XXXI.

SUR LA THÉORIE DES VARIATIONS DES LATITUDES

« Acta mathematica », t. 22, 1898, pp. 201–357.

INTRODUCTION.

1. Je présente dans ce Mémoire l'ensemble de quelques articles que j'ai publiés en 1895 sur la théorie des variations des latitudes (1). Je ne ferai pas ici l'histoire de cette question, qui est si importante dans l'astronomie et la mécanique céleste. Dans le second volume de son traité de mécanique céleste TISSERAND a consacré deux chapitres à l'exposition particularisée des travaux désormais classiques sur ce sujet. Je renvoie donc à cet ouvrage pour citer les grands travaux de M. DARWIN, de M. SCHIAPARELLI, de M. HELMERT, de GYLDÉN etc. En général les auteurs cherchent les causes des variations des latitudes géographiques dans les actions géologiques, l'élasticite, la plasticité terrestre, dans les explosions volcaniques, les troubles

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 30, 3 février 1895); [in questo vol.: VI, pp. 108–112].

— *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (id., 3 mars 1895); [in questo vol.: VII, pp. 113–121].

— *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (id., 31 marzs 1895); [in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

— *Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (id., 5 mai 1895); [in questo vol.: IX, pp. 129–140].

— *Sui moti periodici del polo terrestre* (id., 5 mai 1895); [in questo vol.: X, pp. 141–151].

— *Osservazioni sulla mia Nota: Sui moti periodici del polo terrestre* (id., 23 juin 1895); [in questo vol.: XI, pp. 152–154].

— *Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre* (id., 9 juin 1895); [in questo vol.: XII, pp. 155–165].

— *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii* (« Annali di Matematica pura ed applicata », t. 23); [in questo vol.: XV, pp. 173–186].

— *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, » 1er septembre 1895); [in questo vol.: XIII, pp. 166–169].

— *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* (« Annali di Matematica pura ed applicata », t. 24); [in questo vol.; XVI, pp. 187–212].

— *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre* (1er février 1895, « Astronomische Nachrichten, » n° 3291–92); [in questo vol.: V, pp. 87–107].

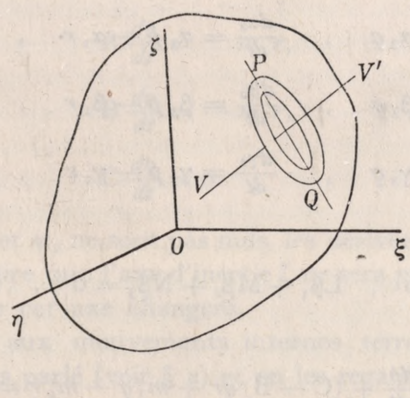
météorologiques, la production des glaces etc., c'est à dire en général ils attribuent le phénomène à des causes qui altèrent la distribution des masses sur la surface de la terre.

2. Mais outre les mouvements dont on vient de parler il y en a d'autres qui ont lieu à la surface terrestre, et d'autres aussi peuvent subsister à l'intérieur (dont la grandeur nous est inconnue) qui, sans changer à cause de leur nature cyclique les axes d'inertie de la terre ni la grandeur des moments d'inertie, ni la distribution des masses non plus, peuvent exercer une action puissante sur le déplacement des pôles de la terre.

Parmi ces mouvements on peut citer les courants marins constants, les courants atmosphériques, le mouvement continu des eaux des fleuves jusqu'à la mer, leur évaporation et la condensation successive de la vapeur sur les montagnes. Ces mouvements ne changent sensiblement la distribution des masses, ni la forme de la terre et l'on peut même dans une première approximation les regarder comme des mouvements stationnaires. Par rapport aux mouvements de la même nature qui peuvent exister à l'intérieur de la terre on ne peut rien affirmer sur leur grandeur.

Montrons d'une manière tout à fait élémentaire leur influence sur la rotation.

3. À cet effet, envisageons un corps dont les axes d'inertie soient ξ, η, ζ et supposons qu'à son intérieur ou à sa surface il y ait un mouvement stationnaire d'une partie de la matière dont il est constitué. Ce mouvement qui aura lieu sous l'action de forces internes ne changera ni la forme ni la distribution des densités. Pour fixer les idées, supposons que le corps



soit homogène et, par l'effet de forces internes, un tore de révolution PQ tourne relativement au corps autour de son axe VV' avec une vitesse angulaire constante, tandis que la partie résidue du corps soit rigide; ou plus en général le long d'un tube quelconque PQ ait lieu une circulation constante d'un fluide homogène. Le centre de gravité du corps, lex axes d'inertie et les moments d'inertie A, B, C ne changeront pas.

Soient m_1, m_2, m_3 les moments, par rapports aux axes ξ, η, ζ, des quantités de mouvement dues aux mouvements stationnaires internes *quels qu'ils soient*. Si le système a un mouvement de rotation autour du centre de gravité O, et si les composantes de la vitesse angulaire sont p, q, r, les moments des quantités de mouvement dûs au mouvement absolu de tout le système, par rapport aux axes ξ, η, ζ, seront

$$Ap + m_1, Bq + m_2, Cr + m_3.$$

Supposons que le système ne soit pas soumis à des forces externes, alors le couple de quantité de mouvement sera constant et son axe aura une direction constante. Soit z un axe fixe parallèle à cette direction; x, y soient des axes fixes situés dans le plan invariable et représentons par la table suivante les cosinus des angles que les axes ξ, η, ζ forment avec les axes x, y, z:

	$x \quad y \quad z$
ξ	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$
η	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$
ζ	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$

Les trois intégrales des aires seront exprimées par les équations suivantes

$$(1) \quad \begin{cases} (Ap + m_1)\alpha_1 + (Bq + m_2)\alpha_2 + (Cr + m_3)\alpha_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\beta_1 + (Bq + m_2)\beta_2 + (Cr + m_3)\beta_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\gamma_1 + (Bq + m_2)\gamma_2 + (Cr + m_3)\gamma_3 = K, \end{cases}$$

K étant la grandeur constante du couple de quantité de mouvement. Dérivons ces équations, et ayons égard aux formules de POISSON

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q \quad , \quad \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r \quad , \quad \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q \quad , \quad \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r \quad , \quad \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p, \\ \dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \quad , \quad \dfrac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \quad , \quad \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{cases}$$

on trouvera

$$L\alpha_1 + M\alpha_2 + N\alpha_3 = 0 \quad , \quad L\beta_1 + M\beta_2 + N\beta_3 = 0 \quad , \quad L\gamma_1 + M\gamma_2 + N\gamma_3 = 0$$

ayant posé

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = N.$$

On aura donc les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q = 0. \end{cases}$$

On a bien aisément deux intégrales algébriques de ces équations. En effet en les ajoutant après les avoir multipliées par p, q, r, on trouve par une intégration

$$(4)\qquad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}$$

Si on intégre après les avoir multipliées par $Ap + m_1$, $Bq + m_2$, $Cr + m_3$ et les avoir ajoutées, on a

$$(5)\qquad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 + 2Am_1 p + 2Bm_2 q + 2Cm_3 r = K_1 = \text{const.}$$

Cette intégrale peut s'obtenir aussi des intégrales des aires. En effet en écrivant que la grandeur du couple de quantité de mouvement est constant on a

$$(6)\qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2;$$

c'est pourquoi

$$K^2 = K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2.$$

Supposons maintenant qu'à l'instant initial le corps tourne autour de l'axe d'inertie ζ, on aura alors

$$p = q = 0 \quad , \quad r \gtrless 0$$

et les équations (3) deviendront

$$A\frac{dp}{dt} = m_2 r,$$

$$B\frac{dq}{dt} = -m_1 r,$$

$$C\frac{dr}{dt} = 0.$$

Cela prouve que si m_1 et m_2 ne sont pas nuls, les dérivées de p et q ne seront pas nulles; d'où l'on tire que l'axe d'inertie ζ ne sera pas un axe permanent de rotation, mais que cet axe changera.

En ayant égard aux mouvements internes terrestres de nature cyclique dont nous avons parlé (voir § 2) et en les regardant comme stationnaires, on voit qu'ils n'altéreront ni la forme ni la distribution des masses de la terre, et cependant ils pourront donner lieu à des valeurs de m_1 et m_2 qui ne sont pas nuls; c'est pourquoi ils pourront changer l'axe de rotation de la terre. Pour employer les équations (3) nous avons supposé que les mouvements internes terrestres soient stationnaires, mais même en supposant qu'ils ne changent pas la distribution de la matière on pourra admettre que dans certaines époques ils se ralentissent, en d'autres époques ils deviennent plus rapides. On voit tout de suite qu'on pourra abandonner l'hypothèse des mouvements stationnaires et pour cela il suffira de supposer m_1, m_2, m_3 des fonctions du temps au lieu que des quantités constantes, et alors il faudra remplacer les équations (3) par les équations

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+m_3 q-m_2 r+\frac{dm_1}{dt}=0,\\
&B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp+m_1 r-m_3 p+\frac{dm_2}{dt}=0,\\
&C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+m_2 p-m_1 q+\frac{dm_3}{dt}=0
\end{aligned}\right.
$$

qu'on trouvera de la même manière qu'on a employée précedemment. Dans ce cas il restera la seule intégrale (6); l'intégrale (4) ne se vérifiera pas.

4. Le plan des recherches que je me suis proposées est justement d'étudier d'abord l'action toute seule des mouvements cycliques qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses sur la terre, et d'étudier après les perturbations produites par la plasticité et en général par les mouvements qui changent la forme et la constitution de la terre. La première partie a été traitée avec détail dans ce mémoire; de la seconde il n'y a qu'un aperçu au dernier chapitre.

Je crois de cette manière d'avoir envisagé la question d'un point de vue nouveau.

Les mouvements cycliques dont nous avons parlé sont appréciables, du moins en partie, pour les habitants de la terre, mais un observateur qui aurait égard *seulement* à la variation de la forme de la terre et aux variations de sa constitution, c'est à dire à la distribution des masses, ne s'en apercevrait pas. C'est pourquoi par rapport à ses observations il pourrait les appeler, en suivant une locution très–heureuse introduite par HERTZ, des *mouvements cachés*.

Nous arrivons par là à une liaison entre le sujet de ce mémoire et les idées imaginées par HERTZ en systématisant celles de HELMHOLTZ et de MAXWELL, et dont la base est la théorie des mouvements cycliques.

Rappelons à ce propos la pensée fondamentale développée par HERTZ dans son dernier ouvrage. Il dit que la seule loi qui gouverne tous les phénomènes naturels est la loi d'inertie, entendue dans un sens plus général que celui attaché à cette loi par NEWTON. C'est la loi d'inertie généralisée à tout système matériel soumis à des liaisons quelconques. Cette loi subsiste pour l'ensemble complet constitué des masses que nous envisageons et d'autres qui nous sont cachées. En examinant les premières il peut paraître que leurs mouvements ne suivent pas la loi d'inertie, mais la loi ressort lorsqu'on envisage les unes et les autres.

Tandis que dans la mécanique classique si la loi d'inertie n'est pas vérifiée il faut chercher les causes externes ou les forces qui produisent les altérations de l'état du corps, en suivant l'idée de HERTZ il faut chercher des mouvements cachés.

Voyons maintenant comment on peut présenter la question de la variation des latitudes: Un corps (la terre) ne suit pas les lois d'EULER de la rotation libre d'un corps rigide, comment peut-on expliquer cet éloignement de la loi d'inertie? car au fond les lois d'EULER ne représentent que la loi d'inertie.

Il est évident qu'une solution fondée sur l'existence des mouvements cycliques dont nous avons parlé, répond très-bien aux idées de HERTZ que nous avons indiquées. Nous dirons à ce propos dès à présent qu'on peut démontrer que toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes cycliques, qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps. (Voir Chap. IV, Art. II).

5. En suivant les idées qu'on vient d'exposer, j'ai commencé l'étude en partant de l'hypothèse plus simple que les mouvements internes soient stationnaires. En remarquant que par la seule inertie ils ne pourraient pas se conserver en général de cette nature, on peut chercher les actions mutuelles que les mouvements cycliques et le mouvement de rotation exercent entre eux.

On arrive par là à une question très-générale et on voit bien aisément qu'il est avantageux de se poser à ce point de vue dans la question du mouvement terrestre, car on peut pousser la recherche jusqu'aux réactions exercées par la rotation sur le mouvement interne.

Mais en envisageant de cette manière la question, j'ai reconnu qu'il y a encore un autre intérêt, dont je vais parler: un intérêt qu'on pourrait appeler analytique et fonctionnel.

On connaît très-bien la relation qui subsiste entre les transcendantes elliptiques et la théorie de la rotation libre d'un corps rigide. D'après les mémoires classiques de JACOBI, cette théorie constitue une des plus belles applications des fonctions Jacobiennes. Or la recherche des rapports entre les mouvements cycliques et la rotation est (comme on le voit tout d'abord) un problème beaucoup plus compliqué que celui de JACOBI de la rotation d'un corps rigide; cependant je montrerai que ce sont toujours les fonctions elliptiques et Jacobiennes qui suffisent pour la résolution complète de la question, même dans le cas le plus général. Je donnerai en effet dans ce mémoire la solution complète. On verra que ces transcendantes paraissent toujours sous des expressions rationnelles ou sous des exponentielles, mais d'une manière différente que dans la solution de JACOBI.

Nous allons donner en peu de mots une idée de ces résultats et pour cela nous faisons usage dès à présent de la terminologie d'HELMHOLTZ (2), qu'on va rappeler. Les coordonnées indépendantes d'un système peuvent

(2) *Principien der Statik monocyklischer Systeme*, «Crelle's Journal», Bd. 97.

être classées en deux catégories: les coordonnées cycliques et les paramètres. Les premières existent dans un système lorsqu'il y a des mouvements possibles qui n'altèrent pas la distribution des masses et qui produisent un échange cyclique des masses. Un mouvement est dit cyclique lorsqu'on peut se borner à considérer dans l'expression de la force vive les termes qui dépendent seulement des intensités cycliques (3). Il est évident qu'un mouvement rigoureusement cyclique n'existera que si tous les paramètres seront constants.

Cela posé, envisageons un système dont les liaisons n'empêchent pas la rotation autour d'un point. Les variables qui déterminent sa configuration seront, outre celles qui définissent la position variable d'un système d'axes ayant l'origine dans le point fixe, un certain nombre de coordonnées cycliques et de paramètres. Nous supposerons que les coordonnées cycliques et les paramètres suffisent pour définir le mouvement relatif par rapport aux axes. Nous regarderons ce mouvement comme le mouvement interne du système et nous supposerons qu'il soit cyclique.

Faisons d'abord l'hypothèse que les axes soient fixes et que les paramètres soient constants. Si on abandonne le système à son inertie, les moments cycliques et par conséquent les intensités cycliques seront des quantités constantes. C'est pourquoi dans ce cas *le mouvement sera dans le même temps adiabatique et isocyclique*.

Supposons maintenant que les axes puissent tourner librement et le mouvement interne soit maintenu isocyclique, les paramètres étant constants. C'est le cas d'un système dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Alors, si le système n'est soumis à aucun couple de rotation, nous démontrerons au chapitre II que, *les composantes de la rotation seront des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes seront des fonctions uniformes du temps, représentables par des fonctions Jacobiennes*.

On peut demander dans ce cas *s'il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne*. On trouve qu'en général elles sont nécessaires et *qu'on peut en déterminer les expressions par des fonctions elliptiques du temps*.

La nécessité des forces dont nous venons de parler prouve que *de la même manière que le mouvement interne altère la rotation, celle-ci a en général une influence sur les mouvements internes*. C'est pourquoi on peut se poser la question suivante: *A l'intérieur d'un système qui peut tourner autour d'un point fixe et qui est abandonné à son inertie existent des mouvements cycliques quelconques (les paramètres étant constants). Comment a lieu la rotation et quelles lois suivent les intensités cycliques, à cause des actions mutuelles que ces mouvements exercent entre eux?*

Cette question, qu'on peut appeler le problème général du *mouvement adiabatique*, paraît au premier abord très-compliquée car on peut imaginer

(3) Le cas appelé d'*ignoration of coordinates* avait été examiné par THOMSON et TAIT, *Treatise on natural philosophy*. Vol. I, Part. I, Art. 319.

les mouvements cycliques internes d'une manière tout à fait arbitraire. Cependant nous montrerons au chapitre IV qu'on peut la résoudre complètement en employant un théorème par lequel on ramène ce cas à celui d'un mouvement isocyclique, de manière que même dans ce cas *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes mobiles forment avec les axes fixes s'expriment par des fonctions Jacobiennes. En outre, les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.* Le problème peut être aussi généralisé en regardant comme isocyclique une partie seulement des mouvement internes et en supposant que les forces correspondantes aux autres coordonnées cycliques soient nulles, et la solution s'obtient toujours de la même manière. On voit par là que le champ des problèmes sur la mécanique des systèmes d'où ressortent les fonctions elliptiques et Jacobiennes est beaucoup plus large que celui compris dans les recherches classiques de JACOBI, car il embrasse le problème général du mouvement adiabatique et isocyclique d'un système quelconque.

6. Il nous reste à indiquer de quelle manière a été faite la division en chapitres du mémoire.

Les premiers trois chapitres traitent du mouvement d'un système à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires. Dans le premier chapitre il y a une étude géométrique faite avec les vues de POINSOT; le second chapitre renferme la solution analytique complète, et le troisième est consacré à la recherche des rotations permanentes, de leur stabilité, des oscillations du pôle autour de ses positions stables et des perturbations correspondantes de la période eulérienne.

Le quatrième chapitre traite en général des mouvements cycliques et renferme les résultats dont nous venons de donner un aperçu.

Dans le cinquième chapitre, après l'étude du cas général des mouvements internes qui n'altèrent ni la forme ni la distribution des masses, et la résolution du problème de déterminer les mouvements internes, étant donné d'une manière arbitraire le mouvement du pôle, on trouvera quelques applications au mouvement de la terre. J'ai cherché, par des calculs approximatifs, de déterminer les mouvements internes cycliques qui correspondent aux mouvements harmoniques du pôle découverts par M. CHANDLER (*). Cet éminent astronome a trouvé dans le mouvement du pôle une

(*) La determinazione della polodia viene oggi effettuata dagli astronomi con accurate determinazioni di latitudine, eseguite *sistematicamente* in vari Osservatorî astronomici come pure in alcune stazioni geodetiche espressamente dedicate a tali misure. E dall'insieme delle osservazioni eseguite nella prima metà del secolo presente, è risultato che:

1° Il polo di rotazione si mantiene sempre molto vicino al polo d'inerzia; onde la polodia si svolge tutta dentro un'area quadrata di dieci o dodici metri di lato.

2° La polodia ha una forma *estremamente irregolare*, nella quale però si possono grossolanamente individuare due termini periodici. E cioè un termine principale del periodo di 433 giorni, che è il termine di CHANDLER; ed un termine secondario di periodo annuo che sembra dovuto a variazioni annue dei momenti d'inerzia terrestre per influenze meteorologiche [N.d.R.].

période d'environ 430 jours. Si le couple de quantité de mouvement des mouvements internes avait une composante dans la direction de l'axe terrestre égale à 1/1053 du couple de quantité de mouvement de la terre supposée rigide, la période eulérienne deviendrait celle de M. CHANDLER.

Sans discuter ce résultat, je cherche quels seraient les mouvements internes cycliques capables de déterminer dans le pôle mouvement harmonique ayant la période annuelle dont M. CHANDLER a déterminé les éléments. Les résultats obtenus sont renfermés dans quelques théorèmes qui sont énoncés au § 3 de l'Art. V.

Je remarquerai ici seulement que *l'axe du couple de quantité de mouvement correspondant oscille de manière que la projection sur l'équateur de son extrémité* (*l'origine étant au centre de la terre*) *décrit une ellipse dont j'ai calculé la grandeur des axes*, *et dont le grand axe est situé dans le méridien ayant la longitude de* 45° W (par rapport au méridien de Greenwich) *c'est à dire dans le méridien qui passe au milieu de l'océan atlantique*.

Enfin le dernier chapitre renferme un aperçu des perturbations qu'on a dans les lois précédemment trouvées par l'hypothèse de la plasticité terrestre. Cette étude est à peine ébauchée; c'est pourquoi j'espère de pouvoir exposer dans un autre mémoire des nouvelles études dans cette direction, ainsi que dans l'hypothèse générale des mouvements cycliques lorsque les paramètres ne sont pas constants et de pouvoir enfin approfondir les applications de ces recherches.

CHAPITRE I.

L'étude géométrique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Article I.

1. Il est possible de se faire une idée claire du mouvement sans recourir à l'intégration complète des équations différentielles (3). Il suffit pour cela d'envisager les intégrales algébriques de ces équations, qu'on a trouvées (Introduction § 3) de la même manière que POINSOT a fait dans ses recherches sur la rotation libre d'un corps.

Nous commencerons par nous proposer la solution des deux problèmes suivants:

1° Déterminer toutes les positions de l'axe instantané de rotation par rapport au corps en mouvement.

2° Déterminer la vitesse angulaire de rotation du corps pour chaque position de l'axe.

Soit

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{1 a}$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie par rapport au centre de gravité O et soit P son intersection avec l'axe de rotation. On peut appeler P le *pôle* et la courbe qu'il décrit sur l'ellipsoïde la *polodie*.

Si l'on pose

$$OP = \rho \quad , \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

on aura que les coordonnées du pôle seront

$$(2_a) \qquad \xi = \rho \frac{p}{\omega} \quad , \quad \eta = \rho \frac{q}{\omega} \quad , \quad \zeta = \rho \frac{r}{\omega}$$

d'où (voir (4) et (1_a))

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} 2h = 1$$

c'est à dire

$$\omega = \rho\sqrt{2h}\,.$$

Par suite *la vitesse de rotation sera proportionnelle au rayon vecteur* OP. On a ainsi la solution de la deuxième question que nous nous sommes proposée.

On dèduit des équations (2_a)

$$p = \xi\sqrt{2h} \quad , \quad q = \eta\sqrt{2h} \quad , \quad r = \zeta\sqrt{2h}$$

et en substituant dans l'équation (5)

$$(3_a) \qquad A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Bm_2\eta + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}\,.$$

Les équations de la polodie seront donc les deux équations (1_a) et (3_a). La dernière équation peut s'écrire encore

$$A^2\left(\xi + \frac{m_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2\left(\eta + \frac{m_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2\left(\zeta + \frac{m_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \frac{K^2}{2h}\,.$$

On peut donc envisager la polodie comme l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec l'ellipsoïde ayant pour équation

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = \frac{K^2}{2h}$$

transporté par une translation de manière que son centre ait pour coordonnées

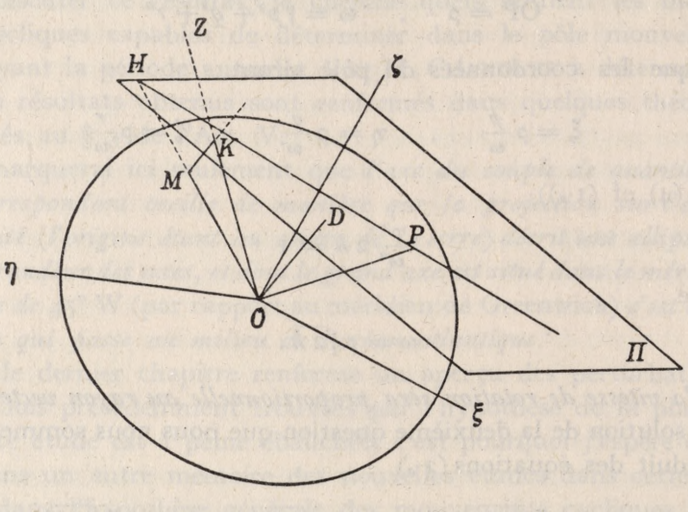
$$-\frac{m_1}{A\sqrt{2h}} \quad , \quad -\frac{m_2}{B\sqrt{2h}} \quad , \quad -\frac{m_3}{C\sqrt{2h}}\,.$$

La première question est donc aussi résolue.

2. Dans le cas étudié par POINSOT, le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle est parallèle au plan invariable et il est un plan fixe. Cette propriété ne se vérifie pas dans le cas que nous étudions. Cependant on a des propriétés analogues qu'il est intéressant d'examiner.

Le plan polaire, c'est à dire le plan π qui est tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle, a par rapport aux axes coordonnées ξ, η, ζ l'équation

$$A p \xi + B q \eta + C r \zeta = \sqrt{2h}. \tag{4 a}$$



Conduisons les deux droites OK, OM. La première soit l'axe du couple de quantité de mouvement; l'autre ait pour projection sur ξ, η, ζ les trois quantités m_1, m_2, m_3. On pourra appeler ce dernier vecteur *l'axe des mouvements internes*.

Les coordonnées des points M et K seront respectivement

$$m_1, m_2, m_3,$$

$$Ap + m_1, Bq + m_2, Cr + m_3.$$

On tire de là que le *plan polaire est toujours perpendiculaire à la droite qui va de l'extrémité de l'axe des mouvements internes à celle de l'axe du couple de quantité de mouvement*. La droite MK est donnée par

$$MK = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$$

et la distance OD entre O et le plan polaire est

$$OD = \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}}$$

par suite: *la distance entre le centre de gravité et le plan polaire est en raison inverse de la distance entre les extrémités de l'axe des mouvements internes et de l'axe du couple de quantité de mouvement*.

Par rapport aux axes fixes x, y, z, l'équation du plan polaire sera

$$(Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3)\, x + (Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3)\, y$$
$$+ (Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3)\, z = \sqrt{2h}$$

c'est à dire, à cause des équations (1),

$$-(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,x-(m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3)\,y$$
$$-(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3)\,z=\sqrt{2h}\,.$$

L'équation du plan polaire au temps $t+dt$, sera

$$-(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,x-(m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3)\,y$$
$$-(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3)\,z-(m_1d\alpha_1+m_2d\alpha_2+m_3d\alpha_3)\,x$$
$$-(m_1d\beta_1+m_2d\beta_2+m_3d\beta_3)\,y-(m_1d\gamma_1+m_2d\gamma_2+m_3d\gamma_3)\,z=\sqrt{2h}\,,$$

c'est pourquoi l'intersection du plan polaire au temps t et du plan polaire au temps $t+dt$ sera une droite du plan

$$(m_1d\alpha_1+m_2d\alpha_2+m_3d\alpha_3)\,x+(m_1d\beta_1+m_2d\beta_2+m_3d\beta_3)\,y$$
$$+(m_1d\gamma_1+m_2d\gamma_2+m_3d\gamma_3)\,z=0\,.$$

Divisant par dt, et ayant égard aux formules (2) cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ p, q, r \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \\ p, q, r \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \\ p, q, r \end{vmatrix} z=0$$

d'où l'on tire

$$(5\,a)\qquad \begin{vmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ \xi, \eta, \zeta \\ p, q, r \end{vmatrix}=0\,.$$

Cette équation est celle du plan POM.

La droite PH où se rencontrent les deux plans polaires correspondants aux temps t, et $t+dt$ peut être regardée comme l'axe instantané autour duquel tourne le plan polaire au temps t. On aura donc: *Le plan polaire tourne à chaque instant autour de la droite où il rencontre le plan conduit par le pôle et par l'axe des mouvements internes.*

3. On peut mener par chaque point de la polodie la droite autour de laquelle le plan polaire doit tourner. Le lieu de ces droites sera une surface tangente à l'ellipsoïde d'inertie le long de la polodie et qui sera liée invariablement au corps en mouvement. Appelons cette surface la *surface axiale*, alors *le mouvement du corps aura lieu de sort que l'ellipsoïde d'inertie roulera sur le plan polaire, tandis que celui-ci tournera à chaque instant autour de la génératrice où il rencontre la surface axiale.* L'équation de la surface axiale s'obtiendra par l'élimination de p, q, r, entre les équations (4), (5), (4 *a*), (5 *a*).

Article II.

1. Nous allons généraliser aux mouvements que nous étudions un théorème bien connu, donné par SYLVESTER pour les mouvements à la POINSOT.

Posons dans les équations (3)

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{b}, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{c};$$

on aura

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)qr + m_3 q - m_2 r = 0,$$

$$\frac{1}{b}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)rp + m_1 r - m_3 p = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)pq + m_2 p - m_1 q = 0,$$

et les intégrales (4) et (6) deviendront

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 2h,$$

$$\left(\frac{p}{a} + m_1\right)^2 + \left(\frac{q}{b} + m_2\right)^2 + \left(\frac{r}{c} + m_3\right)^2 = 1,$$

en supposant qu'on change les unités de manière que la constante K soit égale à 1.

2. Supposons maintenant que l'on compose le mouvement avec une rotation uniforme ω autour de l'axe du couple de quantité de mouvement. Alors les trois composantes de la rotation deviendront

$$p' = p + \omega\left(\frac{p}{a} + m_1\right) = p\left(\frac{a+\omega}{a}\right) + \omega m_1,$$

$$q' = q + \omega\left(\frac{q}{b} + m_2\right) = q\left(\frac{b+\omega}{b}\right) + \omega m_2,$$

$$r' = r + \omega\left(\frac{r}{c} + m_3\right) = r\left(\frac{c+\omega}{c}\right) + \omega m_3,$$

d'où

$$p = \frac{p' a}{a+\omega} - \frac{m_1 \omega a}{a+\omega},$$

$$q = \frac{q' b}{b+\omega} - \frac{m_2 \omega b}{b+\omega},$$

$$r = \frac{r' c}{c+\omega} - \frac{m_3 \omega c}{c+\omega}.$$

Posons

$$a + \omega = a', \quad b + \omega = b', \quad c + \omega = c',$$

$$m_1 \frac{a}{a+\omega} = m'_1, \quad m_2 \frac{b}{b+\omega} = m'_2, \quad m_3 \frac{c}{c+\omega} = m'_3,$$

alors les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{p'}{a'}+m'_1=\frac{p}{a}+m_1,$$

$$\frac{q'}{b'}+m'_2=\frac{q}{b}+m_2,$$

$$\frac{r'}{c'}+m'_3=\frac{r}{c}+m_3,$$

et par suite on aura

$$\frac{1}{a'}\frac{dp'}{dt}+\left(\frac{1}{c'}-\frac{1}{b'}\right)q'r'+m'_3q'-m'_2r'=0,$$

$$\frac{1}{b'}\frac{dq'}{dt}+\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{c'}\right)r'p'+m'_1r'-m'_3p'=0,$$

$$\frac{1}{c'}\frac{dr'}{dt}+\left(\frac{1}{b'}-\frac{1}{a'}\right)p'q'+m'_2p'-m'_1q'=0,$$

$$\left(\frac{p'}{a'}+m'_1\right)^2+\left(\frac{q'}{b'}+m'_2\right)^2+\left(\frac{r'}{c'}+m'_3\right)^2=0,$$

$$\frac{p'^2}{a'}+\frac{q'^2}{b'}+\frac{r'^2}{c'}=2h'.$$

Entre les deux quantités constantes h et h' subsistera la relation

$$h'=h+\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{m_1^2a}{a+\omega}-\frac{m_2^2b}{b+\omega}-\frac{m_3^2c}{c+\omega}\right).$$

Donc *si on compose le mouvement que nous étudions avec une rotation uniforme autour de l'axe du couple de quantité de mouvement, la nature du mouvement ne changera pas; il n'y aura qu'un changement des constantes*.

Cette propriété est tout à fait analogue à celle qui a été découverte par SYLVESTER dans le cas des mouvements à la POINSOT et dont on trouve des nombreuses et intéressantes applications dans les travaux de M. DARBOUX et de HALPHEN.

Article III.

1. Nous consacrerons un chapitre (chapitre III) à l'étude des mouvements permanents et à leur stabilité, mais dès à présent nous voulons examiner quelques propriétés des mouvements permanents.

Puisqu'on doit avoir

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=\text{const.},$$

un axe de rotation sera permanent lorsque p, q, r seront constants, c'est à dire si l'on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{dt}=\frac{dr}{dt}=0$$

et par suite (voir équations (3))

$$(6_a)\quad \begin{cases} (C - B)\, qr + m_3 q - m_2 r = 0\,, \\ (A - C)\, rp + m_1 r - m_3 p = 0\,, \\ (B - A)\, pq = m_2 p - m_1 q = 0\,, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(6'_a)\quad \frac{p}{Ap + m_1} = \frac{q}{Bq + m_2} = \frac{r}{Cr + m_3}\,.$$

2. Les points multiples de la polodie se trouvent où les deux surfaces (1_a), (3_a) sont tangentes. Les coordonnées du pôle sont

$$\frac{p}{\sqrt{2h}}\ ,\ \frac{q}{\sqrt{2h}}\ ,\ \frac{r}{\sqrt{2h}}\,;$$

par conséquent les plans tangents aux deux surfaces au pôle auront pour équations

$$\frac{Ap}{\sqrt{2h}}\,\xi + \frac{Bq}{\sqrt{2h}}\,\eta + \frac{Cr}{\sqrt{2h}}\,\zeta = 1\,,$$

$$A\,(Ap + m_1)\left(\xi - \frac{p}{\sqrt{2h}}\right) + B\,(Bq + m_2)\left(\eta - \frac{q}{\sqrt{2h}}\right) + C\,(Cr + m_3)\left(\zeta - \frac{r}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{K_1}{2h}$$

et ils coïncideront lorsque

$$\frac{p}{Ap + m_1} = \frac{q}{Bq + m_2} = \frac{r}{Cr + m_3}\,.$$

Donc: *les axes permanentes de rotation passent par le centre de gravité et par les points multiples de la polodie, et si la polodie a un point multiple la vitesse de rotation correspondante sera celle de la rotation permanente.*

3. Revenons maintenant aux équations (3). Elles seront satisfaites si l'on substitue aux fonctions $p\,(t)$, $q\,(t)$, $r\,(t)$ les autres fonctions

$$-\,p\,(T - t)\quad ,\quad -\,q\,(T - t)\quad ,\quad -\,r\,(T - t),$$

T étant une constante arbitraire; et en remplaçant dans le même temps m_1, m_2, m_3 par $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$. On pourra énoncer cette propriété en disant: *le mouvement du système peut s'invertir si l'on invertit l'axe des mouvements internes.*

Cela posé, supposons que, la polodie ayant un point multiple P_0, le pôle puisse rejoindre ce point après un temps T. Si l'on invertit le mouvement le pôle reviendra au point de départ après le même temps. Mais l'axe de rotation et la vitesse qui correspondent à P_0 sont permanents, donc le pôle ne pourrait plus bouger de P_0. On a donc: *Si la polodie a un point multiple, le pôle s'approchera indéfiniment à ce point sans jamais le rejoindre.*

Cela constitue une différence essentielle entre les mouvements qui ont lieu lorsque la polodie a des points multiples, et ceux qui ont lieu lorsque elle n'en a pas. Dans le premier cas la polodie sera une courbe fermée et le pôle reviendra au point de départ; dans le deuxième cas le pôle ne reviendra au point de départ, mais il s'approchera indéfiniment au point multiple.

Article IV.

1. Dans cet article nous particulariserons les formules dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie a deux axes égaux, et le troisième est plus petit que les autres.

Supposons $A = B$, et prenons les axes ξ, η dans le plan de l'équateur de manière que l'axe des mouvements internes soit dans le plan $\xi\zeta$. Alors on aura $m_2 = 0$, et les équations de la polodie deviendront

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$A^2(\xi^2 + \eta^2) + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}$$

ou bien

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$C(C - A)\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A.$$

Posons pour simplifier

$$-\frac{Cm_3}{C(C-A)\sqrt{2h}} = \zeta_0,$$

$$\frac{C^2 m_3^2 + (K - 2Ah)\,C(C-A)}{2\sqrt{2h}\,AC(C-A)\,m_1} = \xi_0,$$

$$\frac{Am_1}{C(C-A)\sqrt{2h}} = P.$$

Les deux équations précédentes s'écriront

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$(\zeta - \zeta_0)^2 = 2P(\xi_0 - \xi).$$

On déduit de là que *la projection de la polodie sur le méridien qui passe par l'axe des mouvements internes, est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'ellipsoïde.*

Les coordonnées du sommet de la parabole seront ξ_0 et ζ_0 et le semi-paramètre sera P.

2. Le théorème précédent conduit à une construction très simple de la polodie, par l'emploi des méthodes bien connues de la géométrie descriptive.

Il suffit de choisir pour 1^er^ plan de projection un plan parallèle à l'équateur et de prendre le 2^d^ plan de projection parallèle à l'axe de symétrie et à l'axe des mouvements internes. L'ellipsoïde d'inertie sera projecté sur le premier plan dans un cercle, et sur le second dans une ellipse. La projection de la polodie dans ce plan sera une parabole ayant l'axe parallèle à l'équateur. On obtiendra donc la polodie en la regardant comme l'intersection de l'ellipsoïde avec un cylindre dont la directrice est une parabole et qui est perpendiculaire au second plan de projection. C'est pourquoi il n'y a pas du difficulté pour construire la première projection de la polodie.

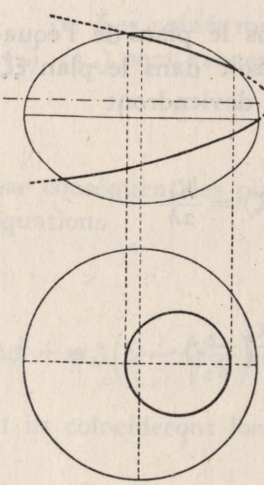


Fig. 1.

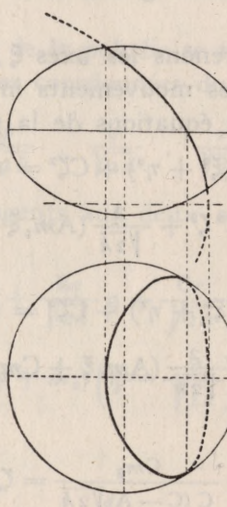


Fig. 2.

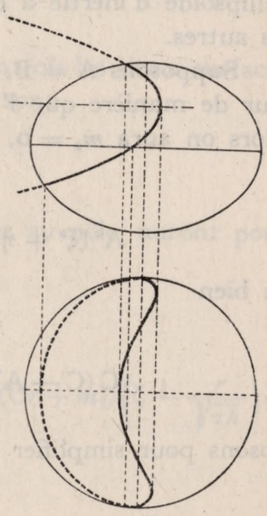


Fig. 3.

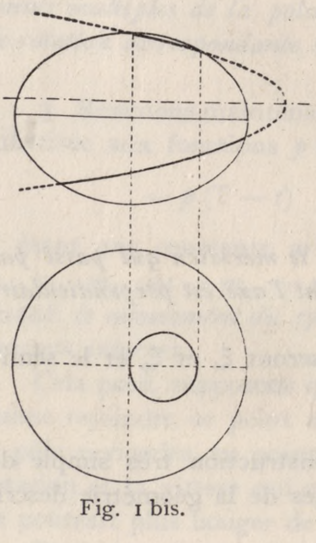


Fig. 1 bis.

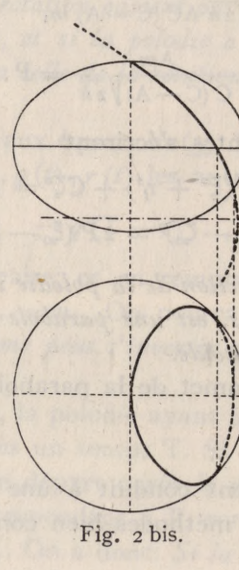


Fig. 2 bis.

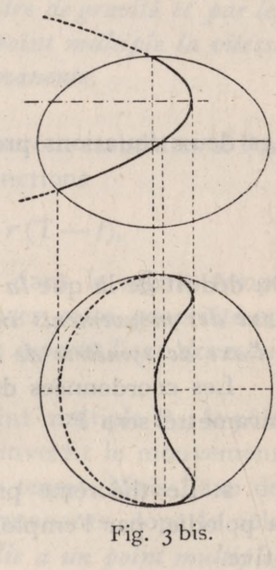


Fig. 3 bis.

Par ce procédé nous avons dessiné les projections de plusieurs polodies, qu'on a obtenues en changeant la position du sommet et la grandeur du daramètre de la parabole.

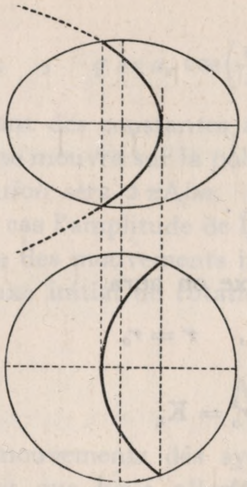


Fig. 4.

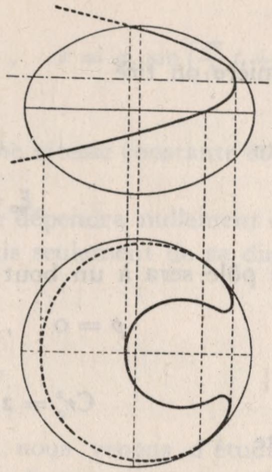


Fig. 5.

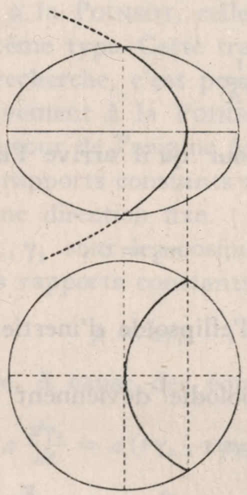


Fig. 4 bis.

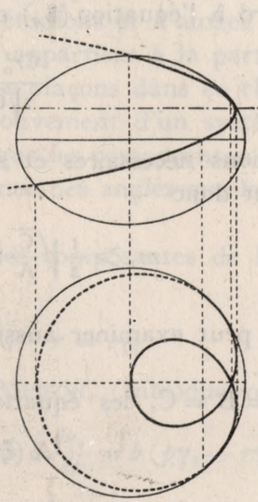


Fig. 5 bis.

3. L'avant-dernière figure correspond au cas où il peut arriver une inversion des pôles, c'est à dire que le pôle peut passer d'un bout à l'autre du petit axe de l'ellipsoïde.

Pour cela sont nécessaires et suffisantes deux conditions, savoir:

1° la parabole doit passer par les projections des extrémités du petit axe.

2° le sommet de la parabole doit se trouver à l'intérieur de la projection de l'ellipsoïde.

Ces conditions seront verifiées lorsqu'on aura

$$(7\,a) \qquad \zeta_0 = 0 \,,$$

$$(8_a) \qquad \xi_0 < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

De la première on tire

$$m_3 = 0,$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{K_1 - 2Ah}{2\sqrt{2h}\,Am_1}.$$

Lorsque le pôle sera à un bout du petit axe on aura

$$p = 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = r_0$$

d'où

$$Cr_0^2 = 2h \quad , \quad C^2 r_0^2 = K_1$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{C_0 r_0^2 (C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\,Am_1}.$$

Ayant égard à l'équation (8_a) on aura

$$\frac{Cr_0^2 (C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\,Am_1} < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il arrive l'inversion des pôles seront donc

$$m_1 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}\,(C - A)\, r_0 \quad , \quad m_3 = 0.$$

4. On peut examiner aussi le cas où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère.

Si $A = B = C$, les équations de la polodie deviennent

$$A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1,$$

$$A^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}.$$

La polodie sera donc l'intersection de la sphère d'inertie avec le plan

$$\frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A$$

et par conséquent elle sera un cercle de la sphère ayant pour axe l'axe des mouvements internes.

Dans ce cas, les équations (3) sont des équations linéaires qui peuvent s'intégrer immédiatement. En effet si on fait coïncider l'axe ξ avec l'axe des mouvements internes, elles deviendront

$$A\frac{dp}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dq}{dt} + \frac{m}{A} r = 0 \quad , \quad \frac{dr}{dt} - \frac{m}{A} q = 0$$

d'où

$$p = a_1 \quad , \quad q = a_2 \cos\left(\frac{m}{A} t + a_3\right) \quad , \quad r = a_2 \sin\left(\frac{m}{A} t + a_3\right),$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires.

Le pôle se mouvra sur la polodie avec une vitesse constante et la période d'une révolution sera $2\pi A/m$.

Dans ce cas l'amplitude de la polodie ne dépendra nullement de la grandeur de l'axe des mouvements internes, mais seulement de sa direction par rapport à l'axe initial de rotation.

Article V.

1. Les mouvements des systèmes que nous venons d'étudier géométriquement et que nous allons étudier analytiquement dans le chapitre suivant sont une généralisation des mouvements à la POINSOT.

Nous consacrerons cet article à réduire les équations différentielles des mouvements à la POINSOT, celles que nous étudions et d'autres plus générales à un même type. Cette transformation appartient à la partie cinématique de la recherche, c'est pourquoi nous la plaçons dans ce chapitre.

Un mouvement à la POINSOT est le mouvement d'un système d'axes qui tourne autour de l'origine fixe de sorte que les composantes de la rotation ont des rapports constants avec les cosinus des angles que les axes forment avec une direction fixe.

Si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les cosinus, p, q, r les composantes de la rotation et a, b, c les rapports constants, on aura

$$p = a\gamma_1 \quad , \quad q = b\gamma_2 \quad , \quad r = c\gamma_3$$

d'où l'on tire, à cause des équations de POISSON, (Introduction § 3)

$$\frac{dp}{dt} = a\frac{d\gamma_1}{dt} = a(r\gamma_2 - q\gamma_3) \quad , \quad \frac{dq}{dt} = b\frac{d\gamma_2}{dt} = b(p\gamma_3 - r\gamma_1),$$

$$\frac{dr}{dt} = c\frac{d\gamma_3}{dt} = c(q\gamma_1 - p\gamma_2)$$

ou bien

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)qr \quad , \quad \frac{1}{b}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)rp \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)pq.$$

Si nous posons

$$f_1 = \frac{abc}{2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c}\right),$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}$$

et on aura

$$\gamma_1 = \frac{\partial f_2}{\partial p}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q}, \quad \gamma_3 = \frac{\partial f_2}{\partial r}.$$

2. Au même type d'équations appartiennent les équations différentielles du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements internes stationnaires. En effet posons

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}((Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2),$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Alors on pourra écrire les équations (3) de la manière suivante

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)}.$$

Pour avoir les cosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il suffit de construire la fonction

$$F = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2m_1 p + 2m_2 q + 2m_3 r)$$

et l'on aura

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Entre les fonctions $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$, F subsisteront les relations

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F\right).$$

3. En général si on a un système d'axes en mouvement autour de l'origine fixe et les cosinus des angles qu'ils forment avec une direction fixe sont donnés par les formules

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r},$$

K étant une constante et F une fonction quelconque de p, q, r, on aura à cause des équations de Poisson

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = r\frac{\partial F}{\partial q} - q\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = p\frac{\partial F}{\partial r} - r\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r} = q\frac{\partial F}{\partial p} - p\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Calculons les premiers membres de ces équations, on aura

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{dr}{dt}.$$

On tire de là

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{H}\begin{Vmatrix}\frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{\partial F}{\partial r}\\ p, & q, & r\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\end{Vmatrix}$$

$$=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], & \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right]\\ \frac{\partial}{\partial q}\left[p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F\right], & \frac{\partial}{\partial r}\left[p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F\right]\end{vmatrix}$$

H étant le Hessien de la fonction F.

Posons

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\varphi_2=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F,$$

on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(q,r)}.$$

D'une manière tout à fait analogue on trouvera

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(r,p)}\quad,\quad\frac{dr}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(p,q)}.$$

Si nous introduisons une variable auxiliaire τ, telle que

$$\frac{dt}{d\tau}=H$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$(9_a)\qquad \frac{dp}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(q,r)}\quad,\quad\frac{dq}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(r,p)}\quad,\quad\frac{dr}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(p,q)},$$

$$(10_a)\qquad \frac{dt}{d\tau}=H.$$

Ces équations ont les intégrales $\varphi_1=\text{const.}$, $\varphi_2=\text{const.}$ et s'intègrent par une quadrature.

Les trois premières équations appartiennent au même type d'équations qu'on a trouvé auparavant.

4. Lorsque F est de 2^d^ degré, φ_1 et φ_2 seront aussi des fonctions de 2^d^ degré et H sera une quantité constante.

Alors si on intègre l'équation (10_a) on trouve

$$t=H(\tau-\tau_0),$$

τ_0 étant un constante arbitraire.

Dans ce cas, en posant

$$(11_a)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], \\ f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{H}}\left[p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q} + r\dfrac{\partial F}{\partial r} - F\right] \end{cases}$$

les équations $(9)_a$ deviennent

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} .$$

Dans la fonction F on peut négliger le terme constant, alors il est aisé de remarquer que pour obtenir la fonction

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F$$

il suffit de négliger dans la fonction F les termes de premier degré.

Chapitre II.

L'étude analytique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Article I.

1. Dans le dernier article du chapitre précédent nous avons ramené les équations différentielles (3) au type suivant

$$(1_b)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} \end{cases}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de p, q, r.

Nous allons par suite commencer par l'étude général des équations différentielles de ce type.

2. On peut trouver deux intégrales des équations (1_b), c'est à dire

$$(2_b)\quad f_1 = \text{const.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{const.} = h_2 ,$$

ce qu'on vérifie tout de suite par un calcul élémentaire.

Posons

$$(3_b)\quad p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4} ,$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_1\right],$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_2\right].$$

Les fonctions φ_1, φ_2 auront un degré d'homogénéité égal à 2. On a maintenant

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = \frac{1}{x_4^2}\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_4^2}\frac{x_4\,dx_1 - x_1\,dx_4}{dt};$$

par suite, la première des équations ($1b$) s'écrira

$$(4b) \qquad \frac{x_4\,dx_1 - x_1\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}$$

et de même les deux autres pourront s'ècrire

$$(4'b) \qquad \frac{x_4\,dx_2 - x_2\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)},$$

$$(4''b) \qquad \frac{x_4\,dx_3 - x_3\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)}.$$

Enfin on pourra substituer aux deux intégrales ($2b$) les équations

$$(5b) \qquad \varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_2 = 0.$$

Deux quelconques des équations ($4b$), ($4'b$), ($4'c$) auront la forme

$$\frac{x_4\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+1)}, x_{(r+2)})}.$$

$$\frac{x_4\,dx_{(r+1)} - x_{(r+1)}\,dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+2)}, x_{(r)})}$$

étant

$$0 < (r) < 4 \quad , \quad (r) \equiv r \quad \text{mod. } 3.$$

On en tire

$$x_4\frac{x_{(r+1)}\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}\left(x_{(r+1)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(r)}}\right)$$
$$- \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(r+2)}}\left(x_{(r+1)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{(r)}}\right).$$

Mais

$$x_{(r)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r)}} + x_{(r+1)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r+2)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r+2)}} + x_4\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_4} = 2\,\varphi_i = 0, \qquad (i = 1, 2)$$

par suite l'équation précédente s'écrira

$$\frac{x_{(r+1)}\,dx_{(r)} - x_{(r)}\,dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(r+2)}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}.$$

On pourra donc conclure: *si* i_1, i_2, i_3, i_4 *est une permutation quelconque d'ordre pair des nombre* 1, 2, 3, 4 *on aura*

$$\frac{x_{i_2}\,dx_{i_1} - x_{i_1}\,dx_{i_2}}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})}. \tag{6 b}$$

3. Appliquons aux variables x_i une substitution linéaire

$$x_i = \Sigma_s\, c_{i,s}\,\xi_s \quad , \quad \xi_s = \Sigma_i\, C_{i,s}\, x_i \tag{7 b}$$

et soit C le déterminant des coefficients $c_{i,s}$. Nous supposons que C ne s'annulle pas.

Nous aurons

$$\begin{vmatrix} dx_{i_1}, dx_{i_2} \\ x_{i_1}\ ,\ x_{i_2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, c_{i_2,i_1} \\ c_{i_1,i_2}, c_{i_2,i_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\xi_{s_1}, d\xi_{s_2} \\ \xi_{s_1}\ ,\ \xi_{s_2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})} = \Sigma\, \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})} \begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, C_{i_4,s_4} \end{vmatrix}.$$

Mais, par un théorème sur les déterminants, on a [4]

$$\begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, C_{i_4,s_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, c_{i_2,s_2} \end{vmatrix}$$

par suite l'équation (6$_b$) pourra s'écrire

$$\Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{\xi_{s_2}\,d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}\,d\xi_{s_2}}{dt} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\xi_{s_2}\,d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}\,d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C}\,\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}. \tag{8 b}$$

On tire de là qu'*une substitution linéaire ne change pas la forme des équations différentielles*.

Article II.

1. Nous voulons maintenant appliquer les résultats de l'article précédent au cas où f_1 et f_2 sont des fonctions entières de 2^e degré par rapport à p, q, r.

On aura alors

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(a_{11}\,p^2 + a_{22}\,q^2 + a_{33}\,r^2) + a_{23}\,qr + a_{31}\,rp + a_{12}\,pq \\ \qquad\qquad + a_{14}\,p + a_{24}\,q + a_{34}\,r + a, \\ f_2 = \frac{1}{2}(b_{11}\,p^2 + b_{22}\,q^2 + b_{33}\,r^2) + b_{23}\,rq + b_{31}\,rp + b_{12}\,pq \\ \qquad\qquad + b_{14}\,p + b_{24}\,q + b_{34}\,r + b. \end{cases} \tag{9 b}$$

(4) Baltzer, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, III Auflage, page 50.

En posant

$$a - h_1 = \frac{1}{2} a_{44} \quad , \quad b - h_2 = \frac{1}{2} b_{44}$$

on trouvera

$$(9'b) \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} x_i x_s \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} x_i x_s$$

et par la substitution ($7b$) on pourra reduire φ_1 et φ_2 aux formes suivantes

$$(10\,b) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \lambda_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2). \end{cases}$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$(11\,b) \qquad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = 1, \\ \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0, \end{cases} \qquad (h \gtrless k)$$

$$(11'b) \qquad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = \lambda_h, \\ \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0. \end{cases} \qquad (h \gtrless k)$$

Les quantités λ_i seront les racines de l'équation de quatrième degré par rapport à λ

$$(12\,b) \qquad \mathfrak{r}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, a_{12} - \lambda b_{12}, a_{13} - \lambda b_{13}, a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, a_{22} - \lambda b_{22}, a_{23} - \lambda b_{23}, a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, a_{32} - \lambda b_{32}, a_{33} - \lambda b_{33}, a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41}, a_{42} - \lambda b_{42}, a_{43} - \lambda b_{43}, a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite, si B est le discriminant de la forme φ_2, on aura

$$\mathfrak{r}(\lambda) = \mathrm{B}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

2. Supposons que les racines soient différentes entre elles.

Soient $\alpha_{r,s}$ les éléments adjoints aux éléments du déterminant ($12b$). Nous les désignerons par un suffixe $\alpha_{r,s}^{(i)}$ lorsqu'on remplacera λ par λ_i.

On trouve alors les égalités

$$\frac{c_{1,s}}{\alpha_{1,r}^{(s)}} = \frac{c_{2,s}}{\alpha_{2,r}^{(s)}} = \frac{c_{3,s}}{\alpha_{3,r}^{(s)}} = \frac{c_{4,s}}{\alpha_{4,r}^{(s)}} = \sqrt{\frac{\Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} c_{h,s} c_{k,s}}{\Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} \alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)}}} = \theta_s.$$

Mais par un théorème sur les déterminants on a [5]

$$\alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)} = \alpha_{r,r}^{(s)} \alpha_{h,k}^{(s)}$$

(5) BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, III Auflage, page 54.

par suite, à cause de la première des équations (11 *b*)

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(s)}_{r,r}\, \Sigma_h\, \Sigma_k\, b_{h,k}\, \alpha^{(s)}_{h,k}}}\,.$$

Dérivons l'équation (12 *b*). Nous trouverons

$$\mathfrak{x}'(\lambda) = -\Sigma_h\, \Sigma_k\, b_{h,k}\, \alpha_{h,k}\,,$$

et, ayant égard à l'égalité (13 *b*).

$$\Sigma_h\, \Sigma_k\, b_{hk}\, \alpha^{(s)}_{hk} = -\mathfrak{x}'(\lambda_s) = \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+2} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+3} - \lambda_s)\,.$$

Par suite

(14 *b*)
$$c_{i,s} = \frac{\alpha^{(s)}_{i,r}}{\sqrt{\alpha^{(s)}_{r,r}\, \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+2} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^{(s)}_{i,i}}{\mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+2} - \lambda_s)\,(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}\,.$$

Enfin, si l'on fait usage de la règle pour calculer le produit des déterminants on trouve

$$\mathrm{BC}^2 = 1$$

d'où

(15 *b*)
$$\mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{B}}}\,.$$

3. Les équations (8 *b*), à cause des formules (10 *b*), deviendront

$$\frac{\xi_{s_2}\, d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}\, d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}}\,(\lambda_{s_3} - \lambda_{s_4})\, \xi_{s_3}\, \xi_{s_4}\,.$$

Posons

(16 *b*)
$$\xi_1 = \mu_1 \sigma_1(u)\,, \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2(u)\,, \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3(u)\,, \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma(u)$$

$\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ étant les quatre fonctions de WEIERSTRASS. Alors les équations précédentes deviendront

$$\mu_{(r)}\, \mu_{(r+1)}\, (\sigma'_{(r)}\sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)}\sigma'_{(r+1)})\, \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}}\,(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)\, \mu_{(r+2)}\, \mu_4\, \sigma_{(r+2)}\, \sigma\,,$$

$$\mu_4\, \mu_{(r+2)}\, (\sigma'_{(r+2)}\sigma - \sigma_{(r+2)}\sigma')\, \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}}\,(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+1)})\, \mu_{(r)}\, \mu_{(r+1)}\, \sigma_{(r)}\, \sigma_{(r+1)}\,.$$

Mais entre les fonctions σ subsistent les relations différentielles [6]

$$\sigma'_{(r)}\, \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)}\, \sigma'_{(r+1)} = (e_{(r+1)} - e_{(r)})\, \sigma_{(r+2)}\, \sigma\,,$$

$$\sigma'_{(r+1)}\, \sigma - \sigma_{(r+1)}\, \sigma' = -\sigma_{(r)}\, \sigma_{(r+1)}\,,$$

par suite les équations précédentes pourront s'écrire

$$\mu_{(r)}\, \mu_{(r+1)}\, (e_{(r+1)} - e_{(r)})\, \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}}\,(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)\, \mu_{(r+2)}\, \mu_4\,,$$

(6) WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*, page 28.

$$\mu_4\,\mu_{(r+2)}\,\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\mu_{(r)}\,\mu_{(r+1)}$$

d'où l'on tire

$$(17\,b)\qquad \frac{\mu_{(r)}\,\mu_{(r+1)}}{\mu_4\,\mu_{(r+2)}}=\frac{\left(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4\right)}{C\left(e_{(r+1)}-e_{(r)}\right)}\,\frac{dt}{du}=\frac{C}{\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\dfrac{dt}{du}};$$

par conséquent on aura

$$(18\,b)\qquad e_{(r+1)}-e_{(r)}=\frac{1}{C^2}\,\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r)})\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\left(\frac{dt}{du}\right)^2$$

et enfin

$$(19\,b)\qquad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_3}:\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_3}.$$

4. Des équations (17 b) on déduit

$$\mu_{(r+2)}^2\,\frac{\mu_4}{\mu_{(r)}\,\mu_{(r+1)}\,\mu_{(r+2)}}=\frac{1}{C}\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\frac{dt}{du},$$

$$\frac{\mu_{(r)}^2\,\mu_{(r+1)}^2}{\mu_4^2\,\mu_{(r+2)}^2}=\frac{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}{\left(e_{(r+1)}-e_{(r)}\right)\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)};$$

c'est pourquoi on aura

$$(20\,b)\qquad \frac{\mu_{(r)}}{\sqrt{\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)}}}=\frac{\mu_{(r+1)}}{\sqrt{\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)}}}=\frac{\mu_{(r+2)}}{\sqrt{\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}}}$$

$$=\frac{\mu_4}{\sqrt{\left(e_{(r+1)}-e_{(r)}\right)\dfrac{\left(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)}\right)\left(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)}\right)}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}}.$$

Or (voir (7 b) et (16 b))

$$x_i=\Sigma_s\,c_{i,s}\,\mu_s\,\sigma_s$$

donc, en calculant par les formules (3 b), (14 b) et (20 b) les expressions de p, q, r et en retranchant les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs on trouvera

$$(21\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} p&=\frac{\sum_1^3{}_r\,A_{1,r}\,\sigma_r+A_{1,4}\,\sigma}{\sum_1^3{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma},\\ q&=\frac{\sum_1^3{}_r\,A_{2,r}\,\sigma_r+A_{2,4}\,\sigma}{\sum_2^3{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma},\\ r&=\frac{\sum_1^3{}_r\,A_{3,r}\,\sigma_r+A_{3,4}\,\sigma}{\sum_1^3{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma}.\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(22\,b)\quad \left\{\begin{aligned}
A_{i,1} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(1)}(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}}\,,\\
A_{i,2} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(2)}(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\,,\\
A_{i,3} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(3)}(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\,,\\
A_{i,4} &= \frac{1}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}\sqrt{\alpha_{i,i}^{(4)}(e_{(r+1)}-e_{(r)})\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})(\lambda_4-\lambda_{(r+2)})}}\,.
\end{aligned}\right.$$

Pour trouver la relation qui subsiste entre la variable t et l'argument u des fonctions σ, il suffit de résoudre l'équation (18 *b*) par rapport à dt/du. Si on intègre après, ayant égard à l'équation (15 *b*), on trouve

$$(23\,b)\qquad t = \sqrt{\frac{e_{(r+1)}-e_{(r)}}{B\,(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_0)\,,$$

u_0 étant une constante arbitraire.

On a donc pu intégrer les équations (1 *b*) lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions de 2e degré. Les intégrales trouvées sont des fonctions doublement périodiques de la variable t.

Article III.

1. On peut appliquer l'intégration générale de l'article précédent au cas des équations différentielles (3). Il suffit de prendre (voir chap. I, art. V, § 2):

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2\right],$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[Ap^2+Bq^2+Cr^2\right],$$

$$h_1 = \frac{K^2}{2\sqrt{ABC}}\quad,\quad h_2 = \frac{h}{\sqrt{ABC}}$$

pour réduire les équations différentielles (3) aux (1 *b*) et les intégrales (4) et (5) aux intégrales (2 *b*).

2. L'équation de quatrième degré (12 *b*) devient

$$\mathfrak{r}(\lambda) = \begin{vmatrix}
A^2-\lambda A\,, & 0\;, & 0\;, & Am_1\\
0\;, & B^2-\lambda B\,, & 0\;, & Bm_2\\
0\;, & 0\;, & C^2-\lambda C\,, & Cm_3\\
Am_1\;, & Bm_2\;, & Cm_3\;, & 2h\lambda-K_1
\end{vmatrix} = 0,$$

où nous avons posé

$$(24\,b)\qquad K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2.$$

En développant le détérminant on trouve, aprés avoir divisé par ABC,

$$(25\,b)\qquad \frac{r(\lambda)}{ABC} = (A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)(K_1 - 2h\lambda) + Am_1^2(B-\lambda)(C-\lambda) + Bm_2^2(C-\lambda)(A-\lambda) + Cm_3^2(A-\lambda)(B-\lambda) = 0$$

et si l'on divise par $(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)$

$$(25'\,b)\qquad \frac{Am_1^2}{A-\lambda} + \frac{Bm_2^2}{B-\lambda} + \frac{Cm_3^2}{C-\lambda} - 2\lambda h + K_1 = 0.$$

A cause de l'égalité (24 *b*) cette équation pourra s'écrire encore

$$(25''\,b)\qquad \frac{m_1^2}{A-\lambda} + \frac{m_2^2}{B-\lambda} + \frac{m_3^2}{C-\lambda} + \frac{K^2}{\lambda} = 2h.$$

Nous supposerons que les racines soient simples, que m_1, m_2, m_3 ne soient pas nuls et que les trois quantités A, B, C soient différentes entre elles. Dans ces hypothèses, aucune des racines ne sera égale à A, ni à B, ni à C.

3. Nous aurons, par des calculs sans difficulté,

$$\sqrt{\alpha_{1,1}^{(s)}} = \frac{\alpha_{1,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_1\sqrt{\frac{(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}{\lambda_s - A}},$$

$$\sqrt{\alpha_{2,2}^{(s)}} = \frac{\alpha_{2,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_2\sqrt{\frac{(\lambda_s - C)(\lambda_s - A)}{\lambda_s - B}},$$

$$\sqrt{\alpha_{3,3}^{(s)}} = \frac{\alpha_{3,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_3\sqrt{\frac{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)}{\lambda_s - C}},$$

$$\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}} = \sqrt{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\sqrt{\alpha_{i,i}^{(s)}}$ dans les formules (22 *b*) les équations (21 *b*) deviennent

$$(26\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}
p &= m_1\,\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},\\
q &= m_2\,\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3 + \sigma_3 + M_4\sigma},\\
r &= m_3\,\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},
\end{aligned}\right.$$

ayant posé

$$(27\,b)\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}}\sqrt{(\lambda_1-A)(\lambda_1-B)(\lambda_1-C)}\,,\\ M_2 &= \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\sqrt{(\lambda_2-A)(\lambda_2-B)(\lambda_2-C)}\,,\\ M_3 &= \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\sqrt{(\lambda_3-A)(\lambda_3-B)(\lambda_3-C)}\,,\\ M_4 &= \sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})(\lambda_4-\lambda_{(r)})}\frac{\sqrt{(\lambda_4-A)(\lambda_4-B)(\lambda_4-C)}}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}\,.\end{aligned}\right.$$

Pour trouver l'équation du temps il suffit d'observer que le discriminant B de la forme φ_2 dans notre cas se réduit à

$$B = -\frac{2h}{ABC}\,.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (23 *b*) on trouve

$$(27'\,b)\qquad t = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\,\frac{e_{(r)}-e_{(r+1)}}{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_0)\,.$$

On peut donc énoncer la proposition: *Si l'on a un corps, à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires et qui n'est soumis à aucun couple de rotation, les trois composantes de la rotation par rapport au centre de gravité sont des fonctions elliptiques du temps.*

Le problème de la rotation est donc résolu par les formules de cet article, pour ce qui a rapport aux trois composantes de la rotation.

Article IV.

1. Afin que la solution analytique du problème soit complète, il faut déterminer les neuf cosinus des angles que font les axes principaux avec le système d'axes fixes. On les a appelés dès le commencement (voir Introduction) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Nous avons déjà déterminé p, q, r; il suffit donc d'intégrer les équations de Poisson (voir Introduction (2))

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_2 q\,,\quad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q\,,\quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q\,,$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r\,,\quad \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r\,,\quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r\,,$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p\,,\quad \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p\,,\quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p\,.$$

2. Avant d'aborder cette question dans le cas particulier du problème que nous occupe, nous envisagerons le cas tout à fait général et nous don-

neros dans cet article un *théorème sur la rotation des corps* qui simplifiera beaucoup tous les calculs que nous allons faire. Posons (7)

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad , \quad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad , \quad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

on aura les relations bien connues (8)

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = 0 ,$$

$$iA_1 - A_2\gamma_3 + A_3\gamma_2 = 0$$

d'où l'on tire

$$(28\,b) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= \frac{-\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_3}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1 , \\ A_3 &= \frac{-\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1 \end{aligned} \right.$$

et par suite on a que A_2, A_3 peuvent s'exprimer rationnellement par γ_1, γ_2, γ_3, A_1.

Soit

$$B_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \quad , \quad B_2 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad , \quad B_3 = \alpha_3 - i\beta_3 ;$$

nous pourrons écrire aussi

$$B_1 = \frac{1 - \gamma_1^2}{A_1} \quad , \quad B_2 = \frac{1 - \gamma_2^2}{A_2} \quad , \quad B_3 = \frac{1 - \gamma_3^2}{A_3} .$$

Par conséquent B_1, B_2, B_3 pourront de même être représentés rationnellement par γ_1, γ_2, γ_3, A_1, et de là on déduit que les six cosinus α_1, α_2, α_3 ; β_1, β_2, β_3 seront des fonctions rationnelles des mêmes quantités.

Observons enfin que

$$\gamma_2 - i\gamma_3 = \frac{1 - \gamma_1^2}{\gamma_2 + i\gamma_3} ,$$

donc (9) *les neuf cosinus sont des fonctions rationnelles des trois quantités*

$$(29\,b) \qquad 1 + \gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 .$$

On déduit des équations de POISSON

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2 r - A_2 q ;$$

par suite, ayant égard aux équations (28 *b*), nous obtiendrons

$$(30\,b) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{-\gamma_1(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + i(\gamma_3 r + \gamma_2 q)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} ,$$

ce qui démontre que lorsqu'on connaît p, q, r ; γ_1, γ_2, γ_3, il suffit d'une seule quadrature pour obtenir tous les cosinus.

(7) Voir BRILL, *Sul problema della rotazione dei corpi*. « Annali di Mat. », T. III, S. II.
(8) Voir HERMITE, *Sur quelques applications des foctions elliptiques*. XII, page 27.
(9) VOIR HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*. T, II, page 11.

3. Les propriétés précédentes rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant:

Si p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3 *sont des fonctions uniformes du temps dont les points singuliers sont des pôles, et si dans tout point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions* γ_1, γ_2, γ_3 *n'est pas dépassé par l'ordre d'infini des fonctions* p, q, r, *alors les neuf cosinus seront des fonctions uniformes du temps et tous leurs points singuliers seront des pôles.*

En effet, si p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3 n'ont que des pôles pour points singuliers, on pourra écrire

$$p = \frac{P}{D}\ , \quad q = \frac{Q}{D}\ , \quad r = \frac{R}{D}\,,$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}\ , \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}\ , \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}\,,$$

P, Q, R; Γ_1, Γ_2, Γ_3; D étant des fonctions entières. Supposons qu'on ait retranché toutes les racines communes à ces fonctions, alors on pourra dire que Γ_1, Γ_2, Γ_3, D n'auront pas des racines communes. Pour le voir il suffit d'observer que si Γ_1, Γ_2, Γ_3, D avaient une racine qui ne fût pas une racine de P, Q, R, une au moins des fonctions p, q, r deviendrait infinie d'ordre supérieur aux trois fonctions γ_1, γ_2, γ_3 pour t égal à cette racine, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites.

Cela posé, on peut transformer l'équation (30 *b*) en écrivant

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{(1-\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) - (\gamma_2 - i\gamma_3)(r - iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

$$= \frac{-(1+\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + (\gamma_2 + i\gamma_3)(r + iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}\,.$$

Mais

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (1-\gamma_1)(1+\gamma_1) = (\gamma_2 - i\gamma_3)(\gamma_2 + i\gamma_3)$$

par suite

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1+\gamma_1} - \frac{r - iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = -\frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1-\gamma_1} + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}\,.$$

Si on a égard à l'égalité

$$\gamma_2 r - \gamma_3 q = \frac{d\gamma_1}{dt}\,,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log(1+\gamma_1) - \frac{r-iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = \frac{d}{dt}\log(1-\gamma_1) + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}\,,$$

c'est à dire

$$(31\,b) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right) - \frac{R-iQ}{\Gamma_2 + i\Gamma_3} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right) + \frac{R+iQ}{\Gamma_2 - i\Gamma_3}\,.$$

Les pôles de la fonction $(1/A_1)\ (dA_1/dt)$ seront les valeurs de t qui annullent une ou plusieurs des quantités

$$D + \Gamma_1\ , \quad D - \Gamma_1\ , \quad D\ , \quad \Gamma_2 + i\Gamma_3\ , \quad \Gamma_2 - i\Gamma_3\,.$$

Soit t_0 une de ces valeurs. Nous pouvons distinguer deux cas.

Si t_0 n'est pas en même temps une racine de Γ_2 et Γ_3, alors $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ et $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ ne seront pas nuls à la fois. Il en suit que l'infini de $(1/A_1)(dA_1/dt)$ dépendra du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right)$ ou du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right)$. Mais chacune de ces fonctions est la dérivée logarithmique du rapport de deux fonctions entières, donc dans ce cas $(1/A_1)(dA_1/dt)$ *sera infini de premier ordre et le résidu sera un nombre entier*.

Examinons maintenant le cas où t_0 est une racine de Γ_2 et de Γ_3. Alors $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ et $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ seront nuls à la fois, et puisque

$$(D+\Gamma_1)(D-\Gamma_1) = (\Gamma_2 + i\Gamma_3)(\Gamma_2 - i\Gamma_3)$$

il faudra qu'un des facteurs du premier membre soit nul. Mais les deux facteurs ne sauraient pas être nuls simultanément, parce que D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 n'ont aucune racine commune.

On tire de là que

$$\lim_{t=t_0}\frac{\Gamma_1}{D} = \pm 1. \tag{32 b}$$

Calculons la dérivée de $\gamma_2 \pm i\gamma_3$. On aura

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{D}\right) = \frac{1}{D^2}\left(D\,\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} - (\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\,\frac{dD}{dt}\right).$$

Mais des équations de POISSON on déduit

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \mp ip(\gamma_2 \pm i\gamma_3) - \gamma_1(r \pm iq)$$

$$= \frac{1}{D_2}\{\mp iP(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3) - \Gamma_1(R \mp iQ)\},$$

par suite

$$\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} = \frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)$$

et enfin

$$\frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)} = \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \mp i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}. \tag{34 b}$$

Soit t_0 une racine de $\Gamma_2 \pm i\Gamma_3$ d'ordre n, alors elle sera une racine d'ordre $n-1$ de $d/dt\,(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)$. L'équation (33 *b*) nous montre qu'elle sera aussi une racine d'ordre $n-1$ de $R \mp iQ$, et par conséquent le rapport

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3} \tag{35 b}$$

deviendra pour $t = t_0$ infini de premier ordre. Ayons égard maintenant aux deux expressions (31 *b*) que nous avons trouvé pour $(1/A_1)(dA_1/dt)$. Le premier terme de l'une ou de l'autre sera fini pour $t = t_0$, donc $(1/A_1)(dA_1/dt)$

sera infini de premier ordre. Pour calculer le résidu, il suffira de déterminer le résidu du rapport (35 *b*) qui sera égal à

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\dfrac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}.$$

On peut faire usage de la formule (34 *b*), et on a alors

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\dfrac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\dfrac{dD}{dt} \mp iP\right) - \dfrac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}$$

$$= n \lim_{t=t_0} \frac{-\dfrac{D}{\Gamma_1}}{1 - \dfrac{1}{\Gamma_1}\dfrac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{R \mp iQ}\left(\dfrac{dD}{dt} \mp iP\right)} = n \lim_{t=t_0}\left(-\frac{D}{\Gamma_1}\right),$$

ce qui montre (voir (32 *b*)) que le résidu est un nombre entier; à savoir $\pm n$.

Nous pouvons donc conclure que *dans tous les cas les singularités de la fonction*

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log A_1$$

sont des pôles de premier ordre, les résidus étant des nombres entiers. Par conséquent, A_1 sera une fonction uniforme ayant pour singularités des pôles, et les neuf cosinus qui sont des fonctions rationnelles de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$ seront aussi des fonctions de la même nature.

C. Q. F. D.

4. On peut énoncer le théorème du paragraphe précédent d'une autre manière.

Si on a

$$(36\,b) \qquad p = \frac{P}{D}, \quad q = \frac{Q}{D}, \quad r = \frac{R}{D}; \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

P, Q, R; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D *étant des fonctions uniformes et entières du temps*; *et si* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ *n'ont aucune racine commune*; *les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leurs singularités seront des pôles*.

En effet nous avons déjà vu que si dans chaque point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'est pas dépassé par les ordres d'infini de p, q, r *il faut* que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'aient aucune racine commune. Démontrons maintenant la proposition reciproque. Soit n l'ordre de multiplicité d'une racine de D dans un point singulier. Il y aura une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui deviendra infinie d'ordre n et aucune des fonctions p, q, r deviendra infinie d'ordre supérieur.

Article V.

1. Pour vérifier si les conditions nécessaires et suffisantes pour l'application du théorème fondamental de l'article précédent sont satisfaites dans

le problème de rotation que nous étudions, il faut calculer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ayant déjà calculé dans l'article III les quantités p, q, r.

Faisons coïncider l'axe z avec l'axe du couple de quantité de mouvement. On aura alors

$$\gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

et en substituant à p, q, r les valeurs qu'on a trouvées (voir article III (26 *b*))

$$(37\,b)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{m_1}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}, \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{m_2}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}, \\[2ex] \gamma_3 = \dfrac{m_3}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}, \end{cases}$$

Si donc on fait usage des notations de l'article précédent on trouve (voir article III (26 *b*))

$$(38\,b)\quad \begin{cases} P = m_1\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right), \\[2ex] Q = m_2\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right), \\[2ex] R = m_3\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right), \end{cases}$$

$$(39\,b)\quad \begin{cases} \Gamma_1 = \dfrac{m_1}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right), \\[2ex] \Gamma_2 = \dfrac{m_2}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right), \\[2ex] \Gamma_3 = \dfrac{m_3}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right), \\[2ex] D = M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma. \end{cases}$$

2. Démontrons maintenant que les quatre fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, , \Gamma_3$, D n'ont aucune racine commune. Cela suffira pour prouver que tous les neuf cosinus sont des fonctions uniformes ayant pour singularités de pôles.

Posons

$$M_1\sigma_1 = y_1 \quad , \quad M_2\sigma_2 = y_2 \quad , \quad M_3\sigma_3 = y_3 \quad , \quad M_4\sigma = y_4$$

et ayons égard à l'hypothèse qu'on a faite que m_1, m_2, m_3 ne sont pas nuls. Alors les équations

$$(40\,b)\qquad D = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$$

pourront s'écrire

$$(41\,b)\quad\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\,, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} y_4 = 0\,, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} y_4 = 0\,, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} y_4 = 0\,. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}\,, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}\,, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}\,, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}\,, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}\,, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}\,, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}\,, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}\,, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}\,, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} \end{vmatrix}$$

et en le développant on trouvera

$$\Delta = \frac{ABC\,(B-A)\,(C-A)\,(C-B)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-A)\,(\lambda_2-A)\,(\lambda_3-A)\,(\lambda_4-A)\,(\lambda_1-B)\,(\lambda_2-B)\,(\lambda_3-B)\,(\lambda_4-B)\,(\lambda_1-C)\,(\lambda_2-C)\,(\lambda_3-C)\,(\lambda_4-C)}\,.$$

Le premier membre de l'équation ($25\,b$) peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{F}(\lambda)}{ABC} = 2h\,(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4) = (A-\lambda)\,(B-\lambda)\,(C-\lambda)\,(K_1-2h\lambda)$$
$$+ Am_1^2\,(B-\lambda)\,(C-\lambda) + Bm_2^2\,(C-\lambda)\,(A-\lambda) + Cm_3^2\,(A-\lambda)\,(B-\lambda).$$

En faisant successivement $\lambda = A\,, B\,, C$ on aura

$$(A-\lambda_1)\,(A-\lambda_2)\,(A-\lambda_3)\,(A-\lambda_4) = \frac{Am_1^2\,(B-A)\,(C-A)}{2h}\,,$$

$$(B-\lambda_1)\,(B-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(B-\lambda_4) = \frac{Bm_2^2\,(C-B)\,(A-B)}{2h}\,,$$

$$(C-\lambda_1)\,(C-\lambda_2)\,(C-\lambda_3)\,(C-\lambda_4) = \frac{Cm_3^2\,(A-C)\,(B-C)}{2h}\,.$$

Par suite le dénominateur de Δ sera égal à

$$-\frac{ABCm_1^2\,m_2^2\,m_3^2\,(B-A)^2\,(C-A)^2\,(C-B)^2}{8\,h^3}$$

et par conséquent

$$\Delta = 8\,h_3\,\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{m_1^2 m_2^2 m_3^2\,(B-A)\,(C-B)\,(A-C)}\,.$$

Mais on a supposé que les racines $\lambda_1\,, \lambda_2\,, \lambda_3\,, \lambda_4$ soient différentes entre elles. Il en suit que Δ n'est pas nul, d'où l'on tire la conséquence que les équations ($41\,b$), c'est à dire les équations ($40\,b$), sont incompatibles. Cela signifie que les quatre fonctions D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 n'ont aucune racine commune. Il ressort donc du théorème de l'article précédent que les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leur singularités seront des pôles. Ils seront des rapports de fonctions uniformes et entières, et nous en calculerons les expressions dans l'article suivant.

Article VI.

1. Pour obtenir les expressions des neuf cosinus il suffit de calculer

$$1+\gamma_1\ , \quad \gamma_2+i\gamma_3\ , \quad \alpha_1+i\beta_1$$

puisque les cosinus sont des fonctions rationnelles connues de ces quantités. (Voir article IV, § 2).

Si on prend l'expression de D trouvée dans l'article précédent on a

$$\frac{D}{\sigma}=M_1\frac{\sigma_1}{\sigma}+M_2\frac{\sigma_2}{\sigma}+M_3\frac{\sigma_3}{\sigma}+M_4=\chi(u)\,.$$

Donc $\chi(u)$ est une fonction doublement périodique dont les périodes sont $4\,\omega$ et $4\,\omega'$[10].

Posons $u=2\,v$, il viendra

$$\chi(2\,v)=\varphi(v)$$

et φ aura pour périodes $2\,\omega$ et $2\,\omega'$. Elle deviendra infinie à l'intérieur du parallelogramme des périodes dans les points $0,\omega,\omega',\omega''$, par suite elle sera une fonction elliptique de quatrième degré et l'on aura [11]

$$\varphi(v)=C_1\frac{\sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right)}{\sigma v\sigma(v-\omega)\,\sigma(v-\omega')\,\sigma(v-\omega'')}\,,$$

C_1 étant une constante et

$$u_1+u_2+u_3+u_4=4\,\omega''.$$

Par conséquent

$$D=C_1\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)G$$

et l'on a

$$G=\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\,\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}\,.$$

De même on peut écrire

$$D+\Gamma_1=C_2\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)G,$$

$$\Gamma_2+i\Gamma_3=C_3\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)G,$$

(10) WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, page 28.
(11) Ibid. page 15.

C_2, C_3 étant des quantités constantes, et

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4\,\omega''.$$

On déduit de là les expressions suivantes pour $1 + \gamma_1$ et $\gamma_2 + i\gamma_3$

$$(42\,b)\quad \left\{\begin{aligned} 1 + \gamma_1 &= L_1 \frac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)},\\ \gamma_2 + i\gamma_3 &= L_2 \frac{\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)},\end{aligned}\right.$$

et il faudra supposer [12]

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}{2} \equiv 0,$$

L_1 et L_2 étant des constantes.

2. Posons

$$(43\,b)\quad \left\{\begin{aligned} D' &= \sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)\\ &= \sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right),\\ D' + \Gamma' &= L_1\,\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)\\ &= L_1\,\sigma\left(v - \frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{v_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{v_4}{2}\right),\\ \Gamma'_2 + i\Gamma'_3 &= L_2\,\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_4}{2}\right)\\ &= L_2\,\sigma\left(v - \frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_4}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Les trois fonctions D', $D' + \Gamma'$, $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ seront des fonctions entières et on pourra les substituer à D, $D + \Gamma_1$, $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ dans les formules de l'article précédent. En faisant cette substitution dans la formule (31 *b*) on aura

$$(31'b)\quad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{D' + \Gamma'}{D'} - \frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} = \psi(t)$$

où l'on a posé

$$R - iQ = (R' - iQ')\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\,\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega''\right)}.$$

(12) Nous écrirons $a \equiv b$ lorsque les nombres a et b seront tels que

$$a - b = 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers.

Dans l'article III nous avons établi la relation qui subsiste entre les variables t et u. Elle peut s'écrire (voir ($27'b$))

$$t = n\,(u - u_0) = 2\,n\left(v - \frac{u_0}{2}\right)$$

où n et u_0 sont des quantités constantes. Par suite

$$\frac{1}{A_1}\,\frac{dA_1}{dv} = \frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{1}{2n}\,\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} = \psi_1(v)\,.$$

D'après des propriétés bien connues, on pourra dire que les résidus de la fonction $\psi_1(v)$ seront égaux à ceux de la fonction $\psi(t)$.

3. Cela posé supposons qu'aucune des valeurs u_i ne soit congruente à une valeur v_i. On pourra en déduire qu'aucune des w_i ne sera congruente à une valeur u_i. En effet chaque racine de $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ est une racine de $D'+\Gamma'$ ou de $D'-\Gamma'$, mais elle ne peut pas être une racine de D', parce que dans ce cas D' et $D'+\Gamma'$ auraient une racine commune, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites. Donc les valeurs w_i ne sont pas de racines ni de D' ni de Γ', et par suite on pourra énoncer les propriétés suivantes:

1° pour les valeurs $v \equiv v_i/2$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, son résidu étant $+1$;

2° pour les valeurs $v \equiv u_i/2$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant -1;

3° pour les valeurs $v \equiv w_i/2$ la fonction

$$(44\,b)\qquad -\frac{1}{2n}\,\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3}$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant ± 1.

Prenons les points $w_1/2$, $w_2/2$, $w_3/2$, $w_4/2$ à l'intérieur du parallélogramme des périodes. La somme des résidus de la fonction dans les points d'infini qui sont à l'intérieur du parallélogramme des périodes devant être nulle, il faudra que le résidu de la fonction ($44\,b$) soit égal à $+1$ en deux des quatre points $w_i/2$ et soit égal à -1 dans les autres.

Rappelons maintenant (voir article I, § 3) que la fonction ($44\,b$) doit avoir le résidu égal $+1$ où s'annule $D'-\Gamma'$, et doit avoir le résidu égal -1 où $D'+\Gamma'$ s'annule. Il faudra donc que pour deux des valeurs de la variable v, par ex. $w_3/2$, $w_4/2$, soit nulle la somme $D'+\Gamma'$ et pour les autres $w_1/2$, $w_2/2$ soit nulle la différence $D'-\Gamma'$. Si nous choisissons v_3 et v_4 de manière que l'on ait $v_3 = w_3$, $v_4 = w_4$, on pourra dire:

1° pour

$$v \equiv \frac{v_1}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{v_2}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{w_1}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{w_2}{2}$$

la fonction

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} \tag{45 b}$$

sera infinie de premier ordre et le résidu sera $+1$.

2° pour

$$v \equiv \frac{u_2}{2}$$

la même fonction sera infinie du premier ordre et le résidu sera -1.

3° la fonction (45 *b*) n'aura d'autres infinis que les précédents.

Par suite il viendra [13]

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \zeta\left(v - \frac{v_1}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{v_2}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{w_1}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{w_2}{2}\right)$$

$$- \zeta\left(v - \frac{u_1}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_2}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_3}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_4}{2}\right) + 2m,$$

m étant une costante.

Si on intègre et qu'on désigne par L_3 une nouvelle constante, on trouvera (puisque nous avons posè $u = 2v$):

$$A_1 = L_3 \frac{\sigma\left(v - \frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_2}{2}\right)}{\sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right)} e^{2mv}$$

$$= L_3 \frac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)} e^{mu}.$$

Rappelons les formules (42 *b*) et ayons égard aux égalités $w_3 = v_3$, $w_4 = v_4$. Nous pourrons écrire

$$\tag{46 b} \left\{ \begin{aligned} 1 + \gamma_1 &= L_1 \frac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \\ \gamma_2 + i\gamma_3 &= L_2 \frac{\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \\ \alpha_1 + i\beta_1 &= L_3 \frac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)} e^{mu} \end{aligned} \right.$$

(13) Voir WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, page 20.

où il faut supposer

$$(47b) \qquad w_1 + w_2 = v_1 + v_2 \quad , \quad \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} = 0 .$$

On a ainsi l'expression générale des trois fonctions dont les cosinus dépendent rationnellement d'une manière connue. Il est aisé de voir que les formules gardent la même forme si l'on suppose que quelques–unes des valeurs u_i soient congruentes aux valeurs v_i. Il ne reste à trouver que les relations entre les constantes u_i, v_i, w_i, L_1, L_2, L_3 et m et les costantes mécaniques du problème.

Note au chapitre II.

1. La résolution analytique de la question est composée de deux parties. Dans la première on détermine les composantes de la rotation; dans l'autre on calcule les cosinus des angles que les axes d'inertie font avec les axes fixes.

C'est la même décomposition de la question qu'ont fait Jacobi et la plupart de ceux qui ont traité de la rotation des corps. Il va sans dire que la première question est beaucoup plus simple et plus facile que l'autre.

2. Par rapport à la première question on peut remarquer que pour reconnaître *à priori* que les composantes de la rotation s'expriment par des fonctions elliptiques du temps, il suffit d'avoir égard à la polodie qui est l'intersection de deux quadriques. Les coordonnées de cette courbe sont des fonctions elliptiques d'un paramètre et puisqu'elles sont proportionnelles aux trois composantes de la rotation, celles–ci pourront de même s'exprimer comme des fonctions elliptiques de ce paramètre u. Or on peut démontrer que u est une fonction linéaire du temps. En effet si l'on calcule dt/du on voit tout de suite, à cause des équations (3), que ce rapport est une fonction doublement périodique. Il est facile de démontrer que, si l'équations ($25'b$) n'a pas de racines multiples, dt/du n'a pas d'infinis, ce qui prouve que ce rapport est constant.

2. Relativement à la seconde question on peut dire qu'elle a été résolue aisément dans le chapitre précédent en vertu du théorème de l'article IV. La difficulté très–grave de la détermination des cosinus a été surmontée presque sans calculs. Si on aurait voulu suivre la voie directe il aurait fallu calculer et discuter l'expression ($30'b$) qui peut se mettre sous forme de rapport de deux polynomes rationnels et entiers de 3ème degré par rapport aux fonctions σ. Mais en employant le théorème qu'on vient de citer, il a été suffisant de s'assurer que les numérateurs et les dénominateurs des expressions de γ_1, $\gamma_2 \gamma_3$ ne s'annulent pas ensemble, pour reconnaître que tous les cosinus sont des fonctions uniformes du temps et pour pouvoir après les calculer.

Si on emploie la même méthode dans le cas des problèmes d'EULER et de LAGRANGE on est conduit tout aisément aux mêmes conclusions.

3. Dans un de ces admirables fragments sur la rotation d'un corps que M. LÖTTNER a tirés des manuscrits de JACOBI, on trouve l'explication du succès de la méthode d'intégration de JACOBI dans le cas du problème d'EULER. La voici: l'angle ψ d'EULER formé par l'intersection des plans $\xi\eta$ et xy avec l'axe x s'exprime par une somme d'intégrales elliptiques de troisième espèce auxquelles *est attaché le diviseur* $2\,i$. Puisque la même circonstance favorable se présente dans le problème de LAGRANGE, JACOBI a pu reconnaître *a priori* que son procédé pouvait s'étendre á ce cas.

Allons voir quelle relation subsiste entre l'existence du diviseur $2\,i$ de JACOBI et le théorème de l'article IV.

La dérivée de l'angle ψ d'EULER est donnée par la formule

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{p\gamma_1+q\gamma_2}{1-\gamma_3^2}=\frac{(p+iq)(\gamma_1-i\gamma_2)+i(\gamma_2 p-\gamma_1 q)}{1-\gamma_3^2}$$

$$=\frac{1}{2\,i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{1-\gamma_3}{1+\gamma_3}-2\,\frac{q-ip}{\gamma_1+i\gamma_2}\right]=\frac{1}{2\,i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{D-\Gamma_3}{D+\Gamma_3}-2\,\frac{Q-iP}{\Gamma_1+i\Gamma_2}\right].$$

Si Γ_1, Γ_2, Γ_3, D ne s'annulent pas ensemble, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait dans l'article IV, on a que $d\psi/dt$ est une fonction uniforme dont les singularités sont des pôles du premier ordre et ses résidus sont égaux à $n/2i$, n étant un nombre entier. On tire de là que l'existence du diviseur de JACOBI dépend du théorème de l'article IV, c'est à dire qu'il existe parce que D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 ne s'annulent pas ensemble.

On a donc que le théorème de l'article IV peut remplacer la recherche du diviseur de JACOBI par l'étude directe de $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

4. M. JAHNSKE tout récemment dans quelques Notes exprime l'intention de revenir sur la question que j'ai traitée.

C'est par ces notes que j'ai appris, après la rédaction du présent mémoire, que M. WANGERIN avait traité dans un savant travail un cas particulier en dehors de la question de mécanique céleste. Le cas de M. WANGERIN n'est pas celui des mouvements internes stationnaires qui a été traité dans les chapitres précédents, mais c'est un cas particulier de mouvement adiabatique. Seulement par un théorème que j'ai donné dans le 4ème chapitre les mouvements stationnaires et les mouvements adiabatiques en général restent liés ensembles, c'est à dire il y a un moyen de passer des uns aux autres et même à ceux qui tiennent en même temps des deux types de mouvement.

M. WANGERIN s'est limité à la détermination des composantes de la rotation, parce qu'il ne prend pas en considération les cosinus des angles; c'est pourquoi il s'occupe seulement de la première partie du problème dont on a parlé au premier paragraphe.

Chapitre III.

Les axes permanents de rotation et leur stabilité.

Article I.

1. Déjà dans l'article III du I chapitre nous avons envisagé les axes permanents de rotation et démontré un théorème à leur égard. Nous voulons maintenant étudier la question des axes permanents, de leur distribution, de leur stabilité, et tirer les conséquences qui découlent de ces recherches.

Ecrivons les équations différentielles de la rotation comme nous avons fait dans le 1er chapitre, article V, § 2 (voir aussi le chapitre II). En posant

$$(1_c)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2\right], \\ \mathfrak{f}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right], \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(2_c)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(q,r)}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(r,p)}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(p,q)}. \end{aligned}\right.$$

2. Supposons maintenant que p, q, r soient les coordonnées d'un point en mouvement P' [14].

Puisque les équations précédentes admettent les intégrales

$$(3_c)\qquad \mathfrak{f}_1 = \text{const.} = h_1 \quad , \quad \mathfrak{f}_2 = \text{const.} = h_2\,,$$

et qu'on peut envisager ces équations comme les équations de deux surfaces du 2d degré, on aura que les intersections de ces surfaces seront toutes les trajectoires possibles du point P'. Ces trajectoires seront donc des lignes du 4e ordre (*quartiques*). Pour trouver les rotations permanentes il suffira de trouver les positions dans lesquelles P' est en repos. Pour semplifier on pourra les appeler *les positions d'équilibre du point* P'.

(14) On pourrait appeler le point P' *l'indice de la rotation* pour le distinguer du *pôle de la rotation* (voir le 1er chapitre, article I, § 1) qu'on a désigné par P. Entre les coordonnées p, q, r de P' et les coordonnées ξ, η, ζ de P subsistent les relations

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2}\,\sqrt[4]{ABC}}.$$

Ces positions d'équilibre seront telles que

$$(4_c) \qquad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)} = 0$$

c'est à dire

$$(4'_c) \qquad \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dp}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dp}} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dq}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dq}} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dr}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dr}} .$$

Les équations précédentes représentent les conditions pour que dans le point p, q, r les deux surfaces du 2^e^ degré soient tangentes de sorte que ce point soit un point double d'une des quartiques.

C'est pourquoi on a le théorème (voir chapitre I, article III, § 1):

Les points doubles des quartiques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ *sont les positions d'équilibre du point* P′, *et le lieu de ces points est la courbe ayant pour équations les équations* $(4'_c)$.

Les équations (4_c) peuvent s'écrire (voir (6_a))

$$(4''_c) \qquad \begin{cases} (C - B)\, qr + m_3 q - m_2 r = 0 , \\ (A - C)\, rp + m_1 r - m_3 p = 0 , \\ (B - A)\, pq + m_2 p - m_1 q = 0 , \end{cases}$$

c'est pourquoi *la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu des positions d'équilibre de* P′ *se décompose en courbes d'ordre inférieur sera*

$$(5_c) \qquad (B - C)(C - A)(A - B)\, m_1 m_2 m_3 = 0 .$$

3. Une nouvelle manière d'écrire les équations (4_c) est la suivante (voir $(6'_a)$)

$$(6_c) \qquad A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r} .$$

Si l'on appelle λ la valeur commune aux trois membres, on trouvera

$$(6'_c) \qquad p = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{\lambda - C} .$$

Envisageons maintenant le cas général en supposant que m_1, m_2, m_3 ne s'annullent pas et qu'on ait $A > B > C$.

Tous les points de la courbe, lieu des positions d'équilibre de P′, s'obtiendront des équations précédentes en donnant à λ toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

La courbe aura trois asymptotes qui seront les droites L_1, L_2, L_3 parallèles aux axes coordonnées ξ, η, ζ ayant respectivement pour équations

$$q = \frac{m_2}{A - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{A - C} ,$$

$$r = \frac{m_3}{B - C} \quad , \quad p = \frac{m_1}{B - A} ,$$

$$p = \frac{m_1}{C - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{C - B} .$$

Elle sera formée de trois branches g_1 , g_2 , g_3. La première branche partira du point $-\infty$ de L_1 et aboutira au point $+\infty$ de L_2. Elle correspondra aux valeurs de λ comprises entre A et B. La seconde branche partira du point $-\infty$ de L_2 et aboutira au point $+\infty$ de L_3. Elle correspondra aux valeurs de λ comprises entre B et C. Enfin la dernière branche ira du point $-\infty$ de L_3 au point $+\infty$ de L_1 en passant par l'origine et correspondra à toutes les valeurs de λ plus grandes que A et à toutes celles plus petites que C.

La courbe lieu des positions d'équilibre de P′ *est donc une hyperbole cubique* (15).

4. Lorsque les équations ($4'_\epsilon$) sont équivalentes à une seule équation, ou qu'elles se réduisent à trois identités, alors le lieu des positions d'équilibre de P′ n'est plus une courbe. Afin que ces cas se présentent il faut qu'un ou plusieurs des systèmes suivants de conditions soit vérifié

$$(7_\epsilon) \qquad \begin{cases} C - B = m_3 = m_2 = 0, \\ A - C = m_1 = m_3 = 0, \\ B - A = m_2 = m_1 = 0. \end{cases}$$

Si un seul est vérifié, alors la dégénération du lieu conduira à une droite et à un plan. Si deux sont vérifiés, et par suite les trois sont vérifiés, c'est à dire si l'on a

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

alors chaque point de l'espace sera une position d'équilibre du point P′. Par l'étude que nous venons de faire on a résolu complètement la question des axes permanentes de rotation. Nous consacrerons les articles suivants à la classification des axes permanents selon leur stabilité.

Article II.

1. Commençons par donner la définition de *stabilité de l'équilibre du point* P′. Elle correspondra parfaitement à celle de *rotation stable* du système.

On dira que la position P'_0 de P′ est stable, si, σ étant un nombre aussi petit que l'on veut, on peut trouver un nombre ε tel qu'en plaçant P′ à une distance de P'_0 plus petite que ε, et en le faisant mouvoir d'après la loi représentée par les équations (2_ϵ), il ne s'éloignera jamais de P'_0 au delà de σ.

(15) A l'article IV de ce chapitre on a exposé de quelle manière cette courbe peut se décomposer en courbes d'ordre inférieur.

Cela posé, en suivant un raisonnement semblable à celui bien connu employé par DIRICHLET, on peut démontrer le théorème suivant:

Tous les points isolés des quartiques (3_ϵ) *seront des positions d'équilibre stable du point* P'.

Soit P'_0 un point isolé. Désignons par f_1^0, f_2^0 les valeurs des fonctions f_1, f_2 au point P'_0, et formons l'expression

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2.$$

I sera une fonction continue des coordonnées p, q, r.

Je dis qu'on peut trouver un nombre α tel que la limite inférieure des valeurs de I sur chaque sphère ayant P'_0 pour centre et dont le rayon est plus petit que α, est un nombre positif.

En effet, s'il n'était possible de satisfaire la condition précédente quelque petit qu'on prenait α, les deux surfaces

$$f_1 = f_1^0 \quad , \quad f_2 = f_2^0$$

auraient des points d'intersection réels aussi voisins que l'on voudrait à P'_0 et par suite ce point ne serait pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient.

Désignons par S la sphère ayant pour centre P'_0 et pour rayon α. A l'intérieur de cette surface construisons une autre sphère avec le même centre et avec un rayon plus petit que σ. On l'appelera S'. Soit η' la limite inférieure de I sur la surface S'. Ce nombre sera positif. Or I est une fonction continue, donc, à l'intérieur de S', on pourra construire une troisième sphère S'', avec le centre P'_0, telle que la limite supérieure des valeurs de I à son intérieur soit plus petite que η'.

Soit ε le rayon de la dernière sphère.

Faisons maintenant mouvoir le point P' d'après la loi représentée par les équations (2_ϵ) à partir d'une position interne à S''. Puisque I doit garder une valeur constante pendant le mouvement, sa valeur sera égale à la valeur initiale, c'est à dire sera plus petite que η'. Par suite P' ne rejoindra jamais la surface S', d'où l'on déduit que sa distance du point P'_0 restera toujours plus petite que σ.

C. Q. F. D.

2. On peut généraliser la proposition précédente en démontrant le théorème:

Soit P'_0 *un point isolé d'une quartique appartenant au système* (3_ϵ), *et soit* σ *un nombre aussi petit que l'on veut.*

On pourra trouver deux nombres ε *et* ε' *tels que*

1° *si l'on change* m_1, m_2, m_3 *de quantités constantes plus petites que* ε;

2° *si dans sa position initiale on place* P' *à une distance de* P'_0 *plus petite que* ε,

le point P' *en se déplaçant ne s'éloignera de* P'_0 *au delà de* σ.

En effet envisageons de nouveau les trois sphères S, S', S'' du paragraphe précédent. Soit η'' la limite supérieure des valeurs de I à l'intérieur de S''. Nous aurons $\eta'' < \eta'$. Posons $\eta' - \eta'' = \rho$.

Puisque I est une fonction continue de m_1, m_2, m_3, nous pourrons trouver un nombre ε' tel qu'en changeant m_1, m_2, m_3 de quantités plus petites que ε', les valeurs de I à l'intérieur de la sphère S changent moins que $\rho/4$. Par suite de ce changement la limite inférieure de I sur S' sera plus grande que $\eta' - \rho/4$ et la limite supérieure de I à l'intérieur de S'' sera plus petite que $\eta'' + \rho/4$. Mais $\eta'' + \rho/4 < \eta' - \rho/4$, donc en plaçant P' dans un point initial interne à S'' il se déplacera sans jamais rejoindre la surface S'.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème que nous venons de démontrer en disant qu'*il y a une double stabilité des rotations permanentes qui correspondent aux points isolés: l'une par rapport aux changements du mouvement de rotation, et l'autre par rapport aux changements des mouvements internes*.

3. Passons maintenant à démontrer le théorème inverse de celui de l'article I, c'est à dire que *les points de l'hyperbole cubique qui ne sont des points isolés des quartiques correspondent à des rotations instables*.

Nous nous bornerons dans cet article au cas où aucune des conditions (7 c) n'est satisfaite, en renvoyant à l'article IV pour la démonstration lorsque ces conditions sont vérifiées.

Cela posé on peut être sûr que sur chacune des surfaces (3 c) n'existe qu'un nombre fini de position d'équilibre du point P'. Désignons par P'_0 une de ces positions, et par $\mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2^0$ les valeurs de $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ au point P'_0. On pourra construire une sphère Σ ayant P'_0 pour centre, et telle qu'aucun point des surfaces $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0$, qui est à son intérieur, soit une position d'équilibre de P_0. Or si P'_0 n'est pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient, il y aura une branche réelle de cette courbe qui passe par P'_0.

Soit VP'_0 une partie de cette branche interne à Σ et désignons par 2σ la distance entre les points V et P_0. Enfin soit VV' la partie connexe de VP'_0 qui est située externement à une sphère ayant P'_0 pour centre et dont le rayon est égal à $\varepsilon/2$; ε étant un nombre plus petit que σ et qu'on peut choisir d'ailleurs aussi petit que l'on veut. On voit bien aisément, en rappelant des théorèmes connus sur les fonctions implicites, qu'on pourra prendre le nombre u de manière que chaque point de VV' soit à une distance moindre que $\varepsilon/2$, d'un point de la quartique $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$, et en outre que celle–ci n'ait aucun point double. Il suffit pour cela de remarquer que sur la courbe VV' on n'a aucun point d'équilibre et par suite il n'y a aucun point où les conditions (4 c) soient satisfaites. On tire de là que sur la ligne $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$ existent deux points W' et W, dont l'un est à une distance de P'_0 plus petite que ε, et l'autre à une distance plus grande que σ. Si l'on place P' dans le point W', il doit parcourir la ligne $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$ et rejoindre le point W, c'est à dire en partant d'un point initial qui est éloigné de P'_0 moins que ε, il doit s'éloigner au delà de σ. Cela prouve que P'_0 est une position d'équilibre instable.

Article III.

1. Tous les points d'équilibre du point P', c'est à dire tous les points doubles des quartiques, se trouvent sur l'hyperbole cubique ayant pour équations les équations $(4'_c)$.

Les théorèmes de l'article précédent montrent combien il est important de séparer sur cette courbe les parties où sont les points isolés de celles où sont les noeuds. Les points de passage entre les unes et les autres doivent correspondre aux cuspides des quadriques et nous donneront les points de passage entre les rotations permanentes stables et instables. Nous consacrerons cet article à cette séparation dans le cas général où la cubique ne se décompose pas, c'est à dire lorsqu'on $A > B > C$, m_1, m_2, m_3 n'étant pas nulles. Nous renvoyons à l'article suivant pour le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées.

2. En différentiant deux fois les équations (3_c) on a

$$(8_c) \quad \begin{cases} Apdp + Bqdq + Crdr = 0, \\ A(Ap + m_1)dp + B(Bq + m_2)dq + C(Cr + m_3)dr = 0, \end{cases}$$

$$(9_c) \quad \begin{cases} Adp^2 + Bdq^2 + Cdr^2 + (Apd^2p + Bqd^2q + Crd^2r) = 0, \\ A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2 + (A(Ap + m_1)d^2p + B(Bq + m^2)d^2q \\ \qquad + C(Cr + m_3)d^2r) = 0. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (9_c), après avoir multiplié la première par $-\lambda$. On trouvera, ayant égard aux équations $(6'_c)$,

$$A(A - \lambda)dp^2 + B(B - \lambda)dq^2 + C(C - \lambda)dr^2 = 0.$$

À cause des équations (6_c), les deux équations (8_c) sont équivalentes, par suite il suffira d'examiner les deux équations

$$(10_c) \quad \begin{cases} A(\lambda - A)dp^2 + B(\lambda - B)dq^2 + C(\lambda - C)dr^2 = 0, \\ Apdp + Bqdq + Crdr = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination de dr on trouve

$$A[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)]dp^2 + B[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)]dq^2 \\ + 2AB(\lambda - C)pqdpdq = 0.$$

À la place de p, q, r substituons les valeurs $(6'_c)$. Alors l'équation précédente deviendra

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda-A)}{(\lambda-C)^2}+\frac{Am_1^2(\lambda-C)}{(\lambda-A)^2}\right]dp^2+B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda-B)}{(\lambda-C)^2}+\frac{Bm^2(\lambda-C)}{(\lambda-B)^2}\right]dq^2$$
$$+2\frac{ABm_1m_2(\lambda-C)}{(\lambda-A)(\lambda-B)}dp\,dq=0.$$

Pour séparer les valeurs de λ qui correspondent aux points isolés de celles qui correspondent aux noeuds, il suffira d'examiner pour quelles valeurs de λ la forme différentielle précédente est définie et pour quelles valeurs elle ne l'est pas; et pour cela, il faudra calculer le discriminant de la forme différentielle et examiner son signe. Le rapport entre ce déterminant et la quantité positive $ABC/(\lambda-C)^2$ sera

$$(11_c)\qquad \Delta=(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)\left\{\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}\right\}.$$

Le signe du facteur $(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)$ change lorsque λ passe par les valeurs A, B, C; mais évidemment le signe de l'autre facteur aussi change pour les mêmes valeurs de λ, et par suite le signe de Δ ne changera pas.

Il suffit donc d'examiner les changements de signe du facteur

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Am_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}.$$

Si λ croît, chaque terme du trinome décroît, par suite le trinome changera de signe deux fois seulement, les valeurs A, B, C exceptées: la première fois pour une valeur de λ comprise entre C et B, et une seconde fois pour une valeur comprise entre B et A. Le trinome sera toujours négatif pour $\lambda<C$ et sera positif pour $\lambda>A$.

Il en suit que Δ sera positif le long de la branche g_3 (voir article I, § 3) de l'hyperbole cubique et en deux parties des branches g_1, g_2 adjacentes respectivement aux points à l'infini de L_1 et L_2; tandis qu'il sera négatif dans les deux parties résidues des branches g_1, g_2 qui sont adjacentes au point à l'infini de L_2.

Les points de passage d'une partie à l'autre, c'est à dire des rotations stables aux rotations instables, correspondent aux racines réelles de l'équation

$$(12_c)\qquad \frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}=0$$

qui sont deux et sont comprises entre A *et* B, *et entre* B *et* C.

3. L'équation précédente peut être écrite

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr\}=d\mathfrak{f}_2=\frac{1}{\lambda}d\mathfrak{f}_1=0.$$

Il suffit pour voir cela de faire usage des équations $(6'_c)$.

Les égalités précédentes démontrent le théorème:

Dans les points de passage entre les points isolés et les noeuds, l'hyperbole cubique est tangente aux quadriques appartenant aux systèmes (3_c) *qui se touchent dans ces points.*

Article IV.

1. Nous avons jusqu'à présent envisagé le cas où le produit (5 c) ne s'annule pas. Nous allons maintenant traiter tous les cas qu'on a laissés de côté.

On peut suivre pour cela le même procédé qu'on vient d'employer. Puisque tous les calculs se répètent de la même manière, nous les supprimerons et nous nous bornerons à énoncer les résultats.

$$\text{I}^{\text{er}}\ \text{Cas}\ \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0, \\ m_2 \gtreqless 0, \\ m_3 \gtreqless 0, \end{array}\right.$$

la cubique se décompose en

$$\begin{array}{l} \text{hyperbole} \\ p = 0,\ q = \dfrac{m_2}{\lambda - B},\ r = \dfrac{m_3}{\lambda - C} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre A et } \dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Cm_3^2}} \ \ldots \textit{rotations instables} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array}\right.$$

droite $q = \dfrac{m_1}{B - A}$, $r = \dfrac{m_3}{B - C}$ . . . . *rotations stables.*

$$2^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} m_1 \gtreqless 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtreqless 0, \end{array}\right.$$

la cubique se décompose en

$$\begin{array}{l} \text{hyperbole} \\ p = \dfrac{m_1}{\lambda - A},\ q = 0,\ r = \dfrac{m_3}{\lambda - C} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre B et } \dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2} + C\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \ \ldots \textit{rotations instables} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array}\right.$$

droite $p = \dfrac{m_1}{B - A}$, $r = \dfrac{m_3}{B - C}$ . . . . *rotations instables.*

$$3^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \left\{\begin{array}{c} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} m_1 = 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtreqless 0, \end{array}\right.$$

la cubique se décompose en

$$\text{droite } p = 0,\ q = 0 \left\{\begin{array}{l} r \text{ comprise entre } \dfrac{m_3}{A - C} \text{ et } \dfrac{m_3}{B - C} \ \ldots \textit{rotations instables} \\ r \text{ n'est pas compris entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array}\right.$$

droite $q = 0$, $r = \dfrac{m_3}{A - C}$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $r = \dfrac{m_3}{B - C}$ . . . . *rotations instables*

$$4^{\text{ème}} \text{ Cas} \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 = 0, \end{array} \right.$$

la cubique se décompose en

droite $p = 0$, $r = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} q \text{ comprise entre } \dfrac{m_2}{A - B} \text{ et } \dfrac{m_2}{C - B} \text{ . . . . . } \textit{rotations stables} \\ q \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations instables} \end{array} \right.$

droite $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $q = \dfrac{m_2}{C - B}$ . . . . *rotations stables*

$$5^{\text{ème}} \text{ Cas} \left\{ \begin{array}{c} A > B > C, \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0, \end{array} \right. \qquad \text{(Cas d'EULER)}$$

la cubique se décompose en

droite $p = 0$, $q = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $r = 0$, $p = 0$ . . . . *rotations instables*

$$6^{\text{ème}} \text{ Cas}^{(16)} \; A \gtrless B = C \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 = 0, \end{array} \right.$$

la cubique se décompose en

hyperbole $p = \dfrac{m_1}{\lambda - A}$, $q = \dfrac{m_2}{\lambda - B}$, $r = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre B et } \dfrac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \text{ . . . } \textit{rotations instables} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array} \right.$

droite $p = \dfrac{m_1}{B - A}$, $q = \infty$.

$$7^{\text{ème}} \text{ Cas } A \gtrless B = C \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0^{(17)}, \\ m_3 = 0, \end{array} \right.$$

(16) Lorsque $A \gtrless B = C$ on peut choisir les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$.

(17) Dans ce cas nous supposons qu'on ait choisi les directions des axes de sorte que m_2 et $A - B$ aient le même signe; ce qui est toujours possible.

la cubique se décompose en

$$\text{droite } p = 0 \quad , \quad r = 0 \quad \begin{cases} q > \dfrac{m_2}{A - B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{rotations instables} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textit{rotations stables} \end{cases}$$

droite $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $q = \infty$.

2. Il faut maintenant discuter les cas où le lieu des points d'équilibre de P' devient un plan et une droite

$$1^{\text{er}} \text{ Cas } A \gtrless B = C \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \quad \text{ou } m_1 = 0 \,, \\ m_2 = 0 \,, \\ m_3 = 0 \,, \end{cases}$$

le lieu des points d'équilibre de P devient

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

plan $p = \dfrac{m_1}{B - A}$ (q et r quelconques) . . . . *rotations instables*

$$2^{\text{ème}} \text{ Cas } A = B = C \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \,, \\ m_2 = 0 \,, \\ m_3 = 0 \,, \end{cases}$$

le lieu des points d'équilibre de P devient

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

plan $p = \infty$.

Pour démontrer dans le premier cas que les rotations correspondantes à $p = m_1/(B - A)$ et q et r quelconques sont *instables* on ne peut pas appliquer le théorème qu'on a démontré au § 3 de l'article II.

Remarquons que dans ce cas les intersections des quadriques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ sont un couple de cercles. Les points doubles correspondent au cas où les deux cercles coïncident. Alors les deux quadriques sont tangentes le long du cercle double. Tous les cercles d'intersection ou de contact des quadriques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ sont placés dans des plans perpendiculaires à l'axe de symétrie des deux quadriques et leurs centres sont situés sur cette droite. Le point P est en équilibre dans un point quelconque appartenant aux cercles doubles qui sont placés dans le plan $p = m_2/(B - A)$; mais aussi près de ces cercles que l'on veut existent des couples de cercles simples qui sont parcourus par le point P' avec une vitesse constante.

Cette remarque suffit pour montrer que l'équilibre du point P' dans les points du plan $p = m_1/(B - A)$ est instable, et par suite que les rotations permanentes qui correspondent à ces positions son instables. On tire de là que *le théorème donné dans l'article deuxième du* § 3 *peut s'étendre au cas qu'on avait exclu.*

3. Il reste encore à examiner un cas particulier, savoir lorsque les trois systèmes d'équations (7_c) sont vérifiés. On aura alors

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0.$$

Dans ce cas P′ est en équilibre dans tout point de l'espace; par suite tout point de l'espace est une position d'équilibre stable.

Mais on voit aisément que dans ce cas il n'y a pas de stabilité par rapport à des changements des mouvements internes.

En effet choisissons les axes de manière que l'on ait

$$p \gtrless 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = 0.$$

Si nous prenons

$$m_1 = 0 \quad , \quad m_2 \gtrless 0 \quad , \quad m_3 = 0$$

on aura que, quelque petite que soit la valeur absolue de m_2, la trajectoire de P′ sera un cercle situé dans le plan $q = 0$, ayant le rayon égal à p, et dont le centre est l'origine des axes coordonnées.

Donc les rotations sont *stables* par rapport à des changements des rotations mêmes, mais elles sont instables par rapport au mouvement interne.

De cette manière tous les cas qui peuvent se présenter ont été discutés et dans chacun on a distingué les rotations stables et instables.

Article V.

1. Nous allons développer quelques conséquences des théorèmes des articles précédents.

Commençons par supposer $A > B > C$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Nous envisageons le Ve cas de l'article IV. On peut alors dire que si le couple de quantité de mouvement est suffisamment petit, en prenant la position initiale du pôle de rotation assez proche d'une extrémité de l'axe d'inertie dont le moment est maximum, ou de celui dont le moment est minimum, la polodie sera aussi proche que l'on veut au pôle d'inertie.

2. Une remarque, qui paraît digne d'intérêt, peut être déduite tout de suite des considérations précédentes.

Si l'on voit le pôle de rotation faire des petites oscillations autour d'un certain point, même si le système ne change de forme, ni la distribution des masses ne change non plus, on ne pourra pas conclure que le point autour duquel le pôle oscille soit un pôle d'inertie.

En effet si à l'intérieur du système existent des mouvements stationnaires, le point autour duquel oscille le pôle de rotation au lieu d'être le pôle d'inertie sera l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec le rayon vecteur d'un des points isolés des quartiques que nous avons précédemment envisagées.

3. Passons maintenant à l'étude des petites vibrations de P' autour des positions d'équilibre stable.

Supposons d'abord que la cubique $(4'_c)$ ne se décompose pas et désignons par λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation (12_c). Prenons λ de manière qu'elle ne soit pas comprise entre ces valeur. Alors

$$(13_c) \qquad p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C}$$

seront des valeurs correspondant à une position d'équilibré stable de P', c'est à dire à une rotation permanente stable du système.

Posons

$$p = p_0 + \varpi \quad , \quad q = q_0 + \chi \quad , \quad r = r_0 + \rho$$

et supposons que ϖ, χ, ρ soient des quantités très–petites, de manière qu'on puisse négliger les expressions du second ordre formées avec elles par rapport aux mêmes quantités. Alors, puisque les valeurs constantes p_0, q_0, r_0 satisfont aux équations $(4'_c)$, les équations (2_c) pourront s'écrire

$$(14_c) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A \frac{d\varpi}{dt} + \frac{m_3 (\lambda - B)}{\lambda - C} \chi - \frac{m_2 (\lambda - C)}{\lambda - B} \rho = 0 , \\ & B \frac{d\chi}{dt} + \frac{m_1 (\lambda - C)}{\lambda - A} \rho - \frac{m_3 (\lambda - A)}{\lambda - C} \varpi = 0 , \\ & C \frac{d\rho}{dt} + \frac{m_2 (\lambda - A)}{\lambda - B} \varpi - \frac{m_1 (\lambda - B)}{\lambda - A} \chi = 0 . \end{aligned} \right.$$

Pour intégrer ces équations posons

$$\varpi = a e^{zt} \quad , \quad \chi = b e^{zt} \quad , \quad \rho = c e^{zt} ,$$

a, b, c, z étant des quantités constantes; z sera une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} Az \; , & \dfrac{m_3 (\lambda - B)}{\lambda - C} \; , & - \dfrac{m_2 (\lambda - C)}{\lambda - B} \\ - \dfrac{m_3 (\lambda - A)}{\lambda - C} \; , & Bz \; , & \dfrac{m_1 (\lambda - C)}{\lambda - A} \\ \dfrac{m_2 (\lambda - A)}{\lambda - B} \; , & - \dfrac{m_1 (\lambda - B)}{\lambda - A} \; , & Cz \end{vmatrix} = 0 .$$

En développant le déterminant on trouve

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C) \left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3} \right] z = 0$$

d'où l'on tire

$$z = 0 \quad , \quad z = \pm i \sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC} \left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3} \right]} .$$

De l'hypothèse que nous avons faite par rapport aux valeurs de λ, on peut déduire que les racines z qui ne sont pas nulles, sont imaginaires. Par suite la période de vibration du point P′ autour de la position d'équilibre stable sera

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}}\,.$$

Si l'on change λ entre les limites établies au commencement de ce paragraphe, *la formule précédente donnera toutes les périodes avec lesquelles le pôle de rotation peut osciller autour des positions d'équilibre stable.* Ajoutons les équations (14_c), après les avoir multipliées par $m_1/(\lambda - A)$, $m_2/(\lambda - B)$, $m_3/(\lambda - C)$. On aura

$$\frac{Am_1}{\lambda - A}\frac{d\varpi}{dt} + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\frac{d\chi}{dt} + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

et en intégrant

$$(15_c)\qquad \frac{Am_1}{\lambda - A}\varpi + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\chi + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\rho = \text{const}\,.$$

De même ajoutons les équations (14_c) après les avoir multipliées par $(\lambda - A)\varpi$, $(\lambda - B)\chi$, $(\lambda - C)\rho$. Nous trouverons en intégrant

$$(16_c)\qquad A(\lambda - A)\varpi^2 + B(\lambda - B)\chi^2 + C(\lambda - C)\rho^2 = \text{const}\,.$$

Ces intégrales montrent que le mouvement du point P′ a lieu sur une ellipse appartenent au plan ($14'_c$), c'est à dire à un plan parallèle au plan tangent aux surfaces (3_c) au point p_0, q_0, r_0.

4. Il n'y a pas de difficulté à discuter les cas particuliers qui peuvent se présenter. Il suffit pour cela d'avoir égard aux résultats qu'on a établi dans l'article précédent.

Nous examinerons seulement le cas où deux des moments d'inertie sont égaux, le troisième étant différent. C'est à dire quand on a

$$A \gtrless B = C\,.$$

Alors en choisissant les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$, et en employant les résultats qu'on a trouvé dans le cas VI de l'article IV du Chap. III on aura que les rotations stables seront données par

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}\quad,\quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}\quad,\quad r_0 = 0\,,$$

λ étant compris entre

$$B \quad \text{et} \quad \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}}$$

Par suite, les périodes des vibrations du pôle de rotation autour des positions d'équilibre stable seront données par la formule

$$T = \frac{2\pi B}{(\lambda - B)\sqrt{\frac{\lambda - A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3}\right]}} = \frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1} + \frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}}\,.$$

Lorsqu'il n'y a pas de mouvements internes il y a une seule position d'équilibre stable du pôle de rotation (I cas, article IV) qui correspond à $p = p_0$, $q = r = 0$ et la période de vibration du pôle autour de cette position est donnée par la période eulerienne $2\pi B/(B - A)p_0$. On tire de là que les mouvements internes donnent naissance à un nombre infini de positions d'équilibre stable du pôle et changent les valeurs de la période eulerienne, de manière qu'elle peut prendre toutes les valeurs données par la formule précédente.

Chapitre IV

Rotation d'un corps à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique quelconque.

Article I.

1. Dans les chapitres précédents nous avons étudié la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires.

Il faut en général l'intervention de forces à l'intérieur pour maintenir stationnaires ces mouvements. On peut maintenant approfondir l'étude de ces forces et voir pourquoi et quand elles sont nécessaires (article VI, § 3) et l'on peut étudier après ce qu'il arrive lorsqu'elles n'existent pas (article VII, VIII), ou lorsqu'elles ne sont pas capables de maintenir tous les mouvements stationnaires (article IX).

L'étude de ces questions sera le but de ce chapitre dans lequel nous introduirons les idées et la terminologie que Helmholtz a employées dans ses travaux sur les systèmes cycliques [18].

2. Commençons par déterminer la force vive de tout système qui tourne autour d'un point fixe.

Soit ξ, η, ζ un système d'axes en mouvement dont l'origine est fixe. Désignons par p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de rotation dans la direction des axes.

Supposons que u, v, w soiet les composantes de la vitesse relative aux axes ξ, η, ζ d'un point du système ayant pour coordonnées ξ, η, ζ. Alors les composantes de la vitesse absolue seront

$$u + q\zeta - r\eta \quad , \quad v + r\xi - p\zeta \quad , \quad w + p\eta - q\xi .$$

Si la densité du système est ρ, la force vive sera

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \{(u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2\} dS ,$$

(18) Crelle's Journal. Bd. 97.

S étant l'espace occupé par le système en mouvement. On tire de la

(1 *d*) $$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq)$$
$$+ m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0$$

où l'on a désigné par A , B , C les moments d'inertie du système par rapport aux axes ξ , η , ζ; par D , E , F les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes η , ζ; ζ , ξ; ξ , η, et l'on a posé

$$m_1 = \int\limits_S \rho\,(w\eta - v\zeta)\,dS \quad , \quad m_2 = \int\limits_S \rho\,(u\zeta - w\xi)\,dS \quad , \quad m_3 = \int\limits_S \rho\,(v\xi - u\eta)\,dS \; ,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\int\limits_S \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dS \; .$$

On a donc désigné pa m_1 , m_2 , m_3 les composantes du couple de quantité de mouvement relatif aux axes ξ , η , ζ et par T_0 la force vive du même mouvement relatif.

3. On peut appeler ces mouvements relatifs les *mouvements internes du système*. S'ils ne changent la forme ni la distribution de la densité à l'intérieur du système ils vérifieront la condition

$$\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial\xi} + \frac{\partial\,(\rho v)}{\partial\eta} + \frac{\partial\,(\rho w)}{\partial\zeta} = 0$$

et le long de toute surface de discontinuité on aura

$$\rho\,(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) = \rho'\,(u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz)$$

en désignant par n la normale à la surface de discontinuité, par ρ , u , v, w la densité et les composantes de la vitesse d'un côté de cette surface, et par ρ', u', v', w' les valeurs des mêmes quantités de l'autre côté.

En général m_1 , m_2 , m_3 , T_0 seront des fonctions du temps, mais si les mouvements internes seront *stationnaires* on devra les regarder comme des constantes.

Article II.

1. – Lorsque les mouvements internes sont stationnaires et le système n'est pas soumis à des forces externes on a les relations (en prenant ξ, η, ζ pour axes d'inertie: voir Introduction)

(2 *d*) $$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const.},$$

(3 *d*) $$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{const.}$$

Si la force vive T est constante (voir article précédent § 2) on doit avoir

(4 *d*) $$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

puisque T_0 est constante (et D = E = F = 0).

Nous allons déterminer les conditions pour que la relation précédente soit satisfaite, quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

2. En dérivant l'équation (4_d) par rapport à t, on trouve

$$(4'_d) \qquad m_1 \frac{dp}{dt} + m_2 \frac{dq}{dt} + m_3 \frac{dr}{dt} = 0 .$$

Multiplions les équations différentielles du mouvement (voir Introduction)

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr + m_3 q - m_2 r = 0 ,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp + m_1 r - m_3 p = 0 ,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq + m_2 p - m_1 q = 0 ,$$

par m_1/A, m_2/B, m_3/C. En les ajoutant on aura, à cause de l'équation $(4'_d)$,

$$\frac{m_1}{A}(B - C)\, qr + \frac{m_2}{B}(C - A)\, rp + \frac{m_3}{C}(A - B)\, pq$$

$$- m_2 m_3 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) p - m_3 m_1 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) q - m_1 m_2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) r = 0 .$$

Il est aisé de trouver les conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour que cette équation soit satisfaite quelles que soient les valeurs de p, q, r.

Elles sont ou

$$A = B = C ,$$

ou

$$B = C \quad , \quad m_2 = m_3 = 0$$

ou

$$C = A \quad , \quad m_3 = m_1 = 0$$

ou enfin

$$A = B \quad , \quad m_1 = m_2 = 0 .$$

On tire de là le théorème suivant: *Il est nécessaire et suffisant pour que la force vive du système soit constante, quel que soit le mouvement initial, que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, ou qu'il soit un ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe du mouvement interne* (19).

3. On peut maintenant se poser la question suivante:

En prenant d'une façon particulière les conditions initiales du mouvement, est-ce qu'on peut trouver d'autres cas dans lesquels la force vive reste constante?

On peut répondre tout de suite affirmativement à cette question; à cet effet il suffit de remarquer que la force vive sera constante toutes les fois

(19) Il est évident que le dernier cas comprend le premier.

que le mouvement de rotation du système sera permanent (voir le chapitre III). Mais ce cas n'est pas le seul; il y en a aussi d'autres.

Pour les trouver il suffit de chercher les conditions qui doivent être remplies pour que les équations ($2\,d$), ($3\,d$), ($4\,d$) aient un nombre infini de racines communes. Par l'élimination de p entre ces équations on trouve

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 + 2(B-A)m_2 q + 2(C-A)m_3 r = \text{const.},$$

$$(Am_2^2 + Bm_1^2)q^2 + (Am_3^2 + Cm_1^2)r^2$$
$$+ 2Am_2 m_3 qr - 2Agm_2 q - 2Agm_3 r = \text{const.},$$

ayant posé

$$(4\,d) \qquad g = m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

Les équations précédentes auront un nombre infini de racines communes lorsque leur résultante aura tous ses coefficients nuls.

Si l'on écrit que le coefficient du terme de 4ème degré est nul, il vient

$$\{m_1^2 BC(B-C) + m_2^2 CA(C-A) + m_3^2 AB(A-B)\}^2$$
$$+ 4ABC\{m_2^2 m_3^2 A(B-A)(C-A) + m_3^2 m_1^2 B(C-B)(A-B)$$
$$+ m_1^2 m_2^2 C(A-C)(B-C)\} = 0.$$

Cette équation sera satisfaite seulement si l'on a

$$A = B = C,$$

ou si m_1, ou m_2, ou m_3 s'annule. En effet on peut l'écrire

$$\{m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B)\}^2$$
$$+ 4A^2 BCm_2^2 m_3^2 (B-A)(C-A)$$
$$= \{m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B=C)\}^2$$
$$+ 4B^2 CAm_3^2 m_1^2 (C-B)(A-B)$$
$$= \{m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A)\}^2$$
$$+ 4C^2 ABm_1^2 m_2^2 (A-C)(B-C) = 0.$$

On tire de là que, si la condition $A = B = C$ n'est pas satisfaite et si les quantités m_1, m_2, m_3 ne sont pas nulles, T sera constante seulement lorsque p, q, r seront constantes. D'où l'on déduit le théorème:

Si l'on a un système qui n'est pas soumis à des forces externes et dans lequel subsistent des mouvement stationnaires, la condition nécessaire et suffisante pour que la force vive soit constante, lorsque A, B, C *ne sont pas égaux, et* m_1, m_2, m_3 *ne sont pas nuls, est que la rotation du système soit permanente.*

4. Supposons maintemant qu'on ait $m_2 = 0$. Alors la dernière équation s'écrira

$$m_1^2 C(B-C) - m_3^2 A(A-B) = 0$$

d'où

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}.$$

Donc il faut que B soit comprise entre A et C. En supposant $A > B > C$ on pourra poser

$$m_1 = \varepsilon \sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_3 = \pm \varepsilon \sqrt{C(B-C)}$$

ε désignant une quantité constante réelle. Les équations (2_d) et (3_d) deviendront

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.},$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 + 2\varepsilon A \sqrt{A(A-B)}\, p \pm 2\varepsilon C \sqrt{C(B-C)}\, r = \text{const.}$$

Par l'élimination de q entre ces équations on trouve

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\, p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\, r = \text{const.}$$

Cette égalité peut s'écrire de la manière suivante

$$(5_d) \qquad \left[\sqrt{A(A-B)}\, p \pm \sqrt{C(B-C)}\, r + \varepsilon(A-C)\right]$$
$$\times \left[\sqrt{A(A-B)}\, p \mp \sqrt{C(B-C)}\, r + \varepsilon(A+C)\right] = \text{const.}$$

Supposons que les valeurs initiales de p et de r soient telles que le premier facteur du premier membre de l'équation précédente soit nul; on peut démontrer alors que ce facteur sera toujours nul. Cette proposition est évidente lorsque les valeurs initiales de p et de r n'annulent pas le deuxième facteur. Mais s'ils l'annulent, alors on a

$$p = \frac{-\varepsilon A}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{m_1}{B-A} \quad , \quad r = \frac{\pm \varepsilon C}{\sqrt{C(B-C)}} = \frac{\pm \varepsilon \sqrt{C(B-C)}}{B-C} = \frac{m_3}{B-C}$$

et par suite le mouvement de rotation est permanent (voir chapitre III, article IV, § 1, 3ème cas); p et r garderont alors une valeur constante et par conséquent le premier facteur sera toujours nul.

Observons maintenant que si le premier facteur est nul, la condition (4_d) peut être déduite comme une conséquence. On peut donc conclure: *la force vive sera constante lorsqu'on a*

$$m_1 = \varepsilon \sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_2 = 0 \quad , \quad m_3 = \pm \varepsilon \sqrt{C(B-C)}$$

et que les conditions initiales du mouvement sont telles que l'égalité

$$\sqrt{A(A-B)}\, p \pm \sqrt{C(B-C)}\, r + \varepsilon(A-C) = 0$$

soit vérifiée, q ayant une valeur quelconque.

Réciproquement si la condition (4_d) doit être remplie, ou elle doit coïncider avec l'équation qu'on obtient en annulant le premier facteur de l'équation (5_d), ou les deux facteurs du premier membre de cette équation devront être constants et par suite p, q, r seront constants, c'est à dire le mouvement de rotation sera permanent.

Remarquons enfin que si l'on suppose que non seulement m_2, mais m_1 ou m_3 soit nul, alors il faut qu'on ait $B = A$ ou $B = C$, c'est pourquoi on revient aux cas envisagés auparavant (§ 2).

5. On peut résumer l'analyse qu'on vient de faire dans cette proposition:

Tous les cas particuliers dans lesquel la force vive du système est constante se réduisent aux suivants:

1° *Le mouvement de rotation du système est permanent;*

2° *On a, ε étant une constante,*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_2 = 0 \quad , \quad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)} \quad , \quad A > B > C$$

et les conditions initiales sont telles que

$$p\sqrt{A(A-B)} \pm \sqrt{C(B-C)} + \varepsilon(A-C) = 0\,;$$

3° *L'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe du mouvement interne.*

Dans le 3ème *cas les conditions initiales du mouvement peuvent être quelconques.*

Les cas précédents exceptés, la force vive du système doit changer; par suite il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne. C'est pourquoi si ces forces n'existent pas le mouvement interne doit cesser d'être stationnaire.

Donc *de la même manière que les mouvements internes changent le mouvement de rotation du système, celui-ci tend à changer les mouvements internes.*

6. Nous venons de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la force vive du système soit constante. Or ces conditions sont nécessaires pour que le mouvement interne se maintienne stationnaire sans qu'il intervienne aucune force, mais évidemment elles ne sont pas suffisantes. En effet la somme des travaux des forces qui servent à maintenir stationnaire le mouvement peut être nulle, sans que chaque force soit nulle.

Nous verrons dans l'article VI les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement soit stationnaire lorsqu'aucune force n'agit.

Article III.

1. Nous avons vu dans l'article précédent que la force vive d'un système où subsistent des mouvements stationnaires change en général avec le temps. Nous consacrerons cet article pour en calculer l'expression.

Il suffit pour cela d'employer les formules que nous avons trouvées dans le chapitre II, article III, § 3. On a

$$p = m_1 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_1 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - A}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$q = m_2 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_2 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - B}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$r = m_3 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_3 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - C}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}$$

où pour symétrie on a remplacé σ par σ_4.

On tire de la

$$(6\,d) \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}.$$

Mais les quantités λ_i sont les racines de l'équation (voir $(25'_b)$)

$$\frac{Am_1^2}{\lambda - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda - C} + 2h\lambda - K_1 = 0$$

par suite on aura

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

$$= \frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} = -2h\lambda_i + K_1.$$

Ayant égard à l'équation $(24\,_b)$ on peut écrire

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2$$

donc (comparer $(25''_b)$)

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h.$$

et enfin

$$(6'_d) \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} - 2h.$$

2. Il n'y a plus maintenant de difficulté pour calculer la force vive. Il suffit d'employer la formule $(1\,d)$ de l'article I dans laquelle on prendra $D = E = F = 0$. On aura

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0.$$

Mais (voir (2_d))

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}$$

Donc, à cause de l'égalité ($6'_d$), on trouvera

$$T = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} - h + T_0.$$

Article IV.

1. Examinons maintenant les variations produites par le mouvement de rotation du système sur le mouvement interne, lorsqu'il n'y a pas de forces capables de le maintenir stationnaire.

Pour simplifier nous envisagerons d'abord un cas particulier, et dans les articles suivants nous discuterons le cas le plus général.

2. Supposons que le mouvement interne soit la rotation d'un tore de révolution homogène autour de son axe de symétrie, et que celui-ci soit fixe dans l'intérieur du corps.

Désignons par ω la vitesse angulaire de rotation du tore, par α, β, γ les cosinus de direction de l'axe du tore avec les axes d'inertie du système ξ, η, ζ; par μ le moment d'inertie du tore par rapport à l'axe de symétrie.

Les composantes du couple de quantité de mouvement due au mouvement interne dans les directions ξ, η, ζ seront

$$m_1 = \mu\omega\alpha \quad , \quad m_2 = \mu\omega\beta \quad , \quad m_3 = \mu\omega\gamma$$

et la force vive du mouvement interne sera

$$T_0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Par suite la force vive du système, dont la forme et la distribution des masses ne changera pas, sera (voir (1_d))

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Si le système n'est soumis à aucune force externe nous pouvons écrire les équations du mouvement de la manière suivante (voir Introduction, eq. (7))

$$(7_d) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + \mu\omega(q\gamma - r\beta) + \mu\alpha\dfrac{d\omega}{dt} = 0, \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + \mu\omega(r\alpha - p\gamma) + \mu\beta\dfrac{d\omega}{dt} = 0, \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + \mu\omega(p\beta - q\alpha) + \mu\gamma\dfrac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases}$$

Si le tore aussi, en tournant autour de son axe, n'est soumis à aucune force, on aura, à cause du principe des forces vives

$$(1'_d) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 = \text{const.}$$

3. Nous avons trouvé quatre équations (7_d) et ($1'_d$) où paraissent quatre fonctions inconnues, c'est à dire p, q, r, ω. Les quantités p, q, r déterminent la rotation du système, et ω détermine le mouvement interne.

En dérivant l'équation ($1'_d$) par rapport à t on trouve

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt}\right)$$

$$+ \mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \mu\omega\frac{d\omega}{dt} = 0\,.$$

Ajoutons les équations (7_d) après les avoir multipliées par p, q, r. Il viendra

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu(p\alpha + q\beta + r\gamma)\frac{d\omega}{dt} = 0\,.$$

D'où

$$\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = 0$$

et en intégrant

$$(8_d) \qquad \omega + \alpha p + \beta q + \gamma r = \text{const.}$$

Entre ω, p, q, r subsiste donc une relation linéaire à coefficients constants. A l'aide de cette relation on peut éliminer ω dans les équations (7_d). En intégrant ces équations on aura p, q, r et par suite, à cause de l'équation (8_d), on aura ω.

Il est aisé de voir sans même faire des calculs que le problème de l'intégration peut se reconduire aux quadratures et qu'on obtient des fonctions elliptiques. Il suffit pour cela de remarquer que par le principe de la conservation des aires on a l'intégrale suivante des équations (7_d)

$$(Ap + \mu\omega\alpha)^2 + (Bq + \mu\omega\beta)^2 + (Cr + \mu\omega\gamma)^2 = \text{const.}$$

Remplaçons dans cette équation et dans l'équation ($1'_d$) ω par la valeur qu'on tire de l'équation (8_d). On trouvera deux relations de 2ème degré entre p, q, r. On déduit de là que p, q, r peuvent s'exprimer comme des fonctions elliptiques d'un paramètre, et par une quadrature on peut trouver une relation entre ce paramètre et le temps. L'équation (8_d) montre que même ω peut s'obtenir d'une manière analogue. Nous en resterons là dans la solution de ce cas particulier, parce que nous considérerons le cas général dans les articles suivants.

Article V.

1. Nous allons discuter la question tout à fait générale de la rotation autour du centre de gravité d'un corps dans lequel existe un système polycyclique quelconque [20]. Le cas que nous avons étudié dans l'article précédent n'est qu'un cas très–particulier de mouvement monocyclique. Nous pouvons supposer des mouvements polycicliques de plusieurs sortes. Comme type nous pouvons par exemple envisager approximativement des réseaux de canaux dont les sections soient très–petites par rapport à leurs longueurs, et dans lesquels circulent des fluides homogènes [21].

2. Soient $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ les coordonnées cycliques du système et $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$ soient les paramètres.

L'expression de la force vive du mouvement interne sera en général

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\frac{dp_i}{dt}\frac{dp_s}{dt} + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_h c_{ih}\frac{dp_i}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\,\omega_i\,\omega_s + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_h c_{ih}\,\omega_i\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

en désignant par $\omega_i = dp_i/dt$ les intensités cycliques du système.

Nous verrons après les termes qu'on doit négliger dans cette expression. Les coefficients a_{is}, b_{hk}, c_{ih} seront des fonctions des paramètres.

Les composantes du couple de quantité de mouvement seront

$$(9\,d)\qquad \left\{\begin{aligned} m_1 &= \sum_1^n{}_i a_i\frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h e_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i a_i\,\omega_i + \sum_1^m{}_h e_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,,\\ m_2 &= \sum_1^n{}_i b_i\frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h f_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i b_i\,\omega_i + \sum_1^m{}_h f_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,,\\ m_3 &= \sum_1^n{}_i c_i\frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h g_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i c_i\,\omega_i + \sum_1^m{}_h g_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\end{aligned}\right.$$

où $a_i, b_i, c_i, e_h, f_h, g_h$ seront des fonctions des paramètres. On pourra aussi supposer que les moments d'inertie A, B, C et les moments mixtes soient des fonctions des paramètres.

La force vive du système sera (voir article I, eq. (1 *d*))

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq)$$
$$+ m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0\,.$$

(20) Voir HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*. Zweites Buch. Abschitt 5.

(21) Dans l'art. IX nous envisagerons un cas de rotation d'un solide qui renferme un fluide dans un récipient tubulaire dont la section est quelconque.

3. Un déplacement virtuel du système sera déterminé par les composantes d'une rotation infiniment petite qu'on désignera par $\delta\varpi$, $\delta\chi$, $\delta\rho$ et par les differentielles δp_i et $\delta\varpi_h$. Ecrivons le travail virtuel sous la forme

$$U = M_\xi \delta\varpi + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho + \sum_1^n {}_i P_i \delta p_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h \delta\varpi_h .$$

M_ξ, M_η, M_ζ seront les composantes du couple de rotation; P_i seront les forces correspondant aux coordonnées cycliques p_i et Π_h celles correspondant aux paramètres ϖ_h.

Par des formules connues on aura

$$\begin{aligned}
\delta p &= \frac{d}{dt}\delta\varpi + q\delta\rho - r\delta\chi ,\\
\delta q &= \frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\varpi - p\delta\rho ,\\
\delta r &= \frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\varpi .
\end{aligned}$$

En employant le principe de HAMILTON on trouve donc l'équation suivante

$$\begin{aligned}
0 = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & \frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{d}{dt}\delta\varpi + q\delta\rho - r\delta\chi\right) + \frac{\partial T}{\partial q}\left(\frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\varpi - p\delta\rho\right) \\
& + \frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\varpi\right) \\
& + \sum_1^n {}_i \left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt}\right)\frac{d}{dt}\delta p_i \\
+ \sum_1^m {}_h \left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k b_{hk}\frac{d\varpi_k}{dt}\right)&\frac{d}{dt}\delta\varpi_h + \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial\varpi_h}\delta\varpi_h \\
& + M_\xi\delta\varpi + M_\eta\delta\chi + M_\zeta\delta\rho + \sum_1^n {}_i P_i \delta p_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h \delta\varpi_h \Big\} dt
\end{aligned}$$

où l'on doit supposer que $\delta\varpi$, $\delta\chi$, $\delta\rho$, δp_i, $\delta\varpi_h$ soient nuls aux temps t_0, t_1.

Par des intégrations par parties on trouve les équations différentielles du mouvement

$$(10\,d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta ,\\
&\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_i a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt}\right) = P_i ,\\
&\frac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k b_{hk}\frac{d\varpi_k}{dt}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varpi_h} = \Pi_h .
\end{aligned}\right.$$

4. Supposons maintenant que les paramétres changent si lentement que leurs dérivées par rapport à t soient infiniment petites.

En les négligeant, on trouvera que la force vive du mouvement interne sera

$$T'_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is} \omega_i \omega_s .$$

La force vive totale sera

$$T' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) + \sum_{1}^{n}{}_i (a_i p + b_i q + c_i r)\,\omega_i + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_i \omega_s$$

et les équations différentielles du mouvement deviendront

$$(10'_d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial p} + q\frac{\partial T'}{\partial r} - r\frac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial q} + r\frac{\partial T'}{\partial p} - p\frac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial r} + p\frac{\partial T'}{\partial q} - q\frac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta ,\\
&\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s\right) = P_i ,\\
&\frac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_{1}^{n}{}_i c_{ih}\,\omega_i\right) - \frac{\partial T'}{\partial \tilde{\omega}_h} = \Pi_h .
\end{aligned}\right.$$

Pour que le mouvement interne soit cyclique, même si les dérivées des intensités cycliques ne sont pas négligeables, il faut supposer que les coefficients c_{ih} soient des quantités négligeables [22].

Alors les équations précédentes deviennent

$$(10''_d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial p} + q\frac{\partial T'}{\partial r} - r\frac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial q} + r\frac{\partial T'}{\partial p} - p\frac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta ,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial r} + p\frac{\partial T'}{\partial q} - q\frac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta ,\\
&\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s\right) = P_i ,\\
&\frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \Pi_h .
\end{aligned}\right.$$

Il est inutile d'ajouter que le système ne sera *rigoureusement cyclique* que si les paramètres seront constants.

(22) Voir VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik*. 1er Bd., page 86.

5. En supposant que le couple de rotation soit nul, ajoutons les trois premières équations (10_d) aprés les avoir multipliées par $\partial T/\partial p$, $\partial T/\partial q$, $\partial T/\partial r$. On trouvera

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}=0$$

et en intégrant

$$(11_d)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2=K^2.$$

Désignons par x, y, z un système d'axes fixes et représentons dans la table suivante les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes ξ, η, ζ

	ξ, η, ζ
x	α_1, α_2, α_3
y	β_1, β_2, β_3
z	γ_1, γ_2, γ_3.

En employant les formules de POISSON (Introd., eq. 2), on tire des équations (10_d), si l'on suppose toujours $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

d'où par intégration

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

$$\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

Ces intégrales sont les intégrales des aires et l'équation (11_d) peut être déduite comme une conséquence d'elles.

Si le plan xy est le plan invariable, alors les deux premières constantes sont nulles et la troisième est K; par suite il vient

$$(12_d)\qquad \gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial p}\quad,\quad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial q}\quad,\quad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial r}.$$

6. On tire très-facilement des équations (10_d), étant $\nu \leqq n$,

$$p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}\,\omega_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$

$$+\sum_{1}^{m}{}_{h}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}-\sum_{1}^{m}{}_{h}\frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}{}_{h}\Pi_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}.$$

Cette équation peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_i}+\sum_{1}^{m}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_h}{\partial t}\right)}\right)$$

$$-\left\{\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_\iota}{dt}+\sum_{1}^{m}{}_{h}\left[\frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\frac{\partial\tilde{\omega}_h}{dt}+\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\frac{d^2\tilde{\omega}_h}{dt^2}\right]\right\}$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}{}_{h}\Pi_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

Mais on a

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_{1}^{n}{}_{i}\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}+\sum_{1}^{m}{}_{h}\left[\frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}+\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\frac{d^2\tilde{\omega}_h}{dt^2}\right],$$

$$2T=p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_{1}^{n}{}_{i}\,\omega^i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}+\sum_{1}^{m}{}_{h}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt};$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^{n}\omega_i\frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_i}\right)$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}{}_{h}\Pi_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}-\sum_{\nu+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}$$

Supposons que les intensités cycliques $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \cdots, \omega_n$ soient constantes, alors il viendra

$$(13\,d)\quad \frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^{n}\omega_i\frac{\partial T}{d\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_{i}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}{}_{h}\Pi_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}.$$

S'il existe une fonction des forces relatives aux paramètres [23] et qu'on la désigne par Φ, on aura

$$\sum_{1}^{m}\Pi_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}$$

(23) Hertz, *Die Prizipien der Mechanik*, page 240.

et par suite l'equation (13_d) s'ecrira

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{T} - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial \mathrm{T}}{d\omega_i}\right) = \mathrm{M}_\xi p + \mathrm{M}_\eta q + \mathrm{M}_\zeta r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \mathrm{P}_i \omega_i + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Multiplions par dt et intégrons, nous trouverons

$$(14_d)\quad \mathrm{T} - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} = \int^{t} (\mathrm{M}_\xi p + \mathrm{M}_\eta q + \mathrm{M}_\zeta r)\, dt + \sum_{1}^{\nu}{}_i \int^{t} \mathrm{P}_i \omega_i\, dt + \Phi + h,$$

h étant un constante.

Si les mouvements internes sont *isocycliques*, c'est à dire si les intensités cycliques sont constantes, l'intégrale précédente deviendra

$$(14'_d)\qquad \mathrm{T} - \sum_{1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} = \int^{t} (\mathrm{M}_\xi p + \mathrm{M}_\eta q + \mathrm{M}_\zeta r)\, dt + \Phi + h.$$

Si aucune des quantités ω_i n'est constante, alors

$$(14''_d)\qquad \mathrm{T} = \int^{t} (\mathrm{M}_\xi p + \mathrm{M}_\eta q + \mathrm{M}_\zeta r)\, dt + \sum_{1}^{n}{}_i \int^{t} \mathrm{P}_i \omega_i\, dt + \Phi + h.$$

Article VI.

1. Supposons d'abord que le système soit rigoureusement cyclique, c'est à dire que les paramètres soient constants. Supposons en outre que les intensités cycliques soient constantes.

Le mouvement sera *isocyclique*, c'est pourquoi nous revenons au cas où *les mouvements internes seront stationnaires et le corps ne change pas de forme, ni la distribution des densités change non plus*.

Alors les équations ($10''_d$) se reduiront aux équations suivantes

$$(10'''_d)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \mathrm{M}_\xi, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} + r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = \mathrm{M}_\eta, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} + p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} = \mathrm{M}_\zeta, \\
&a_i\frac{dp}{dt} + b_i\frac{dq}{dt} + c_i\frac{dr}{dt} = \mathrm{P}_i
\end{aligned}\right.$$

et si le couple de rotation est nul les trois premières équations deviendront

$$(10^{IV}{}_d)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial q}=0\,,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial r}=0\,,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+p\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial p}=0\,.\end{aligned}\right.$$

Pour les réduire à la forme qu'on a donné auparavant il suffit de prendre pour axes ξ, η, ζ les axes d'inertie, et alors les équations précédentes se reduisent aux équations (3).

On peut donc énoncer les résultats qu'on a obtenus dans le chapitre 2ème de la manière suivante: *Si à l'intérieur d'un corps qui n'est soumis à aucun couple de rotation existent des mouvements isocycliques* (*les paramètres étant constants*) *alors les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps, et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.*

2. Remarquons que T est une fonction de 2ème degré, par suite si nous posons

$$f_1=\frac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{H}\,[(Ap-Fq-Er+m_1)^2\,(-Fp+Bq-Dr+m_2)^2\,(-Ep-Dq+Cr+m_3)^2]\,,$$

$$f_2=\frac{1}{2\sqrt{H}}\left[p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}-T\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{H}}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-2\,Dqr-2\,Erp-2\,Fpq)\,,$$

H étant donné par la formule

$$H=\begin{vmatrix} A\,, & -F\,, & -E\\ -F\,, & B\,, & -D\\ -E\,, & -D\,, & C\end{vmatrix}$$

les équations $(10^{IV}{}_d)$ deviennent (voir article V du chapitre I)

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(q,r)}\quad,\quad \frac{dq}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(r,p)}\quad,\quad \frac{dr}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(p,q)}$$

et l'on peut obtenir l'intégration (voir chapitre II, article II) sans déterminer d'avance les axes d'inertie du corps. L'équation de 4ème degré dont dépend la solution sera

$$0=\begin{vmatrix} E^2+F^2+A(A-\lambda)\,, & ED-FA-F(B-\lambda)\,, & FD-EA-E(C-\lambda)\,, & Am_1-Fm_2-Em_3\\ ED-FB-F(A-\lambda)\,, & F^2+D^2+B(B-\lambda)\,, & FE-DB-D(C-\lambda)\,, & -Fm_1-Bm_2-Dm_3\\ FD-EC-E(A-\lambda)\,, & FE-DC-D(B-\lambda)\,, & E^2+D^2+C(C-\lambda)\,, & -Em_1-Dm_2+Cm_3\\ Am_1-Fm_2-Em_3\,, & -Fm_1+Bm_2-Dm_3\,, & -Em_1-Dm_2+Cm_3\,, & 2\lambda h-K_1\end{vmatrix}$$

où l'on a (voir $(14'_d)$)

$$h = \text{const.} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) = T - \sum_1^n{}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i},$$

$$K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2,$$

étant (voir (11_d))

$$K^2 = \text{const.} + (Ap - Fq - Er + m_1)^2 + (Bq - Fp - Dr + m_2)^2$$
$$+ (-Ep - Dq + Cr + m_3)^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2.$$

3. Les formules $(10'''_d)$ font connaître un autre élément très-important dans la question. En effet, la dernière de ces formules nous donne l'expression des forces qui sont capables de maintenir stationnaire le mouvement. On tire de ces formules la propriété suivante qui complète la proposition que nous avons énoncée à la fin du premier paragraphe:

Les forces nécessaires pour maintenir stationnaire le mouvement sont des fonctions elliptiques du temps.

Pour le calcul de ces forces nous renvoyons au § 4 de l'article IX (voir (23_d)). En attendant, nous pouvons nous servir du résultat que nous venons de trouver pour chercher dans quels cas les mouvements internes pourront se maintenir stationnaires sans que l'intervention d'aucune force ne soit nécessaire. Nous emploierons les résultats que nous avons trouvés à l'article II et nous les complèterons. Rappelons en effet que les conditions que nous avons données dans cet article, par rapport à la question que nous nous posons, sont des conditions nécessaires et ne sont pas suffisantes (voir § 6, article II).

On tire de la dernière des formules $(10'''_d)$ que les forces internes seront nulles lorsque

$$(14^{v}_d) \qquad a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Remarquons d'abord que ces conditions sont vérifiées lorsque le mouvement de rotation est permanent. On peut donc dire:

Si le mouvement de rotation est permanent, il ne faut pas de forces pour maintenir isocycliques les mouvements internes.

Lorsque le mouvement de rotation n'est pas permanent, rapportons nous aux axes d'inertie.

Si les forces ne doivent pas exister il faudra que la force vive soit constante, c'est pourquoi on aura (voir article II, § 1)

$$m_1\, p + m_2\, q + m_3\, r = \text{const.}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

sans que p, q, r soient des quantités constantes.

Donc pour que les conditions ($14^{v}{}_d$) soient vérifiées il faut que

$$\frac{a_i}{m_1} = \frac{b_i}{m_2} = \frac{c_i}{m_3} = \text{const.}$$

Nous avons donné (article II, § 5) les conditions que m_1, m_2, m_3 doivent vérifier pour que la force vive soit constante lorsque la rotation n'est pas permanente, on aura donc tout de suite les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons.

En rappelant la proposition que nous avons donnée au § V, article II, et le théorème que nous avons énoncé tout à l'heure on aura:

Les forces étant nulles, le mouvement interne sera isocyclique dans les cas suivants:

1° *lorsque le mouvement de rotation est permanent;*

2° *lorsque*

$$a_i = \theta_i \sqrt{A(A-B)} \quad , \quad b_i = 0 \quad , \quad c_i = \pm\, \theta_i \sqrt{C(B-C)},$$

les quantités θ_i *étant des constantes et les conditions initiales du mouvement étant telles que*

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + (A-C)\sum_{1}^{n}{}_i\, \theta_i\, \omega_i = 0\,;$$

3° *lorsqu'on aura*

$$A = B \quad , \quad a_i = b_i = 0,$$

le mouvement initial de rotation étant arbitraire.

Article VII.

1. Nous allons examiner dans cet article un cas important qui peut se présenter. C'est le cas où les forces correspondant aux coordonnées cycliques sont nulles.

Si $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$, on aura

$$\frac{d}{dt}\left(a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\, \omega_s + \sum_{1}^{m}{}_h\, c_{ih}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) = 0$$

et en intégrant

$$a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\, \omega_s + \sum_{1}^{m}{}_h\, c_{ih}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = K_i\,,$$

K_i étant une quantité constante.

2. En employant les intégrales qu'on vient de trouver, on peut éliminer les intensités cycliques. En effet, en ayant égard à l'égalité $a_{is} = a_{si}$, cal-

culons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ , a_{12}\ , \cdots , a_{1n} \\ a_{21}\ , a_{22}\ , \cdots , a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ , a_{n2}\ , \cdots , a_{nn} \end{vmatrix}$$

et désignons par A_{is} le rapport entre l'élément réciproque de a_{is} et le déterminant.

On aura, en posant $\sum_{1}^{m}{}_h\, c_{ih} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = v_i$,

$$(16_d) \qquad \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\, \omega_s = K_i - v_i - a_i\, p - b_i\, q - c_i\, r$$

d'où

$$(17_d) \qquad \omega_i = \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}(K_s - v_s) - p\Sigma_s A_{is}\, a_s - q\Sigma_s A_{is}\, b_s - r\Sigma_s A_{is}\, c_s\,.$$

Ou si

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{1}^{m}{}_h \sum_{1}^{m}{}_k\, b_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}$$

on a (voir article V, § 2)

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\, \omega_i\, \omega_s + \sum_{1}^{n}{}_i\, v_i\, \omega_i + \tau = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_i\, \omega_i \left(\sum_{1}^{n}{}_1\, a_{is}\, \omega_s + 2\, v_i \right) + \tau$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_i\, \omega_i\, (K_i + v_i - a_i\, p - b_i\, q - c_i\, r) + \tau\,.$$

Et en remplaçant ω_i par l'expression (17_d) on trouve

$$T_0 = \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2\,fpq) - p \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, a_i\, K_s$$

$$- q \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, b_i\, K_s - r \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, c_i\, K_s + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, v_i\, v_s + \tau,$$

ayant posé pour simplifier

$$a = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, a_i\, a_s \quad , \quad b = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, b_i\, b_s \quad , \quad c = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, c_i\, c_s,$$

$$d = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, b_i\, c_s \quad , \quad e = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, c_i\, a_s \quad , \quad f = \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s\, A_{is}\, a_i\, b_s\,.$$

Si dans les formules (9_d) on remplace $\omega_1 \cdots \omega_n$ par les expressions (17_d) on a

$$m_1 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, a_s - ap - fq - er + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

$$m_2 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, b_s - fp - bq - dr + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

$$m_3 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, c_s - ep - dq - cr + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} m_1 p + m_2 q + m_3 r = &- (ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\, dqr + 2\, erp + 2\, fpq) \\ &+ p \left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, a_s + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right] \\ &+ q \left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, b_s + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right] \\ &+ r \left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} (\mathrm{K}_i - v_i)\, c_s + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right]. \end{aligned}$$

On peut donc calculer l'expression de la force vive du système qu'on obtient par l'élimination des intensités cycliques, savoir

$$(1''_d) \qquad \begin{aligned} (\mathrm{T}) = \frac{1}{2} \{ &(\mathrm{A} - a)\, p^2 + (\mathrm{B} - b)\, q^2 + (\mathrm{C} - c)\, r^2 \\ &- 2\,(\mathrm{D} + d)\, qr - 2\,(\mathrm{E} + e)\, rp - 2\,(\mathrm{F} + f)\, pq \} \\ &+ p \sum_1^m{}_h e'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m{}_h g'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} \mathrm{K}_i \mathrm{K}_s + \frac{1}{2} \sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b'_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}, \end{aligned}$$

ayant posé

$$e'_h = e_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, a_s\, c_{ih} \quad , \quad f'_h = f_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, b_s\, c_{ih},$$

$$g'_h = g_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, c_s\, c_{ih} \quad , \quad b'_{hk} = b_{hk} - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, c_{ih}\, c_{sk}.$$

Nous avons écrit (T) au lieu de T pour désigner l'élimination qu'on vient de faire.

3. Pour transformer les équations (10_d) par l'élimination des quantités ω_i, remarquons que l'on a

$$(18_d) \qquad \begin{aligned} \delta \mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} \delta r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i} \delta \omega_i + \sum_1^m{}_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tilde{\omega}_h} \delta \tilde{\omega}_h \\ + \sum_1^m{}_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \right)} \delta \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}. \end{aligned}$$

A cause des équations (15_d) on peut écrire

$$\frac{\partial T}{d\omega_i} = K_i$$

et des équations (17_d) on déduit

$$\delta\omega_i = \sum_h^m \frac{\partial\left(\sum_s^n A_{is}(K_s - v_s) - p\,\Sigma_s A_{is} a_s - q\,\Sigma_s A_{is} b_s - r\,\Sigma_s A_{is} c_s\right)}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h$$

$$-\sum_h^m \delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\sum_s^n A_{is} c_{ih} - \Sigma_s A_{is} a_s\,\delta p - \Sigma_s A_{is} b_s\,\delta q - \Sigma_s A_{is} c_s\,\delta r .$$

Par suite en posant

$$\Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i a_s = l_1 \quad , \quad \Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i b_s = l_2 \quad , \quad \Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i c_s = l_3 ,$$

$$\sum_i^n\sum_s^n A_{is} c_{ih} K_s = s_h$$

la formule (18_d) s'écrira

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p} - l_1\right)\delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial q} - l_2\right)\delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial r} - l_3\right)\delta r + \sum_h^m\left(\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} - s_h\right)\delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$+\sum_h^m\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}_h}\left[T + \Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i K_s - \sum_h^m s_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - l_1 p - l_2 q - l_3 r\right]\delta\tilde{\omega}_h .$$

Mais

$$\delta(T) = \frac{\partial(T)}{\partial p}\delta p + \frac{\partial(T)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial(T)}{\partial r}\delta r + \sum_h^m\frac{\partial(T)}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h + \sum_h^m\frac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} ;$$

en conséquence, si nous comparons les dernières formules nous aurons

$$(19_d)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial(T)}{\partial p} + l_1 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial(T)}{\partial q} + l_2 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial(T)}{\partial r} + l_3 ,\\
&\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} = \frac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} + s_h ,\\
&\frac{\partial T}{d\tilde{\omega}_h} = \frac{\partial\left[(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_h^m s_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i K_s\right]}{\partial\tilde{\omega}_h} .
\end{aligned}\right.$$

On peut donner à ces équations une expression plus simple. A cet effet posons

$$\Theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_h^m s_h\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \sum_i^n\sum_s^n A_{is} K_i K_s$$

ou bien

$$(20_d)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2$$
$$-2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$
$$+p\left(\sum_1^m{}_h e'_h \frac{d\tilde\omega_h}{dt} + l_1\right) + q\left(\sum_1^m{}_h f'_h \frac{d\tilde\omega_h}{dt} + l_2\right) + r\left(\sum_1^m{}_h g'_h \frac{d\tilde\omega_h}{dt} + l_3\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b'_{hk}\frac{d\tilde\omega_h}{dt}\frac{d\tilde\omega_k}{dt} + \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\tilde\omega_h}{dt} - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s A_{is} K_i K_s.$$

On aura alors

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Theta}{\partial p}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Theta}{\partial q}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde\omega_h} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde\omega_k},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\left(\dfrac{d\tilde\omega_h}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial\left(\dfrac{d\tilde\omega_h}{dt}\right)} = e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k b'_{hk}\frac{d\tilde\omega_k}{dt} + s_h$$

et par suite les équations (10_d) peuvent s'écrire

$$(21_d)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + q\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial q} = M_\xi,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} + r\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial r} = M_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + p\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial p} = M_\zeta,\\
&\frac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k b'_{hk}\frac{d\tilde\omega_h}{dt} + s_h\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial\tilde\omega_h} = \Pi_h.
\end{aligned}\right.$$

Article VIII.

1. Supposons que les paramètres du système cyclique soient constants. Alors les équations (21_d) qu'on vient de trouver se réduisent aux trois équations

$$(21'_d)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + q\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial q} = M_\xi,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} + r\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial r} = M_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + p\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial p} = M_\zeta
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on aura

$$(20'_d)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr$$
$$-2(E+e)rp - 2(F+f)pq\} + l_1 p + l_2 q + l_3 r.$$

34

Les coefficients de tous les termes de cette expression sont constants, par suite les équantions $(21'_d)$ correspondent à la rotation d'un système dans lequel existent des mouvements stationnaires, en supposant que les moments d'inertie par rapport aux axes ξ, η, ζ soient

$$A - a, B - b, C - c,$$

que les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes η, ζ; ζ, ξ; ξ, η soient

$$D + d, E + e, F + f,$$

et enfin que les composantes du couple de quantité de mouvement du mouvement interne soient

$$l_1, l_2, l_3 \qquad \text{(voir article VI).}$$

On tire de là le théorème suivent:

Soit un corps dont la figure reste invariable, dans lequel la distribution des densités n'est pas alterée, à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique laissant les paramètres constants et sur les coordonnés cycliques duquel n'agit aucune force; sous l'action d'un couple donné, il tournera autour du centre de gravité comme un autre corps dans lequel existe un mouvement stationnaire, qui est sollicité par le même couple moteur; les intensités cycliques dépendront à chaque instant de la rotation du corps.

2. Remarquons que la forme quadratique

$$(20''_d) \qquad \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$

est une forme définie positive. Cela dépend de l'expression $(1''_d)$ trouvée pour (T) qui étant celle de la force vive doit être toujours positive. Mais on ne peut pas démontrer que $A - a$, $B - b$, $V - c$, vérifient les conditions

$$(B-b) + (C-c) > A - a,$$
$$(C-c) + (A-a) > B - b,$$
$$(A-a) + (B-b) > C - c,$$

auxquelles doivent satisfaire les moments d'inertie d'un corps réél dont la densité est toujours positive. C'est pourquoi dans le théorème précédent lorsqu'on parle du corps qui tourne de la même manière que le corps donné, il faut envisager un corps idéal dont la densité peut devenir aussi négative. Du point de vue analytique et cinématique il n'y a aucune différence entre le mouvement de ce corps et celui d'un corps réel, puisque la forme quadratique $(20''_d)$ est une forme quadratique définie.

3. Le théorème qu'on a donné à la fin du § 1 ramène la recherche du mouvement d'un corps dans lequel existent des systèmes polycycliques, et

qui n'est soumis à aucun couple extérieur, au problème qui a été traité auparavant, et l'intégration, dans ce cas plus général, s'effectuera encore à l'aide des fonctions elliptiques. (Voir le chapitre II).

On pourra énoncer la proposition suivante:

Les composantes de la rotation et les intensités cycliques d'un système, dans lequel existent des systèmes polycycliques, dont la figure et la distribution des densités n'est pas altérée, et qui n'est soumis à aucune force extérieure, sont des fonctions elliptiques du temps; les cosinus des angles que les axes d'inertie forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.

4. Si l'on voulait effectuer la solution de la question en la ramenant à celle du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires, on pourrait d'abord réduire les équations à la forme (3) et après faire l'intégration par les méthodes qu'on a données auparavant. Mais il est évident qu'on peut atteindre le but d'une manière directe beaucoup plus simple. Il suffit pour cela d'appliquer les propositions de l'article V du 1^er^ chapitre, §§ 3, 4, comme nous avons déjà montré dans l'article VI. En effet, lorsque $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ on peut ramener les équations différentielles (21_d) au type (12_a), puisque Θ est une fonction de 2^d^ degré. Le HESSIEN de la fonction Θ sera

$$H = \begin{vmatrix} A - a \ , & -(F+f) \ , & -(E+e) \\ -(F+f) \ , & B - b \ , & -(D+d) \\ -(E+e) \ , & -(D+d) \ , & C - c \end{vmatrix}$$

et on calculera tout de suite les fonctions f_1 et f_2 par les formules

$$\begin{aligned} f_1' = \frac{1}{2\sqrt{H}} \{ & [(A-a)p - (F+f)q - (E+e)r + l_1]^2 \\ & + [-(F+f)p + (B-b)q - (D+d)r + l_2]^2 \\ & + [-(E+e)p - (D+d)q + (C-c)r + l_3]^2 \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2' = \frac{1}{2\sqrt{H}} \{ & (A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr \\ & - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq \}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1', f_2')}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1', f_2')}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1', f_2')}{d(p, q)} \,.$$

5. On peut intégrer directement ces équations par la méthode qu'on a donnée dans le 2^ème^ chapitre à l'article II. Cette intégration dépendra de la résolution d'une équation de 4^ème^ degré qu'on écrira tres aisément en partant de l'équation (12_b) du même article. (Comparez article VI, § 2).

Les expressions des composantes de la rotation et celles des intensités cycliques seront les suivantes

$$(22_d)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{N_1^{(1)}\sigma_1 u + N_1^{(2)}\sigma_2 u + N_1^{(3)}\sigma_3 u + N_1^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u},\\ q &= \frac{N_2^{(1)}\sigma_1 u + N_2^{(2)}\sigma_2 u + N_2^{(3)}\sigma_3 u + N_2^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u},\\ r &= \frac{N_3^{(1)}\sigma_1 u + N_3^{(2)}\sigma_2 u + N_3^{(3)}\sigma_3 u + N_3^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u},\\ \omega_i &= \frac{L_i^{(1)}\sigma_1 u + L_i^{(2)}\sigma_2 u + L_i^{(3)}\sigma_3 u + L_i^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u},\end{aligned}\right.$$

où $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sont des quantités constantes.

Si nous employons les quantités $\alpha_{ir}^{(h)}$ du 2^{me} chapitre, article II, on aura

$$(23_d)\quad \left\{\begin{aligned} N_i^{(h)} &= M^{(h)}\frac{\alpha_{i3}^{(h)}}{\alpha_{44}^{(h)}},\\ L_i^{(h)} &= M^{(h)}\frac{\Sigma_s\left(-a_s\alpha_{14}^{(h)} - b_s\alpha_{24}^{(h)} - c_s\alpha_{34}^{(h)} + K_s\alpha_{44}^{(h)}\right)A_{is}}{\alpha_{44}^{(h)}}.\end{aligned}\right.$$

La relation qui subsiste entre t et u sera l'équation linéaire (voir (23_b))

$$(24_d)\qquad u = \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)}{(e_1-e_3)\,H}}\,(t-t_0),$$

t_0 étant une constante arbitraire et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les racines de l'équation du 4^{ème} degré.

Pour calculer les cosinus des angles que les axes ξ, η, ζ forment avec les axes fixes, il faudra d'abord déterminer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. En employant les formules (12_d) on aura

$$(25_d)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{K}[\ \ (A-a)p - (F+f)q - (E+e)r + l_1],\\ \gamma_2 &= \frac{1}{K}[-(F+f)p + (B-b)q - (D+d)r + l_2],\\ \gamma_3 &= \frac{1}{K}[-(E+e)p - (D+d)q + (C-c)r + l_3].\end{aligned}\right.$$

Par la méthode qu'on a donnée aux articles IV, V, VI du 2^{ème} chapitre on pourra obtenir l'expression des autres cosinus.

6. Dans le cas que nous venons de discuter le système est abandonné à son inertie, car on a supposé toutes les forces nulles, soit le couple de rotation, soient les forces relatives aux coordonnées cycliques. On peut désigner ce cas en disant qu'il correspond à un mouvement *adiabatique* du systeme. Donc *dans un mouvement adiabatique* (*les paramètres étant constants*), *les composantes de la rotation et les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps*.

Il faut remarquer cependant que *le mouvement interne n'est pas adiabatique*. En effet calculons les *moments cycliques*. On aura

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\, \omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r.$$

On voit qu'ils ne sont pas constants, mais qu'il sont des fonctions linéaires des composantes de la rotation du système [24].

Article IX.

1. Les résultats qu'on a trouvés aux articles VI, VIII prouvent que les paramètres étant constants, et le mouvement du système étant isocyclique ou adiabatique, la solution peut être obtenue par les fonctions elliptiques.

Nous allons maintenant discuter un cas plus général, dont ceux qu'on a envisagés sont des cas particuliers, et dans lequel la solution peut s'obtenir de la même manière.

2. Supposons que quelques–unes seulement des forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles. Alors on voit bien aisément qu'on pourra éliminer dans les équations du mouvement autant d'intensités cycliques, qu'on a de forces nulles.

Pour obtenir ce résultat il n'est pas nécessaire de faire de nouveaux calculs. On peut se servir des formules que nous avons trouvées à l'article VII. Il suffit pour cela de supposer que quelques–unes des coordonnées $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$ ne paraissent pas explicitement dans les formules (10_d). Alors elles deviennent des coordonnées cycliques et les paramétres sont les coordonnées résidues.

Donc les formules qu'on trouve par l'élimination sont les équations des (21_d) dans lesquelles on devra retrancher les termes $\partial\Theta/\partial\tilde{\omega}_h$ relatifs à celles des coordonnées $\tilde{\omega}_h$ qu'on a supposées être des coordonnées cycliques.

(24) Voir Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, page 239.

3. Appliquons ce résultat au cas où le système est rigoureusement cyclique. Alors on pourra supposer que toutes les coordonnées $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$, soient des coordonnées cycliques. Désignons leurs dérivées $d\tilde{\omega}_1/dt$, $d\tilde{\omega}_2/dt, \cdots$, $d\tilde{\omega}_m/dt$ qui sont des intensités cycliques, par $\omega'_1, \omega'_2, \cdots, \omega'_m$, et posons $\Pi_h = P'_h$. Les équations (21_d) pourront s'écrire

$$(21''d)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} + q\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} - r\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} = M_\xi, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} + r\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} - p\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} = M_\eta, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} + p\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} - q\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} = M_\zeta, \\[2mm] \dfrac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k\, b'_{hk}\,\omega'_k\right) = P'_h, \end{cases}$$

où

$$(20''_d)\quad \Theta' = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2$$

$$-2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$

$$+p\left(\sum_1^m{}_h e'_h\omega'_h + l_1\right) + q\left(\sum_1^m{}_h f'_h\omega'_h + l_2\right) + r\left(\sum_1^m{}_h g'_h\omega'_h + l_3\right) + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h\sum_1^m{}_k b'_{hk}\omega'_h\omega'_k.$$

On a supprimé dans l'expression de Θ' les termes $\sum_1^m{}_h s_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$ et les termes $-\dfrac{1}{2}\sum_1^m{}_i\sum_1^m{}_s A_{is} K_i K_s$ qui paraissent dans l'expression de Θ, mais qui disparaissent dans les calculs des dérivées.

4. Soient maintenant les intensités cycliques $\omega'_1, \omega'_2, \cdots, \omega'_m$ des quantités constantes. Dans ce cas les coefficients de p, q, r dans tous les termes de Θ' sont des quantités constantes. Par suite *le théorème énoncé au 1er § de l'article VIII s'étend au cas où quelques coordonnées cycliques ne sont pas soumises à des forces et les intensités cycliques correspondantes aux autres coordonnées cycliques sont constantes.*

Si le couple de rotation est nul, alors l'intégration des équations ($21''_d$) pourra s'effectuer par les fonctions elliptiques.

En effet, en rappelant les résultats obtenus à l'article V du 1er chapitre, on pourra écrire les équations (21'') sous la forme (comparez le § 4 de l'article VII)

$$(22_d)\quad \frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1'', f_1')}{d(q, r)}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1'', f_2')}{d(r, p)}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1'', f_2')}{d(p, q)},$$

f''_1 et f'_2 étant donnés par les formules

$$f_1'' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{H}}} \left\{ \left[(\mathrm{A}-a)\,p - (\mathrm{F}+f)\,q - (\mathrm{E}+e)\,r + \sum_1^m e_h'\,\omega_h' + l_1 \right]^2 \right.$$

$$+ \left[-(\mathrm{F}+f)\,p + (\mathrm{B}-b)\,q - (\mathrm{D}+d)\,r + \sum_1^m f_h'\,\omega_h' + l_2 \right]^2$$

$$\left. + \left[-(\mathrm{E}+e)\,p - (\mathrm{D}+d)\,q + (\mathrm{C}-c)\,r + \sum_1^m g_h'\,\omega_h' + l_3 \right]^2 \right\},$$

$$f_2' = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{H}}} \{ (\mathrm{A}-a)\,p^2 + (\mathrm{B}-b)\,q^2 + (\mathrm{C}-c)\,r^2$$

$$-2\,(\mathrm{D}+d)\,qr - 2\,(\mathrm{E}+e)\,rp - 2\,(\mathrm{F}+f)\,pq \},$$

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}-a\;, & -(\mathrm{F}+f), & -(\mathrm{E}+e) \\ -(\mathrm{F}+f), & \mathrm{B}-b\;, & -(\mathrm{D}+d) \\ -(\mathrm{E}+e), & -(\mathrm{D}+d), & \mathrm{C}-c \end{vmatrix}.$$

Les expressions des fonctions inconnues $p\,,q\,,r\,;\,\omega_1\,,\,\omega_2\,,\cdots,\,\omega_n$ sont les mêmes que celles données dans l'article VIII au § 5.

Pour obtenir les expressions des forces P_h' c'est à dire des forces qui sont capables de maintenir constantes les intensités cycliques $\omega_1'\,,\,\omega_2'\,,\cdots,\,\omega_m'$, il suffira de remarquer que la dernière des équations $(21''_d)$ s'écrit

$$\mathrm{P}_h' = e_h'\frac{dp}{dt} + f_h'\frac{dq}{dt} + g_h'\frac{dr}{dt}$$

et à cause des équation (22_d)

$$\mathrm{P}_h' = e_h'\frac{d(f_1\,,f_2)}{d(q\,,r)} + f_h'\frac{d(f_1\,,f_2)}{d(r\,,p)} + g_h'\frac{d(f_1\,,f_2)}{d(p\,,q)}.$$

Par suite en posant

$$f_0^{(h)} = e_h'\,p + f_h'\,q + g_h'\,r$$

on aura

$$(23_d) \qquad \mathrm{P}_h' = \frac{d(f_0^{(h)}\,,f_1\,,f_2)}{d(p\,,q\,,r)}.$$

On tire de là que les forces P_h' seront représentées par des fonctions elliptiques du temps.

Article X.

1. Nous avons donné à l'article V les formules (10_d) dans lesquelles on a introduit les coordonnées cycliques et les paramètres.

Les paramètres que nous avons considérés sont des quantités indépendantes, mais on pourrait très-bien envisager des paramètres liés par des relations correspondant à des liaisons. Si les paramètres étaient liés par les relations indépendantes

$$f_1(\tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \cdots, \tilde\omega_m) = 0 \ , f_2(\tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \cdots, \tilde\omega_m) = 0, \cdots, f_g(\tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \cdots, \tilde\omega_m) = 0,$$

il faudrait modifier les équations (10_d) en ajoutant au second membre de la dernière d'elles les termes

$$\sum_{1}^{g}{}_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \tilde\omega_h}.$$

2. Nous n'allons pas approfondir le résultat qu'on trouverait de cette manière. Plutôt comme complément des formules que nous avons données, nous voulons envisager le cas du mouvement d'un corps solide et d'un corps liquide homogène qu'on peut supposer remplir une cavité du premier corps.

S étant l'espace occupé par le liquide, la force vive du système sera, en se rapportant à des axes liés invariablement au corps solide (voir article V)

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) \\ & + \frac{1}{2}\int_S \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\rho dS + p\int_S \left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\rho dS \\ & + q\int_S \left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right)\rho dS + r\int_S \left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)\rho dS, \end{aligned}$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées des points du fluide et ρ sa densité.

Pour vérifier l'équation de continuité il faudra prendre

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta} = 0.$$

Par suite, en employant le principe de HAMILTON, en trouvera les équations

$$(24_d)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ & \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ & \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right) + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(24'_d)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi, \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta, \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta, \end{aligned}\right.$$

V étant la fonction potentielle des forces agissant sur le fluide et M_ξ, M_η, M_ζ les composantes du couple de rotation. Si nous posons

$$u = \frac{d\xi}{dt} \quad , \quad v = \frac{d\eta}{dt} \quad , \quad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

et si nous désignons par le symbole $\partial/\partial t$ la dérivée partielle par rapport à t d'une quantité en la regardant comme une fonction de ξ, η, ζ, t, les équations précédentes deviendront

$$(25_d)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} + 2(qw - rv) \\ &\qquad + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta} + 2(ru - pw) \\ &\qquad + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta} + 2(pv - qu) \\ &\qquad + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(25'_d)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p} + q\frac{\partial \Theta}{\partial r} - r\frac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + r\frac{\partial \Theta}{\partial p} - p\frac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + p\frac{\partial \Theta}{\partial q} - q\frac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta, \end{aligned} \right.$$

où

$$\Theta = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$

$$+ p\int_S (\eta w - \zeta v)\rho dS + q\int_S (\zeta u - \xi w)\rho dS + r\int_S (\xi v - \eta u)\rho dS.$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$(26_d)\qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0$$

et l'équation au contour

$$(27_d)\qquad u\cos n\xi + v\cos n\eta + w\cos n\zeta = 0,$$

n étant la normale à la paroi qui limite l'espace occupé par le fluide.

3. Envisagerons le cas où le fluide n'ait pas de tourbillons, c'est à dire où l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les équations (15 *d*) s'écriront

$$(28_d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad +2\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}-r\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{dq}{dt}-\eta\frac{dr}{dt}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad +2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+\xi\frac{dr}{dt}-\zeta\frac{dp}{dt}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad +2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{dp}{dt}-\xi\frac{dp}{dt}=0.
\end{aligned}\right.$$

C'est pourquoi

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+\xi\frac{dr}{dt}-\zeta\frac{dp}{dt}\right]=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{dp}{dt}-\xi\frac{dq}{dt}\right].$$

On tire de là et de l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dp}{dt},$$

et d'une manière analogue on a

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dq}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dr}{dt}.$$

Par une intégration on trouve

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=\frac{dp}{dt}\xi+\frac{dq}{dt}\eta+\frac{dr}{dt}\zeta+C,$$

C étant une quantité constante.

Si le mouvement de rotation du corps solide est permanent, cette équation devient

$$(29_d)\qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=C.$$

La constante C doit être nulle, parceque si nous conduisons un plan tangent à la surface qui limite le fluide, et qui soit normal à l'axe de rotation, au point de contact on aura (*)

$$(29_e)\qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0.$$

(*) Basta infatti osservare che p, q, r, sono proporzionali ai coseni direttivi della normale al piano e che la componente della velocità del liquido secondo la normale stessa, nel punto di contatto, è evidentemente eguale a zero. [N. d. R.].

Prenons pour axe ζ l'axe de rotation, alors l'équation (29_d) deviendra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0$$

et les équations (28_d) s'écriront

$$(28'_d) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\} + \dfrac{P}{\rho} - V\right] = 2r\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\} + \dfrac{P}{\rho} - V\right] = -2r\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \end{cases}$$

en supposant que le mouvement du fluide soit stationnaire.

L'équation de continuité (26_d) et celle (27_d) qui doit être vérifiée au contour seront

$$(26'_d) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0, \qquad\qquad (27'_d) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Donc si ψ est la fonction conjuguée de φ, c'est à dire si

$$\varphi + i\psi = F(\xi + i\eta)$$

on aura (*)

$$P = \rho V - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right] - 2r\rho\psi + K,$$

K étant une constante.

Pour que les conditions $(26'_d)$, $(27'_d)$ soient vérifiées, il faut que φ soit polydrome et que l'espace occupé par le fluide n'ait pas la connexion linéaire simple.

Calculons maintenant les composantes du couple de quantité de mouvement du fluide par rapport aux axes. La composante dans la direction ξ sera

$$m_1 = -\int_S \zeta v\rho\, dS = -\int_S \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\rho\, dS = \rho\int_S \zeta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}dS,$$

et puisque ψ est constant le long des intersections du contour avec des plans parallèles au plan $\xi\eta$, on trouvera $m_1 = 0$. De même on aura $m_2 = 0$.

On tire de là que l'axe du couple du mouvement interne est parallèle à l'axe de rotation, c'est pourquoi celui-ci (voir $(6'_c)$) doit être un axe de inertie.

Nous avons donc une infinité de mouvements possibles permanents du solide et du fluide renfermé dans un recipient tubulaire sans que le fluide ait des tourbillons. (Voir la note à l'article V de ce chapitre).

(*) Basta infatti osservare che si hanno le due equazioni $\partial\varphi/\partial\eta = \partial\psi/\partial\xi$; $\partial\varphi/\partial\xi = -\partial\psi/\partial\eta$ e sostituire in $(28'_d)$, tenendo presente che per la (29_e) la z è costante. [N.d.R.].

Note au chapitre IV.

1. Nous avons fait usage dans le chapitre précédent du principe de HAMILTON et des équations du type LAGRANGE–LIOUVILLE; mais on peut très–bien s'en passer et démontrer directement la relation qui subsiste entre le mouvement adiabatique et le mouvement isocyclique en employant seulement l'équation symbolique du mouvement, c'est à dire l'expression analytique du principe de LAGRANGE. Il faut pour cela se servir d'une transformation très–élégante de cette équation donnée par M. BELTRAMI [25].

2. Lorsqu'on a un système qui peut tourner autour d'un point fixe, soient q_1, q_2, q_3 des paramètres qui déterminent sa position. Supposons que dans ce système existent des mouvements cycliques et que les forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles.

L'équation symbolique de M. BELTRAMI peut s'écrire dans ce cas

$$\delta L = \delta U - \left(\sum_1^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i\right)',$$

où L est le travail du couple des forces appliquées au système et U est donné, par des calculs que nous supprimons, par

$$-U = \frac{1}{2}[(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp$$
$$-2(F+f)pq] + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s ,$$

les notations étant les mêmes que celles que nous avons adoptées dans le chapitre précédent.

On peut tirer de là aisément le théorème auquel nous avons fait allusion et de même les équations du type LAGRANGE–LIOUVILLE.

CHAPITRE V.

Quelques applications au mouvement du pôle terrestre.

Article I.

1. Lorsque les mouvements internes ne sont pas stationnaires nous avons vu que les équations différentielles du mouvement sont les suivantes (voir Introduction (7))

(25) BELTRAMI, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. 28, fasc. 14.

$$(1_e)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+m_3 q-m_2 r+\dfrac{dm_1}{dt}=0\,,\\[2ex] B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)\,rp+m_1 r-m_3 p+\dfrac{dm_2}{dt}=0\,,\\[2ex] C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+m_2 p-m_1 q+\dfrac{dm_3}{dt}=0 \end{cases}$$

et on a l'intégrale (voir Introduction (6))

$$(2_e)\qquad (Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2=K^2.$$

En général on ne peut pas donner d'autres intégrales et par suite on ne peut obtenir l'intégration par des quadratures.

Supposons $A=B$; alors les équations précédentes deviennent

$$(3_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}+\left[\dfrac{C-A}{A}r+\dfrac{m_3}{A}\right]q=\left(m_2 r-\dfrac{dm_1}{dt}\right)\dfrac{1}{A}\,,\\[2ex] \dfrac{dq}{dt}-\left[\dfrac{C-A}{A}r+\dfrac{m_3}{A}\right]p=\left(-m_1 r-\dfrac{dm_2}{dt}\right)\dfrac{1}{A}\,,\\[2ex] \dfrac{dr}{dt}=-\dfrac{1}{C}\dfrac{dm_3}{dt}+\dfrac{(m_1 q-m_2 p)}{C}\,. \end{cases}$$

2. Pour intégrer ces équations différentielles, nous pouvons employer une méthode d'approximations successives.

A cet effet remarquons que si l'on connaissait p et q, on pourrait calculer r par la troisième équation. On trouverait

$$(5_e)\qquad r=a_1-\frac{1}{C}m_3+\frac{1}{C}\int(m_1 q-m_2 p)\,dt\,,$$

a_1 étant une constante arbitraire.

De même si l'on connaissait r, on pourrait intégrer les premières équations. En effet posons

$$(5_e)\qquad \frac{C-A}{A}r+\frac{m_3}{A}=\rho\,,$$

$$(6_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A}\left(m_2 r-\dfrac{dm_1}{dt}\right)=\alpha\,,\\[2ex] \dfrac{1}{A}\left(-m_1 r-\dfrac{dm_2}{dt}\right)=\beta\,, \end{cases}$$

on aura alors

$$\frac{dp}{dt}+\rho q=\alpha\,,$$

$$\frac{dq}{dt}-\rho p=\beta\,.$$

En posant

$$u=\int\rho dt$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{du} + q = \frac{a}{\rho} \quad , \quad \frac{dq}{du} - p = \frac{\beta}{\rho}$$

d'où

$$p = C_2 \cos u - C_3 \sin u \quad , \quad q = C_2 \sin u + C_3 \cos u ,$$

$$\frac{dC_2}{dt} \cos u - \frac{dC_3}{dt} \sin u = \alpha \quad , \quad \frac{dC_2}{dt} \sin u + \frac{dC_3}{dt} \cos u = \beta .$$

Par l'intégration des dernières équations il vient

$$C_2 = \int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2 ,$$

$$C_3 = -\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3 ,$$

a_2 et a_3 étant des constantes arbitraires. Par suite

$$(7_e) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2\right] \cos u \\ &\qquad + \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \sin u , \\ q &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2\right] \sin u \\ &\qquad - \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \cos u . \end{aligned} \right.$$

Prenons d'abord r donné par la formule

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} m_3$$

et substituons cette valeur dans les équations (6_e). D'après les équations (7_e) on déterminera p et q et en substituant les expressions qu'on trouvera dans l'équation (4_e) on aura une nouvelle valeur pour r. On pourra de même employer cette expression de r pour obtenir une nouvelle détermination de p et q. Ainsi de suite on aura la solution par des approximations successives.

3. Il est aisé de calculer les séries qui donnent la solution par cette méthode.

En effet posons

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} m_3 \quad , \quad u_1 = \int_0^t \left(r_1 \frac{C - A}{A} + \frac{m_3}{A}\right) dt ,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\left(m_2 r_1 - \frac{dm_1}{dt}\right) \quad , \quad \beta_1 = \left(-m_1 r_1 - \frac{dm_2}{dt}\right),$$

$$p_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1)\, dt + a_2\right] \cos u_1$$

$$+ \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \sin u_1 ,$$

$$q_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1)\, dt + a_2\right] \sin u_1$$

$$- \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \cos u_1$$

et écrivons pour $n > 1$ les formules récurrentes

$$r_n = \frac{1}{C}\int_0^t (m_1 q_{n-1} - m_2 p_{n-1})\, dt ,$$

$$u_n = \frac{C-A}{A}\int_0^t r_n\, dt ,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{A} m_2 - \frac{C-A}{A}\sum_1^{n-1}{}_i\, q_{i-1}\right) r_n , \quad \beta_n = \left(\frac{1}{A} + \frac{C-A}{A}\sum_1^{n-1}{}_i\, p_{i-1}\right) r_n ,$$

$$p_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$+ \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right),$$

$$q_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$- \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right).$$

Les intégrales des équations proposées seront

$$p = \sum_1^\infty p_n \quad , \quad q = \sum_1^\infty q_n \quad , \quad r = \sum_1^\infty r_n .$$

On peut démontrer que ces séries sont convergentes pour les valeurs de t comprises entre certaines limites, si l'on suppose que m_1 , m_2 , m_3 , dm_1/dt , dm_2/dt soient des quantités finies.

Article II.

1. Dans les équations différentielles (1_e) on peut regarder m_1, m_2, m_3 comme les fonctions inconnues et p, q, r comme des quantités données.

Le problème mécanique qui correspond à cette question analytique est le suivant:

On connait le mouvement de rotation du système, déterminer les mouvements internes qui correspondent au mouvement de rotation donné.

Dans le cas où m_1, m_2, m_3 sont les fonctions inconnues, l'application de la méthode des approximations successives conduit à des résultats beaucoup plus simples que dans le cas traité dans l'article précédent.

En effet, prenons d'abord

$$m_1^{(1)} = -\int_0^t [(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr + a_3\,q - a_2\,r]\,dt - \mathrm{A}\,(p - p_0),$$

$$m_2^{(1)} = -\int_0^t [(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,rp + a_1\,r - a_3\,p]\,dt - \mathrm{B}\,(q - q_0),$$

$$m_3^{(1)} = -\int_0^t [(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,pq + a_2\,p - a_1\,q]\,dt - \mathrm{C}\,(r - r_0),$$

a_1, a_2, a_3 étant des costantes arbitraires.

Ecrivons après les formules récurrentes

$$(8_e)\quad \begin{cases} m_1^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_3^{(n-1)}\,q - m^{(n-1)}\,r]\,dt, \\[2ex] m_2^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_1^{(n-1)}\,r - m_3^{(n-1)}\,p]\,dt, \\[2ex] m_3^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_2^{(n-1)}\,p - m_1^{(n-1)}\,q]\,dt, \end{cases}$$

et calculons les séries

$$m_1 = a_1 + \sum_1^\infty{}_n\, m_1^{(n)},$$

$$m_2 = a_2 + \sum_1^\infty{}_n\, m_2^{(n)},$$

$$m_3 = a_3 + \sum_1^\infty{}_n\, m_3^{(n)}.$$

Elles donneront les intégrales des équations différentielles (1_e).

Le théorème géneral de M. PICARD [26] sur la méthode des approximations successives, avec la modification apportée par M. LINDELÖF, prouve que les séries précédentes sont convergentes pour toute valeur du temps qui soit limitée dans un intervalle où p, q, r sont des fonctions continues et finies. Il est intéressant de particulariser le raisonnement général à ce cas particulier pour avoir un résultat que nous allons énconcer. Soit P la limite supérieure des valeurs de p, q, r pour t comprise entre $-$T et T.

Les formules (8_e) montrent que si l'on suppose

$$|m_i^{(n)}| < \frac{M}{\underline{|n}} t^n + \frac{N}{\underline{|(n-1)}} t^{n-1} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

on aura

$$|m_i^{(n+1)}| < \frac{2\,MP\,t^{n+1}}{\underline{|(n+1)}} + \frac{2\,NP\,t^n}{\underline{|n}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$A \geqq B \geqq C$$

et soit Δ la limite supérieure des valeurs de $|p - p_0|$, $|q - q_0|$, $|r - r_0|$ et a la plus grande des quantités $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$. Allors on aura

$$|m_i^{(1)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] 2\,Pt + A\Delta$$

et par suite

$$|m_i^{(n)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] \frac{(2\,Pt)^n}{\underline{|n}} + A\Delta \frac{(2\,Pt)^{n-1}}{\underline{|(n-1)}},$$

ce qui prouve que les séries (9_e) sont convergentes.

On aura aussi si $|t| < T$

$$(10_e) \qquad |m_i| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] (e^{2Pt} - 1) + A\Delta e^{2Pt}.$$

Par les raisonnements ordinaires on prouve que les séries (9_e) satisfont aux équations différentielles (1_e) lorsque les dérivées de p, q, r sont finies. Prenons dans les formules précédentes $t = t_1$, puis faisons évanouir t_1 et changeons en même temps les fonctions $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ de manière que $p(t_1)$, $q(t_1)$, $r(t_1)$ gardent toujours les mêmes valeurs, qu'on désignera par p, q, r. On aura à la limite pour $t_1 = 0$

$$m_1 - a_1 = A(p - p_0) \quad , \quad m_2 - a_2 = B(q - q_0) \quad , \quad m_3 - a_3 = C(r - r_0).$$

On a ainsi *les relations qui doivent subsister entre* p, q, r ; m_1, m_2, m_3 *dans leurs points de discontinuité*. Il est facile d'interpréter ces formules comme celles qui donnent les discontinuités de la rotation dues à un choc qui change brusquement les valeurs de m_1, m_2, m_3.

(26) PICARD, *Traité d'analyse*, T. III, page 88; E. LINDELÖF, « Comptes rendus », 26 février 1894).

2. Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent à la proposition: *Soit donnée une loi arbitraire de rotation. On pourra toujours engendrer dans un corps quelconque des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps, tels que le corps sans être soumis à aucune force externe, tourne autour du centre de gravité d'après la loi donnée.*

Si le corps était rigide il suivrait les lois bien connues de la rotation libre d'un corps rigide, par suite le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante:

Toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps.

La formule (10_e), montre que $|m_1|, |m_2|, |m_3|$ sont aussi petits que l'on veut, pourvu que Δ et T soient suffisamment petits.

Donc *toute altération de la rotation d'un corps, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, peut être produite par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps et qui sont aussi petits que l'on veut.*

3. Les propositions précédentes conduisent à des conséquences immédiates dont nous allons donner quelques exemples dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant. *On connaît la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps. Comment peut-on changer les mouvements internes de manière qu'ils produisent toujours le même effet, c'est à dire que la rotation du corps ne change pas?*

Si m'_1, m'_2, m'_3 sont les nouvelles valeurs de m_1, m_2, m_3 il faut qu'on ait

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m'_3\,q - m'_2\,r + \frac{dm'_1}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m'_1\,r - m'_3\,p + \frac{dm'_2}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m'_2\,p - m'_1\,q + \frac{dm'_3}{dt} = 0.$$

Retranchons les équations (1_e) et posons

$$m'_1 - m_1 = m''_1 \quad , \quad m'_2 - m_2 = m''_2 \quad , \quad m'_3 - m_3 = m''_3,$$

on trouve

$$\frac{dm''_1}{dt} + m''_3\,q - m''_2\,r = 0,$$

$$\frac{dm''_2}{dt} + m''_1\,r - m''_3\,p = 0,$$

$$\frac{dm''_3}{dt} + m''_2\,p - m''_1\,q = 0$$

les équations étant du même type que les équations de POISSON (voir Introduction). Si nous appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus des angles que les angles ξ, η, ζ forment avec les axes fixes x, y, z, les intégrales générales seront

$$m_1'' = C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 + C_3 \gamma_1,$$
$$m_2'' = C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 + C_3 \gamma_2,$$
$$m_3'' = C_1 \alpha_3 + C_2 \beta_3 + C_3 \gamma_3,$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires; d'où l'on tire

$$m_1' = m_1 + C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 + C_3 \gamma_1,$$
$$m_2' = m_2 + C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 + C_3 \gamma_2,$$
$$m_3' = m_3 + C_1 \alpha_3 + C_2 \beta_3 + C_3 \gamma_3,$$

Ces formules résolvent complètement la question proposée.

En prenant $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ et en remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par les expressions données par JACOBI pour ces cosinus dans le cas d'un système rigide qui n'est soumis à aucune force, on aura *tous les mouvements internes qui ne produisent aucun effet dans la rotation libre d'un corps*.

De même si nous prenons m_1, m_2, m_3 constants et que nous mettions à la place de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les expressions que nous avons trouvées à l'article VI du chapitre II pour ces cosinus lorsque les mouvements internes sont stationnaires, on trouvera *tous les mouvements internes variables qui produisent le même effet que les mouvements stationnaires*.

On tire de là qu'un corps peut avoir un mouvement de rotation, comme s'il était rigide ou très rapproché à celui qu'il aurait s'il était rigide, et cependant il peut s'engendrer à son intérieur un mouvement tel que le moment du couple de quantité de mouvement soit aussi grand que l'on veut.

4. Un résultat qu'on peut concevoir beaucoup plus facilement est le suivant.

Supposons qu'on ait tracé les polodies correspondant au mouvement rigide sur l'ellipsoïde central du corps ayant pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Si en supposant B compris entre A et C, on conduit les plans

$$\frac{\zeta}{\xi} = \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}} \quad , \quad \frac{\zeta}{\xi} = -\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}},$$

la surface de l'ellipsoide sera découpée en quatre régions.

En prenant deux polodies situées dans la même région on peut déformer l'une d'elles avec continuité en passant par toutes celles intermédiaires jusqu'à la faire coincider avec l'autre.

Cela ne peut pas être fait pour les polodies situées dans des régions différentes de l'ellipsoïde.

Remarquons que chacune de ces courbes peut être parcourue par le pôle lorsque les mouvements internes sont nuls. On peut donc prévoir qu'engendrant des mouvements internes aussi petits que l'on veut, le pôle puisse parcourir une courbe dont les spires soient rapprochées aux polodies et que cette trajectoire soit telle qu'en partant d'un point d'une polodie on aboutisse à un point d'une autre polodie quelconque appartenant à la même région de l'ellïpsoide. Les formules qu'on a données le montrent d'une manière fort simple. En effet ayant égard à l'intégrale (2_e) des équations (1_e), posons

$$(11_e) \qquad \gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K} \; ;$$

ces quantités seront les cosinus des angles que les axes ξ , η , ζ forment avec l'axe du couple de quantité de mouvement qui est fixe. (Voir Introduction).

Résolvons les équations précédentes par rapport à p , q , r et substituons les valeurs qu'on trouve dans les équations (1_e); on aura

$$(1'_e) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c - b)\, \gamma_2 \gamma_3 + \frac{m_2}{B} \gamma_3 - \frac{m_3}{C} \gamma_2 ,$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = (a - c)\, \gamma_3 \gamma_1 + \frac{m_3}{C} \gamma_1 - \frac{m_1}{A} \gamma_3 \quad , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (b - a)\, \gamma_1 \gamma_2 + \frac{m_1}{A} \gamma_2 - \frac{m_2}{B} \gamma_1$$

où l'on a posé $a = K/A$, $b = K/B$, $c = K/C$.

Lorsqu'on suppose $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, ces équations deviennent

$$(1''_e) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c - b)\, \gamma_2 \gamma_3 \quad , \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = (a - c)\, \gamma_3 \gamma_1 \quad , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (b - a)\, \gamma_1 \gamma_2 ,$$

c'est à dire elles se réduisent aux équations différentielles du mouvement rigide.

Les équations $(1''_e)$ ont les deux intégrales

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad , \quad a\gamma_1^2 + b\gamma_2^2 + c\gamma_3^2 = e$$

et la quantité constante e doit être comprise entre a et c, si nous supposons que la valeur B soit comprise entre A et C.

Si nous nous rapportons à la distinction des polodies qu'on a faite tout à l'heure, on aura que le passage des polodies d'une région à celles d'une autre a lieu lorsque e franchit la valeur b.

Si nous prenons avec JACOBI [27]

$$a > b > e > c \quad \text{ou} \quad a < b < e < c$$

(27) Voir HERMITE: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, §§ X, XI.

les intégrales des équations (I''_e) seront

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{c-e}{c-a}}\,\mathrm{sn}\,[n(t-t_0), k] \quad , \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{c-e}{c-b}}\,\mathrm{cn}\,[n(t-t_0), k],$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{e-a}{c-a}}\,\mathrm{dn}\,[n(t-t_0), k],$$

où t_0 est une constante et

$$n = \sqrt{(e-a)(c-b)} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e)}{(e-a)(c-b)}}.$$

Calculons les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par rapport aux constantes t_0 et e. On aura d'abord

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial t_0} = -\gamma_2\gamma_3(c-b) \quad , \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial t_0} = -\gamma_3\gamma_1(a-c) \quad , \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial t_0} = -\gamma_1\gamma_2(b-a)$$

par suite ces dérivées seront des quantités finies. Les dérivées des fonctions sn, cn, dn par rapport au module deviennent infinies lorsque $k = 1$. On tire de là que les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seront finies si e ne prend par les valeurs limites b et c.

Cela posé, employons la méthode des variations des constantes arbitraires, et tâchons de vérifier les équations différentielles (I_e) en prenant t_0 et e fonctions du temps.

Ces équations deviennent alors

$$(\mathrm{I}'''_e) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \gamma_1}{\partial t_0}\frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_2}{\mathrm{B}}\gamma_3 - \frac{m_3}{\mathrm{C}}\gamma_2 = 0, \\ &\frac{\partial \gamma_2}{\partial t_0}\frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_3}{\mathrm{C}}\gamma_1 - \frac{m_1}{\mathrm{A}}\gamma_3 = 0, \\ &\frac{\partial \gamma_3}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{dt} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_1}{\mathrm{A}}\gamma_2 - \frac{m_2}{\mathrm{B}}\gamma_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, et $\gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3$ deux systèmes de valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui correspondent à deux valeurs quelconques τ' e τ'' de $t-t_0$ et à deux valeurs e' et e'' de e comprises entre les limites b et c. On pourra prendre t_0 et e fonctions du temps de manière qu'en posant $\tau(t) = t - t_0(t)$ on ait

$$\tau(t_1) = \tau' \quad , \quad \tau(t_2) = \tau'' + 2n\omega \quad , \quad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_2} = 0,$$

$$e(t_1) = e' \quad , \quad e(t_2) = e'' \quad , \quad (e' - e(t))(e'' - e(t)) < 0,$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_2} = 0,$$

2ω étant la période réelle des fonctions elliptiques correspondant au module

$$k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e'')}{(e''-a)(c-b)}}.$$

Alors les fonctions

$$\gamma_1 = \gamma_1(t - t_0(t), e(t)) \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_2(t - t_0(t), e(t)) \quad , \quad \gamma_3 = \gamma_3(t - t_0(t), e(t)),$$

pour $t = t_1$ prendront les valeurs $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ et pour $t = t_2$ prendront les valeurs $\gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3$ et leurs dérivées par rapport à t_0 et à e seront finies.

Nous pouvons calculer d'après les formules $(1'''_e)$ un système de valeurs $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ de m_1, m_2, m_3 qui les vérifient de sorte que ces valeurs soient nulles pour $t = t_1$, et pour $t = t_2$.

Ayant égard aux formules (11_e) on tire de là que si pendant le temps $t_1 \cdots t_2$ les mouvements internes sont caractérisés par $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ et si les composantes de la rotation du corps au temps t_1 ont les valeurs

$$\frac{A\gamma'_1}{K}, \frac{B\gamma'_2}{K}, \frac{C\gamma'_3}{K}$$

au temps t_2 elles deviendront

$$\frac{A\gamma''_1}{K}, \frac{B\gamma''_2}{K}, \frac{C\gamma''_3}{K},$$

ce qui prouve que le pôle peut passer d'un point d'une polodie à un point d'une autre polodie appartenant à la même région de l'ellipsoïde.

Mais on peut choisir les fonctions $t_0(t)$ et $e(t)$ de sorte que les dérivées dt_0/dt, de/dt soient aussi petites que l'on veut de manière que même m_1, m_2, m_3 aient des valeurs absolues plus petites qu'une quantité donnée arbitrairement; donc le passage du pôle peut arriver par des mouvements internes aussi petits que l'on veut.

Nous avons jusqu'ici exclu la valeur $e = c$ qui correspond à un sommet de l'ellipsoïde, parce que pour cette valeur $\partial\gamma_1/\partial e$, $\partial\gamma_2/\partial e$, $\partial\gamma_3/\partial e$ deviennent infinies, mais on reconnaît facilement que cette exclusion n'est pas nécessaire. En effet il suffit de changer de variable et de prendre $\sqrt{|c - e|} = \delta$ au lieu de e et l'on voit tout de suite que si l'on regarde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme des fonctions de t, t_0 et δ, leurs dérivées par rapport à δ ne sont pas infinies lorsque $\delta = 0$. On peut donc généraliser la proposition précédente en disant que par des mouvements internes aussi petits que l'on veut le pôle peut être conduit d'un point à un autre situés intérieurement à la même région de l'ellipsoïde.

Le même résultat peut être obtenu d'une autre manière en suivant laquelle il n'est pas nécessaire d'exclure les points situés sur les frontières des régions dans lesquelles la surface de l'ellipsoïde a été partagée. Il suffit pour cela de remarquer que les polodies se rapprochent autant que l'on veut aux sommets de l'ellipsoïde et aux frontières qui séparent les régions qu'on a envisagées, et en outre d'avoir égard au dernier théorème du 2me §.

Si $A = B$, c'est à dire $a = b$, alors $k = 0$, les polodies sont les parallèles de l'ellipsoïde et les propositions précédentes, valables pour chaque région, peut s'étendre à toute la surface de l'ellipsoïde par les mêmes raisonnements qu'on vient de faire.

5. Nous avons calculé dans cet article les composantes du couple de quantité de mouvement relatif au mouvement interne, qui correspond à un mouvement donné du pôle.

Or on peut imaginer d'une infinité de manières des mouvements cycliques internes qui correspondent aux valeurs trouvées en général pour m_1, m_2, m_3. Il suffit pour cela de rappeler, que lorsque les paramètres sont constants les équations $(10''_d)$ sont équivalentes aux équations (1_e).

Prenons maintenant les formules (9_d) qui deviennent

$$m_1 = \sum_1^n{}_i\, a_i\, \omega_i\,,$$

$$m_2 = \sum_1^n{}_i\, b_i\, \omega_i\,,$$

$$m_3 = \sum_1^n{}_i\, c_i\, \omega_i\,.$$

Les fonctions m_1, m_2, m_3 étant connues, on pourra d'une infinité de manières trouver des fonctions $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ qui satisfont aux équations précédentes.

Article III.

1. Dans les articles précédents nous avons montré que par la méthode des approximations successives on peut résoudre la question de déterminer le mouvement de rotation du système lorsqu'on connaît le mouvement interne, et réciproquement on peut déterminer les mouvements internes, la rotation du système étant donnée.

Dans les applications pratiques au mouvement dė la terre, la question analytique se simplifie, en négligeant des termes très-petits qui paraissent dans les formules générales.

En effet dans ce cas nous pouvons regarder les moments d'inertie A et B égaux et p et q très-petits.

On pourra supposer que les variations de r soient aussi très-petites, de sorte qu'en posant $r = \omega + \varepsilon$ on puisse regarder ω comme constant et ε comme une quantité du même ordre que p et q. Alors de la dernière des équations (3_e) on tire

$$m_3 = m_3^0 - \int_0^t (m_2\, p - m_1\, q)\, dt - \mathrm{C}\varepsilon = m_3^0 + u\,,$$

où m_3^0 désigne une quantité constante.

Les premières équations (3_e) peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{dt} + \left[\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}}(\omega+\varepsilon) + \frac{m_3^0+u}{\mathrm{A}}\right] q = -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dm_1}{dt} - m_2(\omega+\varepsilon)\right) = \alpha\,,$$

$$\frac{dq}{dt} - \left[\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}}(\omega+\varepsilon) + \frac{m_3^0+u}{\mathrm{A}}\right] p = -\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dm_2}{dt} + m_1(\omega+\varepsilon)\right) = \beta\,.$$

Si l'on suppose que les termes

$$(12_e)\qquad \frac{uq}{A},\ \frac{up}{A},\ \frac{m_2\varepsilon}{A},\ \frac{m_1\varepsilon}{A},\ \frac{C-A}{A}\varepsilon q,\ \frac{C-A}{A}\varepsilon p$$

soient négligeables, alors les équations précédentes deviendront

$$(13_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}+\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]q=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{dt}-m_2\,\omega\right)=\alpha, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt}-\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]p=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{dt}+m_1\,\omega\right)=\beta. \end{cases}$$

2. Pour réduire les équations différentielles à la forme précédente il n'est pas nécessaire de supposer que toutes les quantités (12_e) soient négligeables, pourvu qu'on change la variable indépendante.

Divisons les premières équations (3_e) par r, on aura

$$\frac{dp}{rdt}+\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{rdt}-m_2\right),$$

$$\frac{dq}{rdt}+\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{rdt}+m_1\right),$$

Posons

$$\tau=\int_0^t\frac{rdt}{\omega}$$

ω étant la valeur de r pour $t=0$. Si nous prenons τ pour variable indépendante, on trouvera

$$\frac{dp}{d\tau}+\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{d\tau}-m_2\,\omega\right),$$

$$\frac{dq}{d\tau}-\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{d\tau}+m_1\,\omega\right).$$

Désignons par m_3^0 la valeur de m_3 pour $\tau=0$, et écrivons $r-\omega=\varepsilon$, il viendra

$$m_3=m_3^0-\int_0^\tau(m_2\,p-m_1\,q)\frac{\omega}{r}-d\tau-C\varepsilon$$

d'où

$$(14_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\tau}+\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]q+vq=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{d\tau}-m_2\,\omega\right), \\[2ex] \dfrac{dq}{d\tau}-\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]p-vp=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{d\tau}+m_1\,\omega\right), \end{cases}$$

v étant donné par la formule

$$v=-\frac{\omega}{r}\left\{\int_0^\tau\left(\frac{m_2}{A}p-\frac{m_1}{A}q\right)\frac{\omega}{r}d\tau+\left(\frac{C}{A}+\frac{m_3^0}{A\omega}\right)\varepsilon\right\}.$$

Supposons maintenant p, q, très–petits de sorte que par rapport aux autres quantités qui paraissent dans les formules *on puisse les regarder comme des quantités infiniment petites du premier ordre*. La formule précédente démontre que *v est infiniment petit du même ordre*. Par suite *les termes qv, pv seront des quantités infiniment petites du second ordre*.

En les négligeant, les équations différentielles (14_e) deviendront

$$(13'_e)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{d\tau}+\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3^0}{A}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{d\tau}-m_2\,\omega\right),\\ &\frac{dq}{d\tau}-\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3^0}{A}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{d\tau}+m_1\,\omega\right)\cdot \end{aligned}\right.$$

On a donc réduit les équations différentielles à la forme (13_e) en supposant seulement qu'on puisse regarder q, p, ε comme des quantités infiniment petites du premier ordre et en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Entre les équations (13_e) et ($13'_e$) il n'y a que la variable indépendante qui soit différente. Dans les premières équations on a t, dans les autres on a r. Mais remarquons que si l'on pose $\omega = 2\pi$ et si l'on se rapporte au mouvement de la terre *la variable qui mesure effectivement le temps* est τ.

Il est évident que la discussion que nous allons faire des équations (13_e) est applicable sans aucune modification aux équations ($13'_e$).

3. Dans les équations (13_e) on peut supposer que m_1 et m_2 soient données et qu'on les intègre par rapport à p et q. Au contraire on peut donner p et q et déterminer m_1 et m_2. Comme nous avons déjà vu dans les articles précédents le premier problème correspond *à déterminer le mouvement du pôle lorsqu'on connaît le mouvement interne* et le second problème se rapporte *à la détermination des mouvements internes lorsqu'on connaît le mouvement du pôle*.

Il est évident que si nous voulons appliquer les résultats de M. CHANDLER (voir l'article V) il faudra avoir égard au second problème. Nous allons cependant traiter les deux problèmes ensemble.

Posons pour simplifier

$$\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3^0}{A}=\rho$$

et ajoutons les équations (13_e) après avoir multiplié la deuxième équation par i. On aura

$$\frac{d(p+iq)}{dt}-i\rho(p+iq)=-\frac{1}{A}\left[\frac{d(m_1+im_2)}{dt}+i\omega(m_1+im_2)\right]=\alpha+i\beta$$

d'où l'on tire

$$(15_e)\qquad p+iq=e^{i\rho t}\left[\int(\alpha+i\beta)\,e^{-i\rho t}\,dt+C\right],$$

$$(15'_e)\qquad \frac{1}{A}(m_1+im_2)=e^{-i\omega t}\left[-\int(\alpha+i\beta)\,e^{i\omega t}\,dt+D\right],$$

C e D étant des constantes arbitraires.

4. Dans le cas que nous discutons le pôle est très–peu éloigné de l'extrémité de l'axe d'inertie ζ et dans l'ordre d'approximation dans lequel nous envisageons la question nous pouvons supposer que le mouvement ait lieu dans le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie conduit par l'extrémité de l'axe ζ. Alors on peut regarder les coordonnées ξ, η du pôle dans ce plan comme proportionnelles à p er q.

Supposons maintenant que le mouvement du pôle soit décomposable dans une série de *mouvements harmoniques*.

Avant de développer les conséquences qui découlent de cette hypothèse nous allons donner quelques définitions.

Nous concevons un mouvement harmonique comme un mouvement d'un point sur une ellipse de manière que le rayon vecteur conduit par le centre décrit des aires proportionnelles au temps. La *période* est la durée d'une révolution.

Si nous envisageons tous les mouvements harmoniques d'une période donnée, sans avoir égard à leur amplitude, nous trouverons une infinité de mouvements possibles en changeant le rapport de la longueur des axes de la trajectoire et leur inclination par rapport à un axe fixe.

Un point qui pourra se mouvoir dans un plan avec un mouvement harmonique d'une période donnée sur des ellipses dont les axes sont dans un rapport quelconque et ont une direction quelconque aura toutes les sortes de mouvements harmoniques qu'on a considérés précédemment, et pour simplifier nous dirons qu'il peut prendre un *mouvement harmonique quelconque de la période donnée*.

5. Cela posé écrivons les formules qu'on trouve dans l'hypothèse que nous venons de faire sur le mouvement du pôle.

On aura

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma\,(\alpha_n \cos \lambda_n t + \alpha'_n \sin \lambda_n t),$$

$$\beta = \beta_0 + \Sigma\,(\beta_n \cos \lambda_n t + \beta'_n \sin \lambda_n t)$$

d'où

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \Sigma\left(\frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\, e^{i\lambda_n t} + \frac{\alpha'_n - \beta_n + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\, e^{-i\lambda_n t}\right)$$

$$= \mathrm{A}_0 + \Sigma\left(\mathrm{A}_n e^{i\lambda_n t} + \mathrm{A}'_n e^{-i\lambda_n t}\right)$$

ayant supposé

$$(16_e)\qquad \mathrm{A}_0 = \alpha_0 + i\beta_0\ ,\ \mathrm{A}_n = \frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\ ,\ \mathrm{A}'_n = \frac{\alpha_n - \beta'_n + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\,.$$

Par conséquent

$$\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt = \int \{\mathrm{A}_0 e^{-i\varrho t} + \Sigma\,(\mathrm{A}_n e^{i(\lambda_n - \varrho)t} + \mathrm{A}'_n e^{-i(\lambda_n + \varrho)t})\}\, dt$$

$$= \frac{\mathrm{A}_0}{-i\rho}\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{\mathrm{A}_n}{i\,(\lambda_n - \rho)}\, e^{i(\lambda_n - \varrho)} + \frac{\mathrm{A}'_n}{-i\,(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t}\right).$$

Employons maintenant la formule (15_e). Nous trouverons

$$p + iq = \frac{A_0}{-i\rho} + Ce^{i\rho t} + \Sigma\left(\frac{A_n}{i(\lambda_n - \rho)} e^{i\lambda_n t} + \frac{A_n'}{-i(\lambda_n + \rho)} e^{-i\lambda_n t}\right)$$

et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire on aura

$$(17_e)\quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{\beta_0}{\rho} + (C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t) \\ &\qquad + \Sigma \frac{(\beta_n \rho - \alpha_n' \lambda_n) \cos \lambda_n t + (\alpha_n \lambda_n + \beta_n' \rho) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \\ q &= \frac{\alpha_0}{\rho} + (C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t) \\ &\qquad + \Sigma \frac{-(\beta_n' \lambda_n + \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t + (\beta_n \lambda_n - \alpha_n' \rho) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \end{aligned}\right.$$

ayant posé $C = C_1 + iC_2$.

De même si nous écrivons $D = D_1 + iD_2$, on pourra calculer les valeurs de m_1/A et m_2/A, et on trouvera les formules suivantes

$$(18_e)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{m_1}{A} &= -\frac{\beta_0}{\omega} + (D_1 \cos \omega t - D_2 \sin \omega t) \\ &\qquad + \Sigma \frac{(\beta_n \omega + \alpha_n' \lambda_n) \cos \lambda_n t - (\alpha_n \lambda_n - \beta_n' \omega) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}, \\ \frac{m_2}{A} &= \frac{\alpha_0}{\omega} + (D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t) \\ &\qquad + \Sigma \frac{(\beta_n' \lambda_n - \alpha_n \omega) \cos \lambda_n t - (\beta_n \lambda_n + \alpha_n' \omega) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}. \end{aligned}\right.$$

6. Les dénominateurs des formules (17_e) et (18_e) s'annulent lorsqu'on a $\lambda_n = \rho$, $\lambda_n = \omega$. On tire de là que *le pôle peut avoir un mouvement harmonique quelconque avec une période* $2\pi/\lambda_n$ $(\lambda_n \gtrless \omega)$ *tandis qu'il ne peut avoir qu'un mouvement harmonique circulaire avec la période* $2\pi/\omega$.

En effet si $\lambda_n = \omega$ il faut que l'on ait

$$\beta_n = -\alpha_n' \quad , \quad \alpha_n = \beta_n' .$$

Donc les termes relatifs à la période $2\pi/\omega$ qui paraissent dans les expressions de p et de q sont de la forme

$$\frac{\mu}{\omega - \rho} \sin \omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho} \cos \omega t ,$$

$$-\frac{\mu}{\omega - \rho} \cos \omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho} \sin \omega t$$

et ils correspondent évidemment à un mouvement harmonique circulaire.

Si $\lambda_n = \rho$ on doit avoir

$$\beta_n = \alpha_n' \quad , \quad \alpha_n = -\beta_n' ;$$

par suite les termes de p et q qui sont relatifs à la période $2\pi/\rho$ auront la forme

$$(C_1 + h_1) \cos \rho t - (C_2 + h_2) \sin \rho t ,$$

$$(C_1 - h_1) \sin \rho t + (C_2 - h_2) \cos \rho t ,$$

h_1 et h_2 étant des quantités arbitraires; et par suite ils correspondent à un mouvement harmonique quelconque.

Si λ_n a une valeur qui n'est égale ni à ρ ni à ω, on pourra prendre arbitrairement les coefficients α_n, β_n, α'_n, β'_n et en conséquence le mouvement harmonique correspondant sera quelconque.

C. Q. F. D.

7. D'une manière tout à fait analogue à ce que nous avons établi précédemment on pourra dire maintenant qu'il est possible qu'il existe un mouvement interne *quelconque* de la période λ si dans les expressions de m_1/A et m_2/A paraissent des termes de la forme

$$m \cos \lambda t + n \sin \lambda t \quad , \quad m' \cos \lambda t + n' \sin \lambda t$$

où les coefficients constants m, n, m', n' peuvent avoir des rapports quelconques entre eux.

En répétant le raisonnement qu'on vient de faire dans le paragraphe précédent on arrive à la conclusion que *si le mouvement du pôle est décomposable dans une série de mouvements harmoniques, il peut exister des mouvements internes quelconques ayant une période différente de* $2\pi/\rho$, *mais il ne peut exister qu'un mouvement interne particulier ayant la période* $2\pi/\rho$.

8. Nous venons de reconnaître que les périodes $2\pi/\omega$, $2\pi/\rho$ sont des périodes singulières pour les mouvements du pôle et pour les mouvements internes.

Une autre propriété qui se rattache à ces périodes est la suivante, et elle découle immédiatement des formules (17_e) et (18_e).

À tout mouvement harmonique du pôle ayant la période $\dfrac{2\pi}{\lambda_n} \gtrless \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\rho} \\ \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$ *correspond un mouvement interne périodique ayant une période égale et réciproquement. Les constantes* α_n, α'_n, β_n, β'_n *définissent les deux mouvements indépendamment des mouvements ayant une période différente.*

Au contraire les mouvements internes ne peuvent pas caractériser le mouvement du pôle ayant la période $2\pi/\rho$, *et le mouvement du pôle ne peut pas caractériser les mouvements internes ayant la période* $2\pi/\omega$. *Il peut exister des mouvements internes ayant la période* $2\pi/\omega$ *qui n'ont aucune influence sur le mouvement du pôle.*

Article IV.

1. Regardons l'axe OM du mouvement interne comme résultant d'un vecteur constant, d'un vecteur variable avec la période $2\pi/\omega$, d'un vecteur variable avec la période $2\pi/\rho$ et enfin des vecteurs $OM^{(\lambda_1)}, OM^{(\lambda_2)}, \cdots$ variables avec les périodes $2\pi/\lambda_1, 2\pi/\lambda_2, \cdots$ en supposant

$$\lambda_n \gtrless \begin{cases} \omega \\ \rho \end{cases}.$$

Les projections de $OM^{(\lambda_n)}$ dans les directions ξ, η soient les termes ayant la période $2\pi/\lambda_n$ dans les expressions de m_1/A, m_2/A que nous avons trouvées dans l'article précédent (voir (18_e)).

Nous allons résoudre la question suivante: *déterminer le mouvement de l'extremité* $M^{(\lambda)}$ *du vecteur* $OM^{(\lambda)}$ *étant connu le mouvement du pôle ayant la période* $2\pi/\lambda_n = 2\pi/\lambda$.

Il est évident que les formules de l'article précédent nous donneront le mouvement de la projection du point $M^{(\lambda)}$ dans le plan de l'équateur.

Prenons les plans coordonnés $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ de manière que les axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique ayant la période $2\pi/\lambda$ soient situés dans ces plans.

Nous aurons

$$\frac{p^{(\lambda)}}{\omega} = a\cos\lambda t \quad , \quad \frac{q^{(\lambda)}}{\omega} = b\sin\lambda t$$

ayant désigné par $p^{(\lambda)}$ et $q^{(\lambda)}$ les termes des expressions (17_e) qui ont la période $2\pi/\lambda$.

Si φ et ψ sont les sémiaxes de l'ellipse décrite par le pôle et si on les mesure en secondes d'arcs on aura

$$a = \operatorname{tg}\varphi \quad , \quad b = \operatorname{tg}\psi .$$

Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les constantes des formules (17_e) qui correspondent à la période $2\pi/\lambda$. On aura

$$\frac{\beta\rho - \alpha'\lambda}{\lambda^2 - \rho^2} = a\omega \quad , \quad \alpha\lambda + \beta'\rho = 0 ,$$

$$\beta\lambda + \alpha\rho = 0 \quad , \quad \frac{\beta\lambda - \alpha'\rho}{\lambda^2 - \rho^2} = b\omega$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \quad , \quad \beta = (b\lambda - a\rho)\,\omega \quad , \quad \alpha' = (b\rho - a\lambda)\,\omega .$$

Par suite les termes de $m_1/A\omega$, $m_2/A\omega$ qui ont la période $2\pi/\lambda$ seront

$$\frac{m_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2}\cos\lambda t ,$$

$$\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\sin\lambda t .$$

2. Les maxima des valeurs absolues de $m_1^{(\lambda)}/A\omega$ correspondent aux valeurs $t = n\pi/\lambda$, n étant un nombre entier, et sont donnés par

$$\frac{M_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| .$$

Les maxima des valeurs absolues de $m_2^{(\lambda)}/A\omega$ correspondent à $t = \frac{(2n+1)}{2}\,\frac{\pi}{\lambda}$. Ils sont

$$\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| ,$$

d'où l'on tire

$$(19_e) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\,M_1^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C}\, \frac{(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\omega + (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega , \\ 2\,M_2^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C}\, \frac{-(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\lambda - (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega . \end{aligned} \right.$$

On pourra donc énoncer les propositions suivantes:

1° *Si nous projectons sur le plan de l'équateur l'extrémité* $M^{(\lambda)}$ *de l'axe des mouvements internes partiels dont la période est* $2\pi/\lambda$, *la projection* m_λ *a un mouvement harmonique sur une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique de la même période.*

2° *Lorsque* m_λ *rejoint un sommet de sa trajectoire, le pôle aussi dans le mouvement harmonique de la même période rejoint un sommet.*

3° *Les longueurs des axes de l'ellipse décrite par le point* m_λ *sont données par les formules* (19_e).

3. Le mouvement harmonique du pôle ayant la période $2\pi/\lambda$ est le mouvement résultant de deux mouvements harmoniques de la même période qui ont lieu sur les axes ξ, η.

De même le mouvement du point m_λ peut être obtenu en composant deux mouvements harmoniques dont les trajectoires sont les axes coordonnées ξ, η.

Le mouvement harmonique du pôle et celui de m_λ *dans la direction* ξ *auront la même phase si la quantité*

$$(20_e) \qquad 2\,\frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} + (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

est positive, et ils seront en opposition de phase si la même quantité est négative.

Le mouvement harmonique du pôle et celui de m_λ *dans la direction* η *auront la même phase si la quantité*

$$(20'_e) \qquad 2\,\frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} - (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

est positive; et si elle est négative les deux mouvements seront en opposition de phase.

Nous supprimons la démonstration de ces propositions qu'on déduit aisément des formules précédentes.

Article V.

1. Si nous voulons appliquer les résultats précédents au mouvement de la terre il faut supposer que $2\pi/\omega$ représente le jour sidéral.

On n'a observé aucune variation diurne des latitudes; cela ne signifie pas qu'ils n'y ait pas de mouvements internes avec la période diurne, car on a vu qu'il peut exister des mouvements internes avec la période $2\pi/\omega$ qui n'ont pas d'influence sur le mouvement du pôle. (Article IV, § 8).

2. Examinons la période $2\pi/\rho$. Nous avons [28]

$$\rho = \frac{C - A}{A}\,\omega + \frac{m_3^0}{A} = \frac{\omega}{305} + \frac{m_3^0}{A}$$

d'où, en prenant pour unité de temps le jour sidéral,

$$\frac{2\pi}{\rho} = \frac{305}{1 + 305\,\dfrac{m_3^0}{A\omega}} = \frac{305}{1 + 306\,\dfrac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Donc $2\pi/\rho$ est la période eulérienne changée dans le rapport

$$\frac{1}{1 + 306\,\dfrac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Si de telle manière on voulait trouver la période de 430 jours découverte par M. CHANDLER (*) on devrait avoir

$$\frac{430}{305} = \frac{1}{1 + 306\,\dfrac{m_3^0}{C\omega}}$$

d'où

$$\frac{m_3^0}{C\omega} = -\frac{1}{1053}.$$

3. Sans discuter ce résultat, appliquons les résultats établis par M. CHANDLER dans le N. 329 de l'«Astronomical Journal» de l'année 1894, relativement au mouvement du pôle ayant le période annuelle.

(28) Nous supposons $(C - A)/A = 1/305$ sans discuter ici si ce rapport qu'on calcule d'après les phénomènes de précession et de nutation ne peut être changé à cause du mouvement interne.

(*) Cfr. la N.d.R. posta nell'Introduzione sopra i risultati delle osservazioni moderne, che hanno mostrato come la polodia sia in realtà una curva assai irregolare, nella quale grossolanamente può riscontrarsi il termine periodico di CHANDLER (oggi portato a 433 giorni), sovrapposto ad un secondo termine meno importante di periodo annuo. [N.d.R.].

On peut tirer de là les éléments correspondant au mouvement interne capable de l'engendrer.

A cet effet il suffit de substituer dans les formules que nous avons trouvées les valeurs suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega = 2\pi: \\ &\lambda = \frac{2\pi}{366}, \\ &2\varphi = 0'',3, \\ &2\psi = 0'',08, \end{aligned}\right.$$

le jour sidéral étant l'unité de temps.

En effectuant les calculs, on a approximativement

$$2a = 2\operatorname{tg}\varphi = 2\pi\frac{3}{10\times 360\times 60\times 60},$$

$$2b = 2\operatorname{tg}\psi = 2\pi\frac{8}{100\times 360\times 60\times 60}.$$

Il faudra supposer que l'axe ξ forme avec le méridien de Greenwich un angle de 45°.

Prenons comme au paragraphe précédent

$$\frac{A}{C} = \frac{305}{306},$$

on trouvera à cause des équations (19_e)

$$2M_1^{(\lambda)} = \frac{37}{10^{10}}C\omega,$$

$$2M_2^{(\lambda)} = \frac{27}{10^{10}}C\omega$$

si l'on suppose $\rho = 2\pi/305$; et

$$2M_1^{(\lambda)} = \frac{23}{10^{10}}C\omega,$$

$$2M_2^{(\lambda)} = \frac{31}{10^{10}}C\omega$$

en supposant $\rho = 2\pi/430$.

L'axe a de l'ellipse décrite par le pôle forme un angle de 45° avec le méridien de Greenwich, par conséquent le grand axe de l'ellipse parcourue par le point $m^{(\lambda)}$ sera située dans le plan méridien qui a la longitude de 45°.

Remarquons encore que la quantité (20_e) est positive et la quantité $(20'_e)$ est négative.

En résumant tous ces résultats on peut énoncer les propositions suivantes:

Si l'on cherche la variation que doit subir l'axe $OM^{(\lambda)}$ *du mouvement interne terrestre (dans l'hypothèse de la non-plasticité de la terre) pour donner au pôle le mouvement harmonique étudié par M. Chandler, ayant la période annuelle, on trouve que*:

1° *projetant* $M^{(\lambda)}$ *sur l'équateur en* $m^{(\lambda)}$, *ce point décrira une ellipse dont le grand axe fait un angle de 45° avec le méridien de Greenwich;*

2° *les axes de cette ellipse seront égaux à* $\frac{37}{10^{10}}C\omega$, $\frac{27}{10^{10}}C\omega$, *ou à* $\frac{23}{10^{10}}C\omega$, $\frac{31}{10^{10}}C\omega$ *suivant que l'on suppose* $\rho = 2\pi/305$ *ou* $\rho = 2\pi/430$;

3° *décomposant le muovement du pôle et celui de* m_λ *suivant les directions des axes de l'ellipse décrite par le pôle, les deux mouvements dans la direction du grand axe auront la même phase et les mouvements dans la direction du petit axe auront des phases opposées.*

4. Pour exercice des formules qu'on a données dans l'article précédent on peut répéter un calcul analogue à celui qu'on vient de faire pour résoudre le problème suivant:

Supposons qu'il existe un mouvement interne ayant la période de 430 jours. Quels sont les éléments de ce muovement pour qu'il soit capable de produire le mouvement du pôle étudié par M. Chandler ayant la même période?

Si nous prenons $\rho = 2\pi/305$ il faudra substituer dans les formules les valeurs suivantes

$$\begin{cases} \omega = 2\pi, \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{430}. \end{cases}$$

Le mouvement du pôle est circulaire et sa demi-amplitude est 0'',1, par suite

$$\varphi = \psi = 0'',1$$

d'où approximativement

$$a = b = \operatorname{tg}\varphi = 2\pi\frac{1}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

et à cause des équations (19_e) on aura

$$M_1 = M_2 = \frac{4}{10^{10}}C\omega.$$

Chapitre VI.

Aperçu sur les perturbations dues à la plasticité de la terre.

Article I.

1. Supposons que le mouvement interne soit stationnaire et cherchons les perturbations produites par la plasticité sur le mouvement de rotation, que nous connaissons par les études que nous avons faites dans le chapitre précédent.

Nous partirons de l'hypothèse que l'effet dû à la plasticité consiste dans la tendance du pôle d'inertie à se rapprocher du pôle de rotation, lorsque les deux points ne coïncident pas. Nous discuterons après la loi de ce rapprochement.

2. Envisageons les résultats de l'article III du chapitre précédent lorsque le mouvement interne est stationnaire. On pourra les rapprocher à ceux qu'on a trouvés dans le chapitre III sur les petites vibrations du pôle autour des positions d'équilibre stable dans l'hypothèse que l'ellipsoïde d'inertie soit un solide de révolution.

Si le mouvement interne est stationnaire les formules (17_e) et (18_e) de l'article III du chapitre V deviennent

$$\begin{cases} p = -\dfrac{\beta_0}{\rho} + C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t\,, \\[2mm] q = \dfrac{\alpha_0}{\rho} + C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{A} = -\dfrac{\beta_0}{\omega}\,, \\[2mm] \dfrac{m_2}{A} = \dfrac{\alpha_0}{\omega} \end{cases}$$

et en posant pour simplifier

$$c_1 = \frac{C_1}{\omega} \quad , \quad c_2 = \frac{C_2}{\omega}\,,$$

on aura

$$(1_f) \qquad \begin{cases} \dfrac{p}{\omega} = \dfrac{m_1}{A\rho} + c_1 \cos \rho t - c_2 \sin \rho t\,, \\[2mm] \dfrac{q}{\omega} = \dfrac{m_2}{A\rho} + c_1 \sin \rho t + c_2 \cos \rho t\,. \end{cases}$$

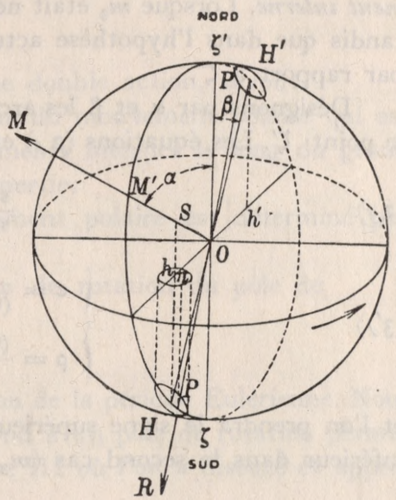
La quantité ρ sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{C - A}{A}\,\omega + \frac{m_3}{A}\,.$$

3. Pour fixer les idées, supposons que m_3 soit une quantité négative, c'est à dire supposons que les projections de l'axe du mouvement interne et de l'axe du couple de quantité de mouvement dû à la rotation de la terre, sur l'axe terrestre n'aient pas la même direction. Nous discuterons après comment on doit modifier les formules lorsqu'on suppose que cette hypothèse ne soit pas vérifiée.

Ayant égard qu'une rotation positive a lieu dans le même sens que la rotation des aiguilles d'une montre, nous pouvons conduire les deux segments OR et OM qui représentent la rotation de la terre et l'axe du mouvement interne en prenant pour origine le centre de la terre. En prolongeant les deux segments dans leurs directions positives ils rencontreront respectivement l'hémisphère sud et l'hémisphère nord.

Cela posé, soit $OP = 1$ un segment ayant la même direction de OR. En projetant ce point sur l'équateur en π, on aura que les projections de $O\pi$ sur les axes ξ et η seront p/ω, q/ω. De même soit $OS = OM/A\rho$ un segment ayant la même direction que OM, et soit h la projection de S sur l'équateur.



Les projections de Oh sur les axes ξ et η seront $m_1/A\rho$, $m_2/A\rho$.

Nous pouvons maintenant énoncer d'une manière géométrique la loi représentée par les formules (1_f) en disant: *Le point* π *tourne avec la vitesse angulaire* ρ *sur une circonférence ayant h pour centre.*

4. Conduisons une sphère ayant O pour centre et dont le rayon soit égal à 1. Elle rencontrera l'axe OM dans le point M' et l'axe OR dans le point P. Puisque ce point est très-proche du pôle d'inertie ζ, nous pouvons par approximation regarder la trajectoire qu'il décrit sur la sphère comme une circonférence ayant pour centre le point H de la sphère qui se projette en h sur l'équateur. Si nous voulons envisager tous les éléments dans l'émisphère nord, il suffit de construire les points ζ', H', P' situés dans une position diamétralement opposée aux points ζ, H, P. Il est évident que les quatre points P', H', ζ', M' appartiennent à l'hémisphère nord.

Nous les désignerons par les mots: *pôle de rotation*, *centre du mouvement polaire*, *pôle d'inertie*, *centre du mouvement interne*.

Soit h' la projection de H' sur l'équateur. On aura

$$Oh' = Oh,$$

par suite

$$\sin H'\zeta' = Oh = OS \sin M'\zeta',$$

d'où

$$(2_f) \qquad \frac{\sin H'\zeta'}{\sin M'\zeta'} = OS = \frac{OM}{A\rho} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}{(C - A)\,\omega + m_3} = \varepsilon\,.$$

Posons

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}\,,$$

nous aurons

$$m_3 = -M \cos M'\zeta',$$

et par conséquent

$$(3_f) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'}\,, \\ \rho &= \frac{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'}{A}\,. \end{aligned} \right.$$

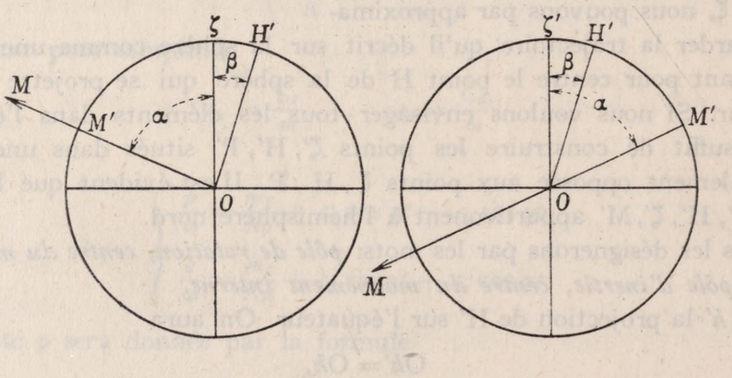
5. Nous avons supposé jusqu'ici que m_3 soit une quantité négative; c'est pourquoi on a pris l'intersection de OM avec la sphère sur l'hémisphère nord. Si m_3 est positif, prolongeons MO du côté du point O jusqu'à rencontrer l'hémisphère nord en M'. On appellera toujours ce point le *centre du mouvement interne*. Lorsque m_3 ètait négatif le point ζ' était situé entre M' et H', tandis que dans l'hypothèse actuelle M' et H' seront situés du même côté par rapport à ζ'.

Désignons par α et β les arcs ζ'M' et ζ' H' et prenons leur origine dans le point ζ'. Les équations (2_f) et (3_f) pourront s'écrire

$$(2_f)\qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\,\varepsilon,$$

$$(3'_f)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha},\\ \rho &= \frac{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}{A}, \end{aligned}\right.$$

et l'on prendra le signe supérieur dans le premier cas ($m_3 < 0$) et le signe inférieur dans le second cas ($m_3 > 0$).



6. En résumant les lois du mouvement du pôle, si l'on suppose les mouvements internes stationnaires, et que l'on néglige la plasticité de la terre, on trouve:

1° *Le centre du mouvement interne, le pôle d'inertie et le centre du mouvement polaire sont situés sur un grand cercle de la sphère.*

2° α *et* β *étant les arcs de grand cercle conduits par le pôle d'inertie et les centres du mouvement interne et du mouvement polaire, on a*

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\,\varepsilon = \frac{\mp M}{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}.$$

3° *Le pôle de rotation parcourt une circonférence autour du centre du mouvement polaire avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}{A}.$$

Ces lois représentent d'une manière fort claire l'effet produit par les mouvements internes sur le mouvement du pôle.

En effet s'ils n'existaient pas, le pôle décrirait une circonférence autour du pôle d'inertie avec la vitesse angulaire

$$\frac{C - A}{A}\,\omega\,;$$

par suite les mouvements internes ont une double action, savoir:

1° Ils changent le centre de rotation du mouvement polaire qui est repoussé (ou attiré) du centre des mouvements internes le long du grand cercle qui passe par ce point et le pôle d'inertie.

Le déplacement du centre du mouvement polaire est déterminé par l'angle β.

2° Ils changent la vitesse angulaire de rotation du pôle de

$$\mp \frac{M \cos \alpha}{A}$$

et ce changement correspond à une variation de la période Eulerienne. Nous remarquons enfin que le point H' correspond à un pôle de rotation permanent. Nous renvoyons pour cela au chapitre III où l'on a discuté et approfondi cette question.

Article III.

1. Nous allons maintenant déterminer les perturbations auxquelles seront soumises les lois que nous avons énoncées dans l'article précédent, par effet de la plasticité qu'on avait négligée auparavant.

Prenant le point O pour centre de projection, projetons la surface de la terre sur la sphère. Si nous envisageons les phénomènes pendant un intervalle de temps qui ne soit pas trop long, nous pourrons supposer que, même si la terre se déforme à cause de sa plasticité, la configuration des mers et des continents sur la sphère ne change pas sensiblement, mais il faudra supposer que le pôle d'inertie se déplace sur la sphère.

Ce sont donc ces déplacements du pôle d'inertie sur la sphère, la projection de la terre sur la sphère étant fixe, qui décèlent sa plasticité.

On pourra énoncer la propriété que le mouvement interne est stationnaire en disant que le centre du mouvement interne est un point fixe de la sphère et que $M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$ est constant.

Nous faisons aussi l'hypothèse que les points H', P', ζ' se maintiennent toujours très-proches, de manière qu'on puisse négliger les puissances de leurs distances supérieures à la première puissance. Rappelons à ce propos que l'analyse de l'article III du chapitre précédent, dont nous employons à présent les résultats, est appuyée sur cette hypothése.

Enfin nous supposerons que l'influence de la plasticité se manifeste de manière que le pôle d'inertie tend toujours à s'approcher du pôle de rotation avec une intensité proportionnelle à la distance entre ces points.

D'une façon plus précise nous énoncerons cette loi dans les termes suivants:

Le pôle d'inertie se déplace à chaque instant dans la direction de l'axe (de rotation) sur le grand cercle qui passe par ce point et par la position occupée dans le même temps par le pôle de rotation, avec une vitesse proportionnelle à la distance entre ces points (29).

Le rapport entre la vitesse du pôle d'inertie dans son mouvement relatif à la sphère et cette distance sera désigné par μ et nous l'appellerons *coefficient de plasticité* (30).

Sa valeur sera positive et nous la laisserons indéterminée.

Nous aurons donc $\infty > \mu > 0$. On peut établir dés à présent la signification des cas limites: la valeur $\mu = 0$ correspond au cas de la rigidité complète; et $\mu = \infty$ au cas de l'adaptation immédiate du sphéroide terrestre.

2. Par les hypothèses qu'on vient de faire le problème de la rotation de la terre se présente de la manière suivante:

On a quatre points situés sur la sphère: M′ (centre du mouvement interne), ζ' (pôle d'inertie), H′ (centre du mouvement polaire), P′ (pôle de rotation) *qui suivent dans leurs mouvements sur la sphère les lois suivantes*:

1° M′ *est un point fixe de la sphère.*

2° M′, ζ', H′ *appartiennent à un grand cercle et*

$$\frac{\sin \zeta' H'}{\sin \zeta' M'} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'} .$$

3° P′ *tourne à chaque instant autour du point* H′ *avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'}{A} .$$

4° ζ' *se déplace à chaque instant dans la direction tangente à* ζ' P′ *avec une vitesse égale à* $\mu \cdot \zeta'$ P′.

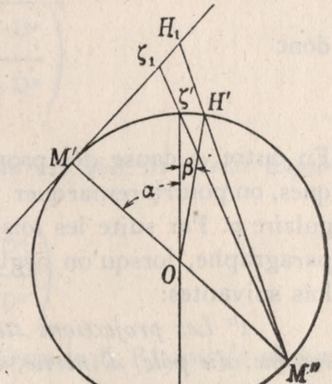
Par ces conditions on pourrait établir tout de suite les équations différentielles du problème. Cependant dans l'article suivant nous le transformerons de manière qu'on pourra l'aborder par une analyse tout à fait élémentaire.

(29) Voir DARWIN, *On the influence of the Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation.* « Phil. Trans. Roy. Soc. », Vol. 167.

(30) Voir SCHIAPARELLI, *De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg 1889; « Nuovo Cimento », T. 30. S. 3e. Le cas intermédiaire ne correspond pas complèment à celui que M. SCHIAPARELLI a discuté. Mais en employant la méthode géometrique dont il a fait usage on pourrait l'envisager d'une manière analogue, en ayant égard aux résultats du chapitre précédent. On a adopté l'hypothèse qu'on vient d'énoncer pour simplifier les calculs des articles suivants.

Article III.

1. Pour simplifier la question dont nous avons parlé à la fin de l'article précédent, nous envisagerons une représentation de la terre sur un plan au lieu de la représentation sphérique que nous avons considéré. Pour passer de l'une à l'autre de ces représentations nous employerons la projection stéréographique.



Le plan de projection sera le plan tangent à la sphère dans le point M′ et nous prendrons pour centre de projection le point diamétralement opposé de M′ que nous désignerons par M″.

Le pôle étant en M′, soient θ la colatitude et φ la longitude des points de la sphère. Alors le carré de l'élément linéaire de la sphère sera

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

et le carré de l'élément linéaire dans la projection stéréographique sera

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

On a supposé qu'on puisse négliger les puissances des arcs $\zeta' H', H' P', P' \zeta'$, supérieures à la première puissance.

Cela revient à regarder ces arcs comme des quantités infiniment petites. C'est pourquoi on pourra dire que par la projection stéréographique leurs longueurs ont changé dans le rapport $1/\cos^2\frac{1}{2}\alpha$.

Soient ζ_1, H_1, P_1 les projections stéréographiques des points ζ', H', P'; nous aurons

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\zeta' H'}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Mais

$$\frac{\sin\zeta' H'}{\sin\alpha} = \mp\varepsilon,$$

par suite, en remplaçant $\sin\zeta' H'$ par l'arc $\zeta' H'$, il viendra

$$\zeta' H' = \mp\varepsilon \sin\alpha$$

d'où

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\mp \varepsilon \sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \mp 2 \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha .$$

D'ailleurs on a

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \zeta_1 M',$$

donc

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M_1} = \mp \varepsilon .$$

En outre, à cause des propriétés bien connues des projections stéréographiques, on pourra remarquer que P_1 tourne autour de H_1 avec la vitesse angulaire ρ. Par suite les lois que nous avons énoncées dans le 1er article, 6ème paragraphe, lorsqu'on néglige la plasticité, pourront être remplacées par les lois suivantes:

1° *Les projections stéréographiques* M', ζ_1, H_1 *du centre du mouvement interne, du pôle, d'inertie, et du centre du mouvement polaire sont situées en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M'} = \mp \varepsilon .$$

2° *La projection stéréographique* P_1 *du pôle de rotation décrit une circonférence autour du point* H_1 *avec la vitesse angulaire* ρ.

2. Passons maintenant à déterminer des lois analogues en ayant égard à la plasticité.

A cet effet nous allons transformer les expressions de ε et de ρ.

En posant $\zeta_1 M' = D$, on aura

$$D = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} .$$

Par conséquent nous pourrons écrire

$$(3''_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C-A)\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}, \\[2ex] \rho &= \frac{(C-A)\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}{A} . \end{aligned} \right.$$

On tire de là les quatre lois suivantes qu'on pourra substituer aux lois énoncées au § 3 de l'article précédent.

On a dans un plan quatre points M', ζ_1, H_1, P_1

1° M' *est un pont fixe.*

2° M', ζ_1, H_1 *sont situés en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{D} = \frac{\pm M}{(C-A)\,\omega \mp M\left(\dfrac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right)}$$

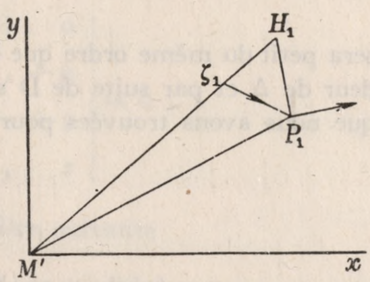
ayant désigné $\zeta_1 M'$ *par* D.

3° P_1 *tourne à chaque instant autour du point* H_1 *avec la vitesse angulaire*

$$\rho = (C-A)\,\omega \mp M\left(\frac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right).$$

4° ζ_1 *se déplace à chaque instant dans la direction* $\zeta_1 P_1$ *avec la vitesse* $\mu\delta$, *où* δ *signifie* $\zeta_1 P_1$.

La dernière loi a été obtenue en remarquant que dans la projection stéréographique les vitesses sont changées dans le même rapport que les arcs infiniments petits.



3. Cela posé, on peut écrire bien aisément les équations différentielles du problème.

Soient x, y des axes orthogonaux fixes par rapport au plan où l'on a fait la représentation stéréographique, situés dans ce plan et ayant pour origine le point M'. Désignons par x, y ; x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées des points P_1, ζ_1, H_1. La deuxième condition énoncée au paragraphe précédent s'écrira

$$\frac{x_2 - x_1}{-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{-y_1} = \mp\varepsilon \tag{4 f}$$

et la troisième condition

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho\,(y_2 - y), \\ \frac{dy}{dt} &= \quad \rho\,(x_1 - x). \end{aligned}\right. \tag{5 f}$$

Le sens de la rotation sera déterminé par l'orientation des axes x, y. Enfin de la quatrième condition on déduira

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu\,(x - x_1), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \mu\,(y - y_1). \end{aligned}\right. \tag{6 f}$$

4. A cause des équations (4_f) on aura

$$x_2 = (1 \pm \varepsilon)\, x_1 \quad , \quad y_2 = (1 \pm \varepsilon)\, y_1 \,;$$

par suite les équations (5_f) deviendront

$$(5'_f) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho\, [(1 \pm \varepsilon)\, y_1 - y]\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \rho\, [(1 \pm \varepsilon)\, x_1 - x]\,. \end{cases}$$

On tire de là, en posant $\Delta^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 2\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right) = 2\rho\,(1 + \varepsilon)\,(x_1 y - y_1 x)$$

ou bien

$$\frac{d\Delta}{dt} = \rho\,(1 + \varepsilon)\,\frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta}\,.$$

Remarquons que ρ est une quantité petite et $(x_1 y - y_1 x)$ est le double de l'aire du triangle $M'\,P_1\,\zeta_1$, c'est pourquoi le rapport

$$\frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta}$$

sera petit du même ordre que $\zeta_1\,P_1$, d'où l'on tire que les variations de grandeur de Δ et par suite de D seront petites. En outre dans les expressions que nous avons trouvées pour ε et ρ (voir équations $(3''_f)$) le terme

$$M\left(\frac{1 - \frac{1}{4}D^2}{1 + \frac{1}{4}D^2}\right)$$

est petit par rapport à $(C - A)\,\omega$. Si donc on envisage le mouvement pendant un intervalle de temps qui ne soit trop long on pourra négliger les variations de ε et de ρ et par suite on pourra les supposer constantes.

Nous avons été conduits aux quatre équations différentielles (6_f), $(5'_f)$ qu'on pourra regarder comme des équations différentielles à coefficients constants. Nous consacrerons l'article suivant à leur intégration.

Article IV.

1. Nous avons réduit dans l'article précédent les équations différentielles du mouvement au système

$$(6_f) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \mu\,(x - x_1)\,, \\[2mm] \dfrac{dy_1}{dt} = \mu\,(y - y_1)\,, \end{cases}$$

$$(5'_f)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho\,[(1\pm\varepsilon)\,y_1 - y]\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \quad \rho\,[(1\pm\varepsilon)\,x_1 - x]\,, \end{cases}$$

dans lequel ρ et ε peuvent être regardés comme des quantités constantes.

Pour l'intégrer posons

$$x = Ce^{zt}\quad,\quad y = Ke^{zt}\quad,$$

$$x_1 = C_1 e^{zt}\quad,\quad y_1 = K_1 e^{zt}\,,$$

C, C_1, K, K_1, z étant des constantes.

Par la substitution des valeurs précédentes on aura

$$(7_f)\qquad \begin{cases} C_1(z+\mu) - C\mu = 0\,, \\ K_1(z+\mu) - K\mu = 0\,, \\ Cz + K_1\rho\,(1\pm\varepsilon) - K\rho = 0\,, \\ -C_1\rho\,(1\pm\varepsilon) + C\rho + Kz = 0\,. \end{cases}$$

z sera donc une racine de l'équation de quatrième degré

$$\begin{vmatrix} z+\mu\,, & -\mu\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & z+\mu\,, & -\mu \\ 0\,, & z\,, & \rho\,(1\pm\varepsilon)\,, & -\rho \\ -\rho\,(1\pm\varepsilon)\,, & \rho\,, & 0\,, & z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cette équation peut s'ecrire aussi de la manière suivante

$$(8_f)\qquad z^4 + 2\,\mu z^3 + (\mu^2+\rho^2)\,z^2 \mp 2\,\rho^2\mu\varepsilon z + \mu^2\rho^2\varepsilon^2 = 0\,.$$

Soient $z', z'', z'''\, z^{IV}$ les racines et $C^{(i)}, C_1^{(i)}, K^{(i)}, K_1^{(i)}$ un système de valeurs de C, C_1, K, K_1 qui vérifient les équations (7_f) lorsqu'on prend $z = z^{(i)}$. Nous aurons

$$(9_f)\qquad \begin{cases} x = \sum_1^4 M_i\,C^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \\[2mm] y = \sum_1^4 M_i\,K^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \end{cases}$$

$$(10_f)\qquad \begin{cases} x_1 = \sum_1^4 M_i\,C_1^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \\[2mm] y_1 = \sum_1^4 M_i\,K_1^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \end{cases}$$

les quantités M_i étant des constantes arbitraires.

2. Pour résoudre l'équation (8_f) posons $\mp \varepsilon = \varepsilon'$. Elle s'écrira alors

$$z^2 (z + \mu)^2 + \rho^2 (z + \mu\varepsilon')^2 = 0$$

d'où

$$z (z + \mu) \pm i\rho (z + \mu\varepsilon') = 0 .$$

Par suite, les racines seront

$$z' = \frac{-\mu + u - i(\rho - v)}{2},$$

$$z'' = \frac{-\mu + u + i(\rho - v)}{2},$$

$$z''' = \frac{-\mu - u - i(\rho + v)}{2},$$

$$z^{\mathrm{IV}} = \frac{-\mu - u + i(\rho + v)}{2}$$

ou u et v sont donnès par les formules

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \mu^2 - \rho^2}{2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \rho^2 - \mu^2}{2}},$$

les radicaux étant pris dans leurs valeurs absolues.

3. Examinons plus particulièrement les cas limites envisagés dans l'article II, § 2.

Si $\mu = 0$ (c'est à dire dans le cas de la rigidité compléte) l'équation (8_f) devient

$$z^4 + \rho^2 z^2 = 0.$$

Deux des racines deviennent égales à $\pm i\rho$ et deux racines s'annulent. Donc le mouvement est périodique et la periodé est $2\pi/\rho$, c'est à dire on trouve la période eulerienne modifiée de la manière que nous avons vu dans le chapitre précédent.

Soit $\mu = \infty$. En divisant l'équation (8_f), par μ^2 et en faisant après $\frac{1}{\mu} = 0$ on trouve

$$z^2 + \rho^2 \varepsilon^2 = 0 .$$

Cela signifie que deux des racines sont infinies et les autres sont $\pm i\rho\varepsilon$. Donc le mouvement est périodique et la période est $2\pi/\rho\varepsilon = 2\pi A/M$. Dans ce cas les équations (6_f) deviennent

$$x = x_1 \quad , \quad y = y_1 ,$$

c'est à dire le pôle d'inertie coïncide avec celui de rotation.

Il viendra à cause des équations $(5'_f)$

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\varepsilon y = -\frac{M}{A} y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \rho\varepsilon x = \frac{M}{A} x$$

d'où

$$x = N_1 \cos\left(\frac{M}{A} t + N\right) \quad , \quad y = N_1 \sin\left(\frac{M}{A} t + N\right),$$

N_1 et N étant des constantes arbitraires. Le pôle de rotation décrit donc une circonférence autour du centre du mouvement interne avec la vitesse angulaire M/A.

Turin, le 18 octobre 1897.

TABLE DES MATIÈRES