XXX.

SUI FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, II

« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) », ser. III, Tomo XII (1899).

PARTE SECONDA.

INTRODUZIONE

Questa seconda parte [1] è dedicata allo studio delle sostituzioni funzioni di variabili complesse.

Non tutte le questioni di cui si fa cenno in questa parte, vengono svolte completamente; alcune per esempio sono enunciate soltanto (vedi il § 5).

Ciò valga a ritenere questo studio come un saggio del genere di ricerche che vi sono iniziate.

Nei primi paragrafi vengono estese le operazioni di derivazione e di integrazione già considerate per le sostituzioni funzioni di variabili reali. Nel § 3 si trova una estensione del noto teorema di CAUCHY ai residui delle sostituzioni, e nel § 4 vi è uno studio sulle singolarità delle sostituzioni.

Un semplice confronto dei risultati trovati a questo riguardo con quelli ben noti sulle equazioni differenziali lineari dovuti al FUCHS, ne mostrano l'analogia e rivelano il nuovo significato che acquistano i teoremi già conosciuti sulle equazioni differenziali lineari.

Fanno seguito alcuni paragrafi ove viene principiato lo studio delle sostituzioni che ho chiamate *abeliane* per la loro analogia colle funzioni abeliane. In questa parte sono considerate più specialmente le proprietà relative alle costanti delle sostituzioni abeliane ed i casi in cui le sostituzioni stesse sono esprimibili per integrali abeliani.

Nella parte che farà seguito alla presente verranno continuate le ricerche sulle sostituzioni algebriche ed abeliane partendo da un altro punto di vista, e verranno inoltre considerate alcune classi particolari di esse [*].

(1) La prima parte di questa Memoria (1886) è inserita nel tomo VI (serie 3ª) della Società Italiana delle Scienze [in queste « Opere »: vol. primo, XV, pp. 209-290]. Questa seconda parte era ultimata nella primavera del 1887 e gran parte dei risultati, senza dimostrazioni, furono pubblicati nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » (marzo 1888) [in queste « Opere »: vol. primo, XX, pp. 351–355].

(*) Questa ulteriore parte non è mai stata pubblicata. [N. d. R.].

PRELIMINARI

Sopra le sostituzioni permutabili con una data sostituzione.

1. Avremo spesso bisogno in questa parte del nostro lavoro di dover determinare le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Incominceremo perciò da tale ricerca.

2. Premetteremo alcune notazioni oltre quelle di cui abbiamo già fatto uso nel corso della prima parte del presente lavoro.

Si rappresenti con A_{is} la sostituzione

$$
(1) \qquad A_{is} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(i,s)}, \cdots, a_{1n}^{(i,s)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^{(i,s)}, \cdots, a_{nn}^{(i,s)} \end{vmatrix} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, m).
$$

Denoteremo con

$$
S = \begin{vmatrix} A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}, A_{m2}, \cdots, A_{mm} \end{vmatrix}
$$

la sostituzione di ordine mn la quale si ottiene sostituendo in luogo delle A_{is} i gruppi di lettere ad esse corrispondenti. In altri termini se $N = m \cdot n$, avremo

$$
S = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1N} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{N1}, b_{N2}, \cdots, b_{NN} \end{vmatrix},
$$

ove, se

$$
n(k-1) < j < nk \quad , \quad n(h-1) < \sigma < nh
$$

$$
j - n(k-1) = i \quad , \quad \sigma - n(h-1) = s ,
$$

avremo

$$
b_{j\sigma} = a_{is}^{(k,h)} .
$$

Rappresenteremo inoltre rispettivamente col simbolo 0 la sostituzione di cui tutti gli elementi sono nulli, e col simbolo 1 la sostituzione identica. Analogamente se con M_{is} denoteremo un insieme di lettere disposte in h_i colonne e in h_s linee, indicheremo con

$$
\begin{vmatrix} M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1n} \\ M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}, M_{n2}, \cdots, M_{nn} \end{vmatrix}
$$

la sostituzione di ordine $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, la quale si ottiene scrivendo in luogo di ciascuna M_{is} nella espressione precedente il gruppo che essa rappresenta.

Se a tutte le lettere che entrano in M_{is} daremo il valore zero, rappresenteremo M_{is} col simbolo o.

Ciò posto risulta immediatamente la seguente proprietà:

Lemma 1°. – *Se le* A_{is} *e le* B_{is} *sono tutte sostituzioni dello stesso ordine, avremo*:

$$\begin{pmatrix} A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}, A_{m2}, \cdots, A_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1m} \\ B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{m1}, B_{m2}, \cdots, B_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1m} \\ C_{21}, C_{22}, \cdots, C_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{m1}, C_{m2}, \cdots, C_{mm} \end{pmatrix},$$

ove

$$C_{is} = \sum_{1}^{m}{}_k A_{ik} B_{ks}.$$

3. Si consideri una sostituzione di ordine n

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

la quale sia permutabile colla sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} b_{11} & ,\cdots, & b_{1,i-1} & , 0 & , b_{1,i+1} & ,\cdots, & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i-1,1} & ,\cdots, & b_{i-1,i-1} & , 0 & , b_{i-1,i+1} & ,\cdots, & b_{i-1,n} \\ 0 & ,\cdots, & 0 & , b_{i,i} & , 0 & ,\cdots, & 0 \\ b_{i+1,1} & ,\cdots, & b_{i+1,i-1} & , 0 & , b_{i+1,i+1} & ,\cdots, & b_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1} & ,\cdots, & b_{n,i-1} & , 0 & , b_{n,i+1} & ,\cdots, & b_{nn} \end{pmatrix},$$

di cui la linea i^{esima} e la colonna i^{esima} hanno tutti gli elementi nulli, al più eccettuato quello situato sulla diagonale. Dovremo avere

$$\sum_{1}^{i-1}{}_s a_{hs} b_{sk} + \sum_{i+1}^{m}{}_s a_{hs} b_{sk} = \sum_{1}^{i-1}{}_s b_{hs} a_{sk} + \sum_{i+1}^{m}{}_s b_{hs} a_{sk}$$

se

$$h \neq i \quad , \quad k \neq i.$$

Ne segue:

Lemma 2°. – *Le due sostituzioni che si ottengono da* S *e da* T *togliendo la linea* i^{esima} *e la colonna* i^{esima} *sono fra loro permutabili.* La proprietà reciproca alla precedente vale evidentemente, vale a dire, *se due sostituzioni sono permutabili sarà sempre possibile aggiungere all'una e all'altra una linea* *ed una colonna aventi tutti gli elementi nulli, meno quelli sulla diagonale, in modo che le due sostituzioni che si ottengono siano fra loro permutabili.*

4. Oltre ai precedenti stabiliremo ancora altri lemmi.

Lemma 3°. – *Se*:

$$\begin{aligned} S &= TS_1 T^{-1} \\ R &= TR_1 T^{-1} \end{aligned} \qquad (\det T = 1),$$

la condizione necessaria e sufficiente affinché S *e* R *siano fra loro permutabili è che siano fra loro permutabili* S_1 *e* R_1.

Lemma 4°. – *Tutte le sostituzioni permutabili con*

$$S = \begin{vmatrix} a_1, 0 & , \cdots, 0 \\ a_2, a_1 & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n, a_{n-1}, & \cdots, a_1 \end{vmatrix}$$

se $a_2 \neq 0$ *hanno la forma*

$$T = \begin{vmatrix} b_1, 0 & , \cdots, 0 \\ b_2, b_1 & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_n, b_{n-1}, & \cdots, b_1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Infatti se R è permutabile con S, posto

$$R = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{vmatrix},$$

dovremo avere

$$\left\{\begin{aligned} & a_1 b_{1,n-1} + a_2 b_{1n} = a_1 b_{1,n-1} \\ & a_1 b_{1,n-2} + a_2 b_{1,n-1} + a_3 b_{1,n} = a_1 b_{1,n-2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_1 b_{11} \quad + a_2 b_{12} + \cdots + a_n b_{1n} = a_1 b_{11}, \end{aligned}\right.$$

da cui si deduce, supponendo $a_2 \neq 0$,

$$b_{1n} = b_{1,n-1} = \cdots = b_{12} = 0.$$

Analogamente si trova

$$b_{i+1,s+1} = b_{is},$$

onde R dovrà assumere la forma (2) della T.

Lemma 5°. – *Se si ha*:

$$TS = UT \tag{3}$$

e se le equazioni caratteristiche relative a S *e a* U *non hanno nessuna radice a comune, è necessario che sia*

$$T = 0.$$

Posti infatti S e U sotto la *forma normale*, avremo

$$S = R^{-1} S_1 R = R^{-1} \begin{pmatrix} a_1, 0, 0, \cdots, 0 & , 0 \\ \varepsilon_1, a_2, 0, \cdots, 0 & , 0 \\ 0, \varepsilon_2, a_3, \cdots, 0 & , 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0, 0, 0, \cdots, \varepsilon_{n-1} & , a_n \end{pmatrix} R \quad (\det R = 1),$$

$$U = V^{-1} U_1 V = V^{-1} \begin{pmatrix} b_1, 0, 0, \cdots, 0, 0 \\ \eta_2, b_2, 0, \cdots, 0, 0 \\ 0, \eta_3, b_3, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, \eta_n, b_n \end{pmatrix} V \quad (\det V = 1),$$

ove alcune delle a_i potranno essere eguali fra loro, come pure alcune delle b_i, ma nessuna b_i sarà eguale ad una a_s; le ε_i e le η_i saranno eguali a 0 o a 1.

La (3) diviene

$$T R^{-1} S_1 R = V^{-1} U_1 V T$$

ovvero

$$V T R^{-1} \cdot S_1 = U_1 \cdot V T R^{-1}.$$

Posto

$$V T R^{-1} = T_1 = \begin{pmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn} \end{pmatrix},$$

avremo

$$T_1 S_1 = U_1 T_1,$$

e quindi

$$c_{ir}(a_r - b_i) = c_{i-1,r}\, \eta_i - c_{i,r+1}\, \varepsilon_r$$

da cui risulta che le c_{is} sono tutte nulle; perciò saranno tutti nulli anche gli elementi della sostituzione T.

Lemma 6°. - *Se*

$$S = \begin{pmatrix} a_1, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, a_1, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1, a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{di ordine } n),$$

$$U = \begin{pmatrix} a_1, 0, \cdots, 0 \\ 1, a_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{di ordine } m < n),$$

$$V = \begin{pmatrix} b_1 , o , \cdots , o \\ o , b_2 , \cdots , o \\ \dots\dots\dots\dots \\ o , o , \cdots , b_{n-m} \end{pmatrix} \quad (b_i \neq a_1),$$

$$W = \begin{pmatrix} U , o \\ o , V \end{pmatrix},$$

e

$$TS = WT,$$

avremo

$$T = \begin{pmatrix} M , o \\ o , o \end{pmatrix}$$

con M *permutabile con* U; *mentre se*

$$ST = TW,$$

avremo

$$T = \begin{pmatrix} o , o \\ M , o \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione di questo lemma si ottiene con un processo simile a quello seguìto per dimostrare il lemma precedente.

Lemma 7°. – *Abbiasi una sostituzione*

$$S = \begin{pmatrix} A_1 , o , \cdots , o \\ o , A_2 , \cdots , o \\ \dots\dots\dots\dots \\ o , o , \cdots , A_n \end{pmatrix}$$

in cui le $A_1 , A_2 , \cdots , A_n$ *sono sostituzioni* (di ordini eguali o differenti) *le cui equazioni caratteristiche non hanno nessuna radice a comune. Se* R *è permutabile con* S, *è necessario e sufficiente che si abbia*

$$R = \begin{pmatrix} M_1 , o , o , \cdots , o \\ o , M_2 , o , \cdots , o \\ \dots\dots\dots\dots \\ o , o , o , \cdots , M_n \end{pmatrix}$$

e M_i *dovrà essere una sostituzione dello stesso ordine di* A_i *e permutabile con essa.*

Si formino infatti le sostituzioni

$$A'_i = \begin{pmatrix} A_i , o \\ o , B_i \end{pmatrix},$$

ove

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} , o , \cdots , o \\ o , b_2^{(i)} , \cdots , o \\ \dots\dots\dots\dots \\ o , o , \cdots , b_{k_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

in modo che due qualunque $b_r^{(i)}, b_s^{(t)}$ siano fra loro differenti e siano differenti dalle radici delle equazioni caratteristiche delle A_i. Oltre a ciò gli ordini delle sostituzioni A'_i risultino tutti eguali fra loro.

Posto

$$S' = \begin{pmatrix} A'_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, A'_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, A'_n \end{pmatrix}$$

ed

$$R' = \begin{pmatrix} M'_{11}, M'_{12}, \cdots, M'_{1n} \\ M'_{21}, M'_{22}, \cdots, M'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M'_{n1}, M'_{n2}, \cdots, M'_{nn} \end{pmatrix},$$

ove le M'_{is} sono sostituzioni dello stesso ordine delle A'_i, e supponendo R' permutabile con S' avremo, applicando il lemma 1°

$$M'_{ii} A'_i = A'_i M'_{ii},$$

$$M'_{is} A'_s = A'_i M'_{is}.$$

Ne segue che M'_{ii} sarà permutabile con A'_i, e poiché le equazioni caratteristiche di A'_s e A'_i non possono avere nessuna radice a comune, per il lemma 5° avremo

$$M'_{is} = 0 \quad , \quad i \neq s.$$

Applicando il lemma 2° enunciato nel § 3 ed il suo reciproco, si ottiene quindi immediatamente quanto si voleva dimostrare.

Lemma 8°. – *Sia*

$$A_i = \begin{pmatrix} a, 0, 0, \cdots, 0 \\ 1, a, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, a, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, a \end{pmatrix} \text{(di ordine } m_i\text{)}$$

e i numeri m_i decrescano coll'aumentare dell'indice i.

Tutte le sostituzioni permutabili con

$$S = \begin{pmatrix} A_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, A_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, A_n \end{pmatrix}$$

saranno date da

$$R = \begin{pmatrix} M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1n} \\ M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}, M_{n2}, \cdots, M_{nn} \end{pmatrix},$$

ove il gruppo di lettere M_{is} *ha* m_s *linee e* m_i *colonne, date se* $i < s$, $(m_i > m_s)$ *da*

$$M_{is} = \underbrace{\left.\begin{matrix} 0, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ 0 & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ b_1^{(is)} & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ b_2^{(is)} & , b_1^{(is)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ b_3^{(is)} & , b_2^{(is)} & , b_1^{(is)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_s}^{(is)} & , b_{m_s - 1}^{(is)} & , b_{m_s - 2}^{(is)} & , \cdots, b_1^{(is)} \end{matrix}\right\}}_{(m_s)} (m_i),$$

mentre se $i > s$, $(m_i < m_s)$ M_{is} *è dato da*

$$M_{is} = \underbrace{\left.\begin{matrix} b_1^{(is)} & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 & , 0, \cdots, 0 \\ b_2^{(is)} & , b_1^{(is)} & , 0 & , \cdots, 0 & , 0, \cdots, 0 \\ b_3^{(is)} & , b_2^{(is)} & , b_1^{(is)} & , \cdots, 0 & , 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_i}^{(is)} & , b_{m_i - 1}^{(is)} & , b_{m_i - 2}^{(is)} & , \cdots, b_1^{(is)} & , 0, \cdots, 0 \end{matrix}\right\}}_{(m_s)} (m_i).$$

Questo lemma si dimostra facilmente. Pongasi

$$A_i' = \begin{pmatrix} A_i, & 0 \\ 0 & , B_i \end{pmatrix},$$

ove

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)}, & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , b_2^{(i)} & , \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & , \cdots, & b_{k_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

in modo che due qualunque $b_r^{(i)}$, $b_s^{(t)}$ siano fra loro diverse e differenti anche da a; si abbia inoltre che le A_i' siano tutte dello stesso ordine.

Si formi

$$S' = \begin{pmatrix} A_1', & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ 0 & , A_2', & 0 & , \cdots, 0 \\ 0 & , 0 & , A_3', & \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & , 0 & , \cdots, A_n' \end{pmatrix},$$

$$R' = \begin{pmatrix} M_{11}' & , M_{12}' & , \cdots, M_{1n}' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1}' & , M_{n2}' & , \cdots, M_{nn}' \end{pmatrix},$$

ove le M'_{is} sono sostituzioni dello stesso ordine delle A'_i. Volendo che R' e S' siano fra loro permutabili basterà scrivere

$$M'_{ii}A'_i = A'_i M'_{ii},$$
$$M'_{is}A'_s = A'_i M'_{is},$$

da cui, applicando i lemmi 6° e 2°, segue immediatamente il risultato enunciato.

5. I precedenti lemmi ci forniscono la *regola generale* per trovare tutte le sostituzioni permutabili con una sostituzione data: *Si riduca la sostituzione alla forma normale* (vedi § 2 dei Preliminari, Parte 1ª)

$$T^{-1}\left\{\overline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)}}\right\}T$$

e si prendano le sostituzioni R_i *permutabili con*

$$\left\{\overline{\prod_1^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)}}\right\}$$

per mezzo della regola data nel lemma 8°. Le sostituzioni

$$T^{-1}\left\{\overline{\prod_1^p{}_i R_i}\right\}T$$

saranno permutabili con la sostituzione data e in tal modo si otterranno t u t t e le sostituzioni permutabili richieste.

6. Dalla regola precedente si deduce la seguente proposizione:

TEOREMA. – *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le sostituzioni permutabili con una sostituzione data siano permutabili fra loro, è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.*

1° la condizione è sufficiente.

Infatti, se essa è soddisfatta, la sostituzione data S, posta sotto la forma normale, diverrà

$$S = T^{-1}\left\{\overline{\prod_1^p{}_i S_i}\right\}T,$$

ove

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, a_i, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1, a_i \end{pmatrix} \text{(di ordine } \chi_i)$$

e due qualunque a_i saranno diverse fra loro. Tutte le sostituzioni permutabili con S avranno quindi la forma

$$R = T^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p {}_i R_i}} \right\} T,$$

ove

$$R_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)}, 0 & ,\cdots, 0 \\ b_2^{(i)}, b_1^{(i)} & ,\cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{\chi_i}^{(i)}, b_{\chi_i - 1}^{(i)}, & \cdots, b_1^{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{(di ordine } \chi_i\text{)},$$

quindi per i lemmi 6° e 7°, avremo che tutte le sostituzioni R saranno permutabili fra loro.

2° la condizione è necessaria.

Infatti se la sostituzione data S non soddisfa alla condizione, posta sotto la forma normale diverrà

$$S = T^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}}} \right\} T$$

dove alcune delle r_i dovranno esser diverse dall'unità. Basterà quindi per i lemmi 3° e 7° dimostrare che fra le sostituzioni permutabili con una sostituzione della forma

$$\left\{ \overline{\underline{\prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}}} \right\}$$

ve ne sono due non permutabili fra loro. Questo risulta immediatamente ponendo mente al risultato trovato nel lemma 8°.

Una sostituzione i cui divisori elementari saranno potenze di basi tutte diverse fra loro si dirà *elementare*.

7. Consideriamo in particolare le sostituzioni del secondo ordine.

Distinguiamo tre casi: la sostituzione ha cioè una delle forme seguenti quando è posta sotto la forma canonica

1ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} a, 0 \\ 0, b \end{pmatrix} S \quad , \quad a \neq b,$$

2ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} a, 0 \\ b, a \end{pmatrix} S \quad , \quad b \neq 0,$$

3ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le sostituzioni permutabili colla 1^a avranno la forma

$$S^{-1}\begin{pmatrix} c , 0 \\ 0 , d \end{pmatrix} S ;$$

quelle permutabili colla 2^a,

$$S^{-1}\begin{pmatrix} c , 0 \\ d , c \end{pmatrix} S ;$$

tutte le possibili sostituzioni saranno permutabili colla 3^a.

SOSTITUZIONI FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE

§. 1. – Sostituzioni complesse funzioni di variabili reali.

1. Se una sostituzione S, *i cui elementi sono nùmeri complessi*, può porsi sotto la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_{11} , & \alpha_{12} & , \cdots , & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , 1 + \alpha_{22} , & \cdots , & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & , \cdots , & 1 + \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

e il modulo di tutte le α_{ir} *è minore di* ε, diremo che la *sostituzione è inferiore ad* ε.

Se due sostituzioni S_1 e S_2 dello stesso ordine hanno gli elementi corrispondenti tali che i moduli delle loro differenze sono inferiori ad ε, diremo che le sostituzioni differiscono fra loro meno di ε.

Se, presa una sostituzione variabile S in un dato intervallo, si trova che tutti i valori che la sostituzione ha nell'intervallo differiscono fra loro meno di ε, diremo che *la oscillazione della sostituzione è minore di* ε.

Consideriamo tutti i valori di ε, ai quali la oscillazione della sostituzione S è inferiore. Il limite inferiore dei valori di ε si dirà la *oscillazione* della sostituzione S.

2. È evidente che la derivazione di una sostituzione potrà estendersi al caso di una sostituzione variabile, i cui elementi sono *numeri complessi*, purché si supponga che la variabile indipendente si conservi reale.

La integrazione pure potrà estendersi al caso in cui gli elementi della sostituzione siano quantità complesse e la variabile indipendente sia reale; solamente, a differenza di quanto fu inteso nella prima parte, dovremo ritenere per oscillazione di una sostituzione ciò che si è ora definito nell'art. 1 di questo paragrafo.

Fatta questa osservazione, potremo senz'altro *estendere alle sostituzioni complesse, ma funzioni di variabili reali, tutti i risultati che abbiamo ottenuto nella prima parte di questo studio.*

§ 2. – Sostituzioni funzioni di variabili complesse.

1. Abbiasi una sostituzione S i cui elementi siano funzioni di una variabile complessa z (funzioni *monogene*); diremo S una sostituzione funzione della variabile complessa z, o anche una *sostituzione monogena*.

Posto $z = x + iy$, potremo considerare la S come una sostituzione funzione delle due variabili x ed y e i cui elementi sono numeri complessi. Se supponiamo $\det S = 1$, e costruiamo le due sostituzioni derivate

$$\frac{\partial}{\partial x} S \,, \quad \frac{\partial}{\partial y} S \,,$$

avremo che gli elementi della seconda sostituzione si otterranno dai corrispondenti della prima moltiplicandoli per i, il che potremo rappresentare simbolicamente, scrivendo

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{i\partial y} S \,. \tag{1}$$

Analogamente si otterrebbe

$$S \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot S \frac{\partial}{\partial y} \,. \tag{2}$$

Reciprocamente risulta subito che, se sarà soddisfatta una delle due relazioni (1) o (2), la sostituzione S avrà tutti gli elementi funzioni *monogene* della variabile complessa z. Infatti, posto

$$\frac{\partial S}{\partial x} = T_1 S^{-1} \,, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = T_2 S^{-1} \,,$$

avremo per le (1)

$$T_1 = \frac{1}{i} T_2 \,.$$

Ma gli elementi di T_1 si ottengono derivando quelli di S rispetto ad x, e quelli di T_2 derivando gli stessi elementi rispetto ad y. Dunque la relazione precedente dimostra che gli elementi di S sono *funzioni monogene*.

Chiameremo ciascuna delle due sostituzioni eguali (2) la *derivata destra* di S rispetto a z e ciascuna delle due sostituzioni eguali (1) la *derivata sinistra* di S e scriveremo

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial S}{\partial y} \,,$$

$$S \frac{\partial}{\partial z} = S \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i} S \frac{\partial}{\partial y} \,.$$

Posto

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \,, \alpha_{12} \,, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \,, \alpha_{22} \,, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1} \,, \alpha_{n2} \,, \cdots, \alpha_{nn} \end{pmatrix} ,$$

avremo immediatamente

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \alpha_{rr} = 0 .$$

La sostituzione infinitesima

$$dS = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{11}\, dz\,, & \alpha_{12}\, dz & , \cdots, & \alpha_{1n}\, dz \\ \alpha_{21}\, dz & , 1 + \alpha_{22}\, dz\,, & \cdots, & \alpha_{2n}\, dz \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\, dz & , \quad \alpha_{n2}\, dz & , \cdots, & 1 + \alpha_{nn}\, dz \end{pmatrix} = \frac{dS}{dz} \cdot dz$$

si chiamerà il *differenziale sinistro* di S, e la sostituzione

$$Sd = S\, \frac{d}{dz} \cdot dz$$

si chiamerà il *differenziale destro.*

Avremo poi immediatamente, se

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\frac{dS}{dz} = \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dz}\,, & \frac{da_{12}}{dz}\,, & \cdots, & \frac{da_{1n}}{dz} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dz}\,, & \frac{da_{n2}}{dz}\,, & \cdots, & \frac{da_{nn}}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$S\,\frac{d}{dz} = \begin{pmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dz}\,, & \frac{da_{12}}{dz}\,, & \cdots, & \frac{da_{1n}}{dz} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dz}\,, & \frac{da_{n2}}{dz}\,, & \cdots, & \frac{da_{nn}}{dz} \end{pmatrix}.$$

Le regole della derivazione dei prodotti di sostituzioni date nella prima parte di questo studio, come pure gli altri teoremi di § 1 (parte prima) sono immediatamente applicabili alle sostituzioni funzioni di variabili complesse.

2. Abbiasi ora una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\,, \alpha_{12}\,, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\,, \alpha_{22}\,, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\,, \alpha_{n2}\,, \cdots, \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \alpha_{ii} = 0,$$

i cui elementi α_{ir} sono funzioni di una variabile complessa $z = x + iy$.

Si formi

$$\mathrm{T}dz = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{11}dz\,, & \alpha_{12}dz\,, & \cdots, & \alpha_{1n}dz \\ \alpha_{21}dz & ,\,1+\alpha_{22}dz\,, & \cdots, & \alpha_{2n}dz \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}dz & ,\quad \alpha_{n2}dz & ,\cdots, & 1+\alpha_{nn}dz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \cdots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \cdots, & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \cdots, & \alpha_{nn} \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} i\alpha_{11}, & i\alpha_{12}, & \cdots, & i\alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i\alpha_{n1}, & i\alpha_{n2}, & \cdots, & i\alpha_{nn} \end{pmatrix} dy = \mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy\,.$$

Se prendiamo a considerare le condizioni date nei §§ 3, 7 della prima parte, affinché una espressione differenziale di due variabili sia un differenziale esatto tanto sinistro, quanto destro, si vede che per la espressione differenziale precedentemente scritta esse sono verificate; si ha cioè

$$\sum_1^n{}_s\, \alpha_{ss} = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_s\, i\alpha_{ss} = 0,$$

$$\Delta'(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)_{y,x} = 0 \quad , \quad \Delta''(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)_{y,x} = 0\,.$$

Preso nel campo di variabilità della z una linea s aperta o chiusa qualunque, lungo la quale la sostituzione T si conserva finita e generalmente continua, chiameremo

$$\int_s \mathrm{T}dz$$

l'integrale del differenziale esatto $\mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy$ esteso lungo la linea s, cioè

$$\int_s \mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy\,.$$

In tal modo potremo intendere per

$$\mathrm{S} = \int_s \mathrm{T}dz$$

ciò che segue. *Divisa la linea s in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ a partire da un estremo di s e chiamato Δz_t la differenza degli indici degli estremi dell'intervallo h_t, si costruisca il prodotto di sostituzioni*

$$\mathrm{U} = \prod_1^n{}_t \begin{pmatrix} 1+\alpha_{11}\Delta z_t\,, & \alpha_{12}\Delta z_t\,, & \cdots, & \alpha_{1n}\Delta z_t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\Delta z_t & ,\,\alpha_{n2}\Delta z_t\,, & \cdots, & 1+\alpha_{nn}\Delta z_t \end{pmatrix}.$$

Si facciano impiccolire indefinitamente gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$; S *sarà il limite verso cui tende* U.

Poiché abbiamo osservato che tutto ciò che trovammo relativamente alle sostituzioni reali di variabili reali poteva estendersi alle sostituzioni complesse e funzioni di variabili reali, salvo a modificare le definizioni di cui parlammo nel § 1, art. 1, così potremo enunciare relativamente agli integrali curvilinei di variabile complessa varî teoremi che si otterranno immediatamente.

3. TEOREMA I. – *L'integrale di una sostituzione* (som 0) *sarà sempre a* (det 1).

TEOREMA II. – *Se la linea s lungo la quale si eseguisce la integrazione si divide in due parti s_1 e s_2, avremo*

$$\int_s \mathrm{T}dz = \int_{s_2} \mathrm{T}dz \cdot \int_{s_1} \mathrm{T}dz .$$

TEOREMA III. – *Se gli estremi della linea s sono i punti* A *e* B, *avremo*

$$\int_{\mathrm{A}s\mathrm{B}} \mathrm{T}dz = \left(\int_{\mathrm{B}s\mathrm{A}} \mathrm{T}dz\right)^{-1} .$$

TEOREMA IV. – *Se s è una linea chiusa e si ha la relazione*

$$\int_s \mathrm{T}dz = 1 ,$$

supponendo di principiare la integrazione da un punto della linea s (ritornando poi al punto stesso), *la stessa relazione sussisterà cominciando la integrazione da un altro punto di s.*

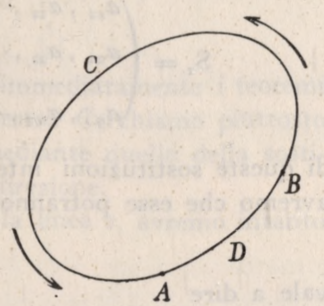


Fig. 1.

Sia infatti A il punto da cui si comincia la integrazione la prima volta, e supponiamo di eseguire una seconda volta la integrazione lungo la stessa linea cominciando da un altro punto B e percorrendo la s nello stesso senso in cui si è percorsa la prima volta (che è quello indicato colla freccia nella figura). Avremo che i due integrali che dovremo considerare saranno

$$\int_{\mathrm{ABCA}} \mathrm{T}dz \quad , \quad \int_{\mathrm{BCAB}} \mathrm{T}dz$$

e per il teorema primo

$$\int_{\mathrm{BCAB}} = \int_{\mathrm{ADB}} \cdot \int_{\mathrm{BCA}} ,$$

$$\int_{\mathrm{ABCA}} = \int_{\mathrm{BCA}} \cdot \int_{\mathrm{ADB}} ;$$

quindi

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{BCAB}} = \left(\int_{\mathrm{ADB}}\right) \int_{\mathrm{ABCA}} \left(\int_{\mathrm{ADB}}\right)^{-1} .$$

Ora se

$$\int_{\mathrm{ABCA}} \mathrm{T}dz = 1$$

dalle (1) risulta immediatamente

$$\int_{BCAB} T dz = 1 .$$

TEOREMA V. – *Se si considera l'integrale di una sostituzione* (som 0) *funzione di una variabile complessa esteso lungo una linea chiusa quando si comincia la integrazione da un certo punto della curva, e l'integrale della stessa sostituzione esteso lungo la medesima linea nello stesso senso, ma cominciando la integrazione da un'altro punto della curva, avremo che il secondo integrale sarà una trasformata del primo.*

Questo teorema risulta immediatamente dalla formula (1) che abbiamo stabilita per dimostrare il teorema precedente.

Data una linea chiusa s nel campo di variabilità della z e una sostituzione T (som 0) e fissato il senso in cui deve percorrersi la s, esisteranno infiniti valori S per l'integrale di T lungo s e ciò dipendentemente dal punto di s da cui si principia la integrazione. Prese due qualunque

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} , \quad S_2 = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{pmatrix}$$

di queste sostituzioni integrali, esse saranno a det 1, e per il teorema 5°, avremo che esse potranno porsi sempre sotto la forma

$$S_1 = U_1 S_2 U_1^{-1} ,$$

vale a dire

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{pmatrix} \text{ e } \mathrm{Det} \begin{pmatrix} b_{11} - \omega, & b_{12} & , \cdots, & b_{1n} \\ b_{21} & , b_{22} - \omega, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & , b_{n2} & , \cdots, & b_{nn} - \omega \end{pmatrix}$$

avranno i medesimi divisori elementari (vedi Preliminari premessi alla Parte prima, § 2), onde, posti S_1 e S_2 sotto la forma canonica, avremo

$$S_1 = V_1 \left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)} \right\} V_1^{-1} ,$$

$$S_2 = V_2 \left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i} S_i^{(\chi)} \right\} V_2^{-1} ,$$

e in generale

$$S = V \left\{ \prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)} \right\} V^{-1} ,$$

e le $S_i^{(\chi)}$ saranno le stesse per tutte le sostituzioni S. La sostituzione

$$W = \left\{ \overline{\prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\}$$

si chiamerà la *sostituzione caratteristica* sinistra della linea s relativamente alla sostituzione T e alla direzione scelta per la linea s. In particolare se le radici $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega & , \cdots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

saranno tutte diverse fra loro, avremo

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix}, \quad \prod_1^n {}_i \omega_i = 1 .$$

4. È inutile osservare che possono enunciarsi immediatamente i teoremi correlativi dei precedenti rispetto agli integrali destri. Cerchiamo piuttosto il valore della *sostituzione caratteristica* destra mediante quello della sostituzione caratteristica sinistra, relativa alla stessa direzione.

Se eseguiamo la integrazione a destra lungo la linea s, avremo intanto per risultato

$$S' = T \left\{ \overline{\prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\}^{-1} T^{-1},$$

essendo T a det $= 1$. Ora, se si ha

$$S_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega_i, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, \omega_i, \cdots, 0, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, 1, \omega_i \end{pmatrix},$$

posto

$$\Sigma_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_i}, & 0, & 0, & \cdots, 0 \\ -\frac{1}{\omega_i^2}, & \frac{1}{\omega_i}, & 0, & \cdots, 0 \\ \frac{1}{\omega_i^3}, & -\frac{1}{\omega_i^2}, & \frac{1}{\omega_i}, & \cdots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)\chi-1}{\omega_i^\chi}, & \frac{(-1)\chi-2}{\omega_i^{\chi-1}}, & \frac{(-1)\chi-3}{\omega_i^{\chi-2}}, & \cdots, \frac{1}{\omega_i} \end{pmatrix},$$

avremo

$$\left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi \Sigma_i^{(\chi)}}}\right\} = \left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}}}\right\}^{-1}$$

onde

$$S' = T\left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi \Sigma_i^{(\chi)}}}\right\}T^{-1}.$$

Poniamo ora

$$\Lambda = \left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i} \Sigma_i^{(\chi)}}}\right\}$$

sotto la forma canonica; otterremo

$$\Lambda = \left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi \Sigma_i^{(\chi)}}}\right\} = M\left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i'^{(\chi)}}}\right\}M^{-1},$$

ove

$$S_i'^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_i}, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \frac{1}{\omega_i}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \frac{1}{\omega_i}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \frac{1}{\omega_i} \end{pmatrix} \text{(di ordine } \chi);$$

avremo quindi

$$S' = V'\left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i} S_i'^{(\chi)}}}\right\}V'^{-1},$$

ove V è a det $= 1$. Onde la *caratteristica destra sarà*

$$\left\{\overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i'^{(\chi)}}}\right\}.$$

Possiamo quindi dire che *la caratteristica destra si ottiene da quella sinistra scambiando dappertutto le* ω_i *nelle* $1/\omega_i$.

Se si inverte la direzione nella s è evidente che le *caratteristiche destra e sinistra si scambiano fra loro.*

§ 3. – Il teorema di Cauchy relativo alle sostituzioni.

1. Sia T una sostituzione della variabile complessa z i cui elementi siano funzioni olomorfe di z entro un campo σ limitato da una o più linee contorno l; diremo che T è una *sostituzione olomorfa* della variabile complessa z entro il campo σ.

Si supponga il campo σ semplicemente connesso e che la somma dei termini in diagonale nella T sia nulla.

Posto

$$T\,dz = T_1\,dx \cdot T_2\,dy,$$

avremo che

$$\Delta'(T_1, T_2)_{x,y} = 0.$$

Inoltre si avrà che gli elementi delle sostituzioni T_1, T_2 saranno finiti insieme alle loro derivate; quindi applicando un teorema dell'art. 4, § 6, della prima parte, avremo che, presa entro σ una linea s chiusa qualunque, $\int_s T\,dz$ sarà eguale alla identità, onde il teorema:

Teorema I. – *Se* T (som o) *è una sostituzione olomorfa di* z *entro un campo semplicemente connesso* σ, *e* s *è una linea chiusa entro* σ, *avremo*

$$\int_\sigma T\,dz = 1\,.$$

2. Da questo teorema si deduce immediatamente come conseguenza che, prese entro σ due linee qualunque s_1, s_2 che partano da uno stesso punto A e terminino in uno stesso punto B, i due integrali

$$\int_{s_1} T\,dz \quad , \quad \int_{s_2} T\,dz$$

saranno eguali fra loro, onde il teorema:

Teorema II. – *Se* T (som o) *è olomorfa entro l'area* σ *semplicemente connessa*,

$$\int_s T\,dz\,,$$

finché s *è interno a* σ, *non dipenderà che dagli estremi di* s.

3. Ammesse sempre verificate le condizioni poste nel teorema precedente, vediamo quali proprietà ha la sostituzione

$$S = \int_s T\,dz$$

in cui la linea s senza escire da σ va da un punto fisso A ad un punto variabile di indice z. Posto

$$T\,dz = T_1\,dx \cdot T_2\,dy\,,$$

avremo che T_2 si otterrà da T_1 moltiplicandone tutti gli elementi per i, quindi impiegando il noto simbolo, avremo

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial S}{\partial y} = T_1 = \frac{1}{i} T_2 .$$

Questo dimostra (vedi § 2, art. 1) che S è una *sostituzione monogena.*

Dal teorema II risulta immediatamente che essa è anche *monodroma* (ad un sol valore) e finalmente essa dovrà essere sempre finita. Potremo quindi enunciare il teorema seguente:

TEOREMA III. – *Se la sostituzione* T (som o) *è una sostituzione olomorfa di z in un campo semplicemente connesso* σ,

$$S = \int_A^z T\, dz$$

sarà una sostituzione pure olomorfa di z (det 1) *e sarà*

$$\frac{dS}{dz} = T .$$

Con $\int_A^z$ *si intende un integrale esteso ad una linea qualunque entro* σ, *che dal punto* A *va al punto z.*

4. Consideriamo ora un campo *doppiamente connesso* σ limitato da due linee s_1 e s_2. Entro σ sia T (som o) olomorfa. Si uniscano le due linee s_1 e s_2 mediante una linea l, lungo la quale si eseguisca un taglio: la σ così sezionata si chiami σ_1; i due orli del taglio si denotino con l_1 e l_2 [2]. Questo campo sarà semplicemente connesso; quindi pel teorema I, avremo

$$\int_{l_1} T\, dz \cdot \int_{s_2} T\, dz \cdot \int_{l_2} T\, dz \cdot \int_{s_1} T\, dz = 1 ,$$

onde

$$\int_{l_1} T\, dz \int_{s_2} T\, dz \int_{l_2} T\, dz = \left(\int_{s_1} T\, dz \right)^{-1} ,$$

in cui gli integrali sono eseguiti lungo le diverse linee nel senso indicato dalle frecce nella fig. 2.

Si ponga ora

$$\int_{l_2} T\, dz = U ,$$

avremo

$$\int_{l_1} T\, dz = (U)^{-1} .$$

(2) Nella figura per maggior chiarezza si sono disegnati i due orli del taglio alquanto staccati fra loro; ma essi si debbono immaginare coincidenti. Questa osservazione valga per le figure successive.

Supponendo di eseguire lungo le linee s_1 e s_2 le integrazioni nel senso indicato dalle frecce nella fig. 2, avremo quindi

$$\mathrm{U}^{-1} \cdot \int_{s_2} \mathrm{T}\, dz \cdot \mathrm{U} = \int_{s_1} \mathrm{T}\, dz$$

ove i due integrali $\int_{s_1}$ e $\int_{s_2}$ vanno rispettivamente eseguiti a cominciare dai punti A e B.

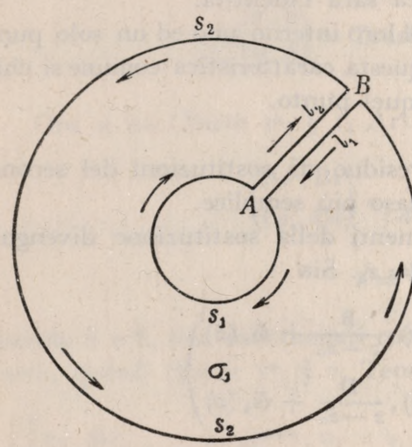


Fig. 2.

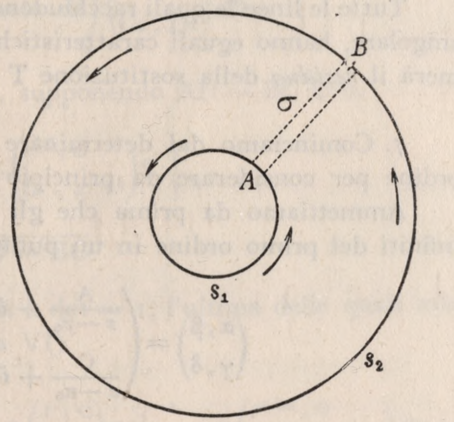


Fig. 3.

Ricordando quindi il teorema V del § 2 e quanto fu detto alla fine dell'art. 3 nello stesso paragrafo, si giungerà al teorema:

TEOREMA IV. – *Se due linee chiuse s_1 e s_2 limitano un campo finito due volte connesso, entro il quale una sostituzione* T (som 0) *è olomorfa, avremo che le caratteristiche delle due linee s_1 e s_2 relativamente alla sostituzione* T *saranno eguali fra loro, vale a dire che eseguendo nello stesso senso la integrazione di* T *lungo le due linee si otterranno sostituzioni, ciascuna delle quali è la trasformata dell'altra.*

5. Consideriamo ora un campo n volte connesso σ con n linee contorni e si eseguiscano $n - 1$ tagli normali che lo trasformino in un campo semplicemente connesso σ'. Sia T (som 0) una sostituzione olomorfa entro σ, avremo che

$$s = \int_{\mathrm{A}}^{z} \mathrm{T} dz$$

sarà pure olomorfa entro σ' e applicando il teorema V del § 6 della prima parte avremo che *dei valori dalle due parti di uno stesso taglio l'uno si otterrà dall'altro moltiplicandolo per una sostituzione costante lungo il taglio.*

Abbiamo quindi il modo di comportarsi delle *sostituzioni polidrome ottenute come integrali di sostituzioni olomorfe entro campi più volte connessi.*

Questa proprietà ci sarà utile in seguito per stabilire il legame che passa fra la integrazione delle sostituzioni e la integrazione delle equazioni differenziali lineari.

6. Abbiasi ora una sostituzione T olomorfa in un dato campo, esclusi un certo numero di punti. Se si conducono due linee qualunque, fra le quali non si trova alcun punto singolare, le caratteristiche delle due linee saranno eguali, e se si conduce una linea qualunque entro la quale non si trova nessun punto singolare, la sua caratteristica sarà l'identità.

Tutte le linee le quali racchiudono nel loro interno uno ed un solo punto singolare, hanno eguali caratteristiche; questa caratteristica comune si chiamerà il *residuo* della sostituzione T in quel punto.

7. Cominciamo dal determinare il residuo di sostituzioni del secondo ordine per considerare da principio il caso più semplice.

Ammettiamo da prima che gli elementi della sostituzione divengano infiniti del primo ordine in un punto $z = z_0$. Sia

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{A}{z-z_0} + \tilde{\omega}_1(z), \dfrac{B}{z-z_0} + \tilde{\omega}_2(z)\\ \dfrac{C}{z-z_0} + \tilde{\omega}_3(z), \dfrac{D}{z-z_0} + \tilde{\omega}_4(z)\end{pmatrix}$$

con A, B, C, D costanti e

$$A + D = 0 \qquad \tilde{\omega}_1(z) + \tilde{\omega}_4(z) = 0.$$

Supporremo $\tilde{\omega}_1(z)$, $\tilde{\omega}_2(z)$ e $\tilde{\omega}_3(z)$ olomorfe nel punto z_0.

Avremo:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \int_s \begin{pmatrix}\dfrac{A}{z-z_0} + \tilde{\omega}_1(z), \dfrac{B}{z-z_0} + \tilde{\omega}_2(z)\\ \dfrac{C}{z-z_0} + \tilde{\omega}_3(z), \dfrac{D}{z-z_0} + \tilde{\omega}_4(z)\end{pmatrix} dz,$$

essendo s una curva chiusa che racchiude nel suo interno il punto z_0 e nessun altro punto di singolarità. Prendiamo per s un cerchio col centro in z_0 e col raggio r; avremo

$$z - z_0 = re^{i\theta} \qquad dz = ire^{i\theta}\, d\theta,$$

quindi

$$\int_s \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}Ai + \tilde{\omega}_1 ire^{i\theta}, Bi + \tilde{\omega}_2 ire^{i\theta}\\ Ci + \tilde{\omega}_3 ire^{i\theta}, Di + \tilde{\omega}_4 ire^{i\theta}\end{pmatrix} d\theta.$$

Ora sia M un numero superiore al massimo modulo delle funzioni $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_4$ negli intorni di z_0, avremo che le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Ai + \tilde{\omega}_1 ire^{i\theta}, Bi + \tilde{\omega}_2 ire^{i\theta}\\ Ci + \tilde{\omega}_3 ire^{i\theta}, Di + \tilde{\omega}_4 ire^{i\theta}\end{pmatrix}$$

differiranno fra loro meno di Mr, onde

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} d\theta \quad , \quad \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} Ai + \tilde{\omega}_1 ire^{i\theta} , Bi + \tilde{\omega}_2 ire^{i\theta} \\ Ci + \tilde{\omega}_3 ire^{i\theta} , Di + \tilde{\omega}_4 ire^{i\theta} \end{pmatrix} d\theta$$

differiranno fra loro tanto poco quanto si vuole coll'impiccolire convenientemente r (vedi § 2, Teorema XII, Parte 1ª).

Avremo quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} d\theta .$$

Ora si ha (Parte 1ª, § 1, Art. 9), supponendo AD — BC $\neq$ 0,

$$\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta}\left\{ S \begin{pmatrix} e^{\lambda\theta} , 0 \\ 0 , e^{-\lambda\theta} \end{pmatrix} S_1 \right\} ,$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC}$$

essendo S e S_1 due sostituzioni costanti a det = 1, l'ultima delle quali arbitraria, quindi (Parte 1ª, § 2, Teorema VI)

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} d\theta = \left\{ S \begin{pmatrix} e^{2\lambda\pi} , 0 \\ 0 , e^{-2\lambda\pi} \end{pmatrix} S_1 \right\} \left\{ S \begin{pmatrix} 1 , 0 \\ 0 , 1 \end{pmatrix} S_1 \right\}^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{2\lambda\pi} , 0 \\ 0 , e^{-2\lambda\pi} \end{pmatrix} S^{-1} ,$$

onde finalmente

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\lambda\pi} , 0 \\ 0 , e^{-2\lambda\pi} \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC} .$$

Se si avesse invece AD — BC = 0, si potrebbe porre (Parte 1ª, § 1, Art. 9)

$$\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta}\left\{ S \begin{pmatrix} 1 , 0 \\ \theta , 1 \end{pmatrix} S_1 \right\} ,$$

essendo S e S_1 due sostituzioni costanti a determinante 1. Quindi

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} Ai , Bi \\ Ci , Di \end{pmatrix} d\theta = S \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ 2\pi , 1 \end{pmatrix} S^{-1} ,$$

onde

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} = \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ 2\pi , 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC} = 0 .$$

Si ha dunque che i residui dipendono soltanto dai coefficienti dei termini d'infinito.

6. Passiamo ora a considerare il caso generale in cui la sostituzione sia di ordine n e gli elementi divengano tutti infiniti del primo ordine in un punto $z = z_0$.

Sia la sostituzione (som = 0)

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{11}(z), \frac{A_{12}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{12}(z), \cdots, \frac{A_{1n}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{1n}(z) \\ \frac{A_{21}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{21}(z), \frac{A_{22}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{22}(z), \cdots, \frac{A_{2n}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{2n}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{A_{n1}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{n1}(z), \frac{A_{n2}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{n2}(z), \cdots, \frac{A_{nn}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{nn}(z) \end{pmatrix},$$

ove le A_{is} sono costanti e le $\tilde{\omega}_{is}(z)$ sono funzioni olomorfe negli intorni di z_0, e si ha

$$\sum_1^n{}_h A_{hh} = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_h \tilde{\omega}_{hh} = 0 .$$

Per determinare il residuo di T nel punto z_0, costruiamo col centro in questo punto un cerchio s di raggio r; avremo

$$\int_s T dz = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} iA_{11} + ir\tilde{\omega}_{11}, \cdots, iA_{1n} + ir\tilde{\omega}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1} + ir\tilde{\omega}_{n1}, \cdots, iA_{nn} + ir\tilde{\omega}_{nn} \end{pmatrix} d\theta ,$$

e con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente

$$\int_s T dz = \text{Trasformata di} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} iA_{11}, iA_{12}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, iA_{n2}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix} d\theta .$$

Per eseguire la integrazione, basterà porre la sostituzione costante

$$\begin{pmatrix} iA_{11}, iA_{12}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, iA_{n2}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix}$$

sotto la forma canonica. Si otterrà in tal modo

$$\begin{pmatrix} iA_{11}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi T_i^{(\chi)}}} \right\},$$

ove

$$T_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega_i, 0, \cdots, 0 \\ 1, \omega_i, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_i \end{pmatrix},$$

e mediante le integrazioni (ved. § 8, Parte 1ª)

$$\int_s T dz = \text{Trasformata di} \left\{ \overline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\},$$

ove

$$S_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\omega_i} & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{2\pi}{\pi(1)} e^{2\pi\omega_i} & , e^{2\pi\omega_i} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{(2\pi)^2}{\pi(2)} e^{2\pi\omega_i} & , \frac{2\pi}{\pi(1)} e^{2\pi\omega_i} & , e^{2\pi\omega_i} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{(2\pi)^{\chi-1}}{\pi(\chi-1)} e^{2\pi\omega_i} & , \frac{(2\pi)^{\chi-2}}{\pi(\chi-2)} e^{2\pi\omega_i} & , \frac{(2\pi)^{\chi-3}}{\pi(\chi-3)} e^{2\pi\omega_i} & , \cdots, e^{2\pi\omega_i} \end{pmatrix}.$$

Ora è facile dimostrare che, posto

$$W = \left\{ \overline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\}$$

sotto la forma canonica, si trova

$$W = U \left\{ \overline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi V_i^{(\chi)}} \right\} U^{-1},$$

ove

$$V_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\omega_i}, 0 & , 0 & , \cdots, 0, 0 \\ 1 & , e^{2\pi\omega_i}, 0 & , \cdots, 0, 0 \\ 0 & , 1 & , e^{2\pi\omega_i}, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & , 0 & , 0 & , \cdots, 1, e^{2\pi\omega_i} \end{pmatrix},$$

avremo quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} T = \left\{ \overline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi V_i^{(\chi)}} \right\}.$$

La determinazione del residuo si ottiene quindi dalla risoluzione di una equazione di grado n i cui coefficienti sono dipendenti soltanto dai termini d'infinito degli elementi della sostituzione T.

9. Si consideri ora una sostituzione olomorfa entro un certo campo σ semplicemente connesso limitato da un contorno s e sia

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{11}(z), \cdots, \tilde{\omega}_{1n}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\omega}_{n1}(z), \cdots, \tilde{\omega}_{nn}(z) \end{pmatrix}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_h \tilde{\omega}_{hh} = 0.$$

Si prenda un punto z_0 qualunque entro σ e si denoti con $\tilde{\omega}_{hk}^0$ il valore di $\tilde{\omega}_{hk}$ per $z = z_0$. Si formi poi la sostituzione

$$\mathrm{T}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{11}\dfrac{c_{11}}{z - z_0}, \tilde{\omega}_{12}\dfrac{c_{12}}{z - z_0}, \cdots, \tilde{\omega}_{1n}\dfrac{c_{1n}}{z - z_0} \\ \tilde{\omega}_{21}\dfrac{c_{21}}{z - z_0}, \tilde{\omega}_{22}\dfrac{c_{22}}{z - z_0}, \cdots, \tilde{\omega}_{2n}\dfrac{c_{2n}}{z - z_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\omega}_{n1}\dfrac{c_{n1}}{z - z_0}, \tilde{\omega}_{n2}\dfrac{c_{n2}}{z - z_0}, \cdots, \tilde{\omega}_{nn}\dfrac{c_{nn}}{z - z_0} \end{pmatrix},$$

ove le c_{hk} sono costanti e $c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{nn}$.

TEOREMA V. – *Se poniamo*

$$\int_s \mathrm{T}_1\, dz = \mathrm{W}_1,$$

questo integrale a meno di sostituzioni trasformatrici non dipenderà che dai valori delle costanti c_{hk} *e delle* $\tilde{\omega}_{hk}$ *nel punto* $z = z_0$.

Questo teorema perfettamente analogo al noto teorema di CAUCHY ci permetterà di estendere il teorema stesso di CAUCHY alle equazioni differenziali lineari.

§ 4. – PUNTI SINGOLARI DELLE SOSTITUZIONI.

1. Una sostituzione venne chiamata *olomorfa* in un punto se le funzioni che ne costituivano gli elementi erano olomorfe in quel punto (vedi paragrafo precedente). Se una sostituzione in un punto non è olomorfa, chiameremo il punto un *punto singolare*.

Distingueremo i punti singolari in due categorie secondoché essi sono di *diramazione* della sostituzione oppure non sono tali.

2. Se un punto singolare è di diramazione per una certa sostituzione (det $= 1$), ma non è di diramazione per la derivata sinistra (o destra) della sostituzione, lo si chiamerà un punto di *diramazione abeliano sinistro* (o destro). In questo caso la proprietà del punto di diramazione consiste in questo: che girando intorno ad esso, la sostituzione data viene moltiplicata a destra (o a

sinistra) per una sostituzione costante (det $= 1$) che chiameremo il *modulo* del punto di diramazione e che non è altro che una trasformata del residuo della derivata in quel punto.

Sia C la sostituzione costante corrispondente ad un punto di diramazione abeliano sinistro z_0 di una sostituzione S. È facile dimostrare che *può sempre porsi*

$$S = S_1 S_2,$$

ove S_1 *non ha diramazione in* z_0 *ed* S_2 *non dipende che da* C *e può determinarsi senza difficoltà.*

Infatti C potrà porsi sotto la forma canonica

$$C = M^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi T_s^{(\chi)}}} \right\} M,$$

ove

$$T_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \alpha_s, 0, \cdots, 0 \\ 1, \alpha_s, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, \alpha_s \end{pmatrix}, \quad \prod_1^p{}_s \alpha_s = 1.$$

Posto

$$\alpha_s = e^{2\pi i \omega_s},$$

avremo che la sostituzione (vedi paragr. prec.)

$$U = \prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi \tau_s^{(\chi)},$$

ove

$$\tau_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_s}{z-z_0}, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{1}{z-z_0}, & \frac{\omega_s}{z-z_0} & , 0 & , \cdots, 0 \\ 0 & , \frac{1}{z-z_0} & , \frac{\omega_s}{z-z_0} & , \cdots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & , 0 & , 0 & , \cdots, \frac{\omega_s}{z-z_0} \end{pmatrix},$$

ha appunto per residuo nel punto z_0

$$\left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi T_s^{(\chi)}}} \right\}.$$

Abbiamo ora

$$V = \int U dz = \int U_1 \frac{dz}{z-z_0} = \int U_1 \, d\log(z-z_0)$$

ove

$$U = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \begin{pmatrix} \omega_s, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \omega_s, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \omega_s, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \omega_s \end{pmatrix} \right\}.$$

Poniamo

$$\log (z - z_0) = \zeta ,$$

avremo

$$V = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \begin{pmatrix} e^{\omega_s \zeta} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{\zeta}{\pi(1)} e^{\omega_s \zeta} & , e^{\omega_s \zeta} & , \cdots, 0 \\ \frac{\zeta^2}{\pi(2)} e^{\omega_s \zeta} & , \frac{\zeta}{\pi(1)} e^{\omega_s \zeta} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\zeta^{\chi-1}}{\pi(\chi-1)} e^{\omega_s \zeta} & , \frac{\zeta^{\chi-2}}{\pi(\chi-2)} e^{\omega_s \zeta} & , \cdots, e^{\omega_s \zeta} \end{pmatrix} \right\} = \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} K_s^{(\chi)} .$$

Ora

$$K_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} (z-z_0)^{\omega_s} & , 0 & , 0 & , \cdots, & 0 \\ (z-z_0)^{\omega_s} \log (z-z_0) & , (z-z_0)^{\omega_s} & , 0 & , \cdots, & 0 \\ \frac{1}{\pi(2)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^2 & , (z-z)^{\omega_s} \log (z-z_0) & , (z-z_0)^{\omega_s}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\pi(\chi-1)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^{\chi-1} & , \frac{1}{\pi(\chi-2)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^{\chi-2}, & \cdots & , \cdots, & (z-z_0)^{\omega_s} \end{pmatrix}.$$

Potrà quindi trovarsi una sostituzione costante N, tale che

$$S_2 = N^{-1} \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} K_s^{(\chi)} \right\} N$$

abbia per modulo nel punto di diramazione z_0 la sostituzione C. Ne segue che

$$SS_2^{-1} = S_1$$

non avrà più diramazione in $z = z_0$ e quindi

$$S = S_1 S_2 .$$

Si ottiene quindi il risultato enunciato precedentemente.

Analogamente si avrebbe nel caso di un punto di diramazione abeliano destro.

3. I punti di singolarità di una sostituzione, che non sono punti di diramazione, si diranno *poli di prima specie* o semplicemente *poli*, se in essi tutti gli elementi hanno soltanto dei poli nel senso ordinario che si dà a questa denominazione nella teoria delle funzioni.

Se una sostituzione (det $=1$) ha un punto di singolarità non di diramazione, che non è un polo di prima specie, ma che è però un polo di prima specie per la sua derivata sinistra (o destra), il punto singolare si chiamerà un *polo di seconda specie sinistro* (o *destro*).

Così pure un punto di diramazione di una sostituzione (det $=1$) tale che in esso la derivata sinistra (o destra) ha semplicemente un polo di prima specie si dirà un *punto di diramazione polare sinistro* (o *destro*).

È facile riconoscere la esistenza di poli di seconda specie. Così la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} e^{1/z} & , 0 \\ ze^{1/z} & , e^{-1/z} \end{pmatrix}$$

ha per $z=0$ un polo di seconda specie che non è un polo di seconda specie destro. Infatti

$$\frac{dS}{dz} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & , 0 \\ 1-\frac{2}{z} & , \frac{1}{z^2} \end{pmatrix},$$

$$S\frac{d}{dz} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & , 0 \\ e^{2/z} & , \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}.$$

4. È facile dimostrare i teoremi seguenti:

TEOREMA I. – *Le derivate* (destra e sinistra) *di una sostituzione* (det $=1$) *in un punto ove questa ha un polo di prima specie hanno pure dei poli di prima specie.*

TEOREMA II. – *Se si moltiplica a destra una sostituzione che ha in un dato punto un polo di seconda specie sinistro, per una sostituzione che in quel punto è olomorfa o ha al più un polo di prima specie, il prodotto avrà in quel punto un polo di seconda specie sinistro* (vedi anche il teorema correlativo).

TEOREMA III. – *Se si moltiplica a destra una sostituzione che ha in un dato punto una diramazione polare sinistra, per una sostituzione che in quel punto è olomorfa, o ha al più un polo di prima specie, il prodotto avrà pure in quel punto una diramazione polare sinistra.*

TEOREMA IV. – *Se si moltiplica a destra o a sinistra o da ambo le parti una sostituzione* S *che ha in un dato punto un polo di seconda specie* (destro o sinistro) *o una diramazione polare, per una sostituzione costante, il prodotto avrà sempre in quel punto una singolarità avente lo stesso nome di quella posseduta da* S.

TEOREMA V. – *Se una sostituzione ha in un punto un polo di seconda specie sinistra o una diramazione polare (o in generale abeliana) sinistra, la sua inversa avrà invece una singolarità dello stesso nome destra.*

I teoremi precedenti si dimostrano senza difficoltà applicando i teoremi dati nella prima parte per le derivate dei prodotti di sostituzioni.

§ 5. – SOSTITUZIONI ALGEBRICHE E SOSTITUZIONI ABELIANE.

1. Abbiasi una sostituzione i cui elementi siano funzioni monodrome definite sopra una superficie di RIEMANN; diremo la *sostituzione monodroma* sulla superficie di RIEMANN [3]. Se oltre ad essere monodromi, gli elementi della sostituzione sono *regolari* [4] sopra la superficie di RIEMANN, diremo che la sostituzione è una *sostituzone regolare su quella superficie di* RIEMANN o anche che è una *sostituzione algebrica*.

Ogni polo di un elemento della sostituzione sarà un *polo della sostituzione*.

Se la sostituzione algebrica *non ammette nessun polo* essa deve essere una *costante*.

Se il genere della superficie di RIEMANN è p, eseguendo successivamente $3p - 1$ sistemi di tagli (i tagli normali), la superficie di RIEMANN potrà ridursi ad essere semplicemente connessa (cfr. NEUMANN, op. cit., p. 182).

2. Distinguiamo i poli di una sostituzione (som = 0) in due categorie: quelli per i quali il residuo della sostituzione è diverso dalla identità (*poli aventi residuo*) e quelli per i quali il residuo è l'identità (*poli senza residuo*).

Escludiamo ciascun *polo avente residuo* mediante un piccolo contorno chiuso ed eseguiamo sulla superficie di RIEMANN tanti tagli che da questi punti vadano ad uno stesso punto situato lungo una riva di uno dei tagli normali precedentemente considerati. La superficie di RIEMANN R dopo eseguiti i tagli normali e questi ultimi tagli, si chiami R'; essa sarà semplicemente connessa.

Prendiamo sopra R' un punto qualunque z_0 e denotiamo con T (som 0) la sostituzione algebrica: avremo che

$$S = \int_{z_0}^{z} T dz$$

(3) Una funzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN che possiede dei poli e dei punti di singolarità essenziali venne chiamata da APPELL (« Acta Math. », T. 1) una *funzione di un punto analitico*, quindi si potrebbe anche chiamare per analogia *sostituzione funzione di un punto analitico* una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN.

(4) Una funzione regolare sopra una superficie di RIEMANN non ammette altre singolarità che dei poli. Vedi C. NEUMANN, *Vorlesungén über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, p. 117.

sarà monodroma sulla superficie sezionata. Essa si chiamerà una *sostituzione abeliana sinistra*. Invece

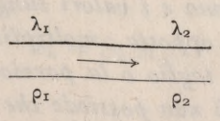
$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{T}dz \int_{z_0}^{z}$$

si dirà una *sostituzione abeliana destra*.

Per distinguerle da altre classi che considereremo in seguito chiameremo queste due classi di sostituzioni, *sostituzioni abeliane semplici*. Intenderemo dunque rispettivamente per *sostituzione abeliana destra* o *sinistra*, una sostituzione la cui derivata destra o sinistra è algebrica.

Le sostituzioni abeliane semplici che si conserveranno sempre finite le chiameremo di *prima specie*; se saranno infinite in qualche punto senza che la T possegga *poli aventi residuo*, si diranno di *seconda specie*; se la T possiede *poli aventi residuo* si diranno di *terza specie*. In altri termini *una sostituzione abeliana di seconda specie non potrà avere che dei poli di prima o di seconda specie*, mentre *una sostituzione abeliana di terza specie possiederà dei punti di diramazione polari*.

3. Teorema I. – *Se si considera un taglio della superficie di Riemann o una porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, i valori di una sostituzione abeliana sinistra sopra una delle rive del taglio saranno eguali ai valori sull'altra riva moltiplicati a destra per una sostituzione costante.*



Prendiamo infatti le due coppie di punti opposti lungo una stessa riva $\lambda_1, \rho_1; \lambda_2, \rho_2$. Avremo se T è algebrica (som o)

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{T}dz\,,$$

$$\mathrm{S}_{\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{T}dz \cdot \mathrm{S}_{\lambda_1}\,,$$

$$\mathrm{S}_{\varrho_2} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \mathrm{T}dz \cdot \mathrm{S}_{\varrho_1}\,.$$

Ma

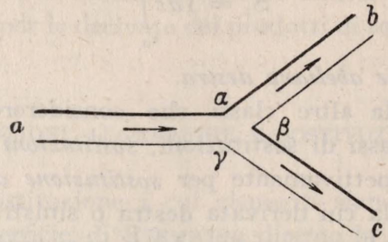
$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{T}dz = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \mathrm{T}dz\,,$$

quindi

$$\mathrm{S}_{\lambda_2}^{-1}\,\mathrm{S}_{\varrho_2} = \mathrm{S}_{\lambda_1}^{-1}\,\mathrm{S}_{\varrho_1}$$

come si voleva dimostrare.

TEOREMA II. – *Se un taglio a si dirama in due tagli b e c, la sostituzione costante relativa al taglio a è uguale al prodotto delle sostituzioni relative ai due tagli b e c.*



Considerando infatti il nodo αβγ e denotando con A, B, C rispettivamente le tre sostituzioni costanti relative ai tagli *a*, *b*, *c* di una sostituzione abeliana sinistra S, avremo

$$S_\alpha^{-1} S_\gamma = (S_\alpha^{-1} S_\beta)(S_\beta^{-1} S_\gamma)$$

vale a dire

$$A = B \cdot C$$

come volevasi dimostrare.

TEOREMA III. – *Se si ha una superficie di* RIEMANN *e una sostituzione a* det $= 0$ *tale, che sulla superficie di* RIEMANN (*dopo averla convenientemente sezionata*) *si conserva monodroma e i valori lungo una riva di un taglio sono eguali ai valori lungo la riva opposta, moltiplicati a destra per una sostituzione costante lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, ed oltre a ciò non possiede che dei poli di prima specie o di seconda specie sinistri ed i punti di diramazione sono tutti polari sinistri, la sostituzione sarà abeliana sinistra.*

Infatti pel teorema I, § 1, Parte prima, avremo che la derivata sinistra della sostituzione sarà monodroma su tutta la superficie di RIEMANN non sezionata; oltre a ciò (vedi paragr. prec.) non avrà che dei punti di singolarità polari, e quindi sarà algebrica.

Come conseguenza di questo teorema si ottiene subito l'altro:

TEOREMA IV. – *Se si moltiplica a sinistra una sostituzione abeliana sinistra per una sostituzione algebrica* (det 1), *il prodotto sarà una nuova sostituzione abeliana sinistra avente le medesime costanti lungo gli stessi tagli* (vedi paragrafo prec., teorema II).

Si ha poi il

TEOREMA V. – *Se due sostituzioni abeliane sinistre, definite sopra una medesima superficie di* RIEMAMN, *hanno lungo gli stessi tagli le medesime sostituzioni costanti, una di esse sarà eguale all'altra moltiplicata a sinistra per una sostituzione monodroma sulla superficie di* RIEMANN.

Infatti se le due sostituzioni considerate saranno S e S_1, avremo che $S_1 S^{-1}$ dovrà risultare monodroma sulla superficie di RIEMANN non sezionata.

In particolare se le due sostituzioni abeliane saranno di prima specie, la sostituzione $S_1 S^{-1}$ dovrà conservarsi sempre finita, quindi dovrà risultare costante. Ne segue il

TEOREMA V^{bis}. – *Due sostituzioni abeliane sinistre di prima specie, definite sulla stessa superficie di* RIEMANN *e aventi lungo gli stessi tagli le medesime costanti, si otterranno l'una dall'altra mediante la moltiplicazione a sinistra per una sostituzione costante.*

In altri termini:

Una sostituzione abeliana sinistra di prima specie, sarà definita a meno di una sostituzione moltiplicativa costante a sinistra, quando se ne conosceranno tutte le sostituzioni costanti dei tagli.

TEOREMA VI. – *Se due sostituzioni abeliane sinistre corrispondono ad una stessa sostituzione algebrica, le sostituzioni costanti lungo i tagli dell'una sono le trasformate delle sostituzioni costanti dell'altra.*

Infatti siano S e S′ due sostituzioni abeliane sinistre corrispondenti alla stessa sostituzione algebrica T. Avremo

$$\frac{d}{dz} S = \frac{d}{dz} S' = T .$$

Quindi

$$S = S' C ,$$

essendo C una sostituzione costante. Abbiasi ora alle due rive λ e ρ di un taglio qualunque

$$S_\lambda = S_\varrho A ,$$

essendo A costante. Avremo

$$S'_\lambda C = S'_\varrho CA ,$$

quindi

$$S'_\lambda = S'_\varrho (CAC^{-1}),$$

il che dimostra il teorema.

Presa una certa sostituzione algebrica T (som 0) definita sopra una superficie di RIEMANN R ed eseguiti i tagli nel modo indicato nell'art. 2, si costruiscano tutte le possibili sostituzioni abeliane semplici che si possono ottenere integrando a sinistra la T. Esse avranno lungo gli stessi tagli delle sostituzioni costanti che saranno le une le trasformate delle altre. Quando esse si ridurranno alla forma canonica (Preliminari, § 2, Parte prima) potranno considerarsi tutte come le trasformate delle medesime sostituzioni canoniche. Queste potranno chiamarsi le *sostituzioni caratteristiche sinistre* di ciascun taglio.

4. Relativamente alle sostituzioni abeliane destre potremo enunciare i teoremi correlativi di quelli dimostrati precedentemente. Avremo poi il

TEOREMA VII. – *La sostituzione inversa di un integrale abeliano sinistro è un integrale abeliano destro e reciprocamente.*

Questo teorema si dimostra, sia osservando che la sostituzione inversa ha la proprietà che i valori che essa prende su di una riva di un taglio si ottengono da quelli sull'altra riva moltiplicandoli *a sinistra* per una sostituzione costante e tenendo conto del teorema V del paragrafo precedente; sia applicando quanto fu dimostrato nel § 1 (Parte prima), teorema VII.

Sarebbe facile estendere le stesse considerazioni fatte ora relativamente alle sostituzioni abeliane, alle sostituzioni ottenute integrando sostituzioni che avessero delle singolarità essenziali. Così per esempio, se nel teorema III non si pone nessuna condizione relativamente alle singolarità della funzione che si considera, si potrà modificare il teorema dicendo che la sostituzione stessa deve avere una derivata sinistra monodroma sopra la superficie di RIEMANN.

5. È evidente l'analogia che presentano le sostituzioni abeliane semplici cogli integrali abeliani; però le sostituzioni abeliane dànno luogo ad altre classi di sostituzioni di cui le corrispondenti non esistono per gli integrali abeliani; o almeno si confondono colle funzioni algebriche o cogli integrali abeliani stessi. Dimostreremo perciò i seguenti teoremi:

TEOREMA VIII. – *Se si trasforma una sostituzione monodroma sopra una superficie di* RIEMANN *per mezzo di una sostituzione abeliana sinistra, si ottiene una sostituzione i cui valori alle due rive di ciascun taglio sono gli uni le trasformate degli altri, mediante la sostituzione costante (della sostituzione abeliana) relativa a quel taglio.*

Infatti se S è una sostituzione abeliana sinistra e T è monodroma, si ponga

$$\sigma = S^{-1}TS\,.$$

Se λ e ρ sono due punti situati alle due rive di uno dei tagli, avremo

$$\lambda$$

$$\rho$$

$$S_\lambda = S_\varrho A\,,$$

$$S_\lambda^{-1} = A^{-1}S_\varrho^{-1}\,,$$

essendo A la sostituzione costante relativa a quel taglio o a quella porzione che si considera. Quindi

$$S_\lambda^{-1}T_\lambda S_\lambda = A^{-1}(S_\varrho^{-1}T_\varrho S_\varrho)A,$$

vale a dire

$$\tau_\lambda = A^{-1}\tau_\varrho A\,.$$

il che dimostra il teorema.

TEOREMA IX. – *Se si moltiplica a sinistra una sostituzione abeliana sinistra per una sostituzione abeliana destra, avente costanti diverse, ma definita sulla stessa superficie di* RIEMANN *cogli stessi tagli, il prodotto avrà la proprietà che i suoi valori da una parte di ciascun taglio si otterranno da quelli* *dall'altra parte moltiplicandoli a destra e a sinistra per delle sostituzioni costanti lungo ciascun taglio o ciascuna porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi.*

Questo teorema si dimostra immediatamente. I due teoremi VIII e IX ci mostrano la esistenza di altre classi di sostituzioni abeliane oltre alle sostituzioni abeliane semplici considerate precedentemente.

Chiameremo *sostituzioni abeliane doppie* quelle i cui valori alle rive di ciascun taglio si ottengono gli uni dagli altri mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per sostituzioni costanti (a det = 1) lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi. Nel caso in cui i valori lungo una riva si otterranno da quelli sull'altra riva eseguendo una trasformazione mediante una sostituzione costante (a det = 1) lungo tutto il taglio (o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi) la sostituzione si dirà una *sostituzione abeliana trasformante*.

6. Teorema X. – *La derivata di una sostituzione abeliana doppia* (det = 1) *è una sostituzione trasformante.*

Sia S una sostituzione abeliana doppia (det = 1); alle due rive λ e ρ di uno stesso taglio, avremo

$$S_\lambda = A S_\varrho B\,,$$

essendo A e B due sostituzioni costanti lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi.

Derivando a sinistra avremo (vedi Parte 1ª, § 1)

$$\frac{dS_\lambda}{dz} = A S_\varrho A^{-1}.$$

Posto quindi

$$\frac{dS}{dz} = T,$$

avremo

$$T_\lambda = A T_\varrho A^{-1},$$

il che dimostra che la sostituzione T è trasformante.

Teorema XI. – *Gli integrali sinistro e destro di una sostituzione trasformante* (som = 0) *sono sostituzioni abeliane doppie.*

Denotiamo con T la sostituzione trasformante (som = 0). Si prendano

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline \rho_1 & \rho_2 \end{array}$$

due coppie di punti (λ_1, ρ_1), (λ_2, ρ_2) alle due rive di uno stesso taglio (o di una stessa porzione di tagli compresa fra due nodi consecutivi). Avremo

$$T_\lambda = A^{-1} T_\varrho A,$$

essendo A una sostituzione costante lungo il taglio (o la porzione di taglio). Si ponga

$$S = \int_{z_0}^{z} T dz ,$$

essendo z_0 un punto arbitrario, e supponendo che il cammino d'integrazione non esca dalla superficie di RIEMANN. Avremo

$$S_{\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_\lambda \, dz \cdot S_{\lambda_1} ,$$

$$S_{\varrho_2} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \cdot S_{\varrho_1} .$$

Ora

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_\lambda \, dz = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (A^{-1} T_\varrho A) \, dz$$

e per il teorema VII della Parte 1ª, § 2,

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (A^{-1} T_\varrho A) \, dz = A^{-1} \left(\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \right) A .$$

Quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} \left(\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \right) A \cdot S_{\lambda_1} .$$

Ma

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz = S_{\varrho_2} \cdot S_{\varrho_1}^{-1} ,$$

quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} S_{\varrho_2} S_{\varrho_1}^{-1} A S_{\lambda_1} .$$

Supponiamo λ_2 variabile e λ_1 fisso; posto

$$S_{\varrho_1}^{-1} A S_{\lambda_1} = B ,$$

avremo che B sarà costante, quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} S_{\varrho_2} B ,$$

il che dimostra che S è una sostituzione abeliana doppia.

La stessa dimostrazione varrebbe anche per provare che l'integrale destro di T è pure un integrale abeliano doppio.

TEOREMA XII. – *Se* T *è una sostituzione trasformante e se le sostituzioni costanti dei tagli sono eguali a quelle di una sostituzione abeliana sinistra* S, *si* *dovrà avere che* T *è la trasformata di una sostituzione monodroma mediante la sostituzione trasformatrice* S.

TEOREMA XIII. – *Se* S *è una sostituzione abeliana doppia e le sue costanti di sinistra sono eguali alle inverse delle costanti di una certa sostituzione abeliana sinistra* Σ *o in generale di una sostituzione* Σ *ottenuta integrando una sostituzione monodroma, avremo*

$$S = \Sigma^{-1} \Sigma_1,$$

essendo Σ_1 *una sostituzione la cui derivata è monodroma sulla superficie di* RIEMANN.

TEOREMA XIV. – *La sostituzione inversa di una sostituzione trasformante è una nuova sostituzione trasformante avente le medesime costanti dei tagli.*

TEOREMA XV. – *Il prodotto di più sostituzioni trasformanti aventi le medesime costanti dei tagli è una nuova sostituzione trasformante colle stesse costanti dei tagli.*

TEOREMA XVI. – *Tutte le sostituzioni abeliane doppie ottenute integrando a sinistra una stessa sostituzione trasformante* (som = 0) *hanno le sostituzioni costanti di sinistra eguali fra loro ed eguali alle inverse delle sostituzioni costanti della sostituzione trasformante; le sostituzioni costanti di destra si otterranno le une dalle altre mediante trasformazione.*

Questi ultimi teoremi si dimostrano immediatamente.

7. Restano ora da risolvere le seguenti questioni, che sono evidentemente importanti nella presente teoria:

1ª *Data una sostituzione abeliana doppia, sarà sempre possibile decomporla nel prodotto di due sostituzioni ottenute integrando rispettivamente a destra e a sinistra due sostituzioni monodrome sopra la superficie di* RIEMANN? *Quando è che sarà possibile decomporla nel prodotto di una sostituzione abeliana sinistra moltiplicata a sinistra per una sostituzione abeliana destra?*

2ª *Se questo è possibile, eseguire la decomposizione della sostituzione abeliana doppia nella maniera indicata.*

Supporremo sempre la sostituzione abeliana doppia col determinante eguale all'unità. Mediante i teoremi X, XI, XIII, XV le precedenti questioni si possono ridurre alle seguenti:

1ª *Data una sostituzione trasformante* (som = 0) *sarà sempre possibile ottenerla mediante la trasformazione di una sostituzione monodroma per mezzo di una sostituzione formata integrando a sinistra una sostituzione monodroma?*

2ª *Se ciò è possibile, eseguire la decomposizione della sostituzione trasformante nella maniera indicata.*

Oltre a ciò il seguente teorema ci indica una via per risolvere le altre questioni proposteci.

TEOREMA XVII. – *Se un integrale abeliano doppio è ottenuto moltiplicando a sinistra un integrale abeliano sinistro per un integrale abeliano destro, le derivate saranno sostituzioni trasformanti ottenute trasformando sostituzioni alge-*

briche mediante sostituzioni abeliane sinistre; e reciprocamente *se una sostituzione abeliana trasformante è ottenuta trasformando una sostituzione algebrica* (som 0) *mediante una sostituzione abeliana sinistra, i suoi integrali saranno prodotti di sostituzioni abeliane semplici.*

Infatti se S è abeliana destra e S_1 è abeliana sinistra, avremo (Parte 1ª, § 1)

$$\frac{d(SS_1)}{dz} = S\left(\frac{Sd}{dz} + \frac{dS_1}{dz}\right)S^{-1}.$$

Ma $S\frac{d}{dz} + \frac{d}{dz}S$ è una sostituzione algebrica e S^{-1} può considerarsi come una sostituzione abeliana sinistra; la prima parte del teorema risulta quindi dimostrata.

Sia S_1 una sostituzione abeliana sinistra e T (som 0) sia algebrica. Si ponga

$$R = S_1^{-1} TS_1,$$

avremo

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = \int_{z_0}^{z} S_1^{-1}\, TS_1\, dz.$$

Onde, posto

$$\int_{z_0}^{z} \left(T - \frac{dS_1}{dz}\right) dz = S_2,$$

avremo (Parte 1ª, § 2)

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = S_1^{-1} \cdot S_2 \cdot (S_1)_{z=z_0}.$$

La derivata sinistra di

$$S_2\,(S_1)_{z=z_0} = S_3$$

è algebrica, quindi

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = S_1^{-1}\, S_3,$$

come volevasi dimostrare.

Le due questioni di vedere *quando una sostituzione abeliana doppia può porsi sotto la forma del prodotto di due sostituzioni abeliane semplici* e di verificare *quando una sostituzione trasformante è la trasformata di una sostituzione algebrica mediante una sostituzione abeliana sinistra*, rientrano quindi una nell'altra.

Senza cercare di risolvere le varie questioni enunciate alla fine di questo paragrafo, pure nel paragrafo seguente accenneremo ad alcune ricerche a cui hanno dato origine i precedenti problemi.

§ 6. – Sostituzioni algebriche e sostituzioni abeliane.

(Seguito).

1. Ricordiamo che, se si ha una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

il primo membro della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

fu chiamato il *determinante caratteristico della sostituzione*; perciò chiameremo l'equazione precedente la *equazione caratteristica della sostituzione*.

Teorema I. – *Se* T *è una sostituzione algebrica o trasformante rispetto ad una certa superficie* R *di* Riemann, *la equazione relativa alla sostituzione avrà i coefficienti monodromi sopra la superficie di* Riemann. *Nel primo caso questi coefficienti saranno algebrici*.

Il teorema è evidente nel caso in cui T sia algebrica; per dimostrarlo nel caso in cui la sostituzione sia trasformante, osserviamo che, se si parte da un punto qualunque della superficie di Riemann e, dopo aver percorso un cammino qualunque, si torna al punto iniziale, la sostituzione T riprenderà il valore iniziale, o tornerà trasformata. Ne segue (ved. Parte 1ª, Preliminari, § 2) che la equazione *caratteristica* della sostituzione (quando si tornerà al punto iniziale) tornerà ad avere le stesse radici che aveva inizialmente. Ciò dimostra il teorema.

2. Presa una sostituzione algebrica o trasformante nel caso in cui i coefficienti della equazione caratteristica siano *algebrici*, si considerino le radici dell'equazione stessa che indicheremo con $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Siccome i coefficienti dell'equazione sono regolari sulla superficie di Riemann, così considerando le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ come funzioni dei punti della superficie di Riemann, avremo che percorrendo un cammino chiuso qualsiasi sulla superficie di Riemann, le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ torneranno in loro stesse o subiranno fra loro una permutazione. È evidente che le permutazioni non avranno luogo altro che quando il cammino chiuso avrà nel suo interno uno o più punti in cui il discriminante della sostituzione si annulla (*punti di diramazione*).

Se la equazione sarà irriduttibile, le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ potranno riguardarsi come gli n rami di una funzione ad n valori sulla superficie di RIEMANN. Immaginando distesa sulla superficie di RIEMANN finora considerata una nuova superficie di RIEMANN ad n fogli relativamente alla prima e la cui diramazione (sempre relativamente alla prima) sia quella della funzione di cui le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sono i rami, avremo che una tale funzione potrà riguardarsi come monodroma sopra la nuova superficie di RIEMANN costruita (5).

Se la equazione caratteristica della sostituzione non sarà irriduttibile, le sue n radici potranno distinguersi in ν gruppi

$$\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \cdots, \omega_{1,k_1}; \omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \cdots, \omega_{2,k_2}; \cdots;$$

$$\omega_{h,1}, \omega_{h,2}, \cdots, \omega_{h,k_h}; \cdots; \omega_{\nu,1}, \cdots, \omega_{\nu,k_\nu},$$

$$\sum_1^\nu k_h = n,$$

tali che le radici appartenenti ad uno stesso gruppo potranno considerarsi come rami di una funzione a più valori sulla superficie di RIEMANN. In questo caso potranno distendersi sopra la superficie di RIEMANN ν nuove superficie di RIEMANN $R_1, R_2, \cdots, R_\nu$ (le quali avranno rispetto alla prima $k_1, k_2, \cdots, k_\nu$ fogli) sopra le quali le funzioni i cui rami sono i diversi gruppi considerati di radici risulteranno monodrome.

3. Per semplicità supporremo *sempre* in tutto ciò che segue che *i discriminanti delle equazioni relative alle sostituzioni che si considerano non siano identicamente nulli*. In tale ipotesi il numero dei punti in cui il discriminante si annullerà sarà finito, e quindi sarà pure finito il numero dei punti in cui le radici della equazione diverranno eguali fra loro.

4. Si consideri la sostituzione algebrica

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n} \end{pmatrix}$$

e le radici della equazione *caratteristica* ad essa relativa,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} - \omega, & a_{1,2} & , \cdots, & a_{1,n} \\ a_{2,1} & , a_{2,2} - \omega & , \cdots, & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & , a_{n,2} & , \cdots, & a_{n,n} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

(5) Il genere di questa 2ª superficie di RIEMANN non dipende altro che dal genere della prima e dalla diramazione della seconda relativamente alla prima superficie. Vedi nota a questo paragrafo alla fine.

In un punto non di diramazione siano le radici

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$$

distinte nei ν gruppi considerati precedentemente.

Potremo porre

$$T = M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M,$$

ove

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1}, m_{1,2}, \cdots, m_{1,n} \\ m_{2,1}, m_{2,2}, \cdots, m_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n,1}, m_{n,2}, \cdots, m_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (\det 1).$$

Avremo (ved. Parte 1ª, Preliminari, § 1)

$$a_{i,s} = \sum_t^n {}_1 m_{t,s} M_{t,i}\, \omega_t,$$

essendo $M_{t,i}$ l'elemento reciproco a $m_{t,i}$.

Moltiplicando per $m_{r,i}$ e sommando rispetto ad i, si otterrà

$$\sum_i^n {}_1 a_{i,s}\, m_{r,i} = m_{r,s}\, \omega_r.$$

Si ha quindi per ogni valore di r il sistema di n equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \omega_r)\, m_{r,1} + a_{1,2}\, m_{r,2} + \cdots + a_{1,n}\, m_{r,n} = 0 \\ a_{2,1}\, m_{r,1} + (a_{2,2} - \omega_r)\, m_{r,2} + \cdots + a_{2,n}\, m_{r,n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}\, m_{r,1} + a_{n,2}\, m_{r,2} + \cdots + (a_{n,n} - \omega_r)\, m_{r,n} = 0. \end{cases}$$

Le $m_{r,1}, m_{r,2}, \cdots, m_{r,n}$ sono determinate a meno di un fattore comune per tutte.

Sia ω_r appartenente al gruppo di radici

$$\omega_{h,1}, \omega_{h,2}, \cdots, \omega_{h,k_h}$$

fra loro permutabili, alle quali corrisponde la superficie di RIEMANN R_h distesa sulla superficie data R e convenientemente diramata; i rapporti $m_{r,1}/m_{r,i}, m_{r,2}/m_{r,i}, \cdots, m_{r,n}/m_{r,i}$ saranno monodromi sopra R_h e ad ogni punto di R corrisponderanno k_h serie di valori per i rapporti precedenti che potremo denotare con

$$\left(\frac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,s}, \left(\frac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,s}, \cdots, \left(\frac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, k_h),$$

le quali saranno fra loro permutabili e saranno diramate come le $\omega_{h,s}$. Se scriviamo quindi la tabella

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\omega_{h,1}, \left(\frac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,1}, \left(\frac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,1}, \cdots, \left(\frac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,1}, \\
\omega_{h,2}, \left(\frac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,2}, \left(\frac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,2}, \cdots, \left(\frac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega_{h,k_h}, \left(\frac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h}, \left(\frac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h}, \cdots, \left(\frac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h},
\end{array} \right.
$$

avremo che muovendoci sopra la superficie di RIEMANN R e partendo da un punto per ritornare al punto iniziale, ciascuna delle linee della tabella precedente tornerà in sé stessa o si scambierà con un'altra linea.

Lo stesso vale per ogni altro gruppo di radici appartenenti alla equazione (1).

Consideriamo ora gli elementi reciproci $M_{r,i}$ delle $m_{r,i}$ nel determinante della sostituzione M; è evidente che anche la tabella seguente

$$
(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\omega_{h,1}, \left(\frac{M_{r,1}}{M_{r,i}}\right)_{h,1}, \left(\frac{M_{r,2}}{M_{r,i}}\right)_{h,1}, \cdots, \left(\frac{M_{r,n}}{M_{r,i}}\right)_{h,1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega_{h,k_h}, \left(\frac{M_{r,1}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h}, \left(\frac{M_{r,2}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h}, \cdots, \left(\frac{M_{r,n}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h}
\end{array} \right.
$$

godrà della identica proprietà della tabella (I). Se quindi osserviamo che

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, m_{r,i} M_{r,i} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

avremo che anche la tabella

$$
(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\omega_{h,1}, (m_{r,1} M_{r,1})_{h,1}, \cdots, (m_{r,n} M_{r,n})_{h,1}, \cdots, (m_{r,g} M_{r,l})_{h,1}, \cdots, \\
\omega_{h,2}, (m_{r,1} M_{r,1})_{h,2}, \cdots, (m_{r,n} M_{r,n})_{h,2}, \cdots, (m_{r,g} M_{r,l})_{h,2}, \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega_{h,k_h}, (m_{r,1} M_{r,1})_{h,k_h}, \cdots, (m_{r,n} M_{r,n})_{h,k_h}, \cdots, (m_{r,g} M_{r,l})_{h,k_h}, \cdots
\end{array} \right.
$$

godrà, per tutti i possibili valori di g ed l, della stessa proprietà delle due tabelle precedenti.

5. Ciò premesso si può passare alla questione: *Data una sostituzione algebrica trovare le sostituzioni algebriche* (*o più in generale monodrome sulla stessa superficie di* RIEMANN) *le quali sono permutabili con essa.*

Sia T la sostituzione algebrica data; se S sarà permutabile con T dovrà essere

$$(2) \qquad ST = TS.$$

Si ponga ora T (la cui equazione si suppone avere il discriminante non identicamente nullo) sotto la forma canonica. Avremo

$$T = M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, 0, \cdots, 0 \\ 0, 0, \omega_3, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M \qquad (\det M = 1),$$

e le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ potranno distinguersi nei ν gruppi considerati precedentemente. Ora la (2) può scriversi

$$SM^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M = M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} MS,$$

da cui si deduce

$$MSM^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} MSM^{-1}.$$

Perciò (ved. Preliminari)

$$MSM^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$S = M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix} M.$$

Se poniamo

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1}, \cdots, a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}, \cdots, a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{1,1}, \cdots, m_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_{n,1}, \cdots, m_{n,n} \end{pmatrix},$$

avremo

$$a_{i,s} = \sum_{1}^{n}{}_t\, m_{t,s}\, M_{t,i}\, \alpha_t .$$

Se le a_{is} debbono essere monodrome sopra la stessa superficie di RIEMANN R sulla quale è monodroma la T, sarà *necessario* e *sufficiente* che le

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

siano funzioni definite sopra le R in modo che abbiano la stessa diramazione delle $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Abbiamo quindi che la questione propostaci può ritenersi risoluta.

Basterà prendere tutte le possibili funzioni

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

che si permutano fra loro come le

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n,$$

e costruendo

$$S = M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix} M$$

avremo tutte le sostituzioni monodrome su R *permutabili con la sostituzione data* T. *Se le* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *saranno regolari, tale risulterà anche* S.

6. Passiamo ora alla questione: *Date due sostituzioni regolari sulla stessa superficie di* RIEMANN, *riconoscere se esse possono trasformarsi l'una nell'altra mediante una sostituzione pure regolare sulla stessa superficie e avente il determinante eguale ad* 1.

Accenneremo soltanto il caso in cui si tratti di sostituzioni del secondo ordine.

Siano le due sostituzioni date

$$S = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad , \quad S_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix},$$

dovremo avere, come è noto (ved. Introd. Parte 1ª),

$$(3) \qquad a + d = a_1 + d_1 \quad , \quad D = ad - bc = D_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 .$$

Allora esisterà una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \qquad (\det = 1)$$

tale che

$$T^{-1} ST = S_1,$$

vale a dire

$$\begin{gathered} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d = a_1, \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c - \gamma^2 b + \alpha\gamma d = c_1, \\ \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta d = b_1, \\ -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d = d_1, \end{gathered}$$

donde

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha a + \gamma b = \alpha a_1 + \beta c_1 = X, \\ \beta a + \delta b = \alpha b_1 + \beta d_1 = Y, \\ \alpha c + \gamma d = \gamma a_1 + \delta c_1 = Z, \\ \beta c + \delta d = \gamma b_1 + \delta d_1 = U. \end{cases}$$

Quando sono soddisfatte due di queste equazioni insieme alle condizioni (3), le altre due risultano come conseguenza. Potremo prendere quindi a considerare le due prime o le due ultime equazioni.

Supponiamo $b \neq 0$. Dalle due prime si deduce:

$$\alpha = \frac{Xd_1 - Yc_1}{D_1} \quad , \quad \beta = \frac{Ya_1 - Xb_1}{D_1} ,$$

$$\gamma = \frac{X}{b} - \alpha \frac{a}{b} \quad , \quad \delta = \frac{Y}{b} - \beta \frac{a}{b} .$$

Supponendo c diverso da zero, dalle due ultime delle (4) si dedurrà

$$\alpha = \frac{Z}{c} - \gamma \frac{d}{c} , \quad \beta = \frac{U}{c} - \delta \frac{d}{c} ,$$

$$\gamma = \frac{Zd_1 - Uc_1}{D_1} \quad , \quad \delta = \frac{Ua_1 - Zb_1}{D_1} ,$$

e poiché

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 ,$$

così dovremo avere

$$b_1 X^2 - XY(a_1 - d_1) - c_1 Y^2 = D_1 b , \tag{5}$$

$$b_1 Z^2 - UZ(a_1 - d_1) - c_1 U^2 = - D_1 c . \tag{6}$$

Affinché dunque le due sostituzioni S e S_1 si possano trasformare l'una nell'altra nel modo voluto sarà necessario e sufficiente che si possano determinare due funzioni X, Y, regolari sulla superficie di RIEMANN sulla quale sono definite le S e S_1, le quali soddisfino alla condizione (5). È evidente che basterà trovare le due funzioni X, Y perché possano dedursi immediatamente le due funzioni Z e U pure regolari le quali soddisfano alla (6).

Il problema è quindi ridotto ad una questione algebrica di analisi indeterminata. Vedremo (§ 9) come un'altra questione possa ricondursi a questo stesso problema algebrico.

Se uno degli elementi b o c fosse nullo, allora le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} a_1 - \omega , & b_1 \\ c_1 & , d_1 - \omega \end{vmatrix} = 0$$

dovrebbero essere rispettivamente eguali ad a e d. Ora, mediante due sostituzioni aventi il determinante eguale ad 1 e regolari sulla superficie di RIEMANN in cui sono definite le sostituzioni date, potrebbero respettivamente trasformarsi S e S_1 in $\begin{pmatrix} a , 0 \\ 0 , d \end{pmatrix}$ e quindi l'una nell'altra nella maniera voluta.

7. Consideriamo ora le sostituzioni abeliane trasformanti.

È facile dimostrare per primo il teorema: *Se una sostituzione trasformante è definita sopra una superficie di* RIEMANN, *esisteranno sempre infinite sostituzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN, *da cui la sostituzione data si ottiene mediante trasformazione*. (Ammetteremo sempre che il discriminante della equazione relativa alla sostituzione non sia identicamente nullo).

Sia la sostituzione data

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, n_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

l'equazione caratteristica ad essa relativa sarà

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\omega, & a_{12}, & a_{13}, \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\omega, & a_{23}, \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \cdots, & a_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_n) = 0,$$

e le A_i saranno tutte monodrome sulla superficie di RIEMANN ove è definita la T.

Si formi ora la sostituzione monodroma

$$\tau = \begin{pmatrix} -A_1, & -A_2, & -A_3, \cdots, & -A_{n-1}, & -A_n \\ 1, & 0, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

la equazione caratteristica ad essa relativa sarà

$$\begin{vmatrix} -A_1-\omega, & -A_2, & -A_3, \cdots, & -A_{n-1}, & -A_n \\ 1, & -\omega, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -\omega, \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, & 1, & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

e sviluppandola avremo

$$(-1)^n (\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_n) = 0.$$

Ne segue che le due sostituzioni T e τ sono l'una la trasformata dell'altra. Esiste dunque una sostituzione monodroma di cui una trasformante è la trasformata. Infatti entro ogni campo preso sulla superficie di RIEMANN dovranno trovarsi dei punti ove la equazione (7) non possiede radici eguali. Dalla esistenza di una sostituzione monodroma che gode della voluta proprietà segue la esistenza di altre infinite aventi la proprietà stessa.

8. Relativamente alla questione di *determinare tutte le sostituzioni trasformanti permutabili con una data sostituzione trasformante*, si vede facilmente come essa può risolversi in modo perfettamente analogo alla questione

trattata nell'art. 5 di questo paragrafo. E si giunge pure ad un analogo risultato, cioè, se $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sono le radici della equazione relativa alla sostituzione trasformante data ed essa può porsi sotto la forma

$$M^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \;, \cdots, \omega_n\end{pmatrix}M,$$

tutte le sostituzioni permutabili potranno porsi sotto la forma

$$M^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \;, \cdots, \alpha_n\end{pmatrix}M,$$

ove le $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sono funzioni diramate come le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$.

9. Passiamo finalmente alla questione (ved. paragrafo prec.) di determinare le condizioni affinché una sostituzione trasformante possa considerarsi come la trasformata di una sostituzione algebrica per mezzo di una sostituzione abeliana semplice.

Accenneremo soltanto al caso in cui si tratti di una sostituzione del 2° ordine.

Sia la sostituzione trasformante data

$$T_1 = \begin{pmatrix}a_1, b_1 \\ c_1, d_1\end{pmatrix},$$

e supponiamo che si possa porre

$$T_1 = \begin{pmatrix}m, n \\ p, q\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m, n \\ p, q\end{pmatrix},$$

con

$$S = \begin{pmatrix}m, n \\ p, q\end{pmatrix} \quad (\det = 1)$$

abeliana sinistra. Avremo

$$\begin{cases} ma_1 + nc_1 = am + bp, \\ mb_1 + nd_1 = an + bq, \\ pa_1 + qc_1 = cm + dp, \\ pb_1 + qd_1 = cn + dq, \end{cases}$$

donde si vede che si può prendere, supposto $b \neq 0$,

$$\begin{cases} m = b\alpha, \\ n = b\beta, \\ p = \alpha(a_1 - a) + \beta c_1, \\ q = \alpha b_1 + \beta(d_1 - a). \end{cases} \tag{8}$$

Se S deve essere abeliana sinistra, dovremo avere che

$$\frac{d}{dx}S = \begin{pmatrix}\varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi_3, & -\varphi_1\end{pmatrix}$$

dovrà essere regolare. Ora

$$\frac{d}{dx}\mathrm{S} = \begin{pmatrix} m', n' \\ p', q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix}^{-1},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} m', n' \\ p', q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi_3, & -\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix},$$

ovvero per le (8)

$$b\alpha' + b'\alpha = \alpha\,[b\varphi_1 + (a_1 - a)\,\varphi_2] + \beta\,[c_1\,\varphi_2],$$

$$b\beta' + b'\beta = \alpha\,[b_1\,\varphi_2] + \beta\,[b\varphi_1 + (d_1 - a)\,\varphi_2],$$

$$(a_1 - a)\,\alpha' + c_1\,\beta' + \alpha\,(a_1' - a') + c_1'\,\beta = \alpha\,[b\varphi_3 - (a_1 - a)\,\varphi_1] + \beta\,[-\varphi_1\,c_1],$$

$$b_1\,\alpha' + (d_1 - a)\,\beta' + \alpha b_1' + (d_1' - a')\,\beta = \alpha\,[-b_1\,\varphi_1] + \beta\,[b\varphi_3 - (d_1 - a)\,\varphi_1].$$

Eliminando α', β' si ottiene, se $\mathrm{D} = ad - bc$,

$$\alpha\,\{a_1\,[2\,b\varphi_1 + (d-a)\,\varphi_2 - b'] + a_1'\,b + [-2\,ab\varphi_1 + (a^2 - \mathrm{D})\,\varphi_2 - b^2\,\varphi_3 + (ab' - a'\,b)]\}$$
$$+\, \beta\,\{c_1\,[2\,b\varphi_1 - (d-a)\,\varphi_2 - b'] + c_1'\,b\} = 0,$$

$$\alpha\,\{b_1\,[2\,b\varphi_1 + (d-a)\,\varphi_2 - b'] + b_1'\,b\}$$
$$+\,\beta\,\{d_1[2\,b\varphi_1 + (d-a)\,\varphi_2 - b'] + d_1'\,b + [-2ab\varphi_1 + (a^2 - \mathrm{D})\,\varphi_2 - b^2\varphi_3 + (ab' - a'\,b)]\} = 0,$$

e finalmente eliminando α *e* β, e ponendo

$$\frac{2\,b\varphi_1 + (d-a)\,\varphi_2 - b'}{b} = \mathrm{X},$$

$$\frac{-2\,ab\varphi_1 + (a^2 - \mathrm{D})\,\varphi_2 - b^2\,\varphi_3 + ab' - a'\,b}{b} = \mathrm{Y},$$

si trova

$$\frac{a_1\,\mathrm{X} + a_1' + \mathrm{Y}}{b_1\,\mathrm{X} + b_1'} = \frac{c_1\,\mathrm{X} + c_1'}{d_1\,\mathrm{X} + d_1' + \mathrm{Y}}.$$

Scriviamo

$$a_1'\,d_1' - b_1'\,c_1' = \mathrm{P}_1 \quad , \quad a_1 + d_1 = \mathrm{S}_1;$$

osservando che $a_1\,d_1 - b_1\,c_1 = \mathrm{D}$, la equazione precedente diverrà

$$\mathrm{D}\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{S}_1\,\mathrm{X}\mathrm{Y} + \mathrm{D}_1'\,\mathrm{X} + \mathrm{S}_1'\,\mathrm{Y} + \mathrm{P}_1 = 0.$$

Ora i coefficienti sono tutti *noti* e *algebrici*, come pure debbono risultare algebrici X ed Y. La questione propostaci è quindi ridotta ad una questione analoga a quella a cui siamo pervenuti nell'art. 6.

10. Enunceremo finalmente un teorema che avrà applicazione in seguito (§ 7).

Se le radici della equazione caratteristica relativa ad una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN *sono costanti, la sostituzione stessa potrà porsi sotto la forma della trasformata di una sostituzione costante per mezzo di una sostituzione monodroma sopra la superficie di* RIEMANN.

Sia infatti S una sostituzione qualunque funzione di z, la cui equazione caratteristica abbia radici costanti; avremo che i divisori elementari di S saranno indipendenti da z, quindi S potrà porsi sotto la forma normale

$$S = T^{-1} S_1 T$$

in cui S_1 è una sostituzione costante. Ora gli elementi di T potranno dedursi da quelli di S e di S_1 mediante operazioni razionali, e perciò T potrà prendersi come una sostituzione monodroma sulla superficie di RIEMANN sulla quale S è monodroma.

Se la sostituzione monodroma data sarà algebrica, la sostituzione trasformatrice potrà pure prendersi algebrica.

§ 7. – Sostituzioni abeliane essenziali e sostituzioni abeliane apparenti.

1. Come vedremo in seguito, è utile fare una distinzione fra le sostituzioni abeliane semplici in *essenziali* ed *apparenti*.

Se una sostituzione i cui elementi sono funzioni di k variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$, è tale che, se si prendono per $y_1, y_2, \cdots, y_k$ degli integrali abeliani *qualunque* corrispondenti ad una stessa superficie di RIEMANN, la sostituzione risulta *sempre* una sostituzione abeliana semplice destra o sinistra su quella superficie di RIEMANN, diremo che la sostituzione abeliana è *apparente*; ogni sostituzione abeliana semplice definita sopra una superficie di RIEMANN, che non può farsi rientrare in una classe di sostituzioni abeliane apparenti, la diremo una sostituzione abeliana *essenziale*.

Così le sostituzioni del secondo ordine

$$T_1 = \begin{pmatrix} y + 1 \, , & 1 \\ y & , 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 = \begin{pmatrix} e^y \, , & 0 \\ 0 \, , & e^{-y} \end{pmatrix}$$

sono sostituzioni abeliane apparenti, perché se si prende per y un integrale abeliano *qualunque* le sostituzioni risultano *sempre* abeliane sinistre.

Dimostreremo in seguito che tutte le sostituzioni abeliane sinistre del secondo ordine hanno una delle due forme.

$$S_1 T_1 S_2 \, , \; S_1 T_2 S_2 \, ,$$

essendo S_1 e S_2 delle sostituzioni costanti. Ne segue che, se, per esempio, fra le tre funzioni monodrome φ_1, φ_2, φ_3 definite sopra una stessa superficie di RIEMANN non passa nessuna relazione lineare

$$A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 = 0$$

con A_1, A_2, A_3 costanti, avremo che

$$\int \begin{pmatrix} \varphi_1 \, , & \varphi_2 \\ \varphi_3 \, , & -\varphi_1 \end{pmatrix} dx$$

sarà una sostituzione *abeliana essenziale*.

2. Il problema di *determinare tutte le sostituzioni abeliane apparenti di un certo ordine* si può evidentemente far dipendere dall'altro: *determinare tutte le sostituzioni di un certo ordine funzioni di k variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$, tali che, se si aumentano in un modo qualunque queste variabili di $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, la sostituzione viene moltiplicata a destra o a sinistra per una sostituzione che non dipende altro che da queste ultime quantità $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$.*

La risoluzione di questo problema non presenta difficoltà.

Sia infatti S (det = 1) la sostituzione funzione di $y_1, y_2, \cdots, y_k$ che gode della voluta proprietà. Cioè si abbia

$$\mathrm{S}(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = \mathrm{S}(y_1, y_2, \cdots, y_k)\,\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k).$$

Si ponga

$$\frac{d\mathrm{S}}{dy_i} = \mathrm{T}_i\,;$$

avremo:

$$\mathrm{T}_i(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = \mathrm{T}_i(y_1, y_2, \cdots, y_k).$$

Ora questa relazione non è possibile, qualunque siano $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, a meno che non si abbia T_i indipendente da $y_1, y_2, \cdots, y_k$.

Potremo dunque enunciare il

TEOREMA I. – *Tutte le sostituzioni abeliane sinistre apparenti* (det = 1) *saranno date da*

$$\mathrm{S} = \int \prod_{1}^{k}{}_i\, \mathrm{T}_i\, dy_i\,,$$

ove le T_i *sono sostituzioni costanti* (som = 0).

Analogamente si vedrebbe che *le sostituzioni abeliane apparenti destre saranno date da*

$$\mathrm{S} = \left(\prod_{1}^{k}{}_i\, \mathrm{T}_i\, dy_i\right)\int.$$

3. Le sostituzioni T_i non possono essere fra loro indipendenti giacché

$$\prod_{1}^{k}{}_i\, \mathrm{T}_i\, dy_i$$

deve risultare un differenziale esatto. Le condizioni a cui dovranno soddisfare si dedurranno dalle regole date nel § 3 e nel § 8, Art. 4 della prima parte, come pure potremo ricavare dalle regole ivi esposte il modo di eseguire la integrazione e di determinare quindi la forma generale delle sostituzioni abeliane apparenti.

Valgono a tale fine i lemmi seguenti:

Lemma I. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\prod_{1}^{k}{}_i\, \mathrm{T}_i\, dy_i$$

sia un differenziale esatto, se le sostituzioni T_i *sono costanti, è che esse siano fra loro permutabili.*

Infatti scrivendo le condizioni generali di integrabilità sotto la forma nelle quali furono poste nella Nota al § 3, Art. 7 e al § 8, Art. 4 della prima parte, avremo

$$(T_r)'_{y_s} - (T_s)'_{y_r} + T_r T_s - T_s T_r = \Delta'(T_s, T_r)_{y_s y_r} = 0.$$

Ora nel nostro caso, siccome le sostituzioni T_i sono costanti, queste equazioni divengono

$$T_s T_r = T_r T_s,$$

come si doveva dimostrare.

Lemma II. – *Se le* T_i *sono costanti e fra loro permutabili, avremo*

$$\int \prod_1^k {}_i T_i \, dy_i = \prod_1^k {}_i S_i(y_i) \cdot C,$$

ove

$$S_i = \int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i$$

e C *è una sostituzione costante.*

Infatti posto

$$\prod_1^k {}_i S_i \cdot C = V,$$

avremo, poiché le y_i sono fra loro indipendenti (ved. § 1, Parte 1ª)

$$\frac{dV}{dy_p} = \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right) T_p \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right)^{-1}. \tag{1}$$

Ora, per essere le T_i fra loro permutabili,

$$T_i = T_p^{-1} T_i T_p,$$

e, per essere le y_i fra loro indipendenti (ved. § 2, Parte 1ª),

$$\int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i = T_p^{-1} \left(\int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i\right) T_p,$$

cioè

$$S_i = T_p^{-1} S_i T_p,$$

onde

$$T_p = S_i T_p S_i^{-1},$$

$$T_p = \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right) T_p \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right)^{-1}$$

e per la (1)

$$\frac{dV}{dy_p} = T_p,$$

il che dimostra il teorema.

La costruzione di sostituzioni abeliane apparenti non presenta difficoltà, la questione riducendosi a determinare delle sostituzioni costanti fra loro permutabili, questione che è stata già trattata nei Preliminari preposti a questa seconda parte.

4. Dimostriamo ora il seguente teorema.

Teorema II. – *Se si ha*

$$\frac{dS}{dx} = M^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r {}_\chi T^{(\chi)}}} \right\} M,$$

ove M *è costante e*

$$T^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\chi)}, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \varphi_2^{(\chi)}, & \varphi_1^{(\chi)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n_\chi}^{(\chi)}, & \varphi_{n_\chi - 1}^{(\chi)}, & \varphi_{n_\chi - 2}^{(\chi)}, & \cdots, \varphi_1^{(\chi)} \end{pmatrix},$$

$$\sum_1^r {}_\chi n_\chi \varphi_1^{(\chi)} = 0,$$

e le $\varphi_i^{(\chi)}$ *sono funzioni algebriche, avremo che* S *sarà una sostituzione abeliana apparente.*

Infatti potremo porre

$$S = M^{-1} S_1 M,$$

in cui

$$\frac{dS_1}{dx} = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r {}_\chi T^{(\chi)}}} \right\},$$

e potremo soddisfare alla precedente equazione prendendo

$$S_1 = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r {}_\chi S_2^{(\chi)}}} \right\},$$

ove

$$S_2^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\chi)}, & 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2^{(\chi)}, & \lambda_1^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n_\chi}^{(\chi)}, & \lambda_{n_\chi - 1}^{(\chi)}, & \cdots, \lambda_1^{(\chi)} \end{pmatrix}.$$

Ora

$$S_1^{-1} = \left\{ \prod_1^r {}_\chi S_3^{(\chi)} \right\},$$

ove

$$S_3^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \Lambda_2^{(\chi)}, \Lambda_1^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Lambda_{n_\chi}^{(\chi)}, \Lambda_{n_\chi - 1}^{(\chi)}, & \cdots, \Lambda_1^{(\chi)} \end{pmatrix}.$$

con

(2) $$\sum_0^{p-1}{}_i \lambda_{p-i}^{(\chi)} \Lambda_{i+1}^{(\chi)} = 0 \quad , \quad \lambda_1^{(\chi)} \Lambda_1^{(\chi)} = 1.$$

Abbiamo inoltre

$$\frac{dS_1}{dx} = S_4 S_1^{-1},$$

ove

$$S_4 = \left\{ \prod_1^r {}_i S_5^{(\chi)} \right\} , \quad S_5^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \lambda_1'^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2'^{(\chi)}, \lambda_1'^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{n_\chi}'^{(\chi)}, \lambda_{n_\chi - 1}'^{(\chi)}, & \cdots, \lambda_1'^{(\chi)} \end{pmatrix}.$$

Quindi si dovrà avere

(3) $$\sum_0^{p-1}{}_i \lambda_{p-i}'^{(\chi)} \Lambda_{i+1}^{(\chi)} = \varphi_p^{(\chi)}.$$

Derivando le (2) rispetto alle λ_s si ottiene facilmente

$$\frac{\partial \Lambda_{i+1}^{(\chi)}}{\partial \lambda_{p-r}^{(\chi)}} = \frac{\partial \Lambda_{r+1}^{(\chi)}}{\partial \lambda_{p-i}^{(\chi)}},$$

quindi

$$\sum_0^{p-1}{}_i \Lambda_{i+1}^{(\chi)} \, d\lambda_{p-i}^{(\chi)}$$

sarà un differenziale esatto.

Dalle (2) si deduce pure

$$\Lambda_{i+1}^{(\chi)} = \frac{1}{\lambda_1^{(\chi)^{i+1}}} \begin{vmatrix} \lambda_1^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2^{(\chi)} & , \lambda_1^{(\chi)}, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{i+1}^{(\chi)}, \lambda_i^{(\chi)}, & \cdots, 0 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\sum_{0}^{p-1}{}_i\, \Lambda_{i+1}^{(\chi)}\, d\lambda_{p-i}^{(\chi)} = \sum_{0}^{p-1}{}_i\, \frac{d\lambda_{p-i}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} \begin{vmatrix} 1 & , 0 & ,\cdots, 1 \\ \frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , 1 & ,\cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_{i+1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , \frac{\lambda_i^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & ,\cdots, 0 \end{vmatrix},$$

da cui segue facilmente

$$\sum_{0}^{p-1}{}_i\, \Lambda_{i+1}^{(\chi)}\, d\lambda_{p-i}^{(\chi)} = \sum_{0}^{p-2}{}_i \begin{vmatrix} 1 & , 0 & ,\cdots, 1 \\ \frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , 1 & ,\cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_{i+1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , \frac{\lambda_i^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & ,\cdots, 0 \end{vmatrix} d\left(\frac{\lambda_{p-i}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right)$$

$$= d\left(\frac{\lambda_p^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right) + \sum_{1}^{p-2}{}_i \begin{vmatrix} 1 & , 0 & ,\cdots, 1 \\ \frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , 1 & ,\cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_{i+1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & , \frac{\lambda_i^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} & ,\cdots, 0 \end{vmatrix} d\left(\frac{\lambda_{p-i}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right).$$

Per quello che fu detto precedentemente, il secondo membro dovrà essere un differenziale esatto: ma esso è razionale ed intero rispetto alle $(\lambda_s^{(\chi)}/\lambda_1^{(\chi)})$, quindi integrando otterremo un polinomio rispetto a questi rapporti, e perciò

$$d\left[\frac{\lambda_p^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} + P\left(\frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \frac{\lambda_3^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \cdots, \frac{\lambda_{p-1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right)\right] = \sum_{0}^{p-1}{}_i\, \Lambda_{i+1}^{(\chi)}\, d\lambda_{p-1}^{(\chi)}$$

ove P è il simbolo di un polinomio. Ne segue per la (3)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda_p^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} + P\left(\frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \frac{\lambda_3^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \cdots, \frac{\lambda_{p-1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right)\right] = \sum_{0}^{p-1}{}_i\, \Lambda_{i+1}^{(\chi)}\, d\lambda_{p-1}^{(\chi)} = \varphi_p^{(\chi)},$$

e integrando

$$\frac{\lambda_p^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}} = \int \varphi_p^{(\chi)}\, dx - P\left(\frac{\lambda_2^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \frac{\lambda_3^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}, \cdots, \frac{\lambda_{p-1}^{(\chi)}}{\lambda_1^{(\chi)}}\right).$$

Ora si ha:

$$\frac{\left(\lambda_1^{(\chi)}\right)'}{\lambda_1^{(\chi)}} = \varphi_1^{(\chi)},$$

quindi

$$\lambda_1^{(\chi)} = e^{\int \varphi_1^{(\chi)}\, dx}.$$

Ponendo

$$\int \varphi_s^{(\chi)} dx = y_s^{(\chi)},$$

avremo

$$\lambda_p^{(\chi)} = \left[y_p^{(\chi)} - \mathrm{P}\left(\lambda_2^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}}, \lambda_3^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}}, \ldots, \lambda_{p-1}^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}} \right) \right] e^{y_1^{(\chi)}}.$$

Si ottengono quindi tutte le $\lambda_p^{(\chi)}$ espresse mediante le $y_s^{(\chi)}$ le quali non sono altro che integrali abeliani.

5. Diamo finalmente un teorema di cui avremo varie volte occasione di fare applicazioni:

Teorema III. – *Se la derivata sinistra* (*o destra*) *di una sostituzione abeliana sinistra* (*o destra*) *è permutabile con una sostituzione elementare* (vedi Preliminari art. 6) *costante, la sostituzione sarà abeliana apparente.*

Sia infatti S una sostituzione abeliana sinistra la cui derivata sinistra è permutabile con una sostituzione costante C. Posto

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = \mathrm{T},$$

dovremo avere

$$\mathrm{TC} = \mathrm{CT}.$$

Scrivendo C sotto la forma canonica avremo

$$\mathrm{C} = \mathrm{M}^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_\chi \, \mathrm{C}^{(\chi)}}} \right\} \mathrm{M},$$

ove

$$\mathrm{C}^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega^{(\chi)}, 0 & , \ldots, 0, 0 \\ 1 \quad , \omega^{(\chi)} & , \ldots, 0, 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 \quad , 0 & , \ldots, 1, \omega^{(\chi)} \end{pmatrix} \qquad (\omega^{(\chi)} \neq \omega^{(\chi')}),$$

quindi (vedi Lemmi 4° e 7° dei Preliminari)

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_\chi \, \mathrm{T}^{(\chi)}}} \right\} \mathrm{M},$$

essendo

$$\mathrm{T}^{(\chi)} = \begin{pmatrix} a_1^{(\chi)} & , 0 & , \ldots, 0 \\ a_2^{(\chi)} & , a_1^{(\chi)} & , \ldots, 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n_\chi}^{(\chi)} & , a_{n_\chi - 1}^{(\chi)} & , \ldots, a_1^{(\chi)} \end{pmatrix}$$

e le $a_i^{(\chi)}$ sono funzioni algebriche. A cagione del Teorema II sarà dunque S abeliana apparente.

Dal teorema precedente si deduce facilmente l'altro:

TEOREMA IV. – *Fra le sostituzioni abeliane non vi sono che quelle apparenti le quali trasformano un gruppo di sostituzioni costanti* (det 1), *fra le quali si trova una sostituzione elementare, in un gruppo isomorfo formato da sostituzioni pure costanti.*

Infatti sia S abeliana sinistra e permutabile con un gruppo di sostituzioni costanti. Se C e C_1 sono due sostituzioni dei gruppi e C è elementare, dovremo avere

$$S^{-1} CS = C_1 \tag{3}$$

ovvero

$$CS = SC_1,$$

e derivando rispetto alla variabile indipendente z

$$\frac{dS}{dz} = C \frac{dS}{dz} C^{-1}.$$

Ora per la (3) C e C_1 debbono avere gli stessi divisori elementari, quindi C_1 sarà una sostituzione elementare, onde pel teorema precedente S è abeliana apparente.

Reciprocamente abbiamo il

TEOREMA V. – *Presa una sostituzione abeliana apparente, si potranno sempre trovare due gruppi isomorfi di sostituzioni costanti trasformabili mediante essa l'uno nell'altro.*

Sia infatti una sostituzione abeliana apparente (sinistra) S, potremo sempre porre

$$dS = \prod_1^k{}_i \, T_i \, dy_i,$$

ove le T_i sono sostituzioni permutabili fra loro.

Se la sostituzione costante P è permutabile con tutte le sostituzioni T_i, avremo evidentemente

$$P \frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dx} P$$

ovvero, se il det P = 1,

$$\frac{d}{dx}(PS) = \frac{dS}{dx}.$$

Integrando otterremo

$$PS = SQ,$$

essendo Q costante. Quindi

$$S^{-1} PS = Q,$$

il che dimostra il teorema.

6. LEMMA V. - *Se due sostituzioni* T_1 *e* T_2 (som $= 0$) *funzioni di* x *sono fra loro permutabili qualunque siano i valori* (anche fra loro diversi) *che si attribuiscono ad* x *in* T_1 *e* T_2, *avremo che*

$$S_1 = \int_{x_0}^{x} T_1\, dx \quad , \quad S_2 = \int_{x_1}^{x} T_2\, dx$$

saranno fra loro permutabili, come pure queste sostituzioni saranno permutabili rispettivamente con T_2 *e* T_1.

Infatti da

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

si deduce, supponendo (det $T_1 \neq 0$)

$$T_2 = T_1^{-1} T_2 T_1 .$$

Poniamo in T_2 in luogo di x la y, e in T_1 in luogo di x, z, e consideriamo y e z come variabili indipendenti. Avremo integrando

$$\int_{y_1}^{y} T_2\, dy = T_1^{-1} \int_{y_1}^{y} T_2\, dy \cdot T_1 ,$$

onde

$$S_2(y) = T_1^{-1} S_2(y) \cdot T_1 ,$$

cioè

$$T_1 = S_2(y)\, T_1\, S_2^{-1}(y) ,$$

e integrando

$$\int_{z_0}^{z} T_1\, dz = S_2(y) \int_{z_0}^{z} T_1\, dz \cdot S_2^{-1}(y) ,$$

ovvero

$$S_1(z) = S_2(y)\, S_1(z)\, S_2^{-1}(y) ,$$

$$S_1(z)\, S_2(y) = S_2(y)\, S_1(z) ,$$

il che dimostra il lemma.

Ciò premesso dimostriamo il

TEOREMA VI. - *Se si ha una sostituzione abeliana apparente qualunque*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_k),$$

avremo

$$(4) \qquad W(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, W^{-1}(0, 0, \ldots, 0)\, W(z_1, z_2, \cdots, z_k) = W(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \cdots, y_k + z_k) .$$

Consideriamo infatti $y_1, y_2, \cdots, y_k$ come funzioni di x e $z_1, z_2, \cdots, z_k$ come funzioni di ξ. Supponiamo inoltre che per $x = x_0$ e $\xi = \xi_0$ le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ divengano rispettivamente eguali alle $z_1, z_2, \cdots, z_k$. Posto

$W(y_1, y_2, \cdots, y_k) = W_1$, $W(z_1, z_2, \cdots, z_k) = W_2$, avremo (supponendo per fissare le idee la sostituzione abeliana sinistra)

$$\frac{dW_1}{dx} = T' \quad , \quad \frac{dW_2}{d\xi} = T'',$$

$$W_1 = \int_{x_0}^{x} T'\, dx \cdot C \quad , \quad W_2 = \int_{\xi_0}^{\xi} T''\, dx \cdot C,$$

essendo C costante, ovvero, se

$$\int_{x_0}^{x} T'\, dx = S_1 \quad , \quad \int_{\xi_0}^{\xi} T''\, dx = S_2,$$

si avrà

$$W_1 W_2^{-1} = S_1 S_2^{-1}.$$

Ora T' e T'' sono fra loro permutabili, quindi, per il lemma precedente, saranno pure permutabili S_1 e S_2; e per conseguenza

$$W_1 W_2^{-1} = S_2^{-1} S_1.$$

Differenziando si otterrà

$$d(W_1 W_2^{-1}) = S_2^{-1} (dS_1 \cdot (dS_2)^{-1}) S_2,$$

e per la permutabilità

$$d(W_1 W_2^{-1}) = dS_1 (dS_2)^{-1}.$$

Ora

$$dS_1 = \prod_1^k{}_i\, T_i\, dy_i,$$

$$dS_2 = \prod_1^k{}_i\, T_i\, dz_i,$$

ove le T_i sono costanti, quindi

$$d(W_1 W_2^{-1}) = \prod_1^k T_i\, d(y_i - z_i) = dW_3,$$

ove

$$W_3 = W(y_1 - z_1, y_2 - z_2, \cdots, y_k - z_k).$$

Integrando otterremo

$$W_1 W_2^{-1} = W_3 \cdot C_1$$

essendo C_1 costante. E facendo $y_i = z_i$

$$W(0, 0, \cdots, 0) \cdot C_1 = 1,$$

onde

$$C_1 = W^{-1}(0, 0, \cdots, 0),$$

$$W(y_1, \cdots, y_k) W^{-1}(z_1, \cdots, z_k) = W(y_1 - z_1, \cdots, y_k - z_k) W^{-1}(0, \cdots, 0).$$

Ponendo in luogo di $y_1, \cdots, y_k$, le $y_1 + z_1, \cdots, y_k + z_k$, avremo

$$(5) \qquad W(y_1 + z_1, \cdots, y_k + z_k) = W(y_1, \cdots, y_k) W^{-1}(0, \cdots, 0) W(z_1, \cdots, z_k).$$

Dalla formula (5) si deducono le seguenti:

$$(6) \qquad W(y_1, y_2, \cdots, y_k) W^{-1}(z_1, \cdots, z_k) = W(y_1 - z_1, \cdots, y_k - z_k) W^{-1}(0, \cdots, 0),$$

$$(7) \qquad W(-y_1, -y_2, \cdots, -y_k) = W(0, \cdots, 0) W^{-1}(y_1, \cdots, y_k) W(0, \cdots, 0).$$

La formula (6) dà luogo al

TEOREMA VII. – *Se y_i e z_i sono integrali abeliani aventi le stesse costanti dei tagli, la sostituzione*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_k) W^{-1}(z_1, z_2, \cdots, z_k)$$

sarà monodroma.

7. Possiamo dare un'altra dimostrazione più semplice del teorema VI deducendola direttamente dalla proprietà stabilita al principio dell'Art. 2. Abbiamo cioè, se S è una sostituzione abeliana apparente,

$$S(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = S(y_1, y_2, \cdots, y_k) C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k),$$

e facendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) = S(0, 0, \cdots, 0) C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k),$$

d'onde

$$(8) \qquad C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) = S^{-1}(0, 0, \cdots, 0) S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k),$$

da cui segue

$$(4') \qquad S(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k)$$
$$= S(y_1, y_2, \cdots, y_k) S^{-1}(0, 0, \cdots, 0) S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$

che non è altro che la formola (4).

Se noi poniamo

$$(9) \qquad S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) S^{-1}(0, 0, \cdots, 0) = C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$$

avremo, scambiando nella (4') le y_i colle α_i,

$$(10) \qquad S(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) S(y_1, y_2, \cdots, y_k)$$

che può assumersi come la proprietà caratteristica delle sostituzioni abeliane apparenti destre (cfr. Art. 2). Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA VIII. – *Ogni integrale abeliano apparente destro è anche un integrale abeliano apparente sinistro e viceversa.*

Questo teorema rende dunque inutile la distinzione fra integrale abeliano apparente destro o sinistro. Se consideriamo però uno stesso integrale abeliano apparente come destro o sinistro, le costanti dei tagli non risultano le stesse. Supponiamo infatti che lungo un taglio le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ si accrescano delle quantità costanti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$; allora la costante del taglio, considerando S come una sostituzione abeliana sinistra, sarà $C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$; mentre se la consideriamo come una sostituzione abeliana destra, la costante del taglio sarà $C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$. Dalle (8) e (9) segue

$$C_1 = S(0, 0, \cdots, 0)\, C S^{-1}(0, 0, \cdots, 0)$$

d'onde

TEOREMA IX. – *Le costanti relative ad uno stesso taglio di un integrale apparente, secondoché lo riguardiamo come abeliano destro o sinistro, si ottengono l'una dall'altra mediante trasformazione per mezzo di una stessa sostituzione costante.*

Se nella (10), in luogo di $y_1, y_2, \cdots, y_k$, sostituiamo $y_1 + \beta_1, y_2 + \beta_2, \cdots, y_k + \beta_k$; e poniamo $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2, \cdots, \alpha_k + \beta_k = \gamma_k$, avremo

$$\begin{aligned} &S(y_1 + \gamma_1, y_2 + \gamma_2, \cdots, y_k + \gamma_k) \\ &= C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\, S(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, C(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k), \end{aligned}$$

il che ci dimostra che *ogni integrale abeliano apparente può considerarsi anche come un integrale abeliano doppio.*

È facile ottenere la relazione che passa fra la derivata destra e la derivata sinistra di un integrale abeliano apparente.

Considerando $y_1, y_2, \cdots, y_k$ come funzioni di z, dalle formule precedenti risulta subito

$$S(0, 0, \cdots, 0)\frac{Sd}{dz} = \frac{dS}{dz} S(0, 0, \cdots, 0).$$

8. Prendiamo una sostituzione abeliana apparente $W(y_1, y_2, \cdots, y_k)$. Noi potremo chiamare le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ gli *elementi fondamentali* della sostituzione apparente. In conseguenza del teorema I avremo che, se si porrà in luogo delle variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$ degli integrali di funzioni *monodrome* sopra una stessa superficie di RIEMANN, otterremo per W una sostituzione la cui derivata è monodroma sopra la superficie stessa di RIEMANN.

Potremo partendo da questa osservazione estendere facilmente il teorema III ottenendo la seguente proposizione:

TEOREMA X. – *Se una sostituzione monodroma sopra una superficie di* RIEMANN (som 0) *è permutabile con una sostituzione elementare costante, gli integrali destro e sinistro della sostituzione si otterramno sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente degli integrali di funzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN.

9. Consideriamo in particolare le sostituzioni del secondo ordine.

Un gruppo di sostituzioni fra loro permutabili (som o) avrà una delle due forme:

1ª) $$S^{-1}\begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ 0, & -a_1 \end{pmatrix} S, \ S^{-1}\begin{pmatrix} a_2, & 0 \\ 0, & -a_2 \end{pmatrix} S, \cdots, S^{-1}\begin{pmatrix} a_k, & 0 \\ 0, & -a_k \end{pmatrix} S,$$

2ª) $$S^{-1}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ b_1, & 0 \end{pmatrix} S, \ S^{-1}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ b_2, & 0 \end{pmatrix} S, \cdots, S^{-1}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ b_k, & 0 \end{pmatrix} S.$$

Quindi i differenziali di tutte le sostituzioni abeliane apparenti avranno una delle due forme seguenti:

1ª) $$S^{-1}\left\{\prod_1^k {}_i \begin{pmatrix} a_i, & 0 \\ 0, & -a_i \end{pmatrix} dy_i \right\} S = dW,$$

2ª) $$S^{-1}\left\{\prod_1^k {}_i \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ b_i, & 0 \end{pmatrix} dy_i \right\} S = dW,$$

ove le y_i sono integrali abeliani.

Per conseguenza

1ª) $$\frac{dW}{dx} = S^{-1}\begin{pmatrix} \varphi, & 0 \\ 0, & -\varphi \end{pmatrix} S,$$

2ª) $$\frac{dW}{dx} = S^{-1}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \varphi, & 0 \end{pmatrix} S,$$

denotando con φ una funzione algebrica, e perciò

1ª) $$W = S^{-1}\begin{pmatrix} e^y, & 0 \\ 0, & e^{-y} \end{pmatrix} S_1,$$

2ª) $$W = S^{-1}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ y, & 1 \end{pmatrix} S_1,$$

ove y è un integrale abeliano e le sostituzioni S e S_1 sono costanti.

§ 8. – Relazioni fra le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana.

1. Si consideri una sostituzione abeliana semplice definita su una superficie R di Riemann di genere p.

Eseguiamo sulla superficie i tagli normali. Riguardo al modo di eseguire questi tagli ci riferiremo all'opera già citata di C. Neumann (6).

Eseguiremo tre sistemi di tagli; i tagli a_i, b_i e c_i. Questi ultimi, a differenza di quanto fa il Neumann, li faremo partire da un punto O della superficie di Riemann fino a giungere ai tagli a_i. Finalmente eseguiremo un taglio l il quale partendo da O attraversi tutti i punti singolari della sostituzione abeliana e non tolga la connessione alla superficie di Riemann

(6) Vedi Neumann, op. cit., p. 175 sgg.

già sezionata mediante i tagli a_i, b_i, c_i. Se la sostituzione abeliana sarà di prima specie potremo fare a meno di eseguire il taglio l (vedi § 5).

Ciascun taglio b_i, avrà un nodo; ciascun taglio a_i avrà due nodi; questi due nodi divideranno il taglio in due parti distinte. Seguiteremo a chiamare l'una a_i, denoteremo l'altra con a'_i.

La fig. 5 ci dà la disposizione dei tagli. Le rive destre dei tagli sono disegnate con linee più sottili delle rive sinistre.

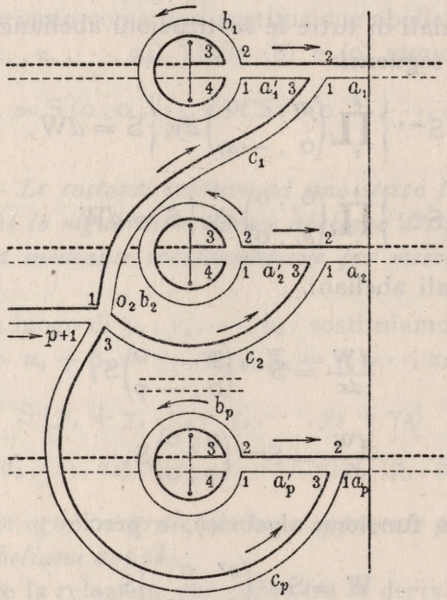


Fig. 5.

La sostituzione costante per cui devesi moltiplicare i valori della sostituzione abeliana lungo la riva sinistra di un taglio (o porzione di taglio) per ottenere i valori alla riva opposta (destra), denotiamola colla stessa lettera (maiuscola) con cui venne indicato il taglio (o porzione di taglio) e con gli stessi apici ed indici.

Ciò premesso esaminiamo uno dei nodi formato dall'incontro di un taglio a_i con un taglio b_i e consideriamo i quattro punti (vedi fig. 5) 1, 2, 3, 4 corrispondenti al nodo. Chiamiamo W la sostituzione abeliana, che ammetteremo essere abeliana sinistra, ed indichiamo con $W_1^{(i)}$, $W_2^{(i)}$, $W_3^{(i)}$, $W_4^{(i)}$ i valori di W nei quattro punti considerati del nodo (a_i, b_i). Avremo

$$W_1^{(i)} = W_2^{(i)} A'_i,$$

$$W_2^{(i)} = W_3^{(i)} B_i,$$

$$W_4^{(i)} = W_3^{(i)} A_i,$$

$$W_1^{(i)} = W_4^{(i)} B_i.$$

Ne segue che

$$W_1^{(i)} = W_3^{(i)} B_i A'_i ,$$

$$W_1^{(i)} = W_3^{(i)} A_i B_i ,$$

cioè

$$B_i A'_i = A_i B_i ,$$

(I) $$A'_i = B_i^{-1} A_i B_i .$$

Consideriamo ora il nodo formato da un taglio a_i con un taglio c_i e chiamiamo $W_1^{(i')}, W_2^{(i')}, W_3^{(i')}$ i valori di W nei tre punti 1 , 2 , 3 corrispondenti al nodo (a_i , c_i).

Avremo

$$W_1^{(i')} = W_2^{(i')} A_i ,$$

$$W_3^{(i')} = W_2^{(i')} A'_i ,$$

$$W_1^{(i')} = W_3^{(i')} C_i ,$$

onde

$$W_1^{(i')} = W_2^{(i')} A'_i C_i ,$$

e per conseguenza

$$A_i = A'_i C_i ,$$

vale a dire

(II) $$C_i = A_i'^{-1} A_i = B_i^{-1} A_i^{-1} B_i A_i .$$

Nel punto O, che è il nodo ove si incontrano tutti i p tagli c_i ed il taglio l, denotando con $W_1 , W_2 , W_3 , \cdots , W_{p+1}$ i valori di W nei punti $1 , 2 , \cdots , p + 1$ corrispondenti al nodo, avremo

$$W_2 = W_1 C_1 ,$$

$$W_3 = W_2 C_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W_{p+1} = W_p C_p ,$$

$$W_{p+1} = W_1 L .$$

Quindi

$$W_{p+1} = W_1 C_1 C_2 \cdots C_p ,$$

e

(III) $$L = C_1 C_2 \cdots C_p .$$

È facile vedere che se W invece di essere abeliana sinistra fosse abeliana destra, si sarebbero avute invece delle relazioni (I), (II) e (III), le altre

(I') $$A_i = B_i^{-1} A'_i B_i ,$$

(II') $$C_i = A_i A_i'^{-1} = B_i^{-1} A'_i B_i A_i'^{-1} ,$$

(III') $$L = C_p C_{p-1} \cdots C_2 C_1 .$$

Se ne deducono i teoremi:

TEOREMA I. – *Fra le costanti dei tagli e porzioni di tagli di una sostituzione abeliana semplice passano le relazioni seguenti:*

1° *Delle due sostituzioni costanti corrispondenti ad uno stesso taglio* a_i, *l'una è la trasformata dell'altra mediante la sostituzione costante del taglio* b_i.

2° *La sostituzione costante corrispondente ad un taglio* c_i *è il prodotto della sostituzione costante corrispondente ad una porzione del taglio* a_i, *moltiplicata per la inversa della sostituzione costante corrispondente all'altra porzione dello stesso taglio* a_i.

3° *La sostituzione costante corrispondente al taglio* l *adiacente ad* O *è il prodotto delle sostituzioni costanti dei tagli* c_i.

TEOREMA II. – *Se la sostituzione abeliana è di prima specie, il prodotto delle sostituzioni costanti dei tagli* c_i *è l'identità.*

TEOREMA III. – *Se le sostituzioni dei tagli* a_i, b_i *sono fra loro permutabili, le sostituzioni dei tagli* c_i *sono identità.*

2. Veniamo ora ad una proprietà relativa alle sostituzioni costanti dei tagli di una sostituzione abeliana, che ha molta importanza per ciò che seguirà.

TEOREMA IV. – *Se una sostituzione costante* (*det* $= 1$) *è permutabile colle costanti dei tagli di una sostituzione abeliana di prima specie, esisterà una sostituzione costante che sarà permutabile colla sostituzione algebrica derivata della sostituzione abeliana.*

Sia W la sostituzione abeliana (che supporremo essere abeliana sinistra) e denotiamo con S una sostituzione costante permutabile colle costanti dei tagli di W. Sia t un taglio qualunque della superficie di RIEMANN e T la sostituzione costante ad esso relativa. Se indichiamo con ρ e λ rispettivamente le rive destra e sinistra di t, avremo

$$W_\rho = W_\lambda \cdot T,$$

e per la permutabilità di S e T

$$ST = TS,$$

ossia

$$T = S^{-1} TS.$$

Consideriamo ora la sostituzione

$$W' = WS.$$

Lungo le due rive del taglio t avremo

$$W'_\rho = W_\rho S \quad , \quad W'_\lambda = W_\lambda S,$$

onde

$$W'_\rho = W_\lambda TS = W'_\lambda S^{-1} TS = W'_\lambda T.$$

Avremo dunque che anche W' sarà abeliana e avrà le costanti dei tagli eguali a quelle corrispondenti di W.

Per il teorema V^{bis} del § 5 segue quindi

$$W' = PW,$$

essendo P costante, ovvero

$$WS = PW.$$

Derivando avremo

$$\frac{dW}{dz} = P \frac{dW}{dz} P^{-1},$$

Il che dimostra il teorema.

Dal teorema III del paragrafo precedente e osservando che S e P debbono avere gli stessi divisori elementari, risulta quindi

TEOREMA V. – *Se una sostituzione costante elementare* ($det = 1$) *è permutabile colle costanti dei tagli di una sostituzione abeliana semplice, di prima specie, questa dovrà essere una sostituzione abeliana apparente.*

3. Passiamo ora ad estendere le considerazioni precedenti al caso di sostituzioni abeliane di seconda e di terza specie.

TEOREMA VI. – *Se le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana di seconda e di terza specie saranno permutabili con una stessa sostituzione elementare, la sostituzione abeliana si otterrà moltiplicando una sostituzione monodroma per una ottenuta sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente degli integrali di funzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN.

Infatti sia W la sostituzione abeliana (sinistra) e S la sostituzione elementare. Lungo le due rive λ, ρ di uno stesso taglio, avremo

$$W_\rho = W_\lambda T,$$

essendo T costante lungo il taglio.

Posto

$$W' = WS,$$

avremo facilmente

$$W'_\rho = W'_\lambda T.$$

Ne segue che W e W′ avranno le stesse costanti dei tagli, e quindi

$$W' W^{-1} = P,$$

essendo P monodroma (vedi teorema V, § 5°).

La equazione precedente può scriversi

$$WSW^{-1} = P;$$

quindi (§ 5°, art. 10) avremo

$$P = R^{-1} CR,$$

ove C è costante ed R è monodroma, onde

$$WSW^{-1} = R^{-1} CR,$$

$$RWS = CRW,$$

e C avrà gli stessi divisori elementari di S, quindi sarà una sostituzione elementare. Derivando si otterrà

$$\frac{d\,(\mathrm{RW})}{dz} = \mathrm{C}\,\frac{d\,(\mathrm{RW})}{dz}\,\mathrm{C}^{-1}.$$

Ora è facile riconoscere che $d\mathrm{RW}/dz$ sarà monodroma e poiché è permutabile con una sostituzione elementare C, avremo pel teorema VIII del paragrafo precedente che $\mathrm{V} = \mathrm{RW}$ si otterrà sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente gli integrali di funzioni monodrome, onde essendo

$$\mathrm{W} = \mathrm{VR}^{-1},$$

il teorema resta dimostrato.

Nota al § 6, Art. 2.

1. Supponiamo di avere una superficie chiusa R di genere p, cioè (secondo Klein) una superficie riducibile ad una sfera con p manichi. Supponiamo distesa sopra R una nuova superficie R′ connessa avente ν fogli. È evidente che potrà darsi che non esista nessun punto

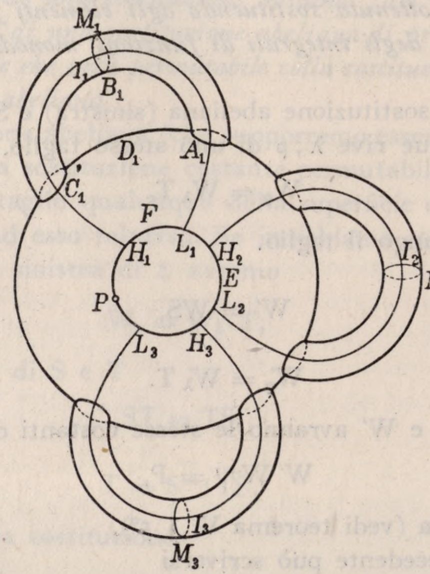


Fig. 6.

di diramazione fra i fogli, come potrà darsi invece che vi siano più punti di diramazione. Cominciamo dal primo caso. È facile capire come sia possibile la connessione fra i diversi fogli, benché manchino i punti di diramazione. Sia infatti M_1 un manico, sarà evidentemente possibile che due fogli si attraversino lungo l'intera linea $\mathrm{A}_1\ \mathrm{B}_1\ \mathrm{C}_1\ \mathrm{D}_1$; così un foglio è connesso con l'altro senza la esistenza di punti di diramazione. Questo stabilisce una differenza essenziale fra le superficie distese sopra una sfera e quelle distese invece sopra una superficie chiusa più volte connessa. Cerchiamo ora di determinare il genere p' della superficie R′ distesa sopra la superficie R.

Perciò supponiamo disposti tutti i manichi sopra un piano meridiano K della sfera. Tracciamo sulla sfera il punto P e poi eseguiamo due tagli in tutti i ν fogli: uno PEF ed un secondo simmetrico rispetto al piano meridiano K. Avremo così eseguito 1 *taglio* (Querschnitt) e $2\nu - 1$ *tagli rientranti* (Rückerschnitte) [7].

Eseguiamo ora un taglio in ogni manico che attraversi tutti i fogli. Avremo così eseguito $p\nu$ *tagli rientranti*. In ogni manico M_i facciamo i tagli $I_i H_i$, $I_i L_i$ e i simmetrici rispetto al piano K in tutti i fogli. Faremo così $4p\nu$ tagli. In tutto, non tenendo conto dei tagli rientranti, avremo eseguito $x = 4p\nu + 1$ tagli non rientranti. La superficie R′ risulta spezzata in

$$y = (2p + 2)\nu$$

pezzi semplicemente connessi. Quindi il genere cercato di R′ sarà

$$p' = \frac{x - y + 1}{2} = \frac{(4p\nu + 1) - (2p + 2)\nu + 1}{2} = (p - 1)\nu + 1. \tag{I}$$

Se dunque la superficie R è di genere 1, anche la superficie R′ sarà pure di genere 1 qualunque sia il valore di ν. Ciò risulta anche immediatamente osservando che se si ha una curva rientrante qualunque C, la quale taglia più volte sè stessa, come nella fig. 7, e si prende come la direttrice di un certo cilindro CD si ottiene una superficie connessa. Questa superficie si può piegare in modo da far coincidere fra loro le due curve C e D.

Si ottiene allora una superficie chiusa connessa R′ la quale può disporsi sopra un toro R in modo che risultino sovrapposti ν strati se $\nu - 1$ è il numero dei nodi della curva C ($\nu = 3$ nella figura). Inoltre mancano i punti di diramazione. È evidente ora che con due tagli si riduce subito la superficie ad essere formata da un pezzo solo semplicemente connesso. Infatti con un primo taglio la superficie R′ si può ridurre al cilindro CD e con un secondo taglio lungo una generatrice AB e dopo aver svolto il cilindro si può ridurre ad un rettangolo.

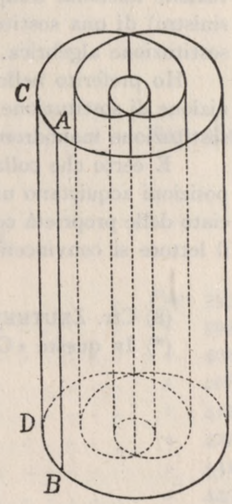


Fig. 7.

2. Consideriamo ora il secondo caso; cioè supponiamo che vi siano dei punti di diramazione. Siano essi in numero di l e supponiamo che in essi si scambino rispettivamente $m_1, m_2, \cdots, m_l$ fogli. Potremo sempre supporre che non si trovino mai due punti di diramazione l'uno sull'altro. Ammettiamo già eseguiti i tagli fatti nel caso precedente (vedi fig. 6). Sarà sempre possibile mediante altri *l tagli a forma di σ* (sigmaförmige Querschnitte), eseguiti in tutti i ν fogli e che non si incontrino fra loro, separare dal resto della superficie i punti di diramazione. In tal modo la superficie viene spezzata in

$$y' = y + \sum_1^l (\nu - m_i + 1)$$

parti semplicemente connesse. Mentre il numero totale dei tagli eseguiti (esclusi i tagli rientranti) sarà

$$x' = x + l\nu.$$

Il genere cercato della superficie sarà quindi

$$p' = \frac{x' - y' + 1}{2} = (p - 1)\nu + 1 + w, \tag{II}$$

(7) Cfr. Neumann, op. cit., p. 148, 168.

ove

$$2w = \sum_{1}^{l} (m_i - 1).$$

La formola (II) comprende la (I). Essa ci dà il genere di una superficie di RIEMANN distesa sopra un'altra superficie di RIEMANN in funzione del genere di questa, del numero dei fogli e dei punti di diramazione. Nel caso in cui si faccia $p = 0$ essa si riduce alla formula nota relativa al genere di una superficie di RIEMANN distesa sopra una sfera (8).

NOTA AI §§ 5, 6, 7, 8.

La Memoria precedente è la riproduzione integrale di quanto avevo scritto nel 1887. Nel pubblicare un breve estratto di essa senza dimostrazioni nel 1888 nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » (*), ho fatto per brevità una modificazione alla definizione di sostituzione abeliana semplice, chiamando sostituzione abeliana semplice l'integrale (destro o sinistro) di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN, anziché di una sostituzione algebrica.

Ho preferito nello stampare ora la Memoria completa di conservare la primitiva definizione di sostituzione abeliana, e ogni volta che ho parlato di sostituzione integrale di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN l'ho detto esplicitamente.

È certo che colla definizione adoperata nella Nota del Circolo di Palermo molte proposizioni acquistano una forma più semplice e si abbracciano in molti casi con un solo enunciato delle proprietà comuni alle due classi di sostituzioni; ma, per molte altre ragioni di cui il lettore si convincerà facilmente, è da preferirsi la definizione che ho conservata.

(8) Cfr. ZEUTHEN, Math. Annalen », Bd. III.

(*) In queste « Opere »: vol. primo, XX, pp. 351–355. [N. d. R.].

INDICE