\, x_3^2) \times$$

$$\times (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_2^2) +$$

$$+ x_4 (H x_3 + K x_4)(a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + d' x_3 x_4 + e' x_2^2)^2 = 0$$

e Ψ deve avere due rette doppie infinitamente vicine in 12, e una retta doppia in 14. Perciò occorre, in primo luogo, che si abbia

$$H = 0$$

e in secondo luogo che si abbia *identicamente:*

$$x_4^3 (a\, x_1 + d\, x_4) [(C\, a + G\, a') x_1 + (C\, d + G\, d') x_4] = 0$$

quindi si ha

$$H = a = d = 0$$

oppure

$$H = C\, a + G\, a' = C\, d + G\, d' = 0\,.$$

Sia dapprima $H = a = d = 0$; allora a' è certo diverso da zero, perchè altrimenti Ψ sarebbe un cono col vertice in 1, per conseguenza si può supporre che il vertice del cono $\Phi_2 = 0$ coincida col vertice 4 del tetraedro fondamentale. Così Φ'_1, Φ'_2 e Ψ diventano ordinatamente:

$$\Phi'_1 = x_4 (b\, x_2 + c\, x_3) + e\, x_3^2$$

$$\Phi'_2 = x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3) + e' x_2^2$$

$$\Psi = x_3 (B x_3 + C x_4) (b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + e\, x_3^2)^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + e x_3^2)(a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2) +$$

$$+ K x_4^2 (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2)^2 .$$

Notisi ora che dalla quartica intersezione di Φ'_1 e Φ'_2 si stacca la retta 14, quindi Ψ deve avere in 14 due rette doppie infinitamente vicine. Per questo occorre e basta che sia $G\, b = 0$, e quindi

$$G = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0 .$$

L'ipotesi $G = 0$ porta alla superficie a curve sezioni di genere 3:

$$(28)\ \left\{ \begin{aligned} & x_3 (B x_3 + C x_4) (b\, x_2 x_4 + c\, x_3 x_4 + e\, x_3^2)^2 + \\ & + x_3 (D x_3 + E x_4)(b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + e x_3^2)(a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2) + \\ & + K x_4^2 (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2)^2 = 0 , \end{aligned} \right.$$

che è di 1ª specie perchè ammette la rete di sub-aggiunte

$$(k_0 x_2 + k_1 x_3)(b x_2 x_4 + c x_3 x_4 + e x_3^2) + k_2 x_4 (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2) = 0,$$

(k_0, k_1, k_2 essendo i parametri variabili); e l'ipotesi $b = 0$ porta alla superficie:

$$(29)\ \left\{ \begin{aligned} & x_3^3 (B x_3 + C x_4) (c\, x_4 + e\, x_3)^2 + \\ & + x_3 (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(c x_4 + e x_3)(a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2) + \\ & + K x_4^2 (a' x_1 x_3 + b' x_2 x_3 + c' x_3^2 + e' x_2^2)^2 = 0 . \end{aligned} \right.$$

Ma quando $b = 0$ dalla quartica intersezione di Φ_1' e Φ_2' si stacca la retta 14 contata due volte, quindi prima di poter dire che la (29) rappresenta una superficie a curve sezioni di genere 3 occorre assicurarsi che nella 14 vengano tre rette doppie infinitamente vicine. Perchè questo accada, fatti i calcoli, si trova che deve essere $G\,c = 0$; ma G bisogna considerarlo come diverso da zero, perchè altrimenti ricadremmo nel caso precedente, dunque $c = 0$. Allora la quartica suddetta si raccoglie tutta nella retta 14 e quindi in 14 la superficie rappresentata dall'equazione che si ottiene dalla (29) facendovi $c = 0$ deve venire ad avere cinque rette doppie infinitamente vicine. Segue che, se pure è possibile realizzare una siffatta superficie, essa è certo di 1ª specie perchè (si vede subito) i piani del fascio 14 tagliano sopra ogni sezione piana dei gruppi speciali e quindi si ha certo una rete di quartiche sub-aggiunte alle sezioni piane.

Sia ora $H = C\,a + G\,a' = C\,d + G\,d' = 0$. Allora la linea doppia è costituita da 12 e da una retta infinitamente vicina ad essa *nel* piano $x_4 = 0$, da 14 e dalla quartica intersezione dei coni quadrici Φ_1' e Φ_2: quindi esiste la rete di sub-aggiunte:

$$(k_0\,x_2 + k_1\,x_3)\,\Phi_1' + k_2\,x_4\,\Phi_2' = 0$$

(dove k_0, k_1, k_2 sono dei parametri) e la corrispondente superficie Ψ è di 1ª specie.

22. Per esaurire la discussione dell'ipotesi b) bisogna fare il caso in cui i piani α e β coincidano, per es., nel piano $x_3 = 0$. Allora l'equazione del fascio delle Φ (che risulta riducibile) è:

$$x_3\,(\Phi_1' - \lambda\,\Phi_2') = 0 \tag{30}$$

quella del fascio di piani con l'asse g è

$$x_3 - \mu\,x_4 = 0 \tag{31}$$

e l'equazione della corrispondenza (2, 2) fra i due fasci è

$$A\,\lambda^2\,\mu^2 + B\,\lambda^2\,\mu + D\,\lambda\,\mu^2 + E\,\lambda\,\mu + G\,\lambda + H\,\mu^2 + K\,\mu = 0\,. \tag{32}$$

Segue che la superficie Ψ è rappresentata questa volta da un'equazione del tipo:

$$x_3(Ax_3 + Bx_4)\,\Phi_1'^2 + (Dx_3^2 + Ex_3x_4 + Gx_4^2)\,\Phi_1'\,\Phi_2' + x_3(Hx_3 + Kx_4)\,\Phi_2'^2 = 0\,.$$

Notisi che se la superficie Ψ ha da risultare a curve sezioni di genere 3 e deve avere per aggiunte le superficie del fascio (30), il piano $x_3 = 0$ non può tagliarla che in linee multiple; d'altra parte la linea comune alla superficie Ψ e al piano $x_3 = 0$ è costituita dalla retta g contata due volte e dalle coniche ove il piano in discorso taglia le quadriche Φ_1' e Φ_2', quindi o Φ_1 e Φ_2' tagliano $x_3 = 0$ nella stessa conica, oppure Φ_1' e Φ_2' sono toccate da $x_3 = 0$ lungo due rette distinte. Di queste due rette, poi, potrà accadere che una coincida con g, ma quando Φ_1' e Φ_2' tagliano $x_3 = 0$ secondo la stessa conica non può accadere che da questa si stacchi la retta g.

Facciamo dapprima l'ipotesi che Φ_1' e Φ_2' tocchino $x_3 = 0$ secondo due rette distinte, diverse entrambe da g e non concorrenti su g. Allora possiamo prendere una di esse come lato 14 del tetraedro fondamentale e l'altra come lato 24, per modo che le equazioni di Φ_1' e Φ_2' siano del tipo:

$$\Phi_1' \equiv x_3 (a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4) + e\, x_2^2$$

$$\Phi_2' \equiv x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e' x_1^2 .$$

Indicando con P_1, P_2, P_3, P_4 degli opportuni polinomi si ha:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = P_1 x_3 + G\, x_4^2 \left(\Phi_1' \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x_1} + \Phi_2' \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = P_2 x_3 + G\, x_4^2 \left(\Phi_1' \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x_2} + \Phi_2' \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = P_3 x_3 + B\, x_4 \Phi_1'^2 + E x_4 \Phi_1' \Phi_2' + G x_4^2 \left(\Phi_1' \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x_3} + \Phi_2' \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_3} \right) + K\, x_4\, \Phi_2'^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_4} = P_4 x_3 + G\, x_4^2 \left(\Phi_1' \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x_4} + \Phi_2' \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x_4} \right) + 2\, G\, x_4\, \Phi_1' \Phi_2'$$

quindi, perchè Ψ abbia una retta doppia in 14 occorre che sia identicamente nulla l'espressione:

$$e'\, x_4 x_1^2 \left[G\, x_4 (a\, x_1 + d\, x_4) + K\, e'\, x_1^2 \right]$$

e perchè Ψ abbia una retta doppia in 24 occorre che sia identicamente nulla l'espressione:

$$e\, x_4 x_2^2 \left[B\, e\, x_2^2 + G\, x_4 (b'\, x_2 + d'\, x_4) \right].$$

Ma e, e' e G sono necessariamente diversi da zero, perchè altrimenti da Ψ si staccherebbe il piano $x_3 = 0$, dunque deve essere:

$$K = B = a = d = b' = d' = 0 .$$

Con ciò Φ_1' si spezza in due piani per 14 (1), Φ_2' si spezza in due piani per 24 (1) e Ψ, che vien rappresentata dall'equazione:

$$A\, x_3^2 (e x_2^2 + b\, x_2 x_3 + c\, x_3^2)^2 +$$

$$+ (D x_3^2 + E x_3 x_4 + G x_4^2)(e x_2^2 + b x_2 x_3 + c x_3^2)(e' x_1^2 + a' x_1 x_3 + c' x_3^2) +$$

$$+ H x_3^2 (e' x_1^2 + a' x_1 x_3 + c' x_3^2)^2 = 0$$

è una superficie a curve sezioni di genere 3 con la linea doppia formata dai lati del triangolo 123 e dalle quattro rette, uscenti da 4, secondo cui si intersecano le due coppie di piani costituenti Φ_1' e Φ_2'.

Tale superficie è una nuova superficie di 2ª specie, poichè è chiaro che essa non ammette altre superficie cubiche (sub-) aggiunte se non quelle costituite dal piano fisso $x_3 = 0$ con un cono quadrico variabile nel fascio determinato da Φ_1' e Φ_2'.

Un caso particolare di questa superficie è quella che si ottiene supponendo che delle due coppie di piani costituenti Φ_1' e Φ_2' una sia formata da un piano contato due volte.

Come già in un altro caso precedente, notisi che Φ_1' e Φ_2' non possono ridursi entrambe a un piano contato due volte poichè altrimenti Ψ risulterebbe una rigata.

Resterebbe ora da supporre che Φ_1' e Φ_2' toccassero il piano $x_3 = 0$ secondo rette distinte, diverse da g, ma incontrantisi in un punto di g; si vede però subito che tale ipotesi deve essere esclusa.

E infatti per essa si potrebbe porre, con una opportuna scelta delle coordinate,

$$\Phi_1' = x_3 (a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4) + e\, x_2^2$$

$$\Phi_2' = x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e' (x_2 - x_4)^2$$

e un ragionamento analogo a quello già eseguito condurrebbe alle

(1) Distinti entrambi da x_3.

condizioni:

$$a = a' = G\,d + K\,e' = B\,e + G\,(b' + d') = 0\,;$$

ma allora Ψ si ridurrebbe a un cono col vertice nel punto 1.

23. Adesso supponiamo che Φ_1' tocchi $x_3 = 0$ secondo una retta distinta da g (che si potrà assumere come lato 14 del tetraedro fondamentale) e che Φ_2' tocchi $x_3 = 0$ secondo la retta g.

Allora si potrà scrivere:

$$\Phi_1' = x_3\,(a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4) + e\,x_2^2$$

$$\Phi_2' = x_3\,(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4) + e'x_4^2$$

e Ψ dovrà avere *due* rette doppie infinitamente vicine in 12 e una retta doppia in 14.

Perchè si abbia una retta doppia in 14 occorre e basta che sia identicamente nulla l'espressione:

$$e'\,x_4^4\,[G\,(a\,x_1 + d\,x_4) + K\,e'\,x_4]\,,$$

cioè, per ragioni già addotte, occorre e basta che sia:

$$a = 0\,, \quad G\,d + K\,e' = 0\,;$$

perchè si abbiano due rette doppie infinitamente vicine in 12 occorre e basta che sia

$$B = 0\,,$$

quindi, nelle ipotesi presenti si arriva alla superficie Ψ a sezioni di genere 3 rappresentata dall'equazione:

$$A\,x_3^2\,(b\,x_2x_3 + c\,x_3^2 + d\,x_3x_4 + e\,x_2^2)^2 +$$

$$+ (Dx_3^2 + E\,x_3x_4 + G\,x_4^2)(b\,x_2x_3 + c\,x_3^2 + d\,x_3x_4 + e\,x_2^2)\times$$

$$\times (a'x_1x_3 + b'x_2x_3 + c'x_3^2 + d'x_3x_4 + e'x_4^2) +$$

$$+ x_3\,(Hx_3 + Kx_4)\,(a'x_1x_3 + b'x_2x_3 + c'x_3^2 + d'x_3x_4 + e'x_4^2)^2 = 0\,.$$

La linea doppia di questa superficie si compone della retta 12 contata due volte, della retta 14 e della quartica (con punto doppio in 1) secondo cui si tagliano i due coni quadrici Φ'_1 e Φ'_2, quindi essa ammette le ∞^2 superficie sub-aggiunte fornite dall'equazione:

$$k_0 x_3 \Phi'_1 + (k_1 x_2 + k_2 x_3) \Phi'_2 = 0$$

quando vi si facciano variare in tutte le maniere possibili i parametri k_0, k_1 e k_2. Ciò dimostra che la superficie in discorso è di 1ª specie.

24. Infine facciamo l'ipotesi che Φ'_1 e Φ'_2 taglino il piano $x_3 = 0$ secondo la stessa conica (che non può contenere g).

Allora se supponiamo di prendere come vertici 1 e 4 del tetraedro fondamentale due punti di questa conica, badando che x_3 non può staccarsi nè da Φ'_1 nè da Φ'_2 si vede che le equazioni di Φ'_1 e Φ'_2 saranno del tipo:

$$\Phi'_1 \equiv x_3 (a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4) + (e x_2^2 + f x_1 x_2 + h x_1 x_4 + k x_2 x_4) = 0$$

$$\Phi'_2 \equiv x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + (e x_2^2 + f x_1 x_2 + h x_1 x_4 + k x_2 x_4) = 0;$$

e se inoltre supponiamo per ora che la conica in discorso non si spezzi in una retta contata due volte, bisognerà che in essa si abbiano due coniche doppie infinitamente vicine di Ψ, perchè Ψ possa risultare una superficie a curve sezioni di genere 3.

Ora si scrivano le equazioni delle sezioni di Ψ coi piani $x_2 = 0$ e $x_1 = 0$, e si cerchi la condizione necessaria e sufficiente perchè tali sezioni abbiano in 4 due punti doppi infinitamente vicini. Si troverà (potendosi supporre h o k diverso da zero senza venir meno alla generalità) che tale condizione è espressa dall'uguaglianza

$$d = d'.$$

Ciò porta che Φ'_1 e Φ_2 debbono avere nel punto 4 lo stesso piano tangente e quindi Φ'_1 e Φ'_2 debbono toccarsi in ogni punto della conica in cui tagliano $x_3 = 0$.

Segue che la linea doppia di Ψ deve esser formata dalla retta g e dalla conica in discorso contata tre volte.

Ora una cosiffatta superficie a sezioni di genere 3 e di 2ª specie non è realizzabile, poichè se si scrivono le condizioni a cui debbono soddisfare le sezioni piane uscenti dal punto 4 perchè abbiano ivi tre punti doppi infinitamente vicini (e per questo giova supporre che il piano ivi tangente a Φ'_1 e Φ'_2 sia $x_1 = 0$) si trova che Φ'_1 dovrebbe coincidere con Φ'_2.

Resta da supporre che Φ'_1 e Φ'_2 tocchino il piano $x_3 = 0$ secondo una medesima retta (diversa da g), per es. secondo il lato 14 del tetraedro fondamentale. Allora si può porre

$$\Phi'_1 = x_3 (a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4) + e\, x_2^2$$
$$\Phi'_2 = x_3 (a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4) + e\, x_2^2 ,$$

dove è lecito supporre (per semplificare i calcoli) che siano uguali i coefficienti (non nulli) di x_2^2, e Ψ, perchè risulti a curve sezioni di genere 3 e con le superficie aggiunte assegnate, deve avere quattro rette doppie infinitamente vicine in 14.

Ebbene si trova facilmente che una tale superficie Ψ non è realizzabile.

E infatti si ponga, al solito, entro l'equazione di Ψ, $x_1 = px_2 + qx_3 + rx_4$ (con p, q, r affatto arbitrari) e si scrivano le condizioni perchè la sestica risultante in x_2, x_3, x_4 abbia tre punti doppi infinitamente vicini nel punto $(0, 0, 1)$. Si trova da una parte che deve essere:

$$\frac{e^2}{(a\, r + d)(a' r + d')} = \frac{1}{4}\; \frac{e^2\,[(a\, r + d) + (a' r + d')]^2}{(a\, r + d)^2 (a' r + d')^2}$$

cioè, attesa l'arbitrarietà di r:

$$a = a' \quad \text{e} \quad d = d' ;$$

dall'altra, che deve essere

$$(b + a\, p) + (b' + a' p) = 0$$

ossia, per l'arbitrarietà di p:

$$a = -a' \qquad b = -b'.$$

Segue

$$a = a' = 0 ;$$

ma allora Φ'_1 e Φ'_2 sono dei coni col vertice in 1 e anche Ψ si riduce a un cono col vertice ivi.

25. Tralasciando, per brevità, la discussione dell'ipotesi c) che non darebbe luogo a nessun nuovo tipo di superficie di 2ª specie

e non richiederebbe nessuna osservazione di indole diversa da quelle adoperate fin qui, e riassumendo le cose dette in questo 2° capitolo, possiamo adunque enunciare il teorema:

Di superficie di 2ª specie del 6° ordine (normali) dello spazio ordinario con le coniche situate a coppie nei piani di un fascio non ne esistono che di due tipi generali. Per le superficie del 1° tipo la linea doppia è costituita dai sei spigoli di un tetraedro e da una retta appoggiata a due suoi spigoli opposti; per le superficie del 2° tipo la linea doppia è costituita dai sei spigoli di un angoloide tetraedro completo e da una ulteriore retta appoggiata a due suoi spigoli opposti (1).

Capitolo III.

LE SUPERFICIE NORMALI DI 2ª SPECIE DELLO SPAZIO ORDINARIO CON LE CONICHE SITUATE NEI PIANI TANGENTI DI UN CONO DI 3ª CLASSE O DI UNA SVILUPPABILE DI 4ª CLASSE.

26. Passiamo ora alla considerazione delle superficie di 2ª specie e del 6° ordine (di S_3 e normali) le cui coniche sono situate una per una nei piani tangenti di una sviluppabile (in particolare di un cono).

Se F è una cosiffatta superficie, le ∞^1 coniche che essa contiene tagliano sopra una sua sezione piana generica le ∞^1 coppie di una involuzione ellittica, la quale, per la formula di Zeuthen, ammette quattro punti doppi. D'altra parte se si proiettano le coppie dell'involuzione da un punto generico O del piano della sezione si ha nel fascio di raggi O una corrispondenza (6, 6) con 12 coincidenze, quindi, di queste coincidenze, 4 proverranno dai punti doppi dell'involuzione e altre 8 proverranno dalle coppie dell'involuzione allineate con O o da quei punti doppi della curva nei quali vengono a cadere (sui due rami) due punti fra loro coniugati nell'involuzione.

(1) Notisi che le superficie del 1° tipo hanno quattro punti tripli nei quattro vertici del tetraedro ad esse relativo; quelle del 2° tipo hanno un punto quadruplo nel vertice del relativo angoloide; le une e le altre poi possono considerarsi come ottenute imponendo opportunamente una ulteriore retta doppia a note superficie studiate dal prof. Enriques.

Indichiamo con ε il numero di questi punti doppi: allora indicando con μ il numero delle coppie (vere e proprie) dell'involuzione allineate con O e badando che ognuna delle coincidenze della (6, 6) proveniente da uno di quei punti doppi o da una di queste coppie conta almeno per 2 avremo:

$$2\mu + 2\varepsilon \leq 8$$

e

$$\mu + \varepsilon \leq 4.$$

Ma d'altra parte l'inviluppo dei piani delle coniche di F deve essere di genere 1 e, per ipotesi, non si spezza in uno contato più volte, dunque $\mu = 4$ oppure $\mu = 3$. Se $\mu = 4$, ε è necessariamente nullo, se $\mu = 3$, poichè 8 non è divisibile per 3, si conclude senz'altro che $\varepsilon = 1$; dunque:

I piani delle coniche della superficie F costituiscono un inviluppo semplice ellittico che può essere

a) della 4ª classe, oppure

b) della 3ª classe.

Nel caso b) esso è poi necessariamente costituito dai piani tangenti di un cono della 3ª classe e del 6⁰ ordine ed esiste una conica di F ed una sola spezzata in una retta, contata due volte, che risulta doppia per F.

27. *Ipotesi b).*

Diciamo Ψ l'inviluppo di (4ª classe) di cui si parla nel teorema ora enunciato e dimostriamo subito che Ψ non può essere un cono.

E infatti, se ciò fosse, Ψ potrebbe considerarsi come proiezione (da un punto esterno) di un cono Ψ^* di uno spazio a quattro dimensioni proiettante dal suo vertice una ordinaria rigata biquadratica ellittica con due direttrici doppie. Ma allora la F, che è formata di coniche situate nei piani di Ψ, sarebbe proiezione di una F^* dello stesso ordine dell' S_4 formata da coniche situate nei piani di Ψ^*, quindi F non sarebbe una superficie normale.

Si conclude che, nell'ipotesi considerata:

I piani delle coniche della superficie F costituiscono un inviluppo ellittico di 4ª classe che è l'inviluppo base di una schiera di quadriche.

28. Le ∞^1 quartiche aggiunte alle sezioni piane di F sono formate da coppie di coniche costituenti entro la ∞^1 ellittica delle coniche stesse una g_2^1. Tale g_2^1 si rispecchia in una g_2^1 fra i piani dell'inviluppo Ψ; quindi, rammentando che le g_2^1 esistenti sopra un

inviluppo di 4ª classe base di una schiera di quadriche si ottengono tutte considerando le coppie di piani dell'inviluppo che escono dalle generatrici di una serie rigata appartenente a una delle dette quadriche, si conclude che:

Le quartiche aggiunte alle sezioni piane di F sono formate dalle coppie di coniche che si trovano nelle coppie di piani di Ψ uscenti dalle generatrici di una determinata serie rigata qaadrica Σ inscritta nell'inviluppo Ψ.

In particolare, come risulterà dal seguito, può accadere che la serie Σ sia la serie delle tangenti di una delle quattro coniche appartenenti alla schiera di quadriche (come inviluppi quadrici specializzati.

29. Siano C_1 e C_2 le due coniche di F costituenti una quartica aggiunta alle sezioni piane di F; poi sia a la generatrice di Σ da cui escono i loro piani e sia infine Φ_1 la superficie cubica aggiunta ad F che le contiene.

Supponiamo per ora che Φ_1 sia irriducibile e dimostriamo che la retta a appartiene a Φ_1.

La cosa è evidente se si ammette che C_1 e C_2 taglino a in punti distinti, ma per ovviare a una discussione che diventerebbe troppo minuziosa se volessimo partire da considerazioni di tal genere, ricorriamo alla seguente osservazione generale.

La superficie F ha una linea doppia del 7° ordine (che può anche spezzarsi in parti multiple) per la quale passano tutte le ∞^1 superficie cubiche Φ ad essa aggiunte. Orbene la F, insieme con la rete di superficie del 6° ordine che si ottiene combinando a due a due in tutte le maniere possibili le superficie Φ aggiunte, determina un sistema lineare ∞^3 di superficie del 6° ordine aventi tutte una linea doppia del 7° ordine e dotate tutte di un sol fascio di superficie cubiche aggiunte (o, ciò che ora fa lo stesso, di un solo fascio di superficie cubiche sub-aggiunte). Ciò porta che la superficie generica di questo sistema lineare è a sezioni piane del genere 3, ha l'irregolarità 1 ed è una superficie di 2ª specie, e su di essa la *rete caratteristica* (cioè la rete delle sue intersezioni variabili con le altre superficie del sistema) è una rete riducibile [1] di curve dell'8°

[1] Tale rete non poteva, naturalmente, risultare irriducibile, poichè da un noto teorema dei proff. CASTELNUOVO ed ENRIQUES segue che la superficie generica di un sistema lineare dello spazio ordinario è regolare se il sistema ca-

ordine che si ottengono combinando a due a due in tutte le maniere possibili le quartiche aggiunte alle sezioni piane (spezzate a loro volta in coppie di coniche).

In particolare sopra una qualsiasi cubica Φ aggiunta ad F le superficie del sistema lineare in questione segnano, fuori delle linee multiple, un fascio *lineare* di quartiche tutte spezzate in coppie di coniche. Ma allora, come è notissimo, queste coniche debbono appartenere su Φ a uno stesso fascio; per conseguenza C_1 e C_2 debbono appartenere a piani uscenti da una stessa retta di Φ_1 ed a sta sopra Φ_1; c. d. d.

Di qui si traggono delle conclusioni importanti.

In primo luogo le superficie cubiche Φ aggiunte ad F tagliano sulla quadrica Q riempita dalle rette di Σ (¹) un fascio di curve tutte spezzate, poichè da ognuna di esse si stacca una generatrice di Σ; quindi tale fascio, a meno di una parte fissa, deve comporsi di un'involuzione fra le generatrici di Σ. Questa involuzione, a sua volta, non può essere d'ordine superiore a 1, poichè altrimenti la Φ corrispondente a un gruppo dell'involuzione dovrebbe contenere più di due coniche della superficie F; dunque:

Le cubiche Φ aggiunte ad F tagliano la quadrica Q riempita dalle rette di Σ in una curva fissa del 5^0 ordine e in una retta variabile entro la serie Σ.

In secondo luogo si osservi che la linea base del fascio delle superficie Φ è una curva del 9^0 ordine, da cui si stacca la linea doppia del 7^0 ordine della F: resta adunque una linea del 2^0 ordine che sopra ogni superficie Φ rappresenta, quando sia contata due volte, una delle quartiche ivi segnate dalle superficie del sistema lineare ∞^3 sopra considerato. Ma allora tale linea del 2^0 ordine non può essere piana, perchè altrimenti nel suo piano giacerebbero tutte le generatrici di Σ; quindi deve spezzarsi in due rette appoggiate a tutte le generatrici di Σ, cioè in due rette d_1 e d_2 della quadrica Q appartenenti alla serie delle direttrici di Σ.

ratteristico che essa contiene è a curve variabili irriducibili. Cfr. CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce*, etc. Ann. Scient. de l'École Norm. Sup., 1906.

(¹) Qui diciamo senz'altro che le rette di Σ riempiono una quadrica poichè il ragionamento stesso che vien fatto nel testo dimostra come, nell'ipotesi che le Φ siano irriducibili, debba essere escluso il caso particolare in cui Σ si compone delle tangenti di una conica.

Ciò dimostra che la curva fissa del 5^0 ordine in cui le superficie Φ tagliano la quadrica in discorso si spezza in queste due rette e in una residua cubica gobba C^3 doppia per F.

Notisi che ognuna delle rette d_1 e d_2 contata due volte deve formare una delle coniche tagliate su ciascuna superficie Φ dai piani passanti per la relativa retta di Σ; ciò significa che se, come prima, a è la retta relativa alla superficie Φ_1, Φ_1 deve esser toccata lungo d_1 dal piano $a\, d_1$ e lungo d_2 dal piano $a\, d_2$.

Dall'osservazione ora fatta si trae che le rette d_1 e d_2 non possono venire a coincidere in una stessa retta d se non a patto che le superficie Φ siano rigate cubiche con la direttrice doppia in d, poichè altrimenti le superficie Φ da una parte dovrebbero toccarsi nei punti di d e dall'altra avrebbero per piani tangenti *lungo* d dei piani distinti.

30. Per caratterizzare ancora meglio le superficie incontrate nel n. precedente, giova distinguere il caso in cui le rette d_1 e d_2 sono distinte da quello in cui esse vengono a coincidere; cominciamo dunque dal supporre che le rette d_1 e d_2 siano distinte.

La cubica C^3, situata sulla quadrica Q, doppia per F e appartenente alla linea base del fascio delle Φ, è, si vede subito, unisecata dalle rette di Σ, giacchè altrimenti le rette di Σ verrebbero ad avere più di tre punti comuni con ogni superficie Φ; quindi essa è bisecata dalle rette di Q che si appoggiano a quelle di Σ. In particolare, è bisecata dalle rette d_1 e d_2.

Diciamo A_1 e B_1 le intersezioni di C^3 con d_1, A_2 e B_2 le intersezioni di C^3 con d_2 e facciamo dapprima l'ipotesi che C^3 sia irriducibile e che tanto A_1 e B_1, quanto A_2 e B_2 siano distinti.

I punti A_1, B_1, A_2 e B_2 sono punti doppi per l'intersezione di una qualsiasi superficie Φ con la quadrica Q, quindi in essi le superficie Φ o hanno dei punti doppi o toccano la quadrica Q. Questa seconda alternativa deve essere respinta, perchè le Φ *lungo* d_1 e d_2 toccano piani differenti da superficie a superficie; dunque le superficie Φ hanno tutte quattro punti doppi in A_1, B_1, A_2 e B_2 (1), e la loro linea base, come pure la linea doppia di F, è completata dalle quattro rette $A_1 A_2$, $A_1 B_2$, $B_1 A_2$, $B_1 B_2$.

(1) Che ognuna delle superficie Φ dovesse avere due punti doppi su d_1 o d_2 era evidente *a priori*, poichè è noto che se un piano tocca una superficie cubica lungo una retta su questa si trovano due punti doppi della superficie.

Si vede così che, se tutte le ipotesi fatte sono compatibili, si arriva a una superficie F di 2ª specie avente come linea doppia una cubica gobba e un quadrangolo gobbo semplice $A_1 A_2 B_1 B_2$ inscritto in essa; di più i vertici di questo quadrangolo sono altrettanti punti tripli di F. Notisi che, se una superficie F del 6º ordine con una linea doppia siffatta esiste, essa è certo di 2ª specie, perchè è a sezioni di genere 3 e ammette soltanto un fascio di superficie cubiche (sub-)aggiunte.

31. Per mettere fuori di dubbio l'esistenza della superficie F caratterizzata nel n. precedente, cercheremo qui di scriverne l'equazione, utilizzando le sue proprietà geometriche trovate nei n. 29 e 30. Queste basterebbero da sole a dimostrare l'esistenza della F, quando fossero convenientemente invertite; ma a noi preme scriver l'equazione della F per poter scrivere poi nell'altro lavoro, di cui abbiamo parlato nell'introduzione, le formule della trasformazione Cremoniana che servono a mutare la F in un cono cubico (ellittico).

Mantenute le notazioni dei n. 29 e 30, prendiamo ordinatamente come vertici 1, 2, 3, 4 del tetraedro fondamentale i punti A_1, A_2, B_1, B_2 e siano

$$(33) \qquad \begin{cases} a_0 x_2 x_3 x_4 + b_0 x_3 x_4 x_1 + c_0 x_4 x_1 x_2 + d_0 x_1 x_2 x_3 = 0 \\ a_1 x_2 x_3 x_4 + b_1 x_3 x_4 x_1 + c_1 x_4 x_1 x_2 + d_1 x_1 x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

le equazioni di due superficie del fascio delle Φ, cioè in sostanza di due superficie qualunque del 3º ordine aventi quattro punti doppi nei quattro vertici del tetraedro fondamentale.

Le equazioni parametriche della cubica gobba C^3 in cui esse si tagliano fuori degli spigoli del tetraedro fondamentale sono date da:

$$(34) \qquad \begin{cases} x_1 = -(a\,c)\,[(b\,a)\,\mu + (d\,a)\,\lambda]\,\lambda\,\mu \\ x_2 = [(b\,c)\,\mu + (d\,c)\,\lambda]\,[(b\,a)\,\mu + (d\,a)\,\lambda]\,\lambda \\ x_3 = (a\,c)\,[(b\,c)\,\mu + (d\,c)\,\lambda]\,\lambda\,\mu \\ x_4 = [(b\,c)\,\mu + (d\,c)\,\lambda]\,[(b\,a)\,\mu + (d\,a)\,\lambda]\,\mu \end{cases}$$

dove λ e μ sono i parametri (omogenei) variabili e il simbolo $(a\,c)$, per es., sta (secondo una convenzione nota) a indicare il determinante $a_0 c_1 - a_1 c_0$; quindi l'equazione della quadrica Q che deve passare per gli spigoli 13, 24 del tetraedro fondamentale e per la cubica gobba C^3 sarà data da:

$$(35) \qquad (d\,c)\,x_1\,x_2 + (b\,c)\,x_1\,x_4 + (d\,a)\,x_2\,x_3 + (b\,a)\,x_3\,x_4 = 0\,.$$

La retta variabile in Σ, secondo cui Q è tagliata, fuori di 13, 24 e C^3 dalla superficie generica del fascio delle Φ, avente per equazione:

$$(\varrho_0\,a_0 + \varrho_1\,a_1)\,x_2\,x_3\,x_4 + (\varrho_0\,b_0 + \varrho_1\,b_1)\,x_3\,x_4\,x_1 +$$

$$+ (\varrho_0\,c_0 + \varrho_1\,c_1)\,x_4\,x_1\,x_2 + (\varrho_0\,d_0 + \varrho_1\,d_1)\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

è la retta comune ai due piani:

$$(\varrho_0\,d_0 + \varrho_1\,d_1)\,x_2 + (\varrho_0\,b_0 + \varrho_1\,b_1)\,x_4 = 0$$

$$(\varrho_0\,c_0 + \varrho_1\,c_1)\,x_1 + (\varrho_0\,a_0 + \varrho_1\,a_1)\,x_3 = 0\,,$$

quindi le coordinate di un piano generico passante per essa saranno date da:

$$(36) \quad \begin{cases} \xi_1 = (\varrho_0\,c_0 + \varrho_1\,c_1)\,\tau, \;\; \xi_2 = (\varrho_0\,d_0 + \varrho_1\,d_1)\,\sigma, \;\; \xi_3 = (\varrho_0\,a_0 + \varrho_1\,a_1)\,\tau, \\ \qquad\qquad \xi_4 = (\varrho_0\,b_0 + \varrho_1\,b_1)\,\sigma, \end{cases}$$

dove σ e τ indicano dei parametri arbitrari.

Ora le equazioni dell'inviluppo Ψ (che questa volta, si vede subito, contiene le quattro facce del tetraedro fondamentale (¹)) si ottengono associando all'equazione tangenziale di Q (che non occorre scrivere) quella di un'altra quadrica inviluppo che lo contiene e che è del tipo

$$(37) \quad A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{13}\xi_1\xi_3 + A_{14}\xi_1\xi_4 + A_{23}\xi_2\xi_3 + A_{24}\xi_2\xi_4 + A_{34}\xi_3\xi_4 = 0\,;$$

quindi l'equazione della superficie F si ottiene eliminando ϱ_0, ϱ_1,

(¹) Si pensi, infatti, alle quattro superficie Φ che si spezzano in una di queste facce e in un residuo cono quadrico.

σ e τ fra le equazioni:

$$(38)\begin{cases}(\varrho_0c_0+\varrho_1c_1)\tau x_1+(\varrho_0d_0+\varrho_1d_1)\sigma x_2+(\varrho_0a_0+\varrho_1a_1)\tau x_3+(\varrho_0b_0+\varrho_1b_1)\sigma x_4=0\\ (\varrho_0a_0+\varrho_1a_1)x_1x_3x_4+(\varrho_0b_0+\varrho_1b_1)x_3x_4x_1+(\varrho_0c_0+\varrho_1c_1)x_4x_1x_2+(\varrho_0d_0+\varrho_1d_1)x_1x_2x_3=0\\ A_{12}(\varrho_0c_0+\varrho_1c_1)(\varrho_0d_0+\varrho_1d_1)\sigma\tau+A_{13}(\varrho_0c_0+\varrho_1c_1)(\varrho_0a_0+\varrho_1a_1)\tau^2+\ldots=0\end{cases}$$

l'ultima delle quali, che, per brevità, abbiamo scritta soltanto in parte, si deduce dalla (37) facendovi le sostituzioni indicate dalle (36).

Le prime due equazioni (38) dànno

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0}=-\frac{a_0\,x_2\,x_3\,x_4+b_0\,x_3\,x_4\,x_1+c_0\,x_4\,x_1\,x_2+d_0\,x_1\,x_2\,x_3}{a_1\,x_2\,x_3\,x_4+b_1\,x_3\,x_4\,x_1+c_1\,x_4\,x_1\,x_2+d_1\,x_1\,x_2\,x_3}$$

e

$$\frac{\sigma}{\tau}=\frac{x_1\,x_3}{x_2\,x_4};$$

quindi infine (omettendo il fattore estraneo $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$) l'equazione della superficie F è

$$(39)\begin{cases}A_{12}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2]x_3x_4+\\ +A_{13}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3]x_2x_4+\\ +A_{14}[(ca)x_2x_4+(cb)x_1x_4+(cd)x_1x_2][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_2x_3+\\ +A_{23}[(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2][(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3]x_1x_4+\\ +A_{24}[(da)x_2x_3+(db)x_1x_3+(dc)x_1x_2][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_1x_3+\\ +A_{34}[(ab)x_3x_4+(ac)x_2x_4+(ad)x_2x_3][(ba)x_3x_4+(bc)x_1x_4+(bd)x_1x_3]x_1x_2=0\ (^1)\,.\end{cases}$$

(1) In questa equazione compaiono sei coefficienti arbitrari (le A_{ik}), ma essa *non* rappresenta e *non può* rappresentare al variare delle A_{ik} un sistema lineare ∞^5. E infatti si noti che, se le A_{ik} mutano, ma in modo che la (37) rappresenti sempre una quadrica inviluppo della schiera individuata da Ψ, la superficie F generata resta sempre la medesima. Ciò significa, come del resto potrebbe verificarsi direttamente, che tra i polinomi di cui le A_{ik} sono i coefficienti passa una relazione identica (lineare omogenea).

Notisi che delle sei superficie del 6^0 ordine rappresentate dal porre uguali a zero quei polinomi ciascuna si spezza in due piani e in due coni quadrici per la cubica C^3 e questa osservazione ci sarebbe stata sufficiente per dimostrar subito l'esistenza della F.

32. Ferma restando l'ipotesi che la cubica C^3 sia irriducibile, può darsi, mantenendo le notazioni del n. 31, che i punti A_1 e B_1 coincidano. Allora le superficie Φ hanno due punti doppi in A_2 e B_2, e poi un punto doppio in $A_1 \equiv B_1$ a cui n'è venuto infinitamente vicino un altro nella direzione d_1. Quanto alla F essa avrà sempre una cubica doppia in C^3 e poi due sue rette doppie saranno venute infinitamente vicine ad $A_1 A_2$ e altre due ad $A_1 B_2$. Inoltre i punti A_2 e B_2 continuano ad esser tripli per F; ma il punto $A_1 \equiv B_1$ diventa quadruplo per F.

L'equazione di questo tipo particolare di superficie di 2ª specie può trovarsi procedendo in modo del tutto analogo a quello seguito nel n. precedente

Se prendiamo in A_1, A_2 e B_2, ordinatamente, i vertici 1, 2 e 3 del tetraedro fondamentale e poi prendiamo genericamente sulla retta d_1 il vertice 4 del tetraedro medesimo, l'equazione del fascio delle superficie Φ sarà, per es.,

$$(\varrho_0 + \varrho_1)\, x_2 x_3 x_1 +$$
$$+ [(\varrho_0 a_0 + \varrho_1 a_1)\, x_2 x_4 + (\varrho_0 b_0 + \varrho_1 b_1)\, x_3 x_4 + (\varrho_0 c_0 + \varrho_1 c_1)\, x_2 x_3]\, x_4 = 0\,;$$

le equazioni parametriche di C^3 saranno:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (c_0 - c_1)\,[(a\,c)\,\lambda + (b\,c)\,\mu]\,\lambda\,\mu \\
x_2 &= [(a_1 - a_0)\,\lambda + (b_1 - b_0)\,\mu]^2\,\lambda \\
x_3 &= [(a_1 - a_0)\,\lambda + (b_1 - b_0)\,\mu]^2\,\mu \\
x_4 &= (c_0 - c_1)\,[(a_1 - a_0)\,\lambda + (b_1 - b_0)\,\mu]\,\lambda\,\mu
\end{aligned}$$

e quella della quadrica Q sarà:

$$(a_1 - a_0)\, x_1 x_2 + (b_1 - b_0)\, x_1 x_3 + (c\,a)\, x_2 x_4 + (c\,b)\, x_3 x_4 = 0\,.$$

L'equazione che bisogna aggregare all'equazione tangenziale di Q per rappresentare l'inviluppo Ψ è questa volta del tipo:

$$A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\,\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\,\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\,\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\,\xi_3\xi_4 = 0$$

e la retta di Σ comune alla quadrica Q e alla superficie Φ generica è quella comune ai due piani:

$$(\varrho_0\, a_0 + \varrho_1\, a_1)\, x_2 + (\varrho_0\, b_0 + \varrho_1\, b_1)\, x_3 = 0$$
$$(\varrho_0 + \varrho_1)\, x_1 + (\varrho_0\, c_0 + \varrho_1\, c_1)\, x_4 = 0\,.$$

Allora, procedendo come prima si trova per F (omettendo il fattore estraneo $x_2\, x_3\, x_4^2$) l'equazione:

$$A_{11}[(a_1-a_0)x_2x_4+(b_1-b_0)x_3x_4+(c_1-c_0)x_2x_3]^2x_2x_3+$$

$$+2A_{12}[(a_1-a_0)x_2x_4+(b_1-b_0)x_3x_4+(c_1-c_0)x_2x_3]\,[(a_0-a_1)x_1x_2+\{(ab)x_4+(ac)x_2\}x_4]x_3x_4+$$

$$+2A_{13}[(a_1-a_0)x_2x_4+(b_1-b_0)x_3x_4+(c_1-c_0)x_2x_3]\,[(b_0-b_1)x_1x_3+\{(ba)x_4+(bc)x_3\}x_4]x_2x_4+$$

$$+2A_{23}[(a_0-a_1)x_1x_2+\{(ab)x_4+(ac)x_2\}x_4]\,[(b_0-b_1)x_1x_3+\{(ba)x_4+(bc)x_3\}x_4]x_4^2+$$

$$+2A_{24}[(a_0-a_1)x_1x_2+\{(ab)x_4+(ac)x_2\}x_4]\,[(c_0-c_1)x_1x_2x_3+\{(ca)x_2x_4+(cb)x_3x_4\}x_4]x_3+$$

$$+2A_{34}[(b_0-b_1)x_1x_3+\{(ba)x_4+(bc)x_3\}x_4]\,[(c_0-c_1)x_1x_2x_3+\{(ca)x_2x_4+(cb)x_3x_4\}x_4]x_2=0\,.$$

33. Coi due casi esaminati fin qui è esaurita la serie di tutti i casi possibili quando si faccia l'ipotesi che C^3 sia irriducibile e che le rette d_1 e d_2 siano distinte. E infatti se si supponesse che C^3 risultasse tangente non solo a d_1, ma anche a d_2, le superficie Φ diventerebbero delle rigate cubiche con la direttrice doppia comune nella retta congiungente i punti di contatto di C^3 con d_1 e d_2 e allora la retta variabile di Σ comune a Q e a una superficie Φ diventerebbe la direttrice semplice della superficie Φ in discorso; per conseguenza la superficie F sarebbe una rigata.

34. Supponiamo ora che le rette d_1 e d_2 coincidano in un'unica retta d e che la C^3 sia sempre una cubica irriducibile.

Allora le superficie Φ, come già è stato osservato, sono rigate cubiche con la direttrice doppia d, e quindi sta sempre il fatto che le rette di Σ sono unisecanti di C^3, mentre d incontra C^3 in due punti A e B.

La linea base del fascio delle Φ è completata questa volta da due rette a e b appoggiate a d ma non situate sulla quadrica Q, e, considerando il caso che stiamo discutendo come un caso limite di quello discusso al n. 30, si vede che queste due rette a e b non possono essere altra cosa che le tangenti a C^3 in A e B [1].

[1] Non sarebbe difficile, del resto, per ovviare a ogni obbiezione, giustificare direttamente questa asserzione; ma ce ne asteniamo per non dilungarci troppo.

Segue che, nel fascio delle superficie Φ, una è spezzata nel piano da e nel cono quadrico che da B proietta la C^3 (e quindi tocca lungo d il piano da) e un'altra nel piano db e nel cono quadrico che da A proietta la C^3 (e quindi tocca lungo d il piano db.

Aggiungasi che nelle ipotesi presenti i due piani di Ψ passanti per a (o b) coincidono nel piano da (o db).

35. Queste osservazioni sono sufficienti per procedere alla ricerca dell'equazione della superficie F nel caso particolare ora considerato.

Prendiamo i vertici 1 e 2 del tetraedro fondamentale nei punti A e B, rispettivamente; poi il piano 124 nel piano da e quello 123 nel piano db; infine assumiamo come piani 134 e 234 quelli che toccano, rispettivamente, lungo a e b i coni proiettanti C^3 da A e B.

Le equazioni di questi due coni saranno del tipo

$$x_3^2 + a\, x_2 x_4 = 0, \qquad x_4^2 + c\, x_1 x_3 = 0; \tag{40}$$

quella della quadrica Q potrà supporsi che sia:

$$x_3^2 + x_4^2 + a\, x_2 x_4 + c\, x_1 x_3 = 0 \tag{41}$$

e il fascio delle rigate Φ sarà rappresentato dall'equazione:

$$x_4 (x_3^2 + a\, x_2 x_4) + \lambda\, x_3 (x_4^2 + c\, x_1 x_3) = 0\,. \tag{42}$$

La superficie del fascio Φ, corrispondente al valore λ del parametro variabile, taglia Q fuori di d e C^3 nella retta l rappresentata dalle equazioni:

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda\, x_3 - x_4 = 0 \\ (c\, x_1 + x_3) + \lambda\,(a\, x_2 + x_4) = 0\,; \end{array}\right. \tag{43}$$

quindi le coordinate del piano generico condotto per l saranno date da:

$$\xi_1 = c, \quad \xi_2 = a\,\lambda, \quad \xi_3 = \varrho\,\lambda + 1, \quad \xi_4 = \lambda - \varrho; \tag{44}$$

dove ϱ indica un parametro variabile col piano.

Segue che se

$$A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\xi_3\xi_4 = 0 \tag{45}$$

è l'equazione tangenziale di una quadrica diversa da Q appartenente alla schiera individuata dall'inviluppo Ψ, l'equazione di F si otterrà eliminando λ e ϱ fra le equazioni:

$$
(46) \qquad \begin{cases} x_4 (x_3^2 + a\, x_2 x_4) + \lambda\, x_3 (x_4^2 + c\, x_1 x_3) = 0 \\ c\, x_1 + a\, \lambda\, x_2 + (\varrho\, \lambda + 1)\, x_3 + (\lambda - \varrho)\, x_4 = 0 \\ A_{11}\, c^2 + 2 A_{12}\, a\, c\, \lambda + 2 A_{13}\, c\, (\varrho\, \lambda + 1) + \ldots = 0 ; \end{cases}
$$

delle quali l'ultima è ottenuta dalla (45) facendovi le sostituzioni indicate dalle (44).

Le prime due delle (47) dànno:

$$
\lambda = - \frac{x_4 (x_3^2 + a\, x_2 x_4)}{x_3 (x_4^2 + c\, x_1 x_3)}
$$

e poi

$$
\varrho = - \frac{c\, x_1 + a\, \lambda x_2 + x_3 + \lambda\, x_4}{\lambda\, x_3 - x_4} = \frac{c\, x_1\, x_3 - a\, x_2\, x_4}{x_3\, x_4} ,
$$

dunque si trova per F l'equazione:

$$
\begin{gathered}
A_{11} c^2 x_3^2 (x_4^2 + c x_1 x_3)^2 - 2 A_{12} a c x_3 x_4 (x_4^2 + c x_1 x_3)(x_3^2 + a x_2 x_4) + A_{22} a^2 x_4^2 (x_3^2 + a x_2 x_4)^2 + \\
+ 2 A_{13} c x_4 (x_4^2 + c x_1 x_3)[x_3^2 x_4 + a x_2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4 - a c x_1 x_2 x_3] + \\
+ 2 A_{24} a x_3 (x_3^2 + a x_2 x_4)[x_3 x_4^2 + c x_1 x_4^2 + c^2 x_1^2 x_3 - a c x_1 x_2 x_4] - \\
- 2 A_{34} [x_3^2 x_4 + a x_2 x_3^2 + a^2 x_2^2 x_4 - a c x_1 x_2 x_3][x_3 x_4^2 + c x_1 x_4^2 + c^2 x_1^2 x_3 - a c x_1 x_2 x_4] = 0 .
\end{gathered}
$$

Su questa si verifica subito che F ha una retta doppia in a, un'altra in b, due rette doppie infinitamente vicine (fra di loro sghembe) in d e una cubica gobba doppia in C^3.

Di più risulta che il piano osculatore ad F in un punto (uniplanare) di d (o piano tacnodale) è rappresentato dall'equazione

$$
a\, x_4 - c\, \varrho\, x_3 = 0
$$

se $\varrho \left(= \frac{x_1}{x_2} \right)$ è la coordinata (sopra 12) del considerato punto di d, mentre il piano ivi tangente a Q è rappresentato dall'equazione:

$$
a\, x_4 + c\, \varrho\, x_3 = 0 .
$$

Segue che *i due piani sono separati armonicamente dai piani da e db.*

36. Nei due numeri precedenti si è tacitamente supposto che i due punti A e B fossero distinti: qui vogliamo far l'ipotesi che C^3 tocchi d in un punto A, per modo che la linea doppia della superficie F si riduca alla cubica C^3 e a quattro rette coincidenti tutte con d.

In tal caso è chiaro che le rigate cubiche Φ debbono avere in ogni punto di d almeno un piano osculatore comune; quindi non possono essere rigate cubiche generali, poichè se ciò fosse esse non potrebbero avere che entrambi i piani osculatori comuni, e di questi *uno* dovrebbe essere (per ogni punto di d) il piano ivi tangente alla quadrica Q e per conseguenza descriverebbe un fascio proiettivo alla punteggiata descritta dal suo punto di contatto. Ma questo è assurdo, dunque le rigate Φ sono rigate cubiche di Cayley e (non potendo avere in ogni punto di d il piano osculatore mobile comune, perchè altrimenti la loro ulteriore intersezione si spezzerebbe in generatrici) hanno il piano osculatore fisso comune. Detto ω questo piano, è chiaro inoltre che entro il fascio delle Φ esiste una superficie spezzata in ω e in un cono quadrico K, col vertice in A, tangente ad ω lungo la retta d; e che i due piani dell'inviluppo Ψ uscenti da d coincidono col piano ω.

37. Ciò posto, per trovare l'equazione di F, prendiamo il vertice 1 del tetraedro fondamentale nel punto A, il vertice 3 in un punto generico di C^3, il piano 124 nel piano ω, il piano 134 nel piano tangente a K lungo 13, la retta 12 nella retta d e infine la retta 23 nella ulteriore retta di Q situata nel piano che congiunge d col punto 3; retta, che è certamente distinta dalla 13.

Disponendo allora del punto unità si può fare in modo che l'equazione di K risulti della forma:

$$x_2 x_3 + x_4^2 = 0\,,$$

e quindi l'equazione del fascio delle superficie Φ sarà del tipo:

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} & x_3(a\,x_3 + b\,x_4)\,x_1 + x_3(c\,x_3 + d\,x_4)\,x_2 + \\ & + f\,x_3^2 x_4 + g\,x_3 x_4^2 + h\,x_4^3 + \lambda\,x_3(x_2 x_3 + x_4^2) = 0 \end{aligned}\right.$$

dove λ è il parametro variabile.

Le equazioni *parametriche* della C^3, che insieme con la retta d contata sei volte costituisce la linea base del fascio delle Φ, risultano:

$$(48)\qquad \begin{cases} x_1 = f\varrho^2 + (g-c)\varrho + h - d \\ x_2 = a\varrho + b \\ x_3 = -\varrho^2(a\varrho + b) \\ x_4 = -\varrho\,(a\varrho + b). \end{cases}$$

Quindi, se noi vogliamo che C^3 tocchi la retta 12 nel punto $1 \equiv A$, occorre che si faccia $b = 0$. Con ciò la (47) e le (48) divengono, rispettivamente,

$$(49)\qquad \begin{cases} a\,x_3^2 x_1 + x_3(c\,x_3 + d\,x_4)\,x_2 + f\,x_3^2 x_4 + g\,x_3 x_4^2 + \\ \qquad + h\,x_4^3 + \lambda\,x_3(x_2 x_3 + x_4^2) = 0 \end{cases}$$

e

$$(50)\quad x_1 = f\varrho^2 + (g-c)\varrho + h - d;\; x_2 = a\varrho;\; x_3 = -a\varrho^3;\; x_4 = -a\varrho^2.$$

Tenendo conto delle (50) e delle ipotesi fatte sul tetraedro di riferimento, si vede che l'equazione della quadrica Q è data da

$$(51)\qquad a\,x_1 x_3 + (d-h)\,x_2 x_4 + f\,x_3 x_4 + (g-c)\,x_4^2 = 0;$$

quindi la retta l (diversa da d) comune alla superficie Φ rappresentata dalla (49) e alla quadrica Q è quella rappresentata dalle due equazioni:

$$(52)\qquad \begin{cases} (c+\lambda)\,x_3 + h\,x_4 = 0 \\ -a\,h\,x_1 + (d-h)(c+\lambda)\,x_2 + [(g-c)(c+\lambda) - f\,h]\,x_4 = 0. \end{cases}$$

Segue, indicando con σ e τ due parametri omogenei, che le coordinate di un piano generico per la retta l sono fornite dalle eguaglianze:

$$(53)\quad \begin{cases} \xi_1 = -a h \tau; \quad \xi_2 = (d-h)(c+\lambda)\tau; \quad \xi_3 = (c+\lambda)\sigma \\ \xi_4 = h\sigma + [(g-c)(c+\lambda) - fh]\tau . \end{cases}$$

Ora supponiamo che l'equazione tangenziale di una quadrica diversa da Q e inscritta in Ψ sia del tipo

$$(54)\begin{cases} A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + \\ \qquad + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + A_{44}\xi_4^2 = 0 ; \end{cases}$$

potremo dire allora che l'equazione di F (superficie che noi supponiamo esistente) si otterrà eliminando λ, σ e τ fra le equazioni:

$$(55)\begin{cases} ax_3^2x_1 + x_3(cx_3+dx_4)x_2 + fx_3^2x_4 + gx_3x_4^2 + hx_4^3 + \lambda x_3(x_2x_3 + x_4^2) = 0 \\ -ah\tau x_1 + (d-h)(c+\lambda)\tau x_2 + (c+\lambda)\sigma x_3 + [h\sigma + [(g-c)(c+\lambda) - fh]\tau]x_4 = 0 \\ A_{11}a^2h^2\tau^2 - 2A_{13}ah(d-h)(c+\lambda)\tau^2 - 2A_{13}ah(c+\lambda)\sigma\tau - \ldots = 0, \end{cases}$$

dove, al solito, l'ultima delle (55) si ottiene dalla (54) facendovi le sostituzioni indicate dalle (53).

La prima delle (55) porge:

$$\lambda = -\frac{a x_3^2 x_1 + x_3(cx_3 + dx_4)x_2 + fx_3^2x_4 + gx_3x_4^2 + hx_4^3}{x_3(x_2x_3 + x_4^2)}$$

e la seconda, sostituito per λ questo valore e fatte le riduzioni,

$$\frac{\sigma}{\tau} = -\frac{h x_4^2 + d x_2 x_3 + (g-c) x_3 x_4}{x_3^2} ;$$

dunque il risultato dell'eliminazione, posto per brevità

$$P = a x_3^2 x_1 + x_3(c x_3 + d x_4) x_2 + f x_3^2 x_4 + g x_3 x_4^2 + h x_4^3$$

$$Q = x_3 R = x_3(x_2x_3 + x_4^2)$$

$$T = h x_4^2 + d x_2 x_3 + (g-c) x_3 x_4 ,$$

è dato da:

$$(56)\quad \begin{cases} A_{11}\, a^2\, h^2\, R^2\, x_3^4 - 2A_{12}\, a\, h\, (d-h)\,(c\,Q - P)\, R\, x_3^3 + \\ \qquad + 2A_{13}\, a\, h\, (c\,Q - P)\, R\, T\, x_3 + 2A_{14}\, a\, h^2\, R^2\, T\, x_3^2 - \\ - 2A_{14}\, a\, h\, [(g-c)\,(c\,Q-P) - f\,h\,Q]\, R\, x_3^3 + \\ \qquad + A_{22}\,(d-h)^2\,(c\,Q-P)^2\, x_3^2 - 2A_{23}\,(d-h)\,(c\,Q-P)^2\, T - \\ - 2A_{24}\, h\,(d-h)\,(c\,Q-P)\, T\, R\, x_3 + \\ \qquad + 2A_{24}\,(d-h)\,(c\,Q-P)\,[(g-c)\,(c\,Q-P) - f\,h\,Q]\, x_3^2 + \\ \quad + A_{44}\, h^2\, R^2\, T^2 - \\ - 2A_{44}\, h\,[(g-c)\,(c\,Q-P) - f\,h\,Q]\, R\, T\, x_3 + \\ \qquad + A_{44}\,[(g-c)\,(c\,Q-P) - f\,h\,Q]^2\, x_3^2 = 0\,. \end{cases}$$

Finchè le A_{ik} sono generiche, questa equazione rappresenta una superficie dell'8^0 ordine (ciò che una facile applicazione del principio di corrispondenza di CHASLES rende evidente *a priori*); quindi se noi vogliamo supporre che essa sia l'equazione della nostra superficie F bisognerà determinare i coefficienti A_{ik} per modo che dal primo membro di questa equazione si stacchi un fattore quadratico, e precisamente il fattore x_3^2 (1).

Fatti i calcoli, si trova che per ciò è necessario e sufficiente che sia:

$$(57)\quad \begin{cases} A_{44}\, h^4 - 2A_{23}\, h^3\,(d-h) = 0 \\ -2A_{13} a h^3 - 6A_{23} h^3 (d-h)\,(g-c) + 2A_{24} h^3 (d-h) + 4A_{44} h^3 (g-c) = 0 \\ -6A_{23}\, d\, h^2\,(d-h) + 2A_{44}\, d\, h^3 + 2A_{44}\, h^4 = 0\,. \end{cases}$$

Ora h è diverso da zero, perchè altrimenti le superficie Φ non sarebbero irriducibili; A_{44} non si può supporre nullo, perchè altrimenti l'inviluppo Ψ si spezzerebbe nel fascio di piani di asse 12 e in un residuo inviluppo di 3^a classe (*razionale*), dunque in virtù

(1) È infatti evidente *a priori* che tale fattore quadratico non può essere se non che x_3^2.

dell'ultima delle (57) deve essere anche $d \neq 0$, e allora con facile discussione si vede che deve essere:

$$d = 2h\,, \quad A_{44} = 2A_{23}\,, \quad A_{13}\, a - A_{23}\,(g-c) - A_{24}\, h = 0 \text{ [1]}.$$

Ciò porta che l'equazione del fascio delle superficie Φ, le equazioni parametriche della C^3 e l'equazione della superficie F sono date ordinatamente da:

$$(58) \quad \begin{cases} a x_3^2 x_1 + x_3(c x_3 + 2h x_4)\, x_2 + f x_3^2 x_4 + g x_3 x_4^2 + h x_4^3 + \\ \qquad + \lambda\, x_3\,(x_2 x_3 + x_4^2) = 0 \end{cases}$$

$$(59) \quad x_1 = f\varrho^2 + (g-c)\,\varrho - h\,; \; x_2 = a\varrho\,; \; x_3 = -a\varrho^3\,; \; x_4 = -a\varrho^2\,;$$

e infine:

$$(60) \quad \begin{cases} A_{11}a^2h^2R^2x_3^2 - 2A_{12}ah^2(cQ-P)Rx_3 + A_{22}h^2(cQ-P)^2 + \\ + 2A_{14}ahR\{a(g-c)x_3^3x_1 + 2h^2x_3^2x_2^2 + h[fx_3^2 + 3(g-c)x_3x_4 + 3hx_4^2]x_2x_3 + \\ + fx_3^2x_4[hx_4 + (g-c)x_3] + x_4^2[hx_4 + (g-c)x_3]^2\} + \\ + 2A_{24}h(cQ-P)\,[(g-c)\,(cQ-P) - fhQ] + 2A_{23}\,\{[(g-c)\,(cQ-P) - fhQ]^2 + \\ + 2h^2fR^2T - hT[a^2x_3^2x_1^2 - \\ - [a(g-c)x_3^2x_2 - 4ahx_3x_4x_2 - 2afx_3^2x_4 - a(g-c)x_3x_4^2 - 2ahx_4^3]x_1 - 2h^2x_3x_2^3 - \\ - h[3(g-c)x_3 + hx_4]x_4x_2^2 + [4hf - (g-c)^2]x_3x_4^2x_2 - \\ - f(g-c)x_3^2x_4x_2 - h(g-c)x_4^3x_2 + f^2x_3^2x_4^2 + f(g-c)x_3x_4^3 + 2hfx_4^4]\} = 0 \end{cases}$$

[1] L'equazione tangenziale della quadrica Q è:

$$-f(d-h)\,\xi_1\,\xi_2 + (d-h)^2\,\xi_1\,\xi_3 - a\,(g-c)\,\xi_2^2 + a\,(d-h)\,\xi_2\,\xi_4 = 0\,,$$

quindi, allorchè $d = 2h$, essa soddisfa (come bisognava aspettarsi) alle condizioni espresse dalle eguaglianze:

$$A_{44} = 2A_{23}\,, \quad A_{13}\, a - A_{23}\,(g-c) - A_{24}\, h = 0\,.$$

dove, adesso,

$$P = a\,x_3^2 x_1 + x_3(c\,x_3 + 2\,h\,x_4)x_2 + f\,x_3^2 x_4 + g\,x_3 x_4^2 + h\,x_4^3$$

e

$$T = h\,x_4^2 + 2h\,x_2 x_3 + (g - c)\,x_3 x_4\,.$$

38. Nei n. precedenti si è sempre supposto che la cubica C^3 sia irriducibile, ma non vi è nessuna difficoltà a vedere quali modificazioni subiscano i ragionamenti fatti nell'ipotesi che la curva C^3 si spezzi.

Noi non vogliamo per ora intrattenerci sui vari casi speciali che possono presentarsi per questa particolarizzazione della linea doppia; piuttosto ci fermeremo a far osservare un caso particolare notevolissimo della superficie studiata al n. 32, nel quale, però, la linea doppia è sempre costituita da due rette tacnodali e da una cubica gobba.

La detta superficie F contiene una sola conica spezzata in due rette (1) e queste due rette sono in generale distinte; ma può accadere che le due rette coincidano in un'unica retta semplice per F. La cosa potrebbe vedersi analiticamente, ma preferiamo dimostrare in altro modo l'esistenza di codesta superficie particolare, perchè così ne troveremo una semplice definizione proiettiva.

Suppongasi dunque che esista una superficie F di 2ª specie (del 6º ordine con le coniche nei piani di una sviluppabile di 4ª classe) una cui conica si spezzi in una retta g contata due volte, semplice per F. Allora, sopra ogni sezione piana, una delle 4 coincidenze dell'involuzione che vi è segnata dalle coniche di F è data dalla traccia di g, quindi soltanto tre coniche irriducibili di F risultano tangenti a un piano generico. In questo modo ad ogni piano dello spazio vien coordinata una terna di coniche di F.

Ora supponiamo se è possibile che, inversamente, ad ogni terna di coniche generiche di F corrisponda nel modo che si è detto un certo numero (finito) di piani dello spazio. In tal caso la varietà ∞^3 delle terne di coniche di F verrebbe ad essere riferita biunivocamente ai gruppi di una involuzione nello spazio di piani e alla ∞^1

(1) L'applicazione di formule notissime di geometria numerativa darebbe veramente il valor 2 per il numero delle coniche spezzate; ma nel caso della superficie del n. 32 le due coniche spezzate si riducono a una da contarsi due volte.

ellittica delle g_1^2 esistenti nella ∞^1 ellittica delle coniche di F verrebbe a corrispondere nello spazio di piani una ∞^1 di superficie-inviluppo la quale da una parte sarebbe ellittica e dall'altra godrebbe della proprietà che una sola sua superficie risulterebbe tangente a un piano generico. Ma ciò è assurdo, dunque l'ipotesi fatta deve essere respinta.

Segue che tutti i piani (in numero finito) che toccano tre coniche generali di F le toccano tutte, quindi le coniche di F considerate come inviluppi quadrici specializzati appartengono a un medesimo tessuto. Un tale tessuto è, naturalmente, affatto speciale; e infatti esso contiene una schiera di quadriche tutte specializzate (costituite dalle coniche che vengon staccate su un cono di 2^0 ordine dai piani passanti per una sua tangente).

Viceversa si può dimostrare (ma noi non vogliamo fermarci su ciò) che preso un tessuto di quadriche il quale contenga una siffatta schiera di quadriche tutte specializzate, il luogo delle sue rimanenti ∞^1 coniche, considerate come coniche-luogo, è una superficie di 2^a specie che rientra fra quelle studiate al n. 32.

39. Nel n. 29 di questo 3^0 capitolo fu fatta l'ipotesi che le superficie Φ fossero generalmente irriducibili; ci resta adunque da discutere il caso in cui il fascio delle superficie Φ sia un fascio di superficie tutte spezzate.

Per questo si incominci dall'osservare che se le superficie Φ sono tutte riducibili lo spezzamento non può avvenire nè nelle terne di piani di un fascio involutorio di 1^a specie e del 3^0 ordine, nè in una quadrica fissa e in un piano variabile in un fascio, poichè altrimenti le coniche di F non sarebbero situate nei piani di una sviluppabile ellittica di 4^a classe; quindi le superficie Φ si spezzeranno in un piano fisso ω e poi in una quadrica variabile in un fascio e generalmente irriducibile.

Si consideri in secondo luogo che il ragionamento fatto già al n. 29 non può ripetersi integralmente per l'ipotesi presente; pure nei suoi tratti essenziali resta immutato. Così avremo sempre un sistema lineare di superficie del 6^0 ordine e di 2^a specie aventi in comune il fascio delle superficie cubiche (sub-) aggiunte, e questo staccherà, fuori delle linee multiple, sopra ogni quadrica costituente con ω una superficie Φ, un sistema lineare di quartiche spezzate in coppie di coniche di un fascio; di più al sistema di queste quartiche apparterrà, contata due volte, la sezione della quadrica considerata col piano ω. Segue che ω contiene tutti gli assi di Ψ, secondo cui si tagliano le coppie di piani contenenti le coppie di coniche di F che costituiscono le aggiunte alle sezioni piane di F, e quindi ω è il piano di una delle quattro coniche inscritte in Ψ e la serie di rette, Σ, di cui si parlava nei n. precedenti, diventa qui la serie delle tangenti alla conica di ω inscritta in Ψ.

Si vede inoltre che la superficie F può considerarsi come generata nel seguente modo. Si prendano un fascio di quadriche e una sviluppabile di 4ª classe Ψ; poi si stabilisca una corrispondenza proiettiva fra le quadriche del fascio e le coppie di piani di Ψ (costituenti una g_2^1 entro la ∞^1 dei piani di Ψ) che si intersecano secondo le tangenti di una, prefissata, delle quattro coniche inscritte in Ψ: allora F è il luogo delle coniche secondo cui i piani di Ψ tagliano le corrispondenti quadriche del fascio.

Ma, al solito, ricorrendo al principio di corrispondenza di Chasles, si vede subito che due forme riferite proiettivamente nel modo che ora si è detto generano, finchè non si verifichino delle particolarità speciali, una superficie del 10^0 ordine con una linea quadrupla nella linea base del fascio di quadriche, dunque nel caso nostro vi deve esser qualche piano di Ψ che si stacca dalla quadrica corrispondente, e quindi nel fascio di quadriche ve n'è almeno una spezzata in due piani, α e β.

Dico ora che la quadrica generica del fascio costituente con ω il fascio delle superficie Φ non può tagliare quella spezzata nei due piani α e β in coniche (fisse) irriducibili. E infatti, supponiamo, per es., che k sia l'intersezione della quadrica con α e supponiamo che k sia irriducibile. Da ogni punto di k usciranno, oltre α, *altri tre* piani della sviluppabile Ψ e le intersezioni di questi tre piani colle quadriche corrispondenti saranno tre coniche di F uscenti da quel punto di k. Ma allora k sarebbe una conica tripla per la superficie F, e questo è assurdo; poichè ω non taglia F che in linee multiple e quindi, atteso che α non può certo coincidere con ω [1], la sezione piana generica di F sarebbe certo di genere inferiore a 3.

Si conclude che la linea base del nostro fascio di quadriche si spezza in rette: poi, perchè ciascuna di queste rette non risulti quadrupla o tripla per F, bisogna che per ognuna di esse passino due piani della sviluppabile Ψ, dei quali ciascuno si distacchi dalla quadrica corrispondente.

[1] Se α, che è un piano di Ψ, coincidesse con ω, ω sarebbe un piano doppio per Ψ e Ψ risulterebbe razionale.

Ora o il fascio delle quadriche è un fascio di coni, e allora è un fascio di coni aventi tutti lo stesso vertice; o no, e allora vi sono almeno due rette basi distinte e più di due piani di Ψ che si distaccano dalle quadriche corrispondenti. Ciò porta che in questa seconda alternativa (che come ora vedremo deve esser respinta) vi sono due quadriche spezzate in coppie di piani e se diciamo α, β i piani della prima coppia e γ, δ quelli della seconda, poichè non si tratta di un fascio di coni, α e β al pari di γ e δ, saranno necessariamente distinti e di più le rette $\alpha\,\beta$ e $\gamma\,\delta$ saranno sghembe. D'altra parte le quadriche del fascio spezzate in (α, β) e (γ, δ) hanno per corrispondenti nella g_2^1 esistente in Ψ precisamente le coppie di piani α, β e γ, δ, dunque le rette $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$ debbono giacere in ω.

L'assurdo cui si perviene dimostra che l'unica alternativa possibile è quella che consiste nel supporre il fascio delle superficie Φ spezzato in ω e in un fascio di coni quadrici irriducibili col vertice comune O.

Notisi che il punto O risulta quadruplo per F, poichè ognuno dei coni quadrici in discorso taglia F, fuori delle quattro generatrici appartenenti alla linea doppia di F, soltanto in due coniche e quindi ogni retta uscente da O incontra ulteriormente F soltanto in due punti.

Naturalmente il punto O giace su ω e i due assi di Ψ appartenenti al fascio (O, ω) sono le rette in cui si intersecano le coppie di piani che appartengono a Ψ e nel tempo stesso costituiscono due coni del fascio dei coni col vertice in O.

Quanto alla linea doppia di F essa è completata da una cubica razionale situata in ω, avente il punto doppio in O e le relative tangenti nodali nei due assi di Ψ, appartenenti al fascio (O, ω), sopra considerati.

Tale asserzione si giustifica subito per via geometrica; ma crediamo inutile insistervi perchè tutte le particolarità della nuova classe di superficie di 2ª specie qui incontrate potranno leggersi nell'equazione che ora passiamo a scriverne.

40. Per questo immaginiamo di prendere il punto O come vertice 2 del tetraedro fondamentale, come rette 23 e 24 gli assi di Ψ appartenenti al fascio (O, ω), come retta 34 un altro asse generico di Ψ situato in ω; poi siano

$$(61) \qquad x_3(x_1 - x_3) = 0 \quad \text{e} \quad x_4(x_1 - x_4) = 0$$

le equazioni complessive delle coppie di piani di Ψ (che qui supponiamo distinti) passanti per 24 e 23 rispettivamente.

L'equazione tangenziale nel piano 234 della conica K inviluppata dagli assi di Ψ sarà allora del tipo:

$$a_2 \xi_3 \xi_4 + a_3 \xi_4 \xi_2 + a_4 \xi_2 \xi_3 = 0 \tag{62}$$

o, sotto forma parametrica,

$$\begin{cases} \xi_2 = a_2 \lambda \mu \\ \xi_3 = a_4 \mu^2 - a_3 \lambda \mu \\ \xi_4 = a_3 \lambda^2 - a_4 \lambda \mu ; \end{cases} \tag{63}$$

e l'equazione del fascio di coni quadrici col vertice in O sarà:

$$\varrho_0 x_3 (x_1 - x_3) + \varrho_1 x_4 (x_1 - x_4) = 0 .$$

La corrispondenza proiettiva individuata tra i coni di questo fascio e le tangenti della conica K dicendo omologhi uno di quei coni e una di queste tangenti, allorchè il cono contiene le due coniche di F i cui piani passano per la tangente, sarà rappresentata, indicando con k una costante, da un'equazione del tipo:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = - k \frac{\lambda}{\mu} ,$$

quindi l'equazione del cono corrispondente alla tangente di K avente per parametro $\dfrac{\lambda}{\mu}$ sarà data da:

$$\mu x_3 (x_1 - x_3) - k \lambda x_4 (x_1 - x_4) = 0 .$$

L'equazione (62), quando vi si riguardino le ξ_i come coordinate di piano, è, nello spazio, l'equazione di K riguardata come una quadrica inviluppo specializzata, quindi per individuare Ψ basta aggregare alla (62) l'equazione di un'altra quadrica inviluppo che lo contiene. Notando che Ψ contiene i piani:

$$x_3 = 0 , \quad x_4 = 0 , \quad x_1 - x_3 = 0 , \quad x_1 - x_4 = 0$$

si vede che una tale equazione sarà del seguente tipo:

$$2A_{13}\,\xi_1\,(\xi_1+\xi_3+\xi_4)+2A_{12}\,\xi_1\,\xi_2+A_{22}\,\xi_2^2+2A_{23}\,\xi_2\,\xi_3+$$
$$+2A_{24}\,\xi_2\,\xi_4+2A_{34}\,\xi_3\,\xi_4=0\,,$$

dove, disponendo opportunamente della retta 34 e del piano 134 si potrebbe, volendo, supporre nullo il coefficiente A_{22}.

Le coordinate del piano generico passante per la retta rappresentata dalle (63) sono, indicando con σ e τ dei parametri variabili:

$$\xi_1=\sigma\,,\quad \xi_2=a_2\,\lambda\,\mu\,\tau\,,\quad \xi_3=(a_4\,\mu-a_3\,\lambda)\,\mu\,\tau\,,\quad \xi_4=(a_3\,\lambda-a_4\,\mu)\,\lambda\,\tau\,,$$

quindi, al solito, l'equazione di F si otterrà eliminando λ, μ, σ e τ fra le seguenti equazioni:

$$\sigma x_1+a_2\,\lambda\,\mu\,\tau\,x_2+(a_4\,\mu-a_2\,\lambda)\,\mu\,\tau\,x_3+(a_3\,\lambda-a_4\,\mu)\,\lambda\,\tau\,x_4=0$$

$$\mu x_3\,(x_1-x_3)-k\,\lambda\,x_4\,(x_1-x_4)=0$$

$$2A_{13}\,[\sigma+(a_4\,\mu-a_3\,\lambda)\,\mu\,\tau+(a_3\,\lambda-a_4\,\mu)\,\lambda\,\tau]\,\sigma+2A_{12}\,a_2\,\lambda\,\mu\,\sigma\,\tau+$$
$$+[A_{22}\,a_2^2\,\lambda^2\,\mu^2+2A_{23}\,a_2\,(a_4\,\mu-a_3\,\lambda)\,\lambda\,\mu^2+$$
$$+2A_{24}\,a_2\,(a_3\,\lambda-a_4\,\mu)\,\lambda^2\,\mu-2A_{34}\,(a_3\,\lambda-a_4\mu)^2\,\lambda\,\mu\,\tau^2=0.$$

L'equazione della F a cui così si perviene [tralasciando naturalmente il fattore estraneo $x_3\,x_4\,(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)$] è la seguente:

$$2A_{13}\,k^2\,x_3\,x_4\,(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)\,(-a_2\,x_2+a_3\,x_3+a_4\,x_4)^2-$$
$$-4A_{13}k(-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)\,x_3x_4\,[a_4k^2x_4\,(x_1-x_4)^2+a_3x_3(x_1-x_3)^2]+$$
$$+2k^2[A_{12}a_2-A_{13}\,(a_3+a_4)](-a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_4)x_1x_3x_4-$$
$$-2k[A_{12}\,a_2-A_{13}(a_3+a_4)][a_4k^2x_4(x_1-x_4)^2+a_3x_3(x_1-x_3)^2]x_1x_3x_4+$$
$$+2A_{13}k[k^2a_4\,x_4^2(x_1-x_4)^2+a_3\,x_3^2(x_1-x_3)^2](-a_2\,x_2+a_3\,x_3+a_4\,x_4)\,x_1+$$
$$+A_{22}k^2a_2^2\,(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)\,x_1^2\,x_3x_4+$$
$$+2A_{23}k^2a_2[ka_4\,x_4(x_1-x_4)-a_3\,x_3(x_1-x_3)](x_1-x_4)\,x_1^2\,x_4+$$
$$+2A_{24}ka_2[a_3\,x_3(x_1-x_3)-ka_4\,x_4(x_1-x_4)]x_1^2x_3-$$
$$-2A_{34}k[a_4\,x_4(x_1-x_4)-a_3\,x_3(x_1-x_3)]^2\,x_1^2-$$
$$-2A_{13}[a_4k^2x_4(x_1-x_4)^2+a_3\,x_3(x_1-x_3)^2][a_4\,k^2x_4^2(x_1-x_4)+a_3\,x_3^2(x_1-x_3)]=0\,.$$

Risulta di qui che l'intersezione di F col piano ω, ossia col piano $x_1 = 0$, è rappresentata, *in questo piano*, dall'equazione:

$$k^2 x_3^2 x_4^2 (- a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^2 -$$

$$- 2 k x_3 x_4 (-a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)(a_4 k^2 x_4^3 + a_3 x_3^3) + (a_4 k^2 x_4^3 + a_3 x_3^2)^2 = 0$$

o, ciò che fa lo stesso, da:

$$[k x_3 x_4 (- a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) - (a_4 k^2 x_4^3 + a_3 x_3^3)]^2 = 0 \, .$$

Ma allora è dimostrato che la parte della linea doppia di F situata in ω è una cubica razionale col nodo in O e le tangenti nodali negli assi di Ψ appartenenti al fascio (O, ω).

41. Il tipo di superficie di 2ª specie studiato nei n. 35 e 36 non può presentare altro caso particolare che quello in cui *una* delle coppie di piani di Ψ formanti un cono degenere del fascio di coni O risulta di due piani coincidenti, poichè se entrambe le coppie in discorso di piani di Ψ risultassero di piani coincidenti, allora il fascio di coni O diventerebbe un fascio riducibile.

Non ci fermiamo a scrivere l'equazione di una superficie che presenti la particolarità suddetta, perchè la cosa ormai non offrirebbe nessuna difficoltà. Così neppure ci fermiamo a considerare il caso particolare in cui i due assi di Ψ appartenenti al fascio (O, ω) vengono a coincidere, cioè il caso in cui il punto O appartiene alla conica inscritta in Ψ e situata su ω; questo sarà fatto più opportunamente altrove.

42. *Ipotesi b*).

E ora, passando alla discussione dell'ipotesi b), supponiamo che le coniche di F siano situate una per una nei piani tangenti di un cono di 3ª classe (e del 6º ordine) col vertice V.

La g_2^1 formata nella ∞^1 delle coniche di F dalle coppie di coniche costituenti le quartiche aggiunte alle sezioni piane si rispecchia qui in una g_2^1 fra i piani del cono V; per conseguenza esiste un piano di V (che diremo ω) tale che i piani delle coppie di coniche in discorso sono le coppie degli ulteriori piani di V uscenti dalle singole rette del fascio (V, ω).

Ciò posto, facciamo inoltre l'ipotesi che le superficie cubiche Φ aggiunte ad F siano irriducibili. Allora ognuna delle superficie

Φ contiene due coniche di F i cui piani si tagliano in una retta del fascio (V, ω); ma un ragionamento analogo ad altro già fatto conduce a concludere che questa retta sta sulla relativa superficie Φ; dunque:

Il piano ω taglia il fascio delle superficie Φ in un fascio di cubiche spezzate in una conica fissa k^2 e nei raggi del fascio (V, ω).

43. Dico ora che *la conica k^2 è costituita da una retta r contata due volte e che r è doppia per F.*

Infatti, supponiamo, se è possibile, che k^2 sia una conica irriducibile, oppure una coppia di retta distinte. Il piano ω, in quanto appartiene al cono V, deve contenere una conica di F e tale conica non può essere che k^2; dunque k^2 è una parte della linea base del fascio delle Φ situata su F. Segue che k^2 è almeno doppia per F e anzi precisamente doppia, perchè altrimenti il piano ω si staccherebbe da tutte le superficie Φ.

Sia allora C^2 la conica che rappresenta la residua intersezione del piano ω con la superficie F, e facciamo vedere che si arriva a un assurdo tanto se si suppone che C^2 sia diversa da k^2, quanto se si suppone che C^2 coincida con k^2.

Infatti, nel primo caso, C^2 non appartiene al fascio delle coniche di F, quindi da ogni suo punto (o almeno da ogni punto della sua retta non appartenente a k^2 nell'ipotesi che C^2 e k^2 abbiano una retta comune) esce qualche conica di F; ma la ∞^1 delle coniche di F è ellittica, dunque da ogni tal punto escono almeno due coniche di F e C^2 (o la considerata parte di C^2) è doppia per F, ed appartiene a tutte le superficie Φ; il che è manifestamente assurdo.

Nel secondo caso, invece, C^2 appartiene al fascio delle coniche di F, e ogni retta del fascio (V, ω) non taglia F fuori di C^2; quindi da ogni punto di C^2 escono due coniche di F diverse da C^2. Si conclude che C^2 è tripla per F e per conseguenza anche in questo caso si perviene ad un assurdo.

Non resta adunque se non supporre, come si era affermato, che k^2 si spezzi in una retta r contata due volte e che in r si abbia una retta doppia di F; e precisamente *una* retta doppia, non due rette doppie infinitamente vicine situate in ω.

44. Ora si osservi che staccata dalla linea base delle superficie Φ la parte che è doppia per la superficie F resta una linea del

2^0 ordine (di cui già fa parte la retta r (¹)) che sopra ogni superficie Φ deve costituire, contata due volte, una quartica spezzata in due coniche del fascio cui appartengono le due coniche di F situate sulla superficie Φ presa a considerare; dunque le superficie Φ passano tutte per una retta s (non appartenente ad F) uscente da V e tale che ogni superficie Φ è toccata lungo s dal piano che congiunge s alla relativa retta del fascio (V, ω) (²).

Ciò posto, analogamente a quanto è stato fatto nei casi precedenti, si consideri la F come generata dal fascio delle Φ e dall'insieme dei piani di V riferiti in una conveniente corrispondenza $(1, 2)$; allora, applicando il principio di corrispondenza di CHASLES, si conclude che deve esservi almeno un piano di V che fa parte della superficie Φ contenente la conica di F che ad esso appartiene.

Sia α un tal piano di V.

Poichè α fa parte di una superficie Φ, il fascio delle Φ taglia α in una cubica fissa (per modo che α è senz'altro diverso da ω) e di questa cubica ogni parte che sia distinta da s deve essere doppia per F; dunque si conclude facilmente che α passa per s e taglia

(¹) Si badi che r è semplice per le superficie Φ; poichè se le Φ fossero rigate cubiche con la direttrice doppia r da ogni punto di r escirebbero due coniche irriducibili di F ed r sarebbe tripla per F.

(²) È bene osservare che r non può passare per V. Si consideri infatti che la linea doppia di F non può spezzarsi tutta in rette uscenti da V (altrimenti esisterebbe una rete di coni cubici sub-aggiunti ad F); quindi ne esiste certo almeno una parte irriducibile l che non si riduce a una retta uscente da V. Ciò posto, se r passasse per V il punto V sarebbe non soltanto doppio per F ma (come si vede considerando una retta generica per V e i tre piani del cono che la contengono con le relative coniche di F) addirittura triplo; quindi una retta che congiungesse V con un punto T di l diverso da V segherebbe F in un sol punto (semplice) ulteriore T', e delle tre coniche situate nei piani per VT (coniche che escono tutte dal punto V) due passerebbero per T e una per T' (naturalmente, non si esclude che T' possa divenire infinitamente prossimo a V). Di qua, si trae facilmente che T' descriverebbe, al variar di T su l, una curva ellittica (che potrebbe anche raccogliersi nell'intorno di V); per conseguenza anche l sarebbe una curva ellittica. Ciò porta che o l è piana ed ha almeno l'ordine 3; o è gobba ed ha almeno l'ordine 4; ma l'una e l'altra ipotesi si dimostrano assurde con considerazioni semplicissime. Per la prima basta infatti (dopo aver osservato che se l è piana non sta in un piano per V) secare F coi piani del fascio di asse r; per la seconda, basta considerare che l, dovendo esser distinta da r e dalle ulteriori parti della linea doppia situate nei piani di V che si staccano dalle relative superficie Φ (cfr. col seguito nel testo), ha l'ordine < 6 quindi l non sta sul cono V (che è del 6^0 ordine) e da ogni suo punto partono tre piani tangenti distinti di V. Ma allora l sarebbe tripla per F, quindi, ecc.

F nella conica l^2 che gli compete e in una rimanente linea del 2° ordine h^2 doppia per F.

Se nel piano α si conduce per V una retta generica t, per t passano due piani ulteriori di V che contengono due coniche di F; d'altra parte t non taglia F fuori di h^2 ed l^2; dunque t taglia h^2 in due punti nei quali si intersecano due coniche di F (1).

Segue che dei quattro punti comuni ad h^2 ed l^2 due sono i punti ove h^2 è tagliata dalla generatrice secondo cui α tocca il cono V (e per ognuno di questi due una delle coniche di F passanti per esso è data da l^2) e due invece sono i punti di h^2 pei quali oltre l^2 passano altre due coniche di F.

Se diciamo A e B questi ultimi due punti è chiaro che F ha in A e B due punti tripli. Ma allora A e B sono tripli altresì per la linea doppia di F e la quartica che insieme con r e k^2 compie una siffatta linea doppia deve avere due punti doppi in A e B. Segue che essa si spezza in due coniche situate in due piani β e γ passanti per la retta AB (2); e i piani β e γ, secando ulteriormente F in coniche, appartengono al cono V. Di qui si trae che β e γ si staccano ciascuno da una superficie Φ aggiunta ad F e che le superficie Φ tagliano in cubiche fisse tanto β quanto γ; per conseguenza β e γ passano per s e la retta AB non è altra cosa che s.

Le tre coniche doppie di F situate in α, β, γ non possono essere tutte irriducibili, perchè altrimenti un piano variabile intorno ad r staccherebbe da F un fascio lineare di quartiche razionali; quindi, almeno una di esse si spezza in due rette m, n incrociate su r (vedi l'osservazione contenuta nella penultima nota di questo n.). Ma allora osservando che il piano rm non può tagliare F in una ulteriore conica semplice (perchè sarebbe unisecata dalle coniche di F, in quanto rm *non* appartiene al cono V) si conclude che un tal piano deve contenere una terza retta doppia p di F; e quindi vi è ancora un'altra conica doppia di F spezzata in due rette p e q incrociate su r e contenute in un piano per AB. Dopo ciò si vede subito che la terza conica doppia (la quale possiamo supporre che sia h^2) deve

(1) In particolare, facendo coincidere t con la retta $d \equiv \alpha\,\omega$, si vede che d incontra h^2 in due punti coincidenti con quello ove r si appoggia ad h^2.

(2) La circostanza, che F ha altre due coniche doppie (degeneri o no) in piani per AB, sta, come si vede facilmente, anche se la quartica di cui si parla nel testo si spezzasse tutta in rette.

essere irriducibile; quindi riassumendo la discussione eseguita e aggiungendo qualche ovvia osservazione possiamo dire che:

Nell'ipotesi b), se le cubiche Φ aggiunte ad F sono irriducibili, la linea doppia di F (supposto che F esista) *non può essere costituita che da una conica irriducibile h^2, da una retta r appoggiata ad h^2 (ma esterna al suo piano) e dai quattro lati di un quadrangolo semplice sghembo di cui due vertici opposti cadono sopra h^2 e altri due sopra r. I quattro vertici di questo quadrangolo sono tripli per F e doppi per le superficie Φ; la linea base delle Φ è costituita dalla retta r contata due volte, dalla conica h^2, dai quattro lati del quadrangolo e dalla retta che ne congiunge i vertici situati sopra h^2. Quest'ultima retta contiene il vertice V del cono inviluppato dai piani delle coniche di F e il piano che da V proietta r tocca h^2 nel punto ove essa si appoggia ad r.*

45. Quanto all'esistenza di una siffatta superficie F, essa è di dimostrazione immediata; in ogni modo risulterà dall'equazione che ora passiamo a scriverne. Prima però si noti che una delle superficie Φ aggiunte ad F è costituita dal piano α di h^2 insieme coi piani rmp ed rnq e che tale superficie Φ seca F, fuori delle linee multiple, nella conica l^2 e in quella che si spezza nella retta r contata due volte; ciò significa *che la generatrice di contatto del cono V situata in ω è precisamente la retta $d \equiv \alpha\,\omega$*; la quale, come già è stato osservato, tocca h^2 nel punto ove essa si appoggia ad r.

46. Mantenute tutte le notazioni precedenti prendiamo come vertici del tetraedro fondamentale i punti $1 \equiv pq$, $2 \equiv r\alpha$, $3 \equiv A$ e $4 \equiv V$, e, preso opportunamente il punto unità, supponiamo che le coordinate del punto B siano $(0, 0, 1, 1)$ e che l'equazione del piano $m\,n$ sia

$$x_1 - x_2 = 0;$$

la conica h^2 sarà allora rappresentata nel piano $\alpha \equiv 2\,3\,4$ da una equazione del tipo:

$$x_4^2 + a\,x_2 x_3 - x_3 x_4 = 0\,.$$

Tenendo conto del fatto che il cono V deve toccare i piani

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

e che il piano $x_3 = 0$ lo deve toccare lungo la retta 42, si vede che *nella stella* 4 esso è rappresentato da un'equazione del tipo:

$$A\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2)+B\xi_1^2\xi_3+C\xi_2^2\xi_3+D\xi_2\xi_3^2+E\xi_1\xi_2\xi_3=0; \tag{64}$$

mentre il fascio delle superficie Φ è rappresentato dall'equazione:

$$(x_4^2+ax_2x_3-x_3x_4)(x_1-x_2)+\mu x_1x_4(x_3-x_4)=0. \tag{65}$$

La superficie Φ, corrispondente al valore μ del parametro, rappresentata dall'equazione (65) taglia il piano $x_3=0$, fuori della retta 12 contata due volte, nella retta che è *ivi* rappresentata da

$$(1-\mu)x_1-x_2=0$$

e le coordinate di un piano generico per questa retta sono date da:

$$\xi_1=1-\mu,\quad \xi_2=-1,\quad \xi_3=\varrho,\quad \xi_4=0 \tag{66}$$

dove ϱ indica un parametro variabile; dunque l'equazione di F si ottiene eliminando μ e ϱ fra la (65) e le

$$\left\{\begin{aligned}&(1-\mu)x_1-x_2=0\\&A\mu(1-\mu)+B(1-\mu)^2\varrho+C\varrho-D\varrho^2-E\varrho(1-\mu)=0.\end{aligned}\right. \tag{67}$$

Si trova così l'equazione:

$$\left\{\begin{aligned}&A(x_4^2+ax_2x_3-x_3x_4)[ax_3(x_1-x_2)+x_4(x_3-x_4)]x_4(x_3-x_4)+\\&\quad+Bax_2^2[ax_3(x_1-x_2)+x_4(x_3-x_4)]^2+\\&\quad+Cax_1^2x_4^2(x_3-x_4)^2+Da^2x_1^2x_2x_4(x_1-x_2)(x_3-x_4)-\\&\quad-Eax_1x_2x_4(x_3-x_4)[ax_3(x_1-x_2)+x_4(x_3-x_4)]=0.\end{aligned}\right. \tag{68}$$

47. Per esaurire la discussione dell'ipotesi *b*) ci resta ora da considerare il caso in cui le superficie Φ sono tutte riducibili; cioè quello in cui esse si spezzano (necessariamente) in un piano fisso e in una quadrica variabile Φ' generalmente irriducibile.

Per ragioni analoghe ad altre già viste, si riconosce subito che nel caso in discorso il piano fisso non può essere che il piano ω

su cui si tagliano i piani delle coppie di coniche di F costituenti le aggiunte; quindi ω taglia F soltanto in linee multiple. D'altra parte ω, come piano di V deve contenere una conica di F, dunque ω contiene la conica di F che si spezza in una retta r (contata due volte) doppia per F e seca F, fuori di r, in una residua conica doppia C'.

Ora si osservi, secondo il solito, che F può considerarsi come generata dal fascio di quadriche Φ' e l'insieme dei piani tangenti di V riferiti in una conveniente corrispondenza (1, 2), e che, in virtù del principio di Chasles, deve esistere almeno un piano α di V che si stacca dalla quadrica corrispondente; quindi si conclude che vi è una delle quadriche Φ' spezzata in una coppia di piani α e β, che questi piani appartengono a V e (essendo i piani corrispondenti alla quadrica $\alpha\beta$) sono gli ulteriori piani di V uscenti da una certa retta g del fascio (V, ω).

A proposito di questi piani può supporsi (senza specificare, per ora, se essi siano o no distinti fra di loro):

b') che essi siano entrambi distinti da ω,

b'') che uno di essi coincida col piano ω,

Esaminiamo separatamente le due alternative b') e b'') ed eseguiamo la discussione per via analitica; così troveremo nel tempo stesso, i nuovi tipi di superficie di 2ª specie che ci restano da considerare e le loro equazioni.

48. *Caso* b'). Qui esiste nel fascio delle Φ' una quadrica Φ'_1 (l'omologa di ω nella corrispondenza sopra considerata) che taglia ω nella retta r contata due volte; quindi se prendiamo il vertice 1 del tetraedro fondamentale nel vertice V del cono, il vertice 2 nel punto gr, il vertice 3 su α e il vertice 4 nell'intersezione di r con la generatrice di contatto di ω, l'equazione di Φ'_1 sarà del tipo:

$$x_3(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 = 0$$

e quella del fascio delle Φ' sarà

$$(69) \qquad x_3(ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 + \lambda x_4(fx_3 + x_4) = 0 .$$

Il cono V tocca i piani

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad fx_3 + x_4 = 0$$

e il piano $x_3=0$ (cioè ω) lo tocca lungo 14, dunque l'equazione di V entro la stella 1 sarà del tipo:

$$A\xi_2^3+B\xi_2^2\xi_3+C\xi_2^2\xi_4+D\xi_2\xi_4^2+E\xi_2\xi_3\xi_4+G\xi_3\xi_4(\xi_3-f\xi_4)=0\,. \tag{70}$$

L'equazione del fascio (V, ω) *nel piano* $\omega=124$ è:

$$x_2-\mu x_4=0 \tag{71}$$

e la corrispondenza (1, 2) fra le quadriche Φ' e i piani di V si traduce in una proiettività tra il fascio Φ' e il fascio (V, ω) nella quale alle quadriche $(\alpha\beta)$ e Φ'_1 del primo corrispondono nel secondo le rette 12 e 14; dunque questa proiettività è rappresentata da una equazione del tipo:

$$\lambda=k\mu \tag{72}$$

tra i parametri dei due fasci.

Allora, badando al solito che, se ϱ è un parametro variabile, le coordinate di un piano generico per la retta di ω rappresentata dall'equazione (71) sono date da:

$$\xi_1=0\,,\quad \xi_2=1\,,\quad \xi_3=\varrho\,,\quad \xi_4=-\mu$$

si conclude che l'equazione della superficie F (supposta esistente) si troverà eliminando λ, μ e ϱ fra le equazioni (69), (72) e le:

$$x_2-\mu x_4+\varrho x_3=0$$

$$A+B\varrho-C\mu+D\mu^2-E\varrho\mu-G\varrho\mu(\varrho+f\mu)=0\,.$$

Si trova così

$$\mu=-\frac{x_3(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)+ex_1^2}{kx_4(fx_3+x_4)}$$

$$\varrho=-\frac{x_3(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)+ex_1^2+kx_2(fx_3+x_4)}{kx_3(fx_3+x_4)}$$

e quindi si ha che l'equazione di F deve essere del tipo:

$$(73)\quad \begin{cases} Ak^3 x_3^2 x_4^2 (fx_3 + x_4)^2 - Bk^2 x_3 x_4^2 (fx_3 + x_4) \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 + kx_2 (fx_3 + x_4)] + \\ \quad + Ck^2 x_3^2 x_4 (fx_3 + x_4) [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2] + \\ \quad + Dk\, x_3^2 [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2)^2 - \\ \quad - Ek\, x_3 x_4 [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 + kx_2 (fx_3 + x_4)] + \\ \quad + G [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 + kx_2 (fx_3 + x_4)] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) + ex_1^2 + kx_2 x_4] = 0 . \end{cases}$$

Ora finchè i coefficienti che compaiono in questa equazione sono generici essa non rappresenta (ciò che è evidente *a priori*) una superficie F a sezioni di genere 3, e ciò perchè noi non abbiamo ancora espresso analiticamente il fatto che la retta $r \equiv 24$ deve risultare doppia per F.

Ebbene, facendo ciò risulta che deve essere:

$$B\, k^3 = 0, \quad G\, k^2\, b = 0, \quad G\, k^2\, d = 0;$$

ma, evidentemente, $k \neq 0$, $G \neq 0$ (altrimenti V si spezzerebbe), dunque:

$$B = b = d = 0 .$$

Introducendo queste ipotesi nella (73) si ottiene:

$$(74)\quad \begin{cases} Ak^3 x_3^2 x_4^2 (fx_3 + x_4)^2 + Ck^2 x_3^2 x_4 (fx_3 + x_4) [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2] + \\ \quad + Dk\, x_3^2 [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2]^2 - \\ \quad - Ek\, x_3 x_4 [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2 + kx_2 (fx_3 + x_4)] + \\ \quad + G [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2 + kx_2 (fx_3 + x_4)] \times \\ \quad \times [x_3 (ax_1 + cx_3) + ex_1^2 + kx_2 x_4] = 0 ; \end{cases}$$

e questa rappresenta realmente una superficie F di 2ª specie.

Notisi che l'essere $B = 0$ significa *che* ω *è uno dei nove piani tangenti stazionari di* V; che l'essere $b = d = 0$ significa *che il fascio delle* Φ' *è un fascio di coni col vertice nel punto* $2 \equiv g\,r$; *che il punto* 2 *è quadruplo per* F *e che la linea doppia di* F *è costituita dalle quattro rette (uscenti da* 2*) secondo cui la coppia di piani*

$$x_3(ax_1 + cx_3) + ex_1^2 = 0$$

taglia l'altra

$$x_4\,(fx_3 + x_4) = 0\,,$$

e dalla conica che nel piano $x_3 = 0$ *è rappresentata dall'equazione:*

$$ex_1^2 + kx_2\,x_4 = 0\,;$$

donde si trae che tale conica passa per i punti 2, 4 *e ivi tocca le rette* $12 \equiv g$ *e* 14, *ossia la generatrice di contatto di* ω.

49. *Caso* b''). Qui esiste nel fascio delle Φ' una quadrica Φ'_1 spezzata in ω e in un piano rimanente α e l'intersezione g di α con ω è la generatrice di contatto di ω. La quartica base del fascio delle Φ' che insieme con la cubica doppia (spezzata) contenuta in ω deve completare la linea doppia di F si compone qui di due linee del 2^0 ordine C_1^2 e C_2^2 situate l'una in ω e l'altra in α; quindi nella linea C_1^2 debbono raccogliersi due linee doppie infinitamente vicine di F.

Ciò posto, prendiamo il vertice 1 del tetraedro fondamentale nel punto V, il vertice 2 nell'intersezione di g con r, il punto 4 genericamente su r e il punto 3 genericamente su α.

Allora, supposto che

$$\varphi \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}\,,\ i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{75}$$

sia l'equazione di una quadrica generica del fascio Φ', l'equazione del fascio Φ' sarà

$$\varphi - \lambda\, x_3\, x_4 = 0\,, \tag{76}$$

e l'equazione del cono V *nella stella* 1 sarà del tipo:

$$A\xi_2^3 + B\xi_2^2\xi_3 + C\xi_2^2\xi_4 + D\xi_2\xi_3^2 + E\xi_2\xi_4^2 + G\xi_3\xi_4^2 + H\xi_2\xi_3\xi_4 = 0. \tag{77}$$

Il fascio (V, ω) è rappresentato, al solito, nel piano $\omega \equiv 124$ dall'equazione:

$$x_2 - \mu x_4 = 0 , \tag{78}$$

e la proiettività indotta dalle coppie di aggiunte di F fra il fascio Φ' e il fascio (V, ω) ha un'equazione del tipo

$$\lambda = k \mu + l . \tag{79}$$

Indicando con ϱ un parametro variabile le coordinate di un piano generico per la retta rappresentata da (78) sono date da:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \varrho, \quad \xi_4 = -\mu;$$

dunque l'equazione della superficie F (supposta esistente) dovrà potersi ottenere eliminando λ, μ e ϱ fra le (76), (79) e le

$$x_2 - \mu x_4 + \varrho x_3 = 0$$

$$A + B \varrho - C \mu + D \varrho^2 + E\mu^2 + G \varrho \mu^2 - H \varrho \mu = 0 .$$

Fatti i calcoli si perviene all'equazione:

$$\begin{aligned} & Ak^3 x_3^4 x_4^2 + Bk^2 x_3^2 x_4^2 (\varphi - kx_2 x_3 - lx_3 x_4) - \\ & \qquad - Ck^2 x_3^3 x_4 (\varphi - lx_3 x_4) + Dk x_4^2 (\varphi - k x_2 x_3 - lx_3 x_4)^2 + \\ & \qquad + Ek x_3^2 (\varphi - lx_3 x_4)^2 + G (\varphi - lx_3 x_4)^2 (\varphi - kx_2 x_3 - lx_3 x_4) - \\ & \qquad - Hk x_3 x_4 (\varphi - lx_3 x_4) (\varphi - k x_2 x_3 - lx_3 x_4) = 0 ; \end{aligned}$$

ma, naturalmente, prima di poter dire che questa è l'equazione di una superficie F di 2ª specie bisogna esprimere analiticamente la condizione che la retta r deve esser doppia per la superficie da essa rappresentata.

Orbene facendo ciò si trova con facile discussione che deve essere:

$$a_{22} = a_{24} = a_{44} = 0$$

oppure

$$a_{12} = a_{14} = a_{22} = a_{24} = 0\,, \qquad 2a_{23} = -k\,,$$

$$G = -\frac{k\,D}{a_{44}} \qquad H = \frac{(l - 2a_{34})\,D}{a_{44}}\;;$$

ma la prima alternativa si esclude facilmente; quindi, se per brevità, supponiamo $a_{44} = 1$ e poniamo:

$$\varphi \equiv ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 + dx_3x_4 + x_4^2$$

si perviene all'equazione

$$(80)\left\{\begin{aligned} &Ak^3x_3^4x_4^2 + Bk^2x_3^2x_4^2[ax_1 + bx_1x_3 - 2kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2] - \\ &\quad - Ck^2x_3^3x_4[ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2] + \\ &\quad + Dk\,x_4^2[ax_1^2 + bx_1x_3 - 2kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2]^2 + \\ &\quad + Ek\,x_3^2[ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2]^2 - \\ &\quad - Dk[ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2]^2 \times \\ &\quad \times [ax_1^2 + bx_1x_3 - 2kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2] - \\ &\quad - D(l-d)kx_3x_4[ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2] \times \\ &\quad \times [ax_1^2 + bx_1x_3 - 2kx_2x_3 + cx_3^2 + (d-l)x_3x_4 + x_4^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

Ora questa rappresenta realmente una superficie di 2ª specie *con una conica doppia in α rappresentata ivi dall'equazione:*

$$ax_1^2 + bx_1x_3 - kx_2x_3 + cx_3^2 = 0$$

(e quindi tangente a g nel punto $g\,r$), con una retta doppia in r e due rette doppie, a ciascuna delle quali ne è infinitamente vicina un'altra, nelle rette m, n del piano ω (uscenti da $g\,r$) ivi rappresentate dall'equazione complessiva:

$$ax_1^2 + x_4^2 = 0\,.$$

Notisi che i piani *tacnodali* di F nei singoli punti di m ed n sono i piani ivi tangenti alla quadrica:

$$ax_1^2 + bx_1 x_3 - 2k\, x_2 x_3 + cx_3^2 + (d - l)\, x_3 x_4 + x_4^2 = 0$$

e quindi costituiscono due fasci proiettivi alle punteggiate dei loro punti di contatto.

Nel ragionamento ora compiuto si è implicitamente supposto che il piano α fosse distinto da ω; ma si vede senza difficoltà che il caso in cui α coincida con ω non può presentarsi.

50. Riassumendo la discussione compiuta in questo terzo capitolo possiamo pertanto enunciare il teorema:

La superficie del 6^0 ordine normali di S_3 a sezioni piane di genere 3 e di 2^a specie, le cui coniche non siano situate a coppie nei piani di un fascio si distinguono in due categorie.

Per quelle della 1^a categoria le coniche sono situate nei piani tangenti di una sviluppabile ellittica (non conica) della 4^a classe; per quelle della 2^a, le coniche sono situate nei piani tangenti di un cono ellittico della 3^a classe.

Quanto alla linea doppia, per le superficie della 1^a categoria, essa può esser formata (prescindendo dai casi particolari)

a) da una cubica gobba e da un quadrangolo gobbo semplice inscritto in essa, oppure

b) da una cubica piana razionale e dalle quattro rette secondo cui si tagliano due coppie di piani uscenti dalle sue tangenti nodali;

mentre per le superficie della 2^a categoria essa è formata (sempre prescindendo dai casi particolari)

a) da cinque spigoli di un tetraedro e da una conica che passa pei vertici situati sul sesto spigolo e si appoggia a quello opposto, oppure

b) da una cubica piana spezzata in una retta g e in una conica C^2 e dalle quattro rette secondo cui due piani uscenti da g tagliano altri due piani uscenti dalla tangente a C^2 in uno dei punti ove essa è tagliata da g; oppure

c) da tre rette concorrenti situate in un piano, da una conica tangente a questo piano nel loro punto di concorso e infine da altre due rette infinitamente vicine a due delle prime tre.

Palermo, 2 luglio 1909.