

XXIX.

SUR LA THÉORIE DES VARIATIONS DES LATITUDES

« Vierteljahrschrift der Astr. Gesell. », Jahrgang 33, 1898, pp. 275–279.

J'ai l'honneur de présenter une Note préliminaire à un mémoire qui est sous presse dans le journal de Stockholm « *Acta Mathematica* » (*) et qui renferme le développement de quelques articles que j'ai publiés dans plusieurs revues sur la théorie des variations des latitudes.

Je ne ferai pas l'histoire de cette question qui est si importante dans l'astronomie et la mécanique céleste et qui est si connue. Dans le second volume de son traité de mécanique céleste TISSERAND a consacré deux chapitres à l'exposition particularisée des travaux déshormais classiques sur ce sujet. Ce sont les grands travaux de M. DARWIN, de M. SCHIAPARELLI, de M. HELMERT, de GYLDÉN, etc. En général les auteurs cherchent les causes des variations des latitudes géographiques dans les actions géologiques, l'élasticité, la plasticité terrestre, dans les explosions volcaniques, les troubles météorologiques, la production des glaces etc., c'est à dire en général ils attribuent le phénomène à des causes qui altèrent la distribution des masses sur la surface de la terre.

Mais outre les mouvements dont on vient de parler il y en a d'autres qui ont lieu à la surface terrestre, et d'autres aussi peuvent subsister à l'intérieur (dont la grandeur nous est inconnue) qui sans changer, à cause de leur nature cyclique, les axes d'inertie de la terre, ni la grandeur des moments d'inertie, ni la distribution des masses non plus, peuvent exercer une action puissante sur le déplacement des pôles de la terre.

Parmi ces mouvements on peut citer les courants marins constants, les courants atmosphériques, le mouvement continu des eaux des fleuves jusqu'à la mer, leur évaporation et la condensation successive de la vapeur sur les montagnes. Ces mouvements ne changent sensiblement la distribution des masses, ni la forme de la terre et l'on peut même dans une première approximation les regarder comme des mouvements stationnaires. Par rapport aux mouvements de la même nature qui peuvent exister à l'intérieur de la terre on ne saurait rien affirmer sur leur grandeur. On peut montrer d'une manière tout à fait élémentaire leur influence sur la rotation.

Le plan des recherches que je me suis proposées est justement d'étudier d'abord l'action toute seule des mouvements cycliques qui ne changent ni la

(*) In questo vol.: XXXI, pp. 452–573.

forme ni la distribution des masses sur la terre, et d'étudier après les perturbations produites par la plasticité et en général par les mouvements qui changent la forme et la constitution de la terre.

Je crois de cette manière d'avoir envisagé la question d'un point de vue nouveau.

Les mouvements cycliques dont nous avons parlé sont appréciables, du moins en partie, pour les habitants de la terre, mais un observateur qui aurait égard *seulement* à la variation de la forme de la terre et aux variations de sa constitution, c'est à dire la distribution des masses, ne s'en apercevrait pas.

C'est pourquoi par rapport à ses observations il pourrait les appeler, en suivant une locution très-heureuse introduite par HERTZ, des *mouvements cachés*.

Nous arrivons par là à une liaison entre les recherches dont nous parlons et les idées imaginées par HERTZ en systématisant celles de HELMHOLTZ et de MAXWELL, et dont la base est la théorie des mouvements cycliques.

Rappelons à ce propos la pensée fondamentale développée par HERTZ dans son dernier ouvrage. Il dit que la seule loi qui gouverne tous les phénomènes naturels est la loi d'inertie, entendue dans un sens plus général que celui attaché à cette loi par NEWTON. C'est la loi d'inertie généralisée à tout système matériel soumis à des liaisons quelconques. Cette loi subsiste pour l'ensemble complet constitué des masses que nous envisageons et d'autres qui nous sont cachées. En examinant les premières il peut paraître que leurs mouvements ne suivent pas la loi d'inertie, mais la loi ressort lorsqu'on envisage les unes et les autres.

Tandis que dans la mécanique classique si la loi d'inertie n'est pas vérifiée il faut chercher les causes externes ou les forces qui produisent les altérations de l'état du corps, en suivant l'idée de HERTZ il faut chercher des mouvements cachés.

Voyons maintenant comment on peut présenter la question de la variation des latitudes: Un corps (la terre) ne suit pas les loi d'EULER de la rotation libre d'un corps rigide; comment on peut expliquer cet éloignement de la loi d'inertie? car au fond les lois d'EULER ne représentent que la loi d'inertie.

Il est évident qu'une solution fondée sur l'existence des mouvements cycliques dont nous avons parlé répond très-bien aux idées de HERTZ que nous avons indiquées. Nous dirons à ce propos qu'on peut démontrer que *toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes cycliques qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps*.

En suivant les idées qu'on vient d'exposer j'ai commencé l'étude en partant de l'hypothèse plus simple que les mouvements internes soient stationnaires. En remarquant que par la seule inertie ils ne pourraient pas se conserver en général de cette nature, on peut chercher les actions mutuelles que les mouvements cycliques et le mouvement de rotation exercent entre eux.

On arrive par là à une question très-générale et on voit bien aisément qu'il est avantageux de se poser à ce point de vue dans la question du mouvement terrestre, car on peut pousser la recherche jusqu'aux réactions exercées par la rotation sur le mouvement interne.

Je vais donner en peu de mots une idée des résultats. Je ferai usage de la terminologie de HELMHOLTZ. Les coordonnées indépendentes d'un système peuvent être classées en deux catégories: les coordonnées cycliques et les paramètres. Les premières existent dans un système lorsqu'il y a des mouvements possibles qui n'altèrent pas la distribution des densités et qui produisent un échange cyclique des masses. Un mouvement est dit cyclique lorsqu'on peut se borner à considérer dans l'expression de la force vive les termes qui dépendent seulement des intensités cycliques. Il est évident qu'un mouvement rigoureusement cyclique n'existera que si tous les paramètres seront constants.

Cela posé envisageons un système dont les liaisons n'empêchent pas la rotation autour d'un point. Les variables qui déterminent sa configuration seront, outre celles qui définissent la position variable d'un système d'axes ayant l'origine dans le point fixe, un certain nombre de coordonnées cycliques et de paramètres. Nous supposerons que les coordonnées cycliques et les paramètres suffisent pour définir le mouvement relatif par rapport aux axes. Nous regarderons ce mouvement comme le mouvement interne du système et nous supposerons qu'il soit cyclique.

Faisons d'abord l'hypothèse que les axes soient fixes et que les paramètres soient constants. Si on abandonne le système à son inertie les moments cycliques et par conséquent les intensités cycliques seront des quantités constantes. C'est pourquoi dans ce cas le *mouvement sera dans le même temps adiabatique et isocyclique.*

Supposons maintenant que les axes puissent tourner librement et le mouvement interne soit maintenu isocyclique, les paramètres étant constants. C'est le cas d'un système dans lequel existe un mouvement interne stationnaire. Alors si le système n'est soumis à aucun couple de rotation *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps représentables par des fonctions Jacobiennes.*

On peut demander dans ce cas *s'il est nécessaire des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne.* On trouve qu'en général elles sont nécessaires et qu'on peut en déterminer les expressions par des fonctions elliptiques du temps.

La nécessité des forces dont nous venons de parler prouve que *de la même manière que le mouvement interne altère la rotation, celle-ci a en général une influence sur les mouvements internes.* C'est pourquoi on peut se poser la question suivante: *A l'intérieur d'un système qui peut tourner autour d'un point fixe et qui est abandonné à son inertie existent des mouvements cycliques quelconques (les paramètres étant constants). Comment a lieu la rotation et quel-*

les lois suivent les intensités cycliques, à cause des actions mutuelles que ces mouvements exercent entre eux ?

Cette question, qu'on peut appeler le problème général du *mouvement adiabatique*, paraît au premier abord très-compiquée, car on peut imaginer les mouvements cycliques internes d'une manière tout à fait arbitraire. Cependant on peut la résoudre complètement en employant un théorème par lequel on ramène ce cas à celui d'un mouvement isocyclique, de manière que même dans ce cas *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes meubles forment avec les axes fixes s'expriment par des fonctions Jacobiennes. En outre les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.* Le problème peut être aussi généralisé en regardant comme isocyclique une partie seulement des mouvements internes et en supposant que les forces correspondantes aux autres coordonnées cycliques soient nulles, et la solution s'obtient toujours de la même manière.

On voit par là que le champ des problèmes sur la mécanique des systèmes d'où ressortent les fonctions elliptiques et Jacobiennes est beaucoup plus large que celui compris dans les recherches classiques de JACOBI, car il embrasse le problème général du mouvement adiabatique et isocyclique d'un système quelconque.

Pour les applications au mouvement de la terre il faut commencer par déduire de la théorie générale des propriétés des rotations permanentes, de leur stabilité, des oscillations du pôle autour de ses positions stables et des perturbations correspondantes de la période Eulerienne, dues à l'existence des mouvements internes. Il faut aussi résoudre le problème de déterminer les mouvements internes étant donné d'une manière arbitraire le mouvement du pôle.

On peut après aborder par des calculs approximatifs la question de déterminer les mouvements internes cycliques qui correspondent aux mouvements harmoniques découverts par M. CHANDLER dont les périodes sont d'environ 430 jours et d'un an. On tire de là quelques théorèmes généraux qui donnent les propriétés fondamentales de ces mouvements. Je remarquerai seulement que par rapport à la période annuelle, l'axe de couple de quantité de mouvement correspondant oscille de manière que la projection sur l'équateur de son extrémité (l'origine étant au centre de la terre) décrit une ellipse dont j'ai calculé la grandeur des axes et dont le grand axe est situé dans le méridien ayant la longitude de 45° (par rapport au méridien de Greenwich), c'est à dire dans le méridien qui passe au milieu de l'Océan Atlantique.

Enfin j'ai cherché de donner un aperçu des perturbations qu'on a dans les lois dont je viens de parler lorsqu'on introduit l'hypothèse de la plasticité terrestre. Cette étude dans mon mémoire est à peine ébauchée, c'est pourquoi j'espère de pouvoir continuer dans ces recherches et de pouvoir exposer dans un autre mémoire des nouvelles études dans cette direction ainsi que dans l'hypothèse générale des mouvements cycliques lorsque les paramètres ne sont pas constants et de pouvoir approfondir les applications de ces recherches.